Τετάρτη, 2 Οκτωβρίου 2024 08:58

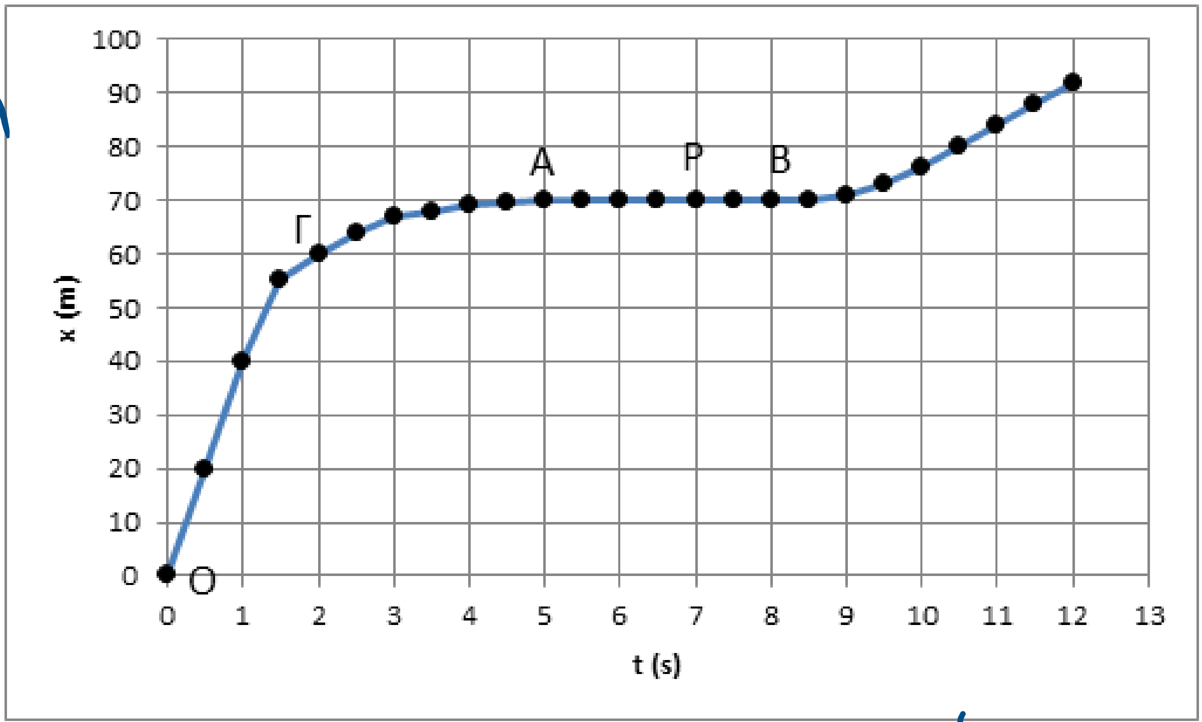
Κεφ 1.
Κίνηση σε ευθεία
υλικό σημείο

Στιγμιαία ταχύτητα

Στιγμιαία ταχύτητα

$υ = x'(t)$

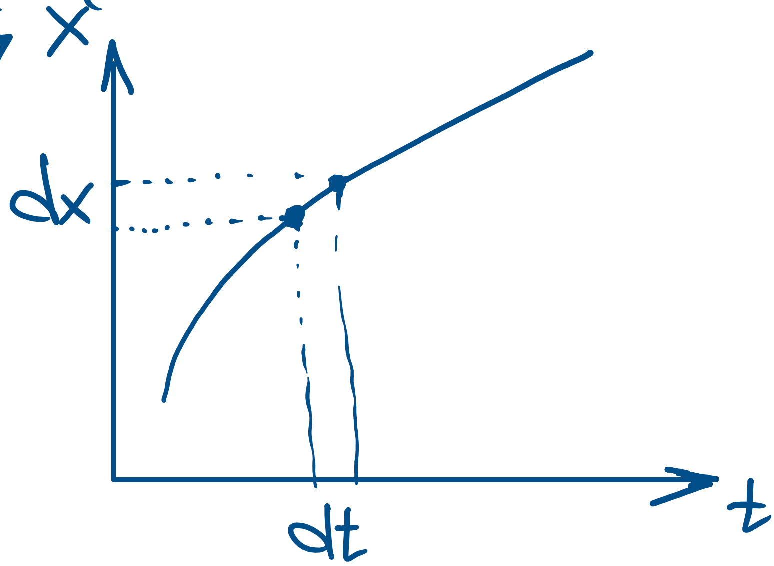
x σε m



t σε s

$$v(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt}$$

εξαρτημένη



$$dt = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta t$$

ανεξάρτητη μεταβλητή

$$dx = x'(t)\,dt$$

διαφορικό Α.Μ.

