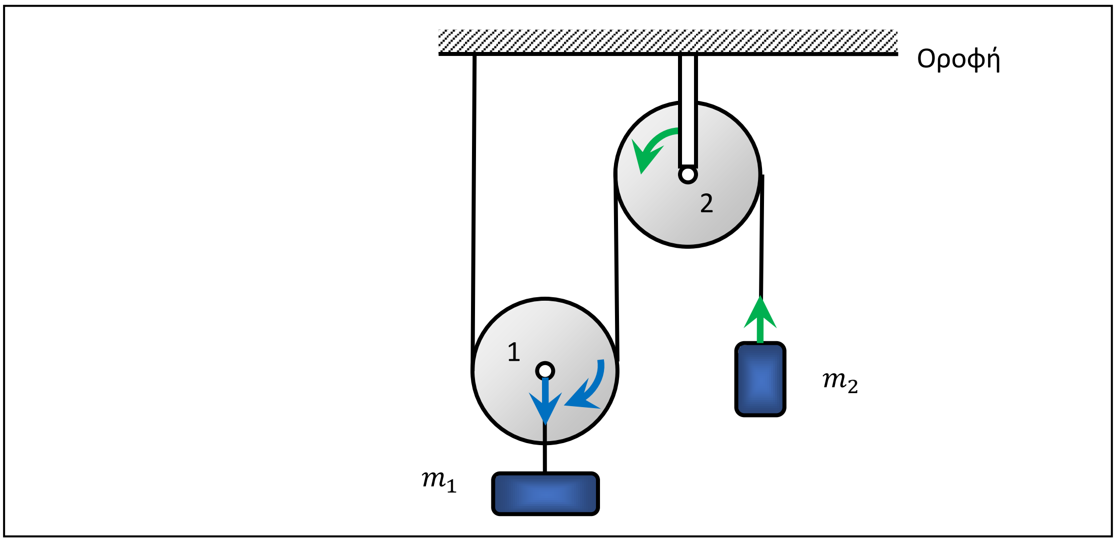
Παράδειγμα 2

Στο παρακάτω σχήμα οι τροχαλίες είναι ιδανικές. Εάν $m_1 = 20\ kg$ και $m_2 = 8\ kg$, Να βρεθεί η επιτάχυνση της μάζας m_2. Έστω $g = 10\ ms^{-2}$ για ευκολία.



<u>Λύση</u>:

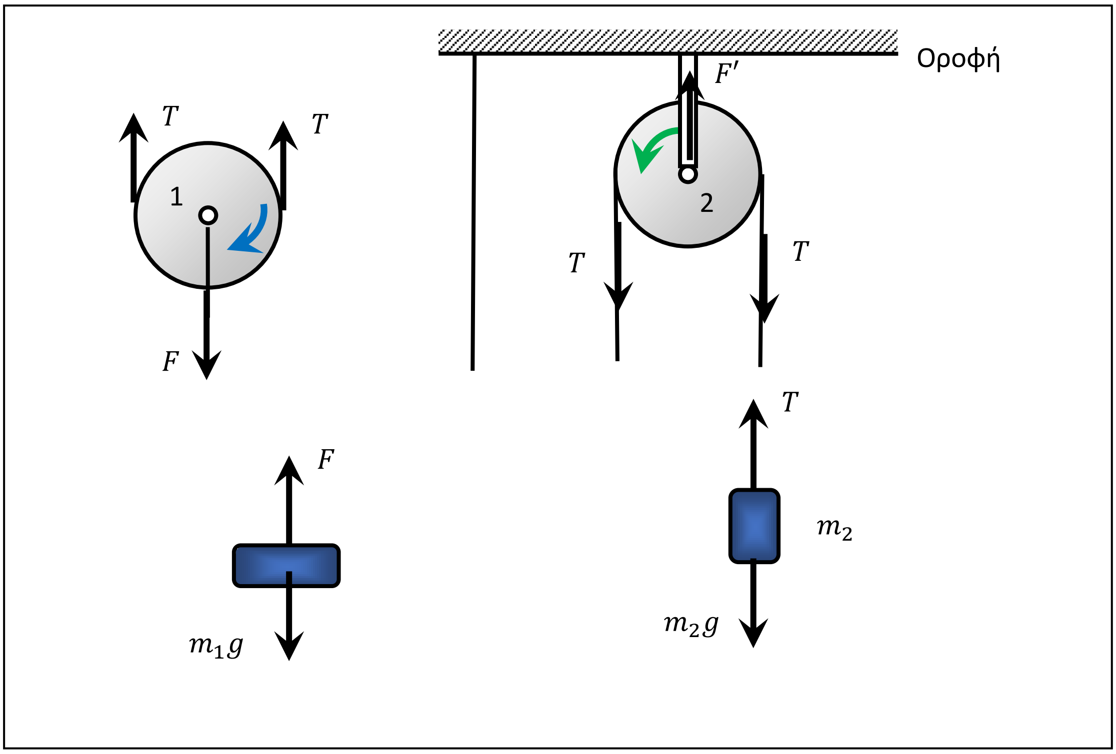
Οι δυνάμεις του προβλήματος είναι οι εξής

