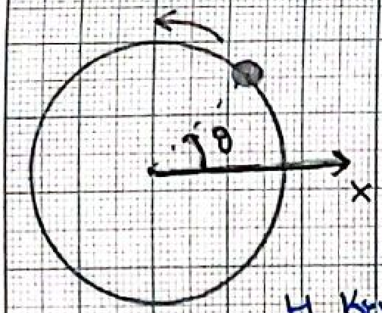


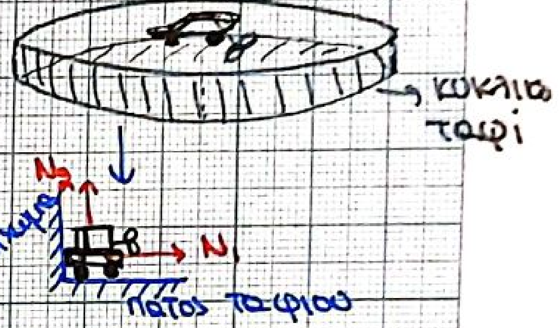
Σώμα σημειακό περιορισμένο κινείται σε κύκλο

θ γωνία απ' του άξονα x (+)

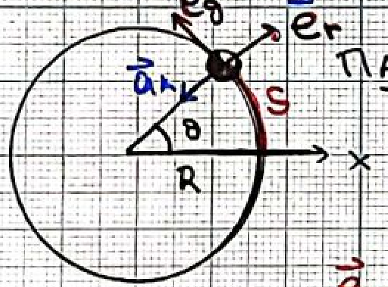
$x \to \theta$

Η κεντρομόλος δύναμη περιορίζει το σώμα επάνω στην τροχιά.

(π.χ) Κουρδιστό αυτοκινητάκι μέσα σε κυκλικό ταψί



Η κεντρομόλος δύναμη είναι η κάθετη αντίδραση N από το τοίχωμα



Όταν σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση,

<u>ΠΑΝΤΑ</u> υπάρχει η κεντρομόλος επιτάχυνση

$$\vec{a}_\kappa = -\omega^2 R \cdot \vec{e}_r \quad \text{, όπου} \quad \omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$$

$\vec{e}_r$: μοναδιαίο διάνυσμα // R (ακτίνα)

~ ΠΡΟΣ ΤΑ ΕΞΩ ~

$\vec{e}_\theta$: μοναδιαίο διαν. κατά μήκος του κύκλου (+)

Τόξο
$s = R\theta$

→ Μπορεί και να υπάρχει επιτρόχιος επιτάχυνση a_ε:

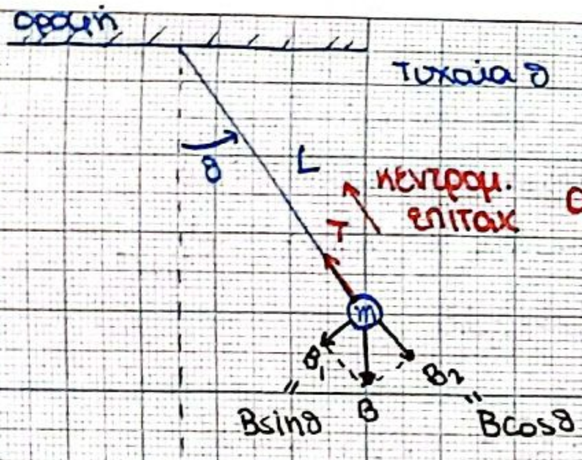
$$\boxed{\vec{a}_\varepsilon = R\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta = R\dot{\omega}\,\vec{e}_\theta} \qquad a_\varepsilon = \ddot{s} = R\ddot{\theta} = R\frac{d\omega}{dt}$$

<u>Παράδειγμα 7.12</u>

Η μάζα m του παρακάτω σχήματος είναι προσδεδεμένη στο ένα άκρο αβαρούς νήματος μήκους L το οποίο εκτρέπεται αρχικά κατά θ_A γωνία και ακολούθως αφήνεται ελεύθερο. Να υπολογισθεί

(α) η τάση του νήματος όταν το νήμα σχηματίζει τυχαία γωνία θ ως προς την κατακόρυφο και

(β) το έργο ξεχωριστά της κάθε συνιστώσας του βάρους κατά μήκος του νήματος, από την αρχική γωνία $\theta = \theta_A$ έως και τη γωνία $\theta = 0$ όπου το νήμα βρίσκεται στην κατακόρυφο



$a_k = \omega^2 L$

(α) ΑΚΤΙΝΙΚΑ

$\boxed{T - B_2 = m \cdot a_k}$

$\Rightarrow T = mg\cos\theta + mL\dot{\theta}^2$

Κυκλική τροχιά: $-B_1 = m\ddot{s} \Rightarrow$

$-mg\sin\theta = mL\ddot{\theta}$

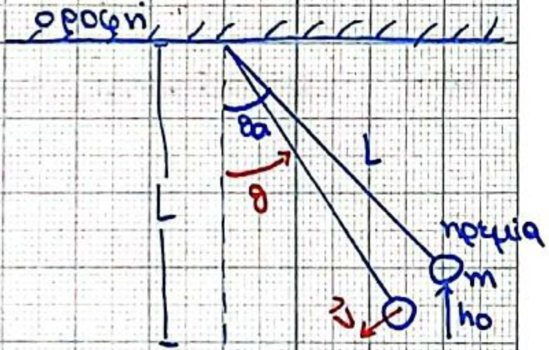
$\Rightarrow g\sin\theta = L\ddot{\theta}$

Όταν ολοκληρώνεις ως προς x: f', f''

Όταν ολοκληρώνεις ως προς t: $\dot{f}, \ddot{f}$

$L\dot{\theta} = v$: ταχύτητα κατά μήκος της τροχιάς

{Για μικρά θ, $\sin\theta \simeq \theta$ (μόνο για rad)}



ΑΡΧΙΚΑ: $h_a = L - L\cos\theta_A$

ΤΕΛΙΚΑ: $h = L - L\cos\theta$

ΑΔΜΕ: $\frac{1}{2}mv^2 + mgh = mgh_0$

Λύνω ως προς v και αντικαθιστώ

$\frac{1}{2}v^2 + g\cancel{L} - gL\cos\theta = g\cancel{L} - gL\cos\theta_A$

$\Rightarrow v = \sqrt{2gL(\cos\theta_A - \cos\theta)} = L\dot{\theta}$ και $T = mg\cos\theta + mL\dot{\theta}^2$ ⊛

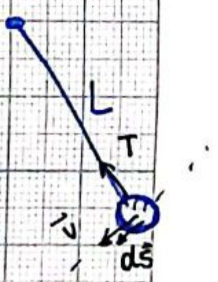
→ Μπορώ να θεωρήσω ΘΔΜΕ?