διαφορικό Ε.Μ.

Στιγμιαία επιτάχυνση

$x(t)$ $\quad$ $u(t) = \dot{x}(t)$

$$a(t) = \dot{u}(t) = \frac{du}{dt}$$

Παράδειγμα 1: Κινητό κινείται με απομάκρυνση που δίνεται από την $x(t) = bt^3 - ct + e$

α) βρείτε τις μονάδες των σταθερών $b, c, e \neq 0$

β) να βρεθεί για ποιους χρόνους το κινητό ακινητοποιείται

γ) να απαντήσετε εάν θα μείνει στις θέσεις ακινητοποίησης β) Ακινησία $\upsilon=0$

$x(t)= bt^3 - ct + e$ $\upsilon = x'(t)$

$\upsilon(t) = 3bt^2 - c$ Θέλουμε $\upsilon=0$

$3bt^2 - c = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{c}{3b}}$

γ) Εξετάζω την επιτάχυνση a
Εάν $a=0$ (και $\upsilon=0$) για πάντα ακινησία

Εάν $a \neq 0$ (και $\upsilon=0$) τότε
αφού επιτάχυνση: χρονική μεταβολή της ταχύτητας, τότε το υ θα αλλάξει από $\upsilon=0$ σε κάτι άλλο $\Rightarrow$ θα κινηθεί

$$u(t) = 3bt^2 - c$$

$$a(t) = \dot{u}(t) = 6bt$$

Στα σημεία αυτά $t_{1,2}$

$$a(t_{1,2}) = \pm 6b\sqrt{\frac{c}{3b}} = \pm\sqrt{12bc} \neq 0$$

Θα κινηθεί .

(a)

$$x(t) = \underbrace{bt^3}_{\text{πρέπει σε } m} - \underbrace{ct}_{\text{ομοίως}} + \underbrace{e}_{\text{ομοίως}}$$

$x(t) \rightarrow m$

ct σε m και t σε s

αναγκαστικά c: m/s

$$[ct] = [c][t] = \frac{m}{\cancel{s}} \cdot \cancel{s} = m$$

Πρώτος όρος $[bt^3] = m \Rightarrow$

$$[b][t^3] = m \Rightarrow [b]\, s^3 = m \Rightarrow$$

$$[b] = m/s^3$$

Παράδειγμα 2: Κινητό κινείται με επιτάχυνση που δίνεται από την έκφραση $a(t) = a_0 \cos \omega t$

όπου a_0 και ω θετικές σταθερές $\neq 0$

Να βρεθούν α) η ταχύτητα και β) η απομάκρυνση του κινητού $\forall\, t$

εάν $\boxed{v(0) = 0}$ και $\boxed{x(0) = -\frac{a_0}{\omega^2}}$

Αρχικές συνθήκες

μια άλλη θετική σταθερά $\neq 0$

cos: συνημίτονο
sin: ημίτονο

(α)

$$a(t) = a_0 \cos(\omega t) = \frac{du}{dt} \Rightarrow$$

$$u(t) = \int a(t)\,dt = \int a_0 \cos\omega t\,dt$$

όπου $\int$: αόριστο ολοκλήρωμα ή αντιπαραγώγιση

Οι σταθερές πολ/κές βγαίνουν εκτός $\int$

$$u(t) = a_0 \int \cos\omega t \cdot dt$$

Στην παραγώγιση $(\sin\omega t)' = \omega \underline{\cos\omega t}$

$$\frac{1}{\omega}(\sin\omega t)' = \cos\omega t \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)' = \cos\omega t$$