T τάση του νήματος παντού σταθερή κατά μήκος του νήματος

F δύναμη που τραβάει η τροχαλία 1 τη μάζα 1

F' δύναμη από την οροφή

τα βάρη $m_1 g$ και $m_2 g$

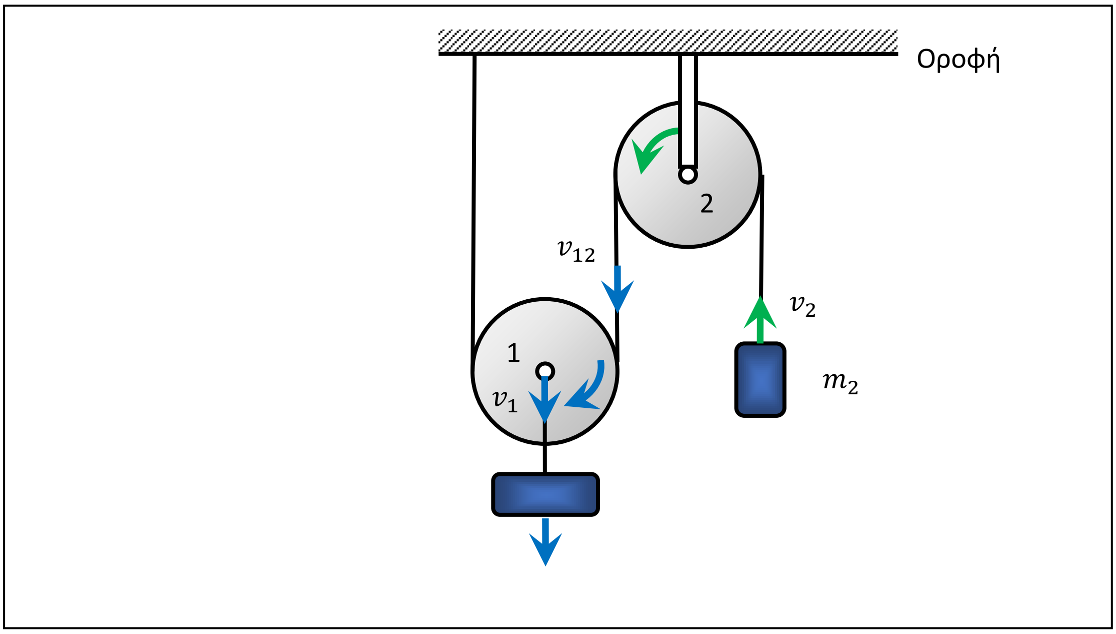


Τροχαλία 1 ιδανική και άρα αβαρής που σημαίνει

$$\Sigma F = ma = 0$$

$$2T - F = 0 => F = 2T$$

Οι ταχύτητες του προβλήματος είναι οι εξής



Έστω v_1 η ταχύτητα της μάζας 1, τότε το κέντρο της τροχαλίας 1 κινείται επίσης με v_1 ενώ η ταχύτητα