Πρέπει οι δυνάμεις να είναι συντηρητικές. Εδώ B, T:

B: είναι συντηρητική

T: δεν είναι

|| $K_1 + U_1 = K_2 + U_2 + W_T$



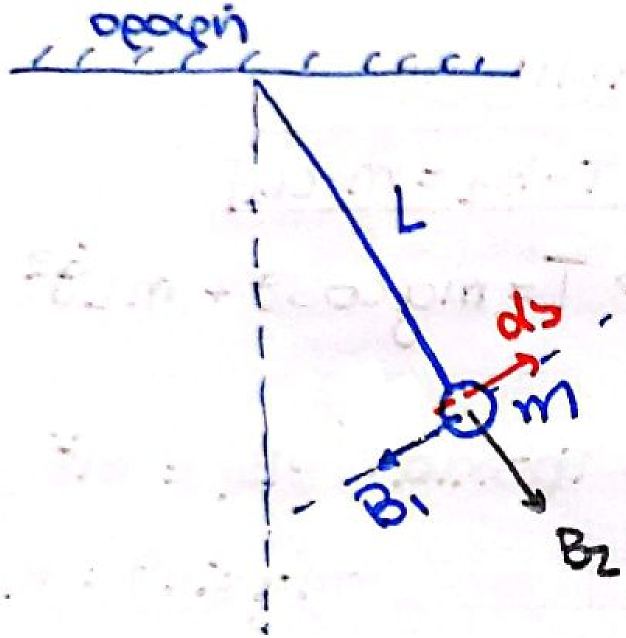
Όμως: $W_T = \int \vec{T} \cdot d\vec{s} = \int T\, ds \underbrace{\cos 90^\circ}_{0} = 0$

Άρα το έργο της T δεν επηρεάζει την κίνηση αφού καθόλη τη διάρκειά της είναι κάθετη στην τροχιά της m

⊛ $\xrightarrow{\text{αντικαθιστώ}}$ $T = mg\cos\theta + \frac{m}{\cancel{L}} 2g\cancel{L}(\cos\theta_A - \cos\theta)$

$\Rightarrow T = -mg\cos\theta + 2mg\cos\theta_A$

(β)

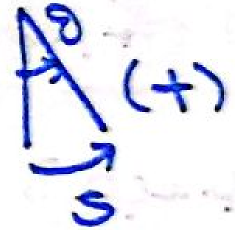


Σε χρόνο dt το κινητό μετακινείται κατά ds επάνω στην κυκλική τροχιά: $ds \perp L$

όπου $ds = L \cdot d\theta$

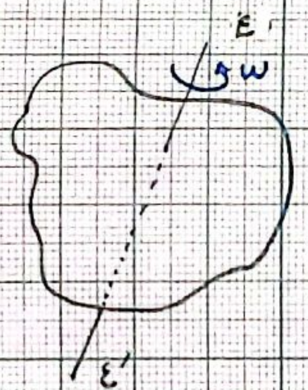
$$W_1 = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{s} = \int B_1 ds \cos 0^\circ$$

$$= -mg \int \sin\theta \, L \, d\theta$$



$$= +mgL\left[\cos\theta\right]_{\theta_A}^{\theta} = mgL(\cos\theta - \cos\theta_A)$$

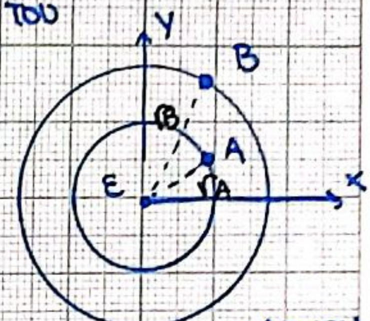
και $W_2 = \int \vec{B}_2 \cdot d\vec{s} = \int B_2 ds \underbrace{\cos 90^\circ}_{0} = 0$



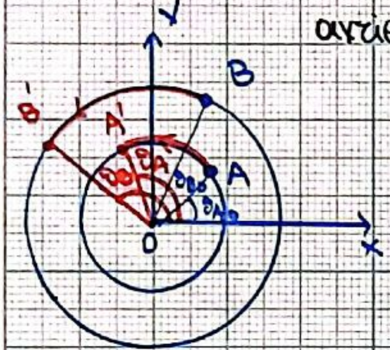
εε': άξονας περιστροφής γύρω από τον οποίο περιστρέφεται ελεύθερα το σώμα

A, B δύο τυχαία σημεία του στερεού

απέχουν απόσταση r_A και r_B αντίστοιχα από τον άξονα εε'



ΚΑΤΟΨΗ



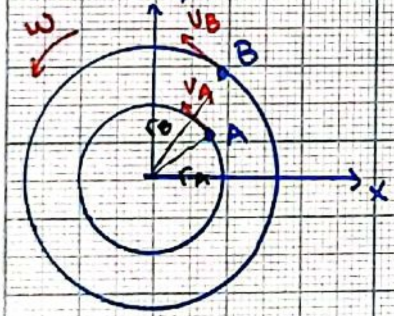
$t=0$, A, B έχουν αντίστοιχες γωνίες $\theta_{A_0}, \theta_{B_0}$

Σε χρόνο dt έρχονται σε νέα θέση A', B'

Με νέες γωνίες θ_A και θ_B αντίστοιχα

Ίδιο $d\theta = \theta_A - \theta_{A_0} = \theta_B - \theta_{B_0}$

Ίδιο $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \Rightarrow$ ίδιο $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$



$v_A = r_A \cdot \omega$
$v_B = r_B \cdot \omega$ || Γενικά: $v = r \cdot \omega$

$\omega = \dot{\theta}$
$\alpha = \ddot{\theta} = \dot{\omega}$

επιτρόχια επιτάχυνση: $\alpha_{E_A} = r_A \cdot \alpha$
$\alpha_{E_B} = r_B \cdot \alpha$

π.χ. Εαν $\omega =$ σταθ

Ομαλή περιστροφική κίνηση

Ολοκληρ. $\omega =$ σταθ

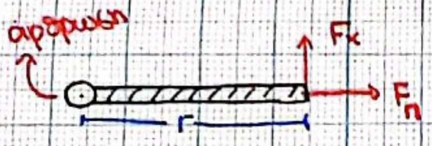
$\omega = \dot{\theta}$

$$\boxed{\theta = \omega t + \theta_0}$$

Εάν α: σταθ

Ολοκληρώνω $\dot{\omega} = \alpha \rightarrow \omega = \alpha t + \omega_0$ (κοινό για όλα τα σημεία)

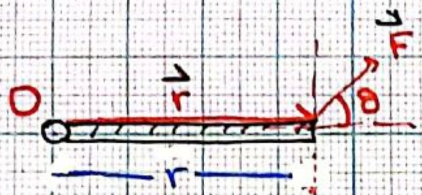
Ολοκλ. ξανά $\dot{\theta} = \omega \rightarrow \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0$ (διαφορετικό για κάθε σημείο)



F_κ : προκαλεί περιστροφή

Ροπή $\tau = F_\kappa \cdot r$

Πόρτα σε κάτοψη

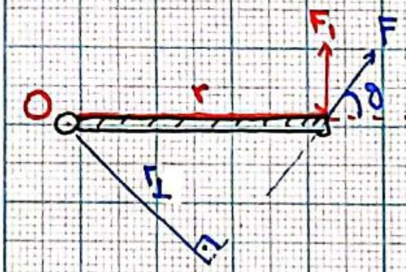


ΜΟΝΟ Η Fsinθ προκαλεί περιστροφή γύρω από το Ο

$$\tau = F\, r \sin\theta$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = r(F\sin\theta) = F(r\sin\theta)$$

$$\rightarrow \boxed{\tau = F\, r_\perp}$$



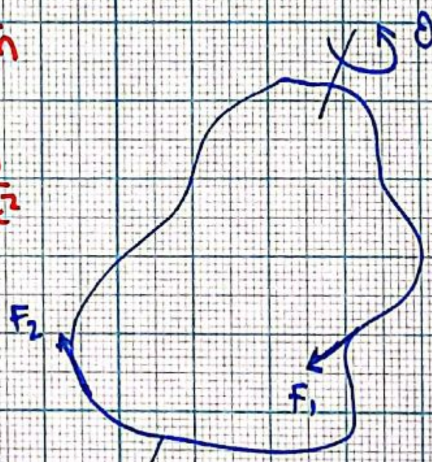
$F_\perp$: κάθετη συνιστώσα ως προς r

$r_\perp$: κάθετος απόσταση του Ο από τον φορέα της δύναμης

Νόμος Νεύτωνα για περιστροφή

ΣΥΝΟΛΟ ΡΟΠΩΝ: $\Sigma\tau = I \cdot \alpha = I \dfrac{d\omega}{dt} = I \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

