

Δυναμική ενέργεια

Είδαμε την περασμένη φορά ότι για συντηρητικές δυνάμεις μπορούμε να ορίσουμε μια νέα συνάρτηση, τη συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας σύμφωνα με τον τύπο

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

Από αυτό τον ορισμό φαίνεται αμέσως ότι όταν η γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας $U(x)$ έχει μέγιστο ή ελάχιστο, τότε η παράγωγος της είναι μηδέν, που σημαίνει ότι η δύναμη $F(x)$ είναι μηδέν δηλαδή έχουμε ισορροπία

Παράδειγμα:

Η δυναμική ενέργεια κάποιας δύναμης που δρα σε μια διάσταση δίνεται από τη σχέση

$$U(x) = ce^{-bx^2}$$

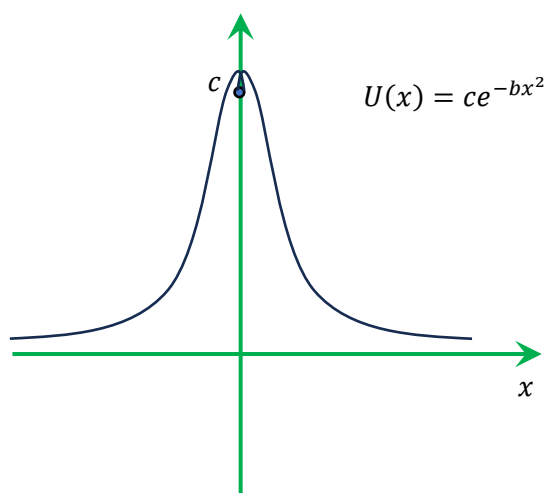
όπου c και b σταθερές μεγαλύτερες του μηδενός. (α) Να βρεθεί η δύναμη $F(x)$. (β) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις $U(x)$ και $F(x)$ και να ερμηνευτεί η μεταξύ τους σχέση.

Λύση

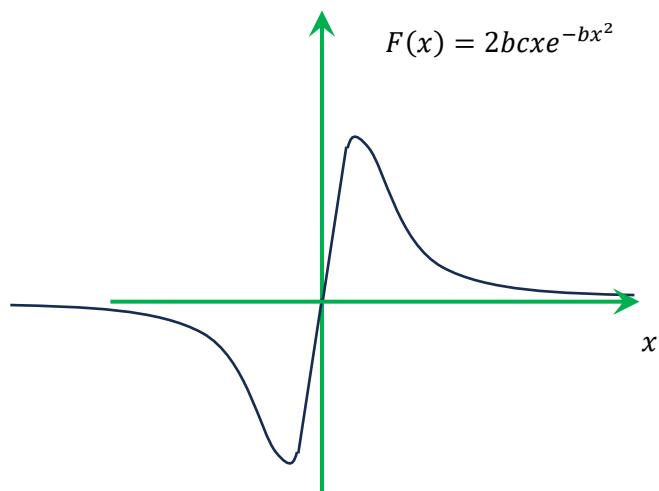
(α) από τον ορισμό της δυναμικής ενέργειας έχουμε

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = -\frac{d(ce^{-bx^2})}{dx} = 2bcxe^{-bx^2}$$

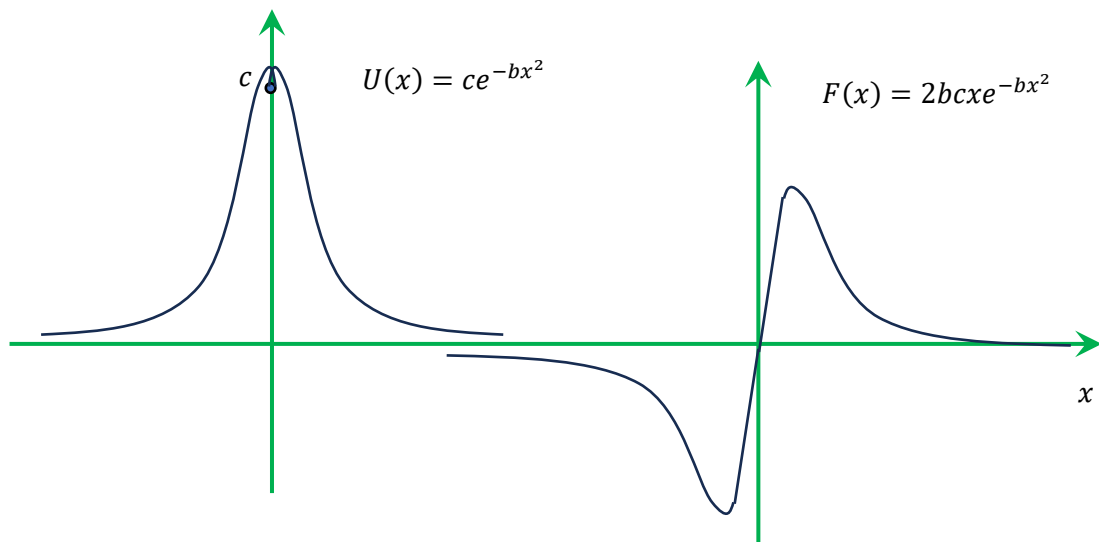
(β) για πρέπει να κάνουμε μια ποιοτική γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας. Για θετικά x το e^{-x^2} είναι παρόμοιο με το e^{-x} και έτσι περιμένουμε μια φθίνουσα γραφική παράσταση. Όμως για $x < 0$ η συνάντηση είναι συμμετρική και άρα θα μοιάζει κάπως έτσι