$$v_{12} = 2v_1$$

οπότε η ταχύτητα της μάζας 2 είναι ίση με

$$v_2 = v_{12} = 2v_1$$

Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο,

$$\frac{dv_2}{dt} = 2\frac{dv_1}{dt}$$

βρίσκουμε για τις επιταχύνσεις a_1 και a_2 των δυο μαζών

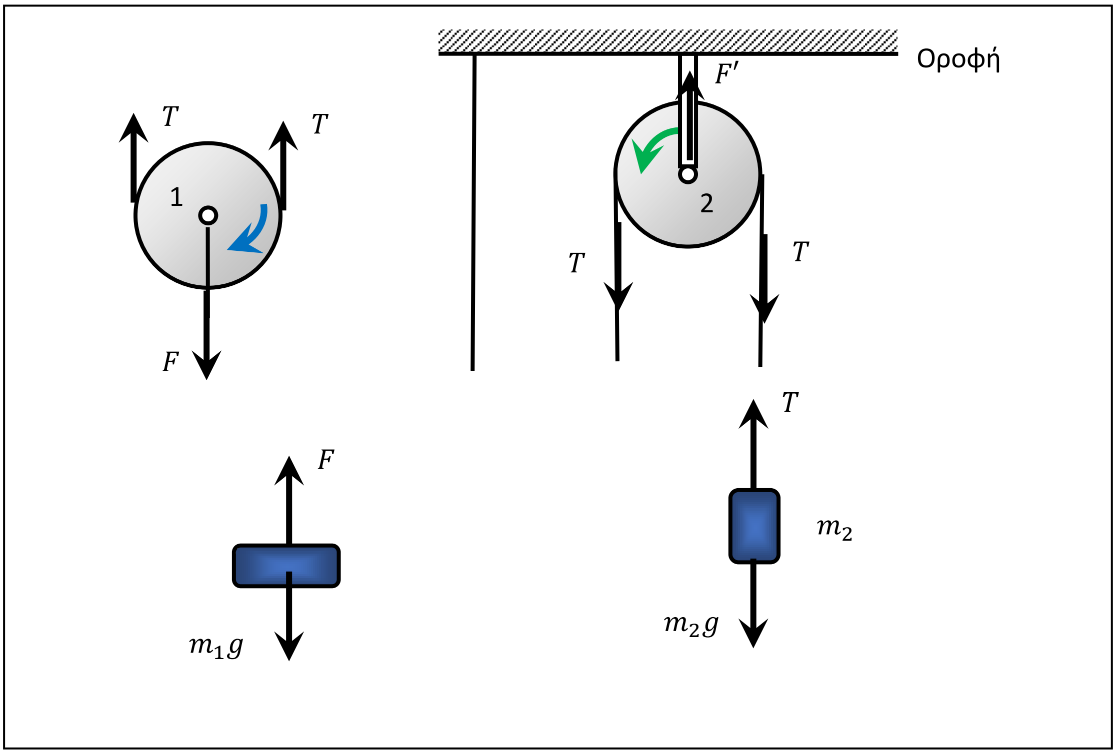
$$a_2 = 2a_1$$

Για να βρούμε τις επιταχύνσεις, γράφουμε τον δεύτερο νόμο του νεύτωνα για το κάθε σώμα ξεχωριστά.

$$\Sigma F_1 = m_1 a_1 => -F + m_1 g = m_1 a_1$$

$$\Sigma F_2 = m_1 a_2 => T - m_2 g = m_2 a_2$$

Θεωρώ θετική τη φορά τη φορά μετακίνησης του νήματος άρα δεν υπάρχουν άξονες χ και ψ και εφόσον δέχτηκα τις 2 επιταχύνσεις να έχουν το ίδιο πρόσημο, οι δυνάμεις κατά μήκος της κίνησης είναι θετικές ενώ οι δυνάμεις αντίθετα με την κίνηση είναι αρνητικές.



$$-2T + m_1 g = m_1 a_1$$

$$T - m_2 g = m_2 a_2$$

$$a_2 = 2a_1$$

Αντικαθιστούμε την τρίτη στη δεύτερη

$$-2T + m_1 g = m_1 a_1$$

$$2T - 2m_2 g = 4m_2 a_1$$

Πολλαπλασιάζω και τη δεύτερη με 1 2 ούτως ώστε να απαλειφθούν οι δυνάμεις του νήματος, και προσθέτω κατά μέλη

$$(4m_2 + m_1)a_1 = (m_1 - 2m_2)g$$

ΚΕΦ 5 ΟΡΜΗ – ΩΘΗΣΗ

Ορμή

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Μπορούμε να γράψουμε το δεύτερο νόμο του νεύτωνα με τη βοήθεια της ορμής ως εξής