σταθ ροπή αδράνειας



Στην μεταφορά $\Sigma F = m \cdot a = m\ddot{x}$

I: εκφράζει την δυσκολία της περιστροφικής (γωνιακής) επιτάχυνσης ενός σώματος

$$\boxed{I = \lambda \cdot m \cdot L^2}$$

L → κάποια γεωμετρική διάσταση του σώματος

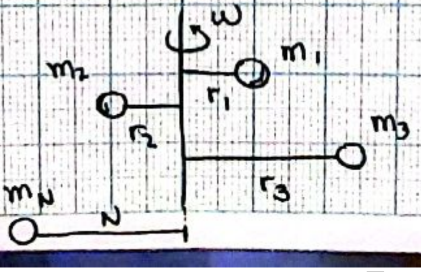
λ → καθαρός αριθμός (της τάξης του 1)

1. Σημειακή μάζα

$$I = m r^2$$

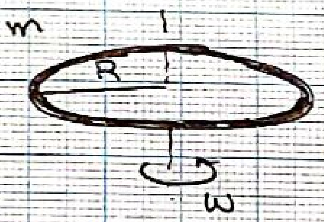
2. N μάζες

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$



3. Περιστρεφόμενος Δακτύλιος (λεπτός) *

$I = mR^2$

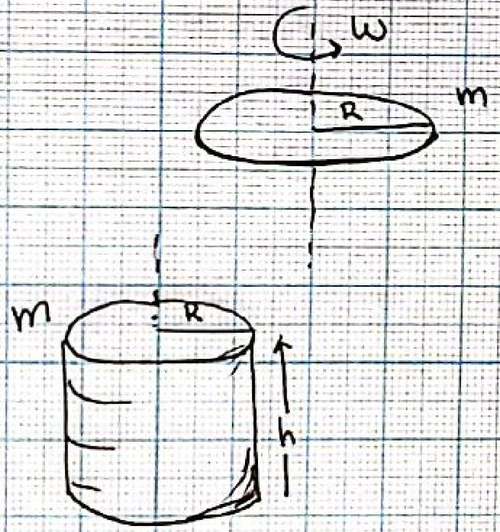


4. Περιστρεφόμενος Δίσκος (λεπτός)

$I = \frac{1}{2} m R^2$

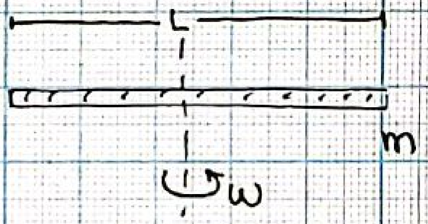
↓

ΤΟ ΙΔΙΟ ΙΣΧΥΕΙ ΚΑΙ ΓΙΑ ΚΥΛΙΝΔΡΟ (συμπαγή)



5. Περιστρεφόμενη ράβδος (λεπτή)

$I = \frac{1}{12} m L^2$

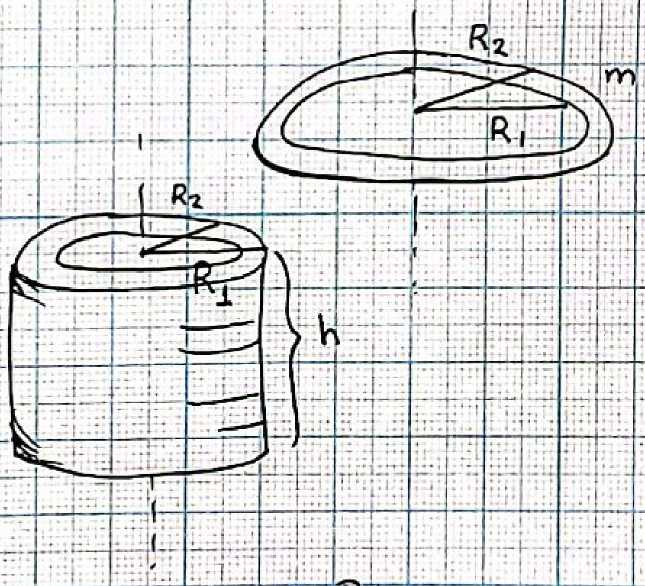


* 6. Περιστρεφόμενος Δακτύλιος (με διαστάσεις)

$I = \frac{1}{2} m \left(R_2^2 - R_1^2\right)$

↓

ΤΟ ΙΔΙΟ ΙΣΧΥΕΙ ΚΑΙ ΓΙΑ ΚΥΛΙΝΔΡΟ



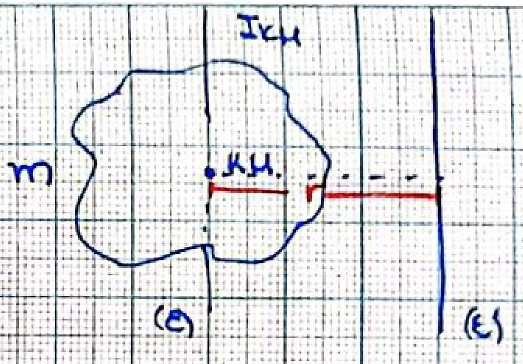
7. Σφαίρα κοίλη - συμπαγής Ακτίνα R

$I = \frac{2}{3} m R^2$ $\quad$ $I = \frac{2}{5} m R^2$

Θεώρημα Παράλληλων Αξόνων
ή Θεώρημα Steiner

$$I_{ε'} = I_{ε} + m \underbrace{r^2}_{\text{απόσταση}}$$

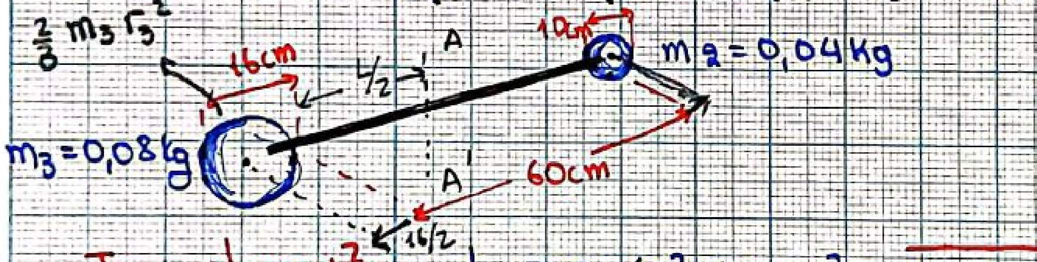
$$I_{ε} = I_{κμ}$$



(ε)//(ε')

Παράδειγμα 8.9

Το παρακάτω μηχανικό στέλεχος αποτελείται από μία λεπτή ράβδο μάζας 0.12 kg με προσκολλημένες δύο σφαίρες στα άκρα της όπως φαίνεται στο σχήμα, και περιστρέφεται γύρω από τον άξονα ΑΑ' ο οποίος περνάει απ' το κέντρο της ράβδου. Να υπολογισθεί η ροπή αδράνειας του στελέχους. → υπάρ- μένο μήκο



Το χωρίζω σε μια ράβδο κ' δύο σφαίρες

$$I_ρ = \frac{1}{12} m_ρ L^2 = \frac{1}{12} 0.12 \cdot 60^2 \ kg \cdot cm^2 = \boxed{36 \ kg \cdot cm^2}$$