Όσον αφορά τη δύναμη, λόγω του όρου x , αλλάζουν δυο πράγματα, πρώτον έχουμε μια ρίζα στο μηδέν και δεύτερον η συνάρτηση γίνεται περιττή. Και άρα θα μοιάζει κάπως έτσι

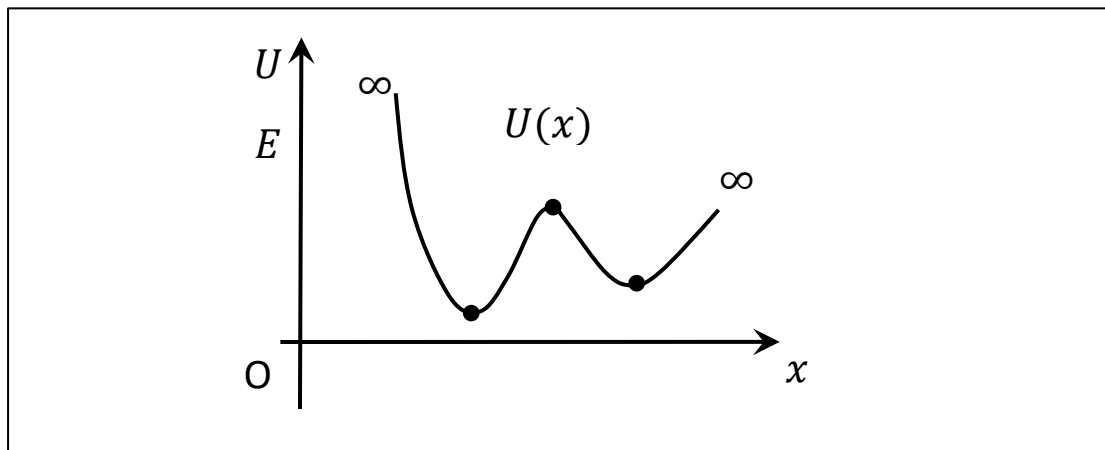


Οι δυο γραφικές φαίνονται μαζί στο παρακάτω σχήμα θα βλέπουμε ότι μπορούν να εξηγηθούν αν θεωρήσουμε ένα σώμα το οποίο κινείται από αριστερά προς τα δεξιά προσπαθώντας να υπερ-νικήσει το μέγιστο της ενέργειας. Αρχικά η δύναμη αντιτίθεται σε αυτό άρα είναι αρνητική, φτάνει σε μια μέγιστη αρνητική στο σημείο όπου η κλίση της U είναι μέγιστη, μηδενίζεται στην κορυφή και μετά γίνεται θετική στην κατηφόρα, κάτι το οποίο είναι σύμφωνα με την καθημερινή μας εμπειρία όταν προσπαθούμε να ανέβουμε σε έναν λόφο.