Επομένως

$$u(t) = \frac{a_0}{\omega}\sin\omega t + c$$

$$v(t) = \frac{a_0}{\omega} \sin \omega t + c$$

σταθερά ολοκλήρωσης

Εφαρμόζω αρχική συνθήκη της ταχύτητας για να βρω το c

$$v(0) = 0 \Rightarrow \frac{a_0}{\omega} \cdot 0 + c = 0$$

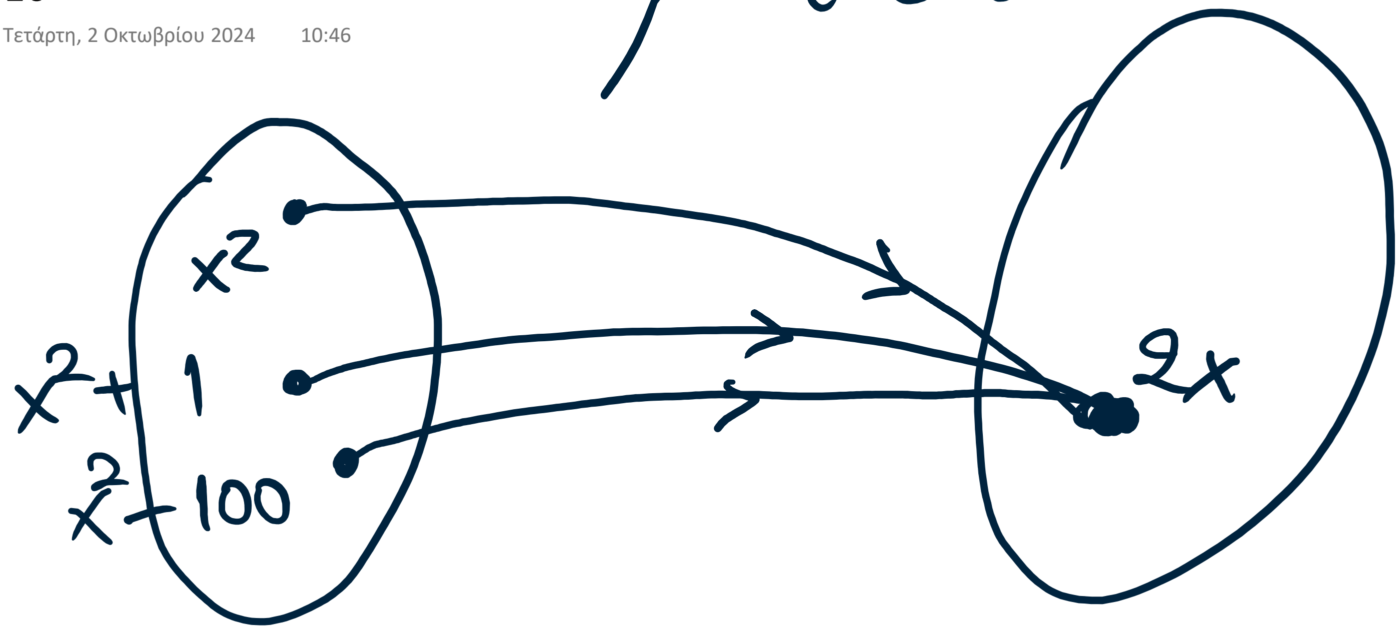
$$\Rightarrow \boxed{c = 0}$$

$$v(t) = \frac{a_0}{\omega} \sin \omega t$$

10

Τετάρτη, 2 Οκτωβρίου 2024 10:46

παραγώγιση



$$U(t) = \frac{a_0}{\omega} \sin\omega t$$

$$x(t) = \int U(t)\,dt = \frac{a_0}{\omega} \int \sin\omega t\,dt$$

Αρχική

$$x(0) = -\frac{a_0}{\omega^2}$$

$$x(t) = -\frac{a_0}{\omega^2} \cos\omega t + C_2$$

$$x(0) = -\frac{a_0}{\omega^2} \Rightarrow -\frac{a_0}{\omega^2} \cdot 1 + C_2 = -\frac{a_0}{\omega^2}$$

$$\Rightarrow C_2 = 0$$

Επομένως $x(t) = -\frac{a_0}{\omega^2} \cos\omega t$

Θέτω $x_0 = -\frac{a_0}{\omega^2}$ $\boxed{x = -x_0 \cos\omega t}$