Μεγάλη σφαίρα έστω συμπαγής

$$I_3 = \frac{2}{5} m_3 r_3^2 + \overbrace{m_3 \left(\frac{L}{2}\right)^2}^{\text{steiner}}$$

$$\Rightarrow I_3 = \frac{2}{5} \cdot 0,08 \cdot 8^2 + 0,08 \cdot 30^2 \Rightarrow \boxed{I_3 \cong 75.4 \ kg \cdot cm^2}$$

ομοίως και η m_2

Μικρή σφαίρα έστω συμπαγής

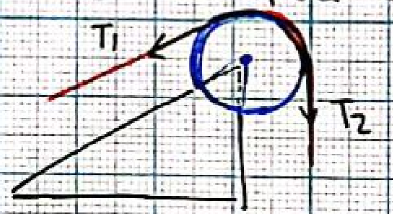
$$I_2 = \frac{2}{3} m_2 r_2^2 + \overbrace{m_2 \left(\frac{L}{2}\right)^2}^{\text{steiner}}$$

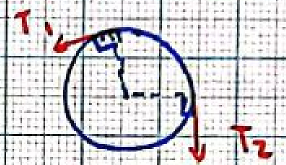
$$= \frac{2}{3} \cdot 0,04 \cdot 5^2 + 0,04 \cdot 30^2 \Rightarrow \boxed{I_2 \cong 36,6 \ kg \cdot cm^2}$$

Παράδειγμα 8.11

Στο κεφ. 4 είχαμε θεωρήσει τις τροχαλίες ως αβαρείς για ευκολία. Εδώ θα άρουμε αυτήν την απλούστευση.

Η τροχαλία του παρακάτω σχήματος έχει μάζα ίση με $M = 2$ kg κ' ακτίνα $R = 30$ cm. Εάν οι τάσεις των δύο νημάτων είναι $T_1 = 35N$ και $T_2 = 25N$, να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας





Ροπή της T_1 : $\tau_1 = T_1 R \sin 90^\circ = T_1 R$

Ροπή της T_2 $\tau_2 = -T_2 R \sin 90^\circ = -T_2 R$

$$\Sigma\tau = I\alpha \rightarrow T_1 R - T_2 R = I\alpha = \left(\tfrac{1}{2} m R^2\right)\alpha \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \alpha = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{2} m R} = \dots = 33{,}3 \, rad/s^2$$

{Για ιδανική τροχαλία $m = 0 \rightsquigarrow I = 0$ δηλ $T_1 = T_2$}

Παράδειγμα 8.13

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται μια αυτοσχέδια σβούρα που κατασκεύασε ένας φοιτητής κολλώντας μια συμπαγή σφαίρα μάζας 200 γρ. και διαμέτρου 2.4 εκ. επάνω σ' ένα κώνο μάζας 120 γρ. διαμέτρου βάσης 2 εκ. και ύψος 2.4 εκ. Με τη βοήθεια ενός νήματος που είναι τυλιγμένος γύρω απ' τη σφαίρα (στον ισημερινό της σφαίρας) εφαρμόζει μια δύναμη 2N για περίπου 1.5 δευτερόλεπτα. Να βρεθούν:

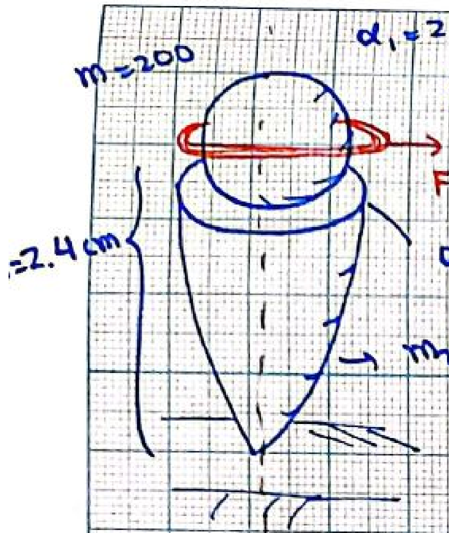
(α) Η τελική γωνιακή ταχύτητα της σβούρας εάν ξεκινάει απ' την ηρεμία και

(β) ο συνολικός αριθμός των περιστροφών που εκτελεί η σβούρα μέσα σε αυτό το διάστημα των 1.5 δευτερολέπτων

(η ροπή αδράνειας ενός κώνου ακτίνας R είναι ίση με $\frac{3}{10} MR^2$.

Σαρώθηκε με το CamScanner

07-12-23



Αυτοσχέδια Σβούρα

F = 2N για t = 1,5 sec

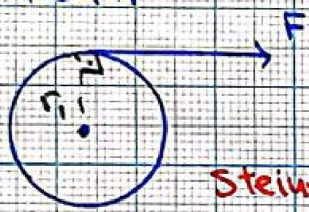
(α) Βρείτε τελική γωνιακή ταχύτητα σβούρας

Δίνεται ροπή αδράνειας κώνου: $\frac{3}{10} m_2 r_2^2$

(α) Νόμος Νεύτωνα στις περιστροφές

$\Sigma\tau = I\cdot a$, a: γωνιακή επιτάχυνση

ΚΑΤΟΨΗ



$\tau = F\cdot r_1 = 2\cdot\frac{2.4}{2} = 2\cdot 1.2 = 2,4\cdot 10^{-2}\, N.m$

κώνος

Steiner: $I = I_\sigma + I_\kappa = \frac{2}{5} m_1 r_1^2 + \frac{3}{10} m_2 r_2^2 \Rightarrow$

συμπαγής σφαίρας

$\Rightarrow I = \frac{2}{5}\cdot 200\cdot 1,2^2 + \frac{3}{10}\cdot 120\cdot 1^2 = 115.2 + 36 = 151,2\ g\cdot cm^2 = 1,51\cdot 10^{-5}\ kg\cdot m^2$

Υπάρχει τριβή σβούρας δαπέδου, αλλά $\tau_T = T\cdot r$, r=0 απ' τον άξονα περιστροφής

$\tau = I\cdot a \Rightarrow a = \frac{\tau}{I} \Rightarrow \boxed{a \cong 1,6\cdot 10^3\ rad/sec}$ = σταθ

γιατί F: σταθ

$\omega = \int a\,dt = at + \omega_0$

→ ξεκινάει απ' την ηρεμία: $\omega_0 = 0$ r/s

$\omega = at = 1,6\cdot 10^3\cdot 1,5 \Rightarrow \boxed{\omega = 2,4\cdot 10^3\ r/s}$

(β) Ολοκληρώνω ξανά $\theta = \int \omega\,dt = a\int t\,dt = a\frac{t^2}{2} + \theta_0 \Rightarrow$

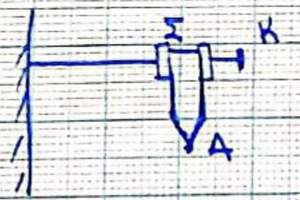
$\Rightarrow \boxed{\Delta\theta = \frac{at^2}{2} = 1,6\cdot 10^3\cdot\frac{1,5^2}{2} = 1,8\cdot 10^3\ rad}$

1 στροφή → 2π γωνία

N → Δθ γωνία

$N = \frac{1,8\cdot 10^3}{2\pi} \Rightarrow \boxed{N \cong 300\ \text{στροφές}}$

Παράδειγμα 8.14

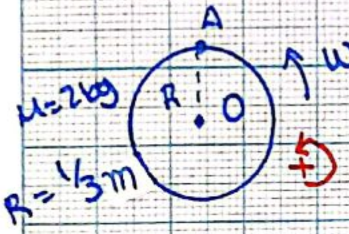


Σφήνα Σ κρατείται φιλά με τη βοήθεια καρφιού Κ. Ο τροχός περιστρέφεται ελεύθερα 5 rad/s

Στο $t=0$ αφαιρείται το καρφί Κ

Δύναμη τριβής τροχού - σφήνας 1N

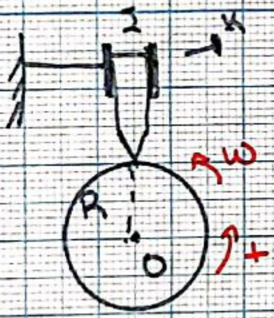
Να βρεθεί πότε θα σταματήσει



(τα τοιχώματα κρατούν σταθερή τη σφήνα κατά τη διάρκεια της επαφής με τον τροχό.