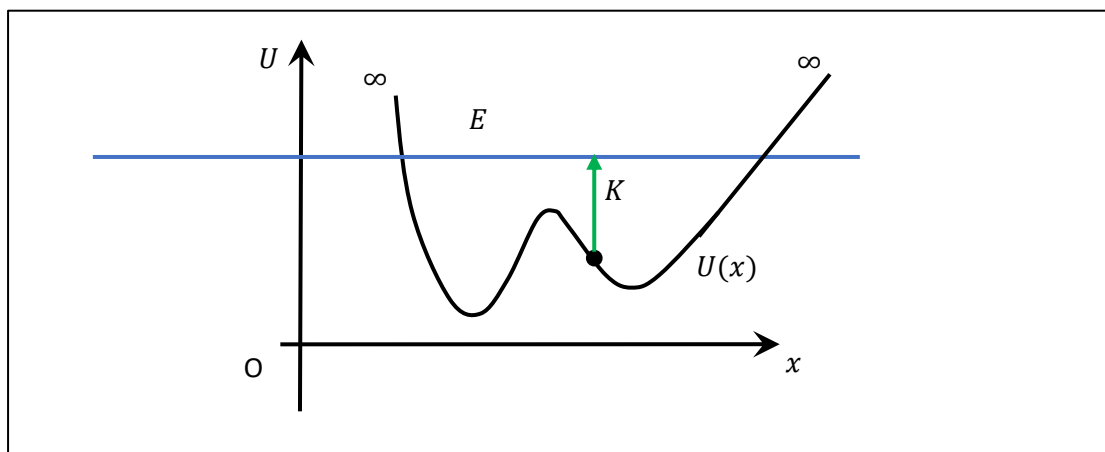


Δυναμική ενέργεια και σημεία ισορροπίας - Δέσμιες τροχιές

Έστω τυχαία συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας όπως στο παρακάτω σχήμα. Στα ακρότατα έχουμε τα σημεία ισορροπίας δηλαδή εκεί όπου έχουμε μέγιστο ή ελάχιστο η δύναμη μηδενίζεται άρα εξ ορισμού είναι σημείο ισορροπίας. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε 3 τέτοια σημεία



Ένα πλεονέκτημα των συντηρητικών δυνάμεων είναι ότι συνολική μηχανική διατηρείται που σημαίνει ότι είναι σταθερή. Έστω ότι ξέρουμε την τιμή E αυτής της μηχανικής ενέργειας $E = K + U$ (κινητική συν δυναμική) και πηγαίνουμε πάνω στο σχήμα και την σχεδιάζουμε. Αφού από το ΑΔΕΜ, η E είναι σταθερή, τότε θα αναπαρίσταται με μια οριζόντια ευθεία.

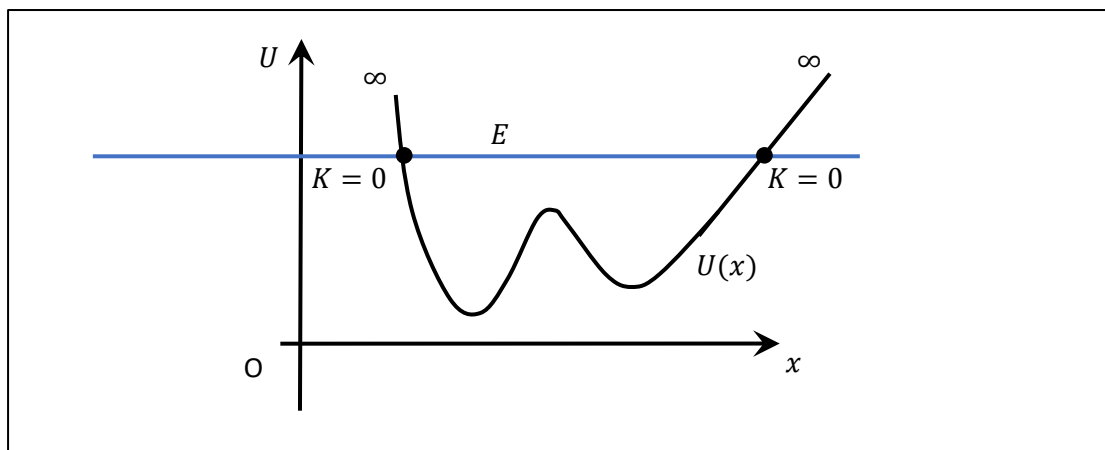


Επειδή $K = E - U$ τότε για ένα τυχαίο σημείο όπως αυτό που δείχνουμε επάνω στη γραφική παράσταση της $U(x)$, η κινητική ενέργεια ισούται με το με το βέλος από το σημείο μέχρι και την ευθεία της E . Επομένως μπορούμε να πούμε για την κινητική ότι μεγιστοποιείται όταν οι δυναμική ελαχιστοποιείται δηλαδή όταν βρισκόμαστε στα ελάχιστα της αρχικής παράστασης.