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Άλγη αυτός είναι ο ναυτικός νόμος δεύτερος νόμος του νεύτωνα και είναι πιο γενικός γιατί ισχύει και για συστήματα μεταβαλλόμενης μάζας. Επίσης από αυτό το νόμο διαφαίνεται η αρχή διατήρησης της ορμής κατά την οποία εάν δεν υπάρχουν δυνάμεις στο σώμα, δηλαδή $\Sigma\vec{F} = 0$ τότε και η χρονική παράγωγος της ορμής μηδενίζεται και άρα η ορμή είναι σταθερή

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι περιπτώσεις όπου έχουμε στιγμιαία δύναμη για μικρό χρονικό διάστημα Δt

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

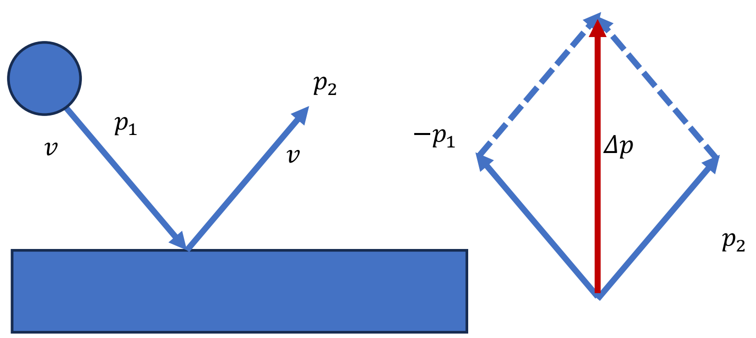
$\vec{p}_1, \vec{p}_2$ Οι ορμές πριν και μετά την εφαρμογή της στιγμιαίας δύναμης

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{F}\Delta t$$

Λέγε επί ο πολλαπλασιασμός αριθμού επί διάνυσμα μου δίνει ομόρροπο διάνυσμα

$$\Delta\vec{p} \,//\, \vec{F}$$

Παράδειγμα , σφαίρα που ανακλάται επάνω σε επίπεδη επιφάνεια



Όντως το $\Delta\vec{p}$ μου δείχνει την κατεύθυνση της κάθετης δύναμης. Υποθέτω ότι δεν υπάρχουν τριβές εφόσον το μέτρο της ταχύτητας δεν έχει αλλάξει άρα πρόκειται για τελείως ελαστική κρούση

Το $\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$ ονομάζεται *ώθηση*. Το συμβολίζουμε με Ω

$$\vec{\Omega} = \Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$$

Για μη σταθερή δύναμη που μεταβάλλεται με τον χρόνο

$$d\vec{\Omega} = \vec{F}dt$$

$$\vec{\Omega} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt$$

Παράδειγμα. Αρμονικός ταλαντωτής σταθεράς ελατηρίου k κινείται με απομάκρυνση που δίνεται από την

$$x = x_0 cos\omega t$$

να βρεθεί η ώθηση της δύναμης του ελατηρίου από χρόνο μηδέν έως και χρόνο ενός τετάρτου περιόδου

Λύση:

Η δύναμη του ελατηρίου είναι ίση με

$$F = -kx = -kx_0 cos\omega t$$

Η ώθηση για το δεδομένο χρονικό διάστημα είναι ίση με

$$\Omega = -kx_0 \int_0^{\frac{T}{4}} cos(\omega t)\, dt = -\frac{1}{\omega} kx_0 \int_0^{T/4} cos(\omega t)\, d(\omega t)$$

$$\Omega = -\frac{kx_0}{\omega} sin\omega t|_{t=0}^{\frac{T}{4}} = -\frac{kx_0}{\omega} sin\omega T/2$$

$$\Omega = -\frac{kx_0}{\omega} sin\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4} = -\frac{kx_0}{\omega}\sin\frac{\pi}{2} = -\frac{kx_0}{\omega}$$