Λόγω τριβής T εμφανίζεται ροπή

$$\tau = -TR$$



$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

$$\tau = I\cdot a \Rightarrow a = \frac{\tau}{I} \Rightarrow a = \frac{-2TR}{MR^2} = \frac{-2}{2\cdot\frac{1}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = -3\ rad/s^2}$$

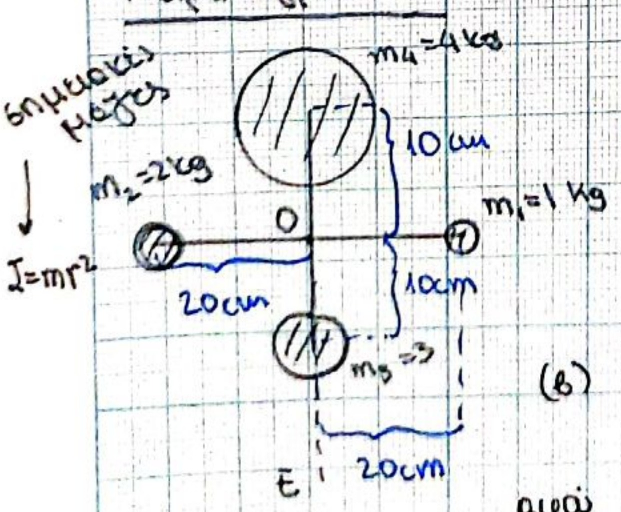
ολοκληρώνω $\longrightarrow$ $\omega = \int a\,dt = -3\int dt = -3t + \omega_0$

ω_0: αρχ. γων. ταχύτητα

$$\Rightarrow \boxed{\omega = -3t+5}$$

όταν σταματάει: $\omega = 0 \Rightarrow \boxed{t = 5/3\ sec}$

Παράδειγμα 8.6



Ροπή Αδράνειας γύρω απ' το (α) σημείο Ο (άξονας κάθετος στη σελίδα)

(β) ΟΕ άξονας // στη σελίδας

(α) $I = 1\cdot 20^2 + 2\cdot 20^2 + 3\cdot 10^2 + 4\cdot 10^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow I = 400 + 2\cdot 400 + 7\cdot 100 \Rightarrow \boxed{I = 1900\ kg\,cm^2}$

(β) $I = 1\cdot 20^2 + 2\cdot 20^2 + 0 + 0$

$\Rightarrow \boxed{I = 1200\ Kg\cdot cm^2}$

αφού 3kg κ' 4kg περιστρέφονται με μηδενικό βραχίονα ή με μηδενική απόσταση απ' τον άξονα (ΟΕ)

Κινητική Ενέργεια - Ισχύς - Έργο στην περιστροφή

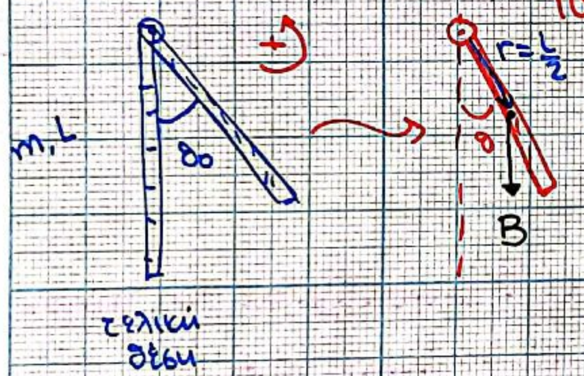
Κινητική Ενέργεια στην περιστροφή: $\boxed{K = \frac{1}{2} I \omega^2}$ || Μεταφορική κίνηση $K = \frac{1}{2} m v^2$

Έργο στην περιστροφή: $\boxed{W = \int \tau \, d\theta}$ || $W = \int F dx$

Ισχύς στην περιστροφή: $P = \frac{dW}{dt} \Rightarrow$ || $P = \frac{dW}{dt} = \frac{F dx}{dt} = F v$

$\Rightarrow P = \frac{\tau d\theta}{dt} \Rightarrow \boxed{P = \tau \cdot \omega}$

Παράδειγμα Ράβδος αφήνεται ελεύθερη από αρχική γωνία τυχαία $\theta = \theta_0$



Βάρος $B = mg$ → δρα στο μέσο της ράβδου

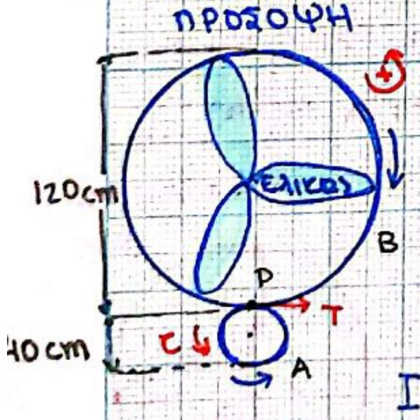
$\tau = -B \frac{L}{2} \sin\theta$

$W = \int \tau \, d\theta = \int_{\theta_0}^{0} -mg\frac{L}{2} \sin\theta \, d\theta$

$= -\frac{mgL}{2} \left[\cos\theta\right]_0^{\theta_0} = -\frac{mgL}{2}(\cos\theta_0 - 1)$

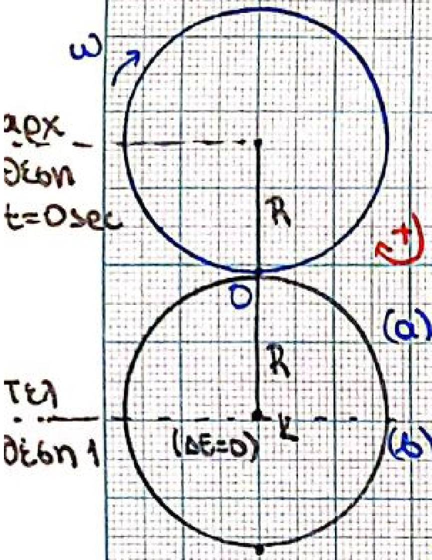
13-12-23

~ Ασκήσεις στην Περιστροφική κίνηση ~



Το διπλανό σχήμα αποτελείται από δύο αβαρείς λεπτούς δίσκους A και B που μπορούν κ' περιστρέφονται ελεύθερα γύρω απ' τα κέντρα τους κ' που εφάπτονται στο σημείο P, έτσι ώστε όταν περιστρέφεται ο ένας να παρασέρνει τον άλλου χωρίς ολίσθηση. Στον πάνω δίσκο (B) είναι στερεωμένος ένας έλικας με ροπή αδράνειας: $I = 75 \cdot kg \, m^2$ ως προς το κέντρο της. Στο $t = 0 sec$ εφαρμόζεται μια μεταβλητή ροπή $\tau = c \cdot t^2$ στο κάτω δίσκο (A) όπου $c = 50 \, N m s^{-2}$ κ' t σε sec.
Εάν ο έλικας βρίσκεται σε ηρεμία την χρονική στιγμή $t=0$, να βρεθεί η γωνιακή του ταχύτητα κατά την χρονική στιγμή $t = 3 sec$.