Επίσης στα σημεία όπου $U = E$ όπως τα δυο που δείχνουμε στο παρακάτω σχήμα, η κινητική ενέργεια μηδενίζεται. Τα σημεία αυτά λέγονται σημεία αναστροφής γιατί η ταχύτητα εκεί μηδενίζεται αλλά αμέσως μετά αλλάζει πρόσημο. Αυτό γίνεται λόγω του τύπου

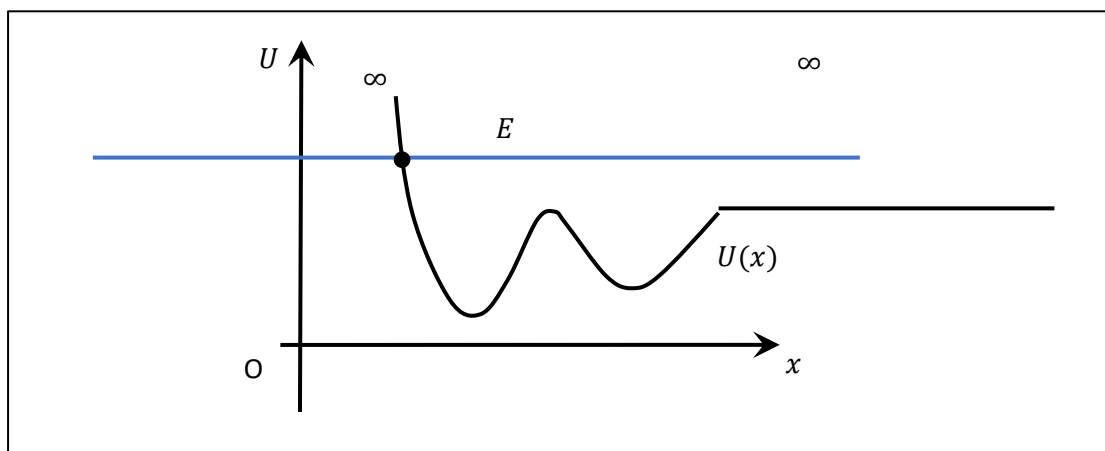
$$F = -dU/dx$$

Που μας λέει πραγματικά ότι δύναμη έχει αντίθετη πρόσφατη κλίση κι έτσι στο δεξί σημείο αναστροφής η δύναμη είναι προς τα αριστερά ενώ στο αριστερό σημείο στροφής ίδιο μήνα προς τα δεξιά. Έτσι η δύναμη είναι τέτοιας φοράς ώστε πάντα στο σημείο αναστροφής να αλλάζει πρόσημο στην ταχύτητα

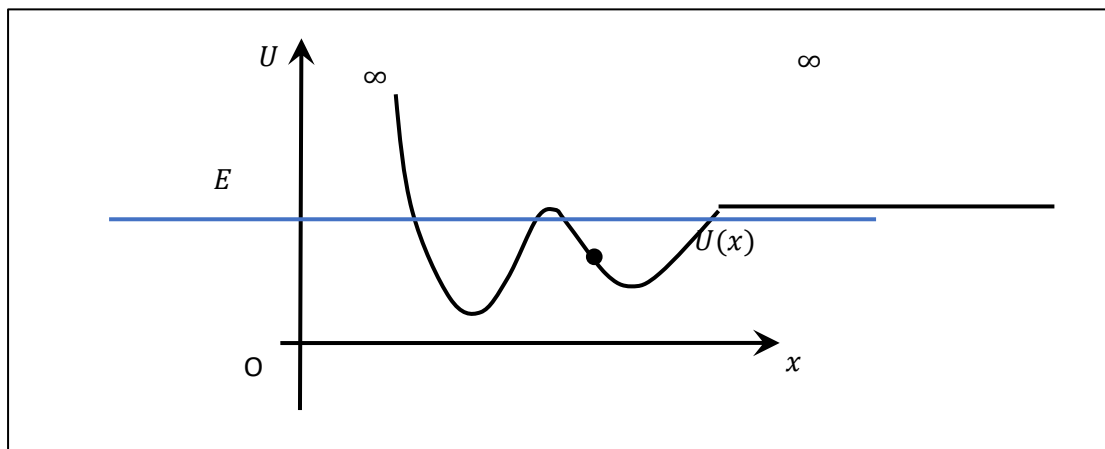


Όταν υπάρχουν 2 σημεία αναστροφής όπως στο παραπάνω σχήμα τότε το κινητό παγιδεύεται ανάμεσα από αυτά τα 2 σημεία και η τροχιά λέγεται δέσμιο. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις όπως στο παρακάτω σχήμα όπου μπορεί να έχουμε ένα σημείο αναστροφής κι έτσι το κινητό να καταλήγει στο άπειρο χωρίς να γυρνάει ποτέ πίσω