Παράδειγμα 8.14



Ομογενής λεπτός δίσκος ακτίνας $R=\frac{1}{3}m$ και μάζας $M=5kg$ τοποθετείται κατακόρυφα και μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά απ' το χαμηλότερο σημείο O, κάθετο στο επίπεδό του. Ο δίσκος ωθείται κατά την φορά των δεικτών του ρολογιού με αρχ. γωνιακή ταχύτητα $\omega_0=10\,r/s$

(α) Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα όταν διέρχεται απ' το χαμηλότερο σημείο της τροχιάς του

(β) Να γίνει το ίδιο όταν υφίσταται στον άξονα αιώρησης επιβραδύνουσα ροπή ίση με 15 Nm.

Δίνεται: $I=\frac{1}{2}MR^2$: ροπή αδράνειας δίσκου ως προς τον άξονά του (κέντρο μάζας)

$g\cong 10\,m/s^2$

Λύση:

(α) steiner : $I_O = I + MR^2 \Rightarrow \boxed{I_O=\frac{3}{2}MR^2}$

ΑΔΜΕ (θέση 1: ΔE=0) : $\left. K_1+U_1 = K_0+U_0 \right\}$ όπου $K=\frac{1}{2}I\omega^2$, $U=Mgh$, $h_0=2R$, $h_1=0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}MR^2\omega_1^2+0 = \frac{1}{2}\frac{3}{2}MR^2\omega_0^2+Mgh_0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}\cancel{M}R^{\cancel{2}}\omega_1^2 = \frac{3}{4}\cancel{M}R^{\cancel{2}}\omega_0^2+2\cancel{M}g\cancel{R} \Rightarrow \frac{3}{4}R\omega_1^2 = \frac{3}{4}R\omega_0^2+2g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{3}}{4}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}\omega_1^2 = \frac{\cancel{3}}{4}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}10^2+2\cdot 10 \Rightarrow \omega_1^2 = 100+20\cdot 4 \Rightarrow |\omega_1|=\sqrt{180}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_1 = 13.4\ rad/sec}$$

(β) Θεωρούμε θετική φορά την φορά των δεικτών του ρολογιού (+), έχουμε μια επιβραδυντική ροπή $\tau=-15\,N\cdot m$ στο σημείο O.
Αφού γενικά οι τριβές δεν είναι συντηρητικές δυνάμεις, υπολογίζονται μέσα απ' τον ορισμό του έργου για την περιστροφή $\boxed{W_T=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\tau\, d\theta} \Rightarrow$

$$\xrightarrow{\tau=\sigma\tau\alpha\theta} W_T = \tau\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta = \tau(\theta_2-\theta_1) = -15\cdot\pi \Rightarrow \boxed{W_T=-47.1\,J}$$

π συνολική γωνία περιστροφής $\theta_2-\theta_1$ είναι 180°

→ με συντηρητικές κ' μη συντηρητικές δυνάμεις (ΑΔΜΕ)

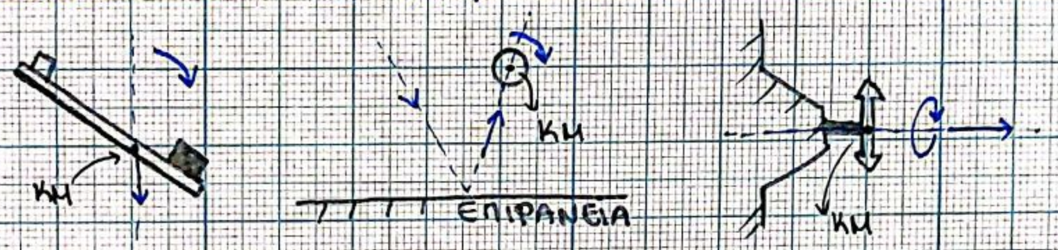
$$K_0+U_0+W_T = K_1+U_1 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}MR^2\omega_0^2-\pi\tau+2MgR = \frac{1}{2}\frac{3}{2}MR^2\omega_1'^2+0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{\omega_1' = 8.4\ rad/sec}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10 : ΣΥΝΘΕΤΗ ΚΙΝΗΣΗ

ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ Σε κάθε στερεό σώμα υπάρχει ένα ξεχωριστό σημείο, γνωστό ως "κέντρο μάζας" (ΚΜ), τέτοιο ώστε οποιαδήποτε τυχαία κίνηση του στερεού, όσο πολύπλοκη κι αν είναι, να μπορεί ν' αναλυθεί σε δύο κινήσεις, μια μεταφορική του ΚΜ και μια περιστροφική γύρω απ' το Κ.Μ.

π.χ. δοκός σφαίρα έλικας

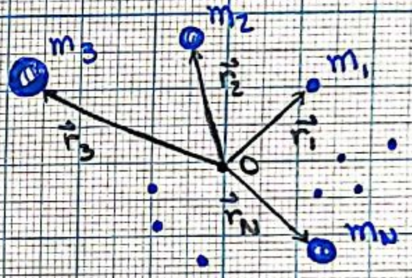


- ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ για σύνολο σημειακών μαζών

$$\boxed{x_{KM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}$$: x-συντεταγμένη του κέντρου μάζας

$$\boxed{y_{KM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}$$: y-συντεταγμένη του κέντρου μάζας

όπου $M = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_N$



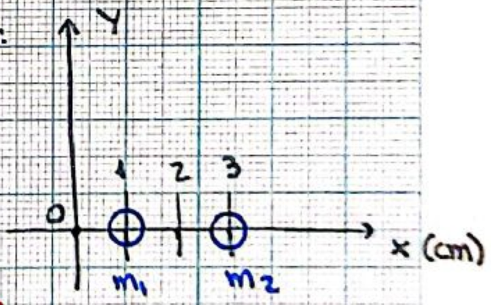
Παράδειγμα 10.2

Να βρεθούν οι συντεταγμένες του ΚΜ όταν:

(α) $m_1 = 2kg$ κ' $m_2 = 2kg$ → $M = 2+2 = 4kg$

(β) $m_1 = 2kg$ κ' $m_2 = 4kg$ → $M = 6kg$

(γ) $m_1 = 4kg$ κ' $m_2 = 8kg$ → $M = 12kg$



(α) $x_{KM} = \frac{1}{M}(m_1x_1 + m_2x_2) \xRightarrow[x_1=1]{x_2=3} \boxed{x_{KM} = 2cm}$ $(KM)_\alpha = (2,0)$, δηλαδή

$y_{KM} = \frac{1}{M}(m_1y_1 + m_2y_2) \xRightarrow{y_1=y_2=0} \boxed{y_{KM} = 0cm}$

το ΚΜ βρίσκεται στο μέσο των δύο μαζών, αναμενόμενο αφού οι μάζες είναι ίσες ($m_1 = m_2$) κι έτσι το ΚΜ ταυτίζεται με το γεωμετρικό μέσο της μεταξύ τους απόστασης.

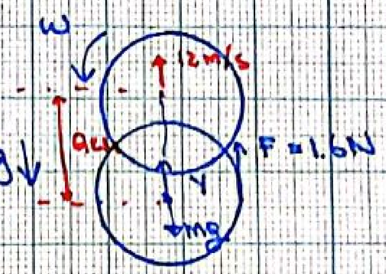
(β) $x_{KM} = \frac{1}{6}(2\cdot1 + 4\cdot3) = \frac{14}{6} \cong \underline{2{,}33cm}$
$y_{KM} = 0cm$
$\Big\} \Rightarrow (KM)_\beta = (2{,}33\ ,\ 0)$ δηλαδή το ΚΜ μετακινήθηκε λίγο προς τα δεξιά πιο κοντά στη βαρύτερη μάζα.

(γ) $x_{KM} = \frac{1}{12}(4\cdot1 + 8\cdot3) = \frac{28}{12} = \frac{14}{6} \cong \underline{2{,}33cm}$ $\Big\} \Rightarrow (KM)_\gamma \equiv (KM)_\beta$
$y_{KM} = 0cm$ αυτό συμβαίνει γιατί η αναλογία μαζών $m_1 : m_2$ είναι ίδια και στο β) κ' στο γ) 1:2

συνέχεια... 14-12-23

ΣΥΝΘΕΤΗ ΚΙΝΗΣΗ

Παράδειγμα 10.5 F για 2sec



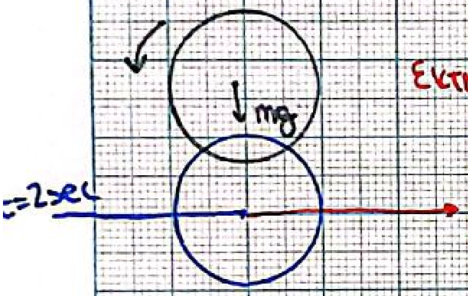
a) $a_{cm} = 6 m/s^2$

$a = 20\ rad/s^2$

$y = \frac{1}{2} a_{cm} t^2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \Rightarrow \boxed{y = 12 m}$

β) Στο t=2sec: $v = \cancel{v_0}^{0} + a_{cm} t \Rightarrow \boxed{v = 12 m/s}$

$\omega = a\ t = 20 \cdot 2 \Rightarrow \boxed{\omega = 40\ rad/s}$



Εκτελεί μεταφορικά επιβραδυνόμενη κίνηση $a_{cm} = -g$

$y = -\frac{1}{2} g t^2 + 12t + 12$

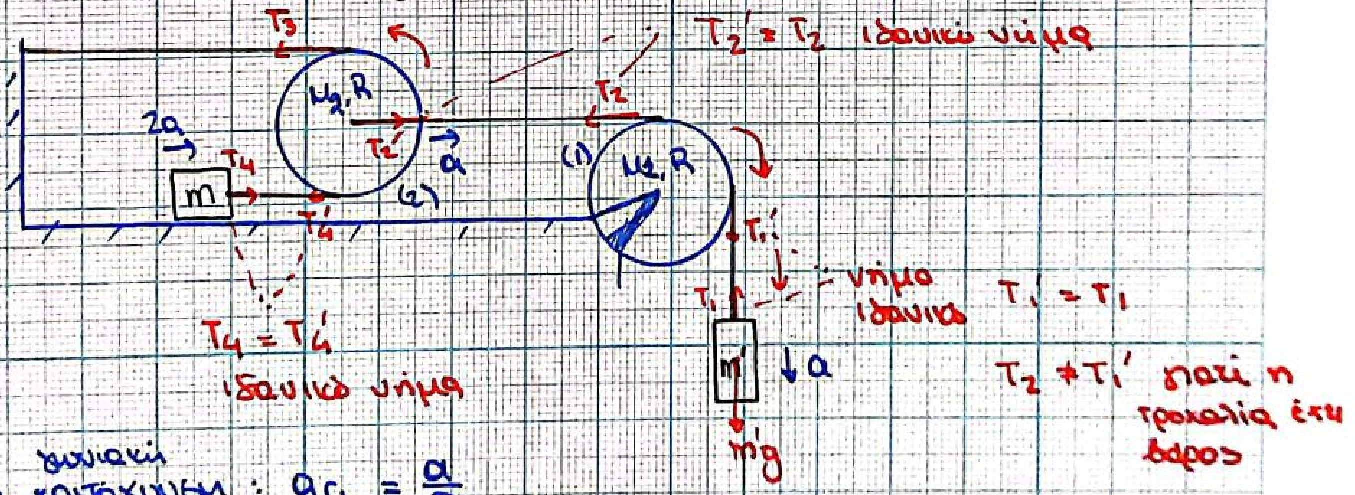
Ηn δουλέψω αυτήν αρχή το χρόνο t=0

και περιστροφικά $\Sigma\tau = 0 \rightarrow$ ομαλή περιστροφική κίνηση

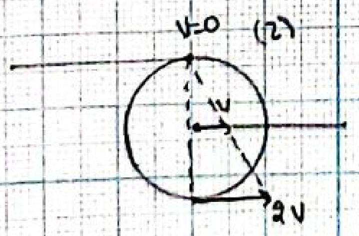
$\omega = σταθ \rightarrow \omega = 40\ rad/s$

Παράδειγμα 10.7 Να βρεθούν όλες οι τάσεις των νημάτων

$m = 1 kg$ $m' = 6 kg$ $M1 = 2kg$ $M2 = 4kg$ $g = 10 m/s^2$



γωνιακή για επιτάχυνση: $a_{r_1} = \frac{a}{R}$



ως προς το κέντρο της τροχαλίας (2) τα σημεία στην περιφέρεια κινούνται με επιτρόχια ταχύτητα v (ίση με την ταχύτητα του κ.μ στη μεταφορική της κίνηση) και άρα γωνιακή ταχύτητα $\omega = \frac{v}{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} \Rightarrow a_{r_2} = \frac{1}{R} a$

Νόμος του Νεύτωνα

m': $m'g - T_1 = m'a$ μεταφορά

$M1$: $T_1R - T_2R = I_1 a_{\gamma 1} = \left(\frac{1}{2}M_1R^2\right)\frac{a}{R}$ περιστροφή

$M2$: $T_2 - T_3 - T_4 = M_2 a$ μεταφορά

$T_4R - T_2R = I_2 a_{\gamma 2} = \left(\frac{1}{2}M_2R^2\right)\frac{a}{R}$ περιστροφή

m: $T_4 = ma$ μεταφορά

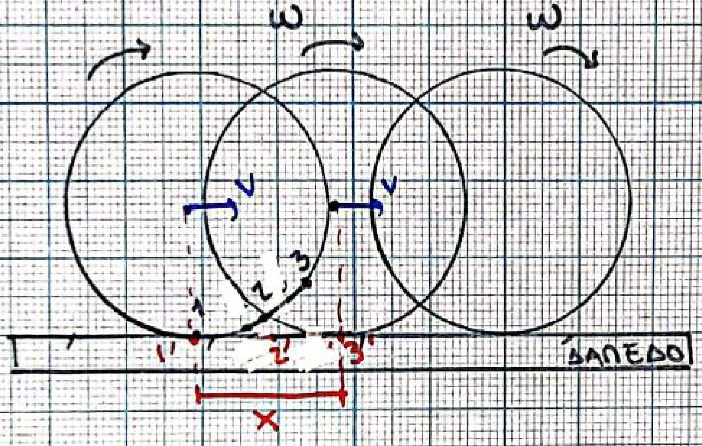
Κύλιση: Κάθε σημείο του κύκλου αντιστοιχεί μ' ένα μόνο σημείο του επιπέδου $(\widehat{12}) = (1'2')$