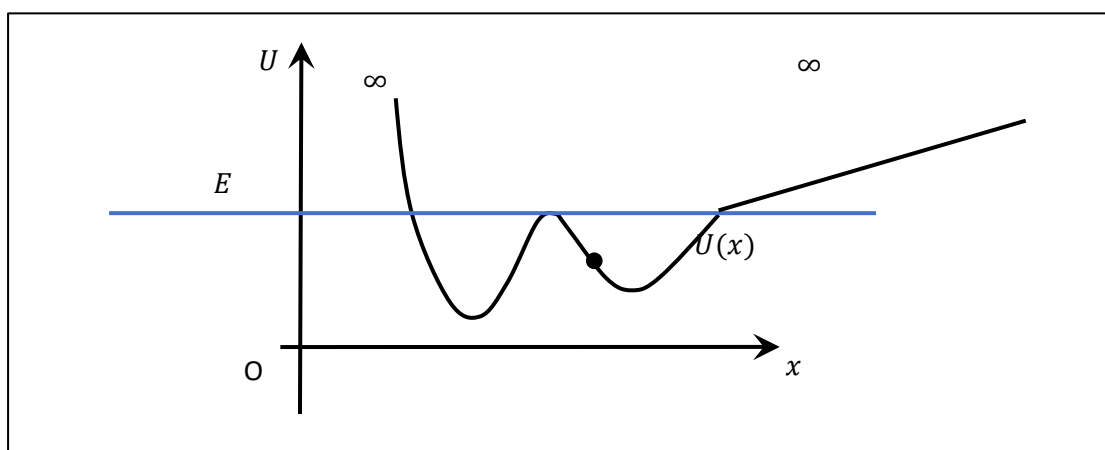
Δηλαδή εάν εκτοξεύσουμε ένα σώμα προς τα αριστερά στο παρακάτω σχήμα, τότε στο σημείο αναστροφής αυτό θα ανακλαστεί και θα φύγει προς τα δεξιά και επειδή στο άπειρο υπάρχει μια σταθερή κινητική ενέργεια (διαφορά καμπύλης $U(x)$ με την οριζόντια γραμμή E , τότε το σώμα θα ταξιδεύει με ΕΟΚ προς το άπειρο. Ομοίως αν ωθήσουμε ένα σώμα προς τα δεξιά, τότε αυτό δεν θα συναντήσει πουθενά σημείο αναστροφής και έτσι θα φτάσει κάποια στιγμή στο σημείο εκείνο όπου η κινητική είναι σταθερή και θα φύγει και αυτό προς το άπειρο με ΕΟΚ



Μπορεί η παραπάνω $U(x)$ να δώσει δέσμιες τροχιές; Ναι, αρκεί να χαμηλώσουμε την τιμή της E . Π.χ. Στην παρακάτω γραφική παράσταση, με την ίδια $U(x)$ και χαμηλότερη E , έχουμε δυο δέσμιες τροχιές.



Θεωρήστε τώρα την οριακή περίπτωση όπου το έψιλον εφάπτεται του μέγιστου τις γραφικές παραστάσεις. Εάν αφήσουμε το κινητό εκεί στο μέγιστο, τότε εκεί δεν υπάρχει δύναμη και άρα είναι σημείο ισορροπίας αλλά η παραμικρή διαταραχή θα το επιταχύνει είτε προς τα δεξιά είτε προς τα αριστερά και θα φύγει από κει. Αυτά τα σημεία λέγονται σημεία ασταθούς ισορροπίας



Σε αντίθεση, όταν το κινητό βρίσκεται σε ελάχιστο της δυναμικής ενέργειας όπως στο παρακάτω σχήμα και η E είναι περίπου ίση με την $U(x)$, τότε το κινητό παγιδεύεται σε αυτό το σημείο. Έτσι το σημείο αυτό λέγεται σημείο ευσταθούς ισορροπίας.