~ συνθήκη κύλισης ~

Τόξο $(\widehat{13}) = R\theta$

Απόσταση $(1'3') = x$

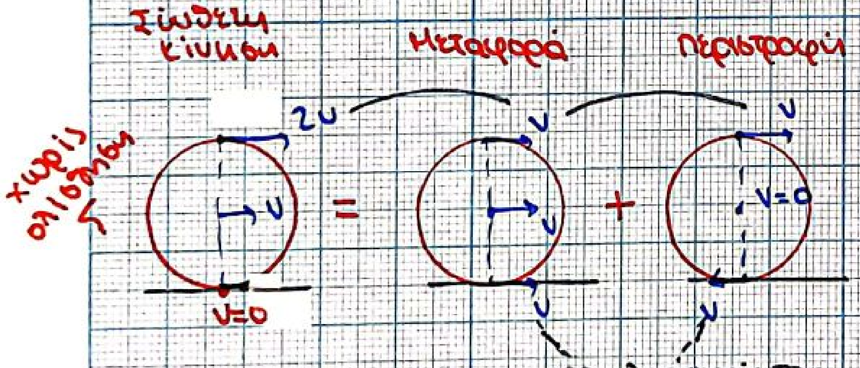
$$\boxed{x = \theta R}$$



παραγωγίζω

$$\frac{dx}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \boxed{\upsilon = R\cdot\omega}$$

$$\frac{d\upsilon}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \boxed{a_{\kappa\mu} = R\cdot a_{\gamma\omega\nu}}$$



αλληλοαναιρούνται, αφού $\upsilon = 0$ στο χαμηλότερο σημείο $\Rightarrow$ T: τριβή είναι στατική

Παράδειγμα 10.14 Λύνεται ενεργειακά ή με νόμο Νεύτωνα

Συμπαγής κύλινδρος μάζας $m = 0,2\,kg$ κ' ακτίνας $R = 0,1\,m$ αφήνεται να κυλίσει ελεύθερα σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας $\theta = 25^\circ$ από ύψος $H = 0,6\,m$ με αρχ. ταχύτητα $\upsilon_0 = 1\,m/s$ κατά μήκος του επιπέδου. Να βρεθεί η γραμμική ταχύτητα του ΚΜ του όταν φτάσει σε ύψος μηδέν με τη βοήθεια της αρχής διατήρησης της ενέργειας. Ο συντελεστής στατικής τριβής είναι $\mu = 0.4$ και μπορείτε να πάρετε $g \approx 10\,m/s^2$ για ευκολία.

Σαρώθηκε με το CamScanner

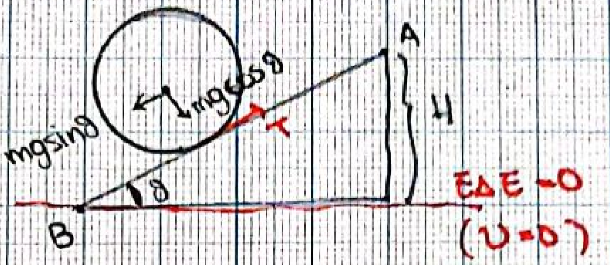
α) Ενεργειακά

$m=0,2kg$

$R=0,1m$

$H=0,6m$

$\upsilon_A=1m/s$



$$K_A+U_A+W_T=K_B+U_B$$

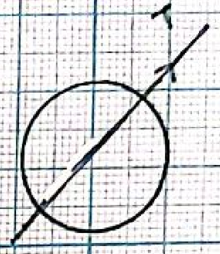
$$\frac{1}{2}m\upsilon_A^2+mgH+W_T=\frac{1}{2}m\upsilon_B^2+0$$

άγνωστο

όπου $W_T=-Tx$ μεταφορικό

Η Τ δημιουργεί και ροπή

$\tau_T=TR$ περιστροφικό



$$W_T'=\tau\theta=TR\theta=Tx$$

συνθήκη κύλισης

ΣΥΝΟΛΙΚΟ ΕΡΓΟ ΤΡΙΒΗΣ

$$\widetilde{W}_T=W_T+W_T'=0$$

Κύλιση χωρίς ολίσθηση ←

$\widetilde{W}_{τριβής}=0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_A^2+mgH=\frac{1}{2}m\upsilon_B^2$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}J\omega_A^2+\frac{1}{2}m\upsilon_A^2}_{\text{κίνηση στο Α}}+mgH=\underbrace{\frac{1}{2}m\upsilon_B^2+\frac{1}{2}I\omega_B^2}_{\text{κίνηση στο Β}}$$

$$\omega_A=\frac{\upsilon_A}{R}=10\,r/s \qquad \omega_B=\frac{\upsilon_B}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cancel{m}R^2\omega_A^2+\frac{1}{2}\cancel{m}\upsilon_A^2+\cancel{m}gH=\frac{1}{2}\cancel{m}\upsilon_B^2+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\cancel{m}\cancel{R^2}\frac{\upsilon_B^2}{\cancel{R^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\cdot 0,1^2\cdot 10^2+\frac{1}{2}1^2+10\cdot 0,6=\frac{1}{2}\upsilon_B^2+\frac{1}{4}\upsilon_B^2 \Rightarrow$$

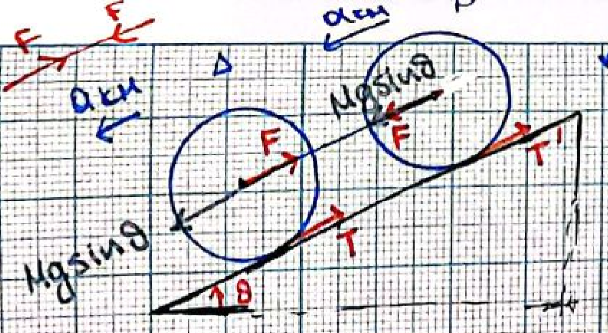
$$\Rightarrow \frac{3}{4}\upsilon_B^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+6 \Rightarrow 3\upsilon_B^2=1+2+24 \Rightarrow |\upsilon_B|=\sqrt{\frac{26}{3}} \Rightarrow$$

τα θετικά προς τα κάτω + ↙

$$\Rightarrow \upsilon_B=2,94\ m/s$$

20-12-23

Παράδειγμα 10.11



Το νήμα είναι τεντωμένο ⇒
⇒ έχουν κοινή $a_{κμ}$

Δ: μεταφορικά $\quad Mg\sin\theta - f - T = Ma_{κμ}$ (1)

P: " $\quad Mg\sin\theta + f - T' = Ma_{κμ}$ (2)

Δ: περιστροφικά $\left.\begin{array}{l} TR = I_Δ \cdot a \\ T'R = I_P \cdot a \end{array}\right\} \Rightarrow$

P: "

Κύλιση $a_{κμ} = R \cdot a$ $\quad \Rightarrow TR = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{a_{κμ}}{R}$

$T'R = MR^2 \cdot \frac{a_{κμ}}{R}$

(1)+(2) ⇒ $2Mg\sin\theta - T' - T = 2Ma_{κμ} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2Mg\sin\theta - Ma_{κμ} - \frac{1}{2}Ma_{κμ} = 2Ma_{κμ}$

(3),(4) ⇒ $\frac{7}{2}Ma_{cm} = 2Mg\sin\theta \Rightarrow \boxed{a_{κμ} = \frac{4}{7}g\sin\theta}$

Αντικαθιστώ στην εξ. Δ:

$Mg\sin\theta - F - T = Ma_{κμ} \xrightarrow{T = \frac{1}{2}Ma_{κμ}} F = \frac{1}{5}Mg\sin\theta$

Σύνθετη κύλιση χωρίς ολίσθηση $\quad υ = ωR$

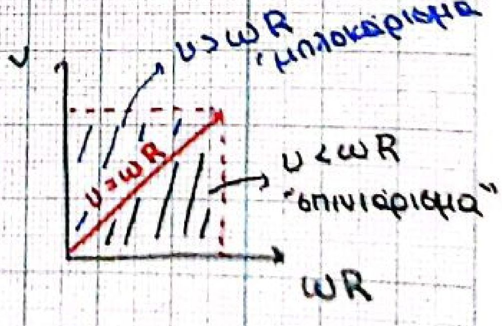
T: στατική γιατί το χαμηλότερο σημείο είναι ακίνητο

ολίσθηση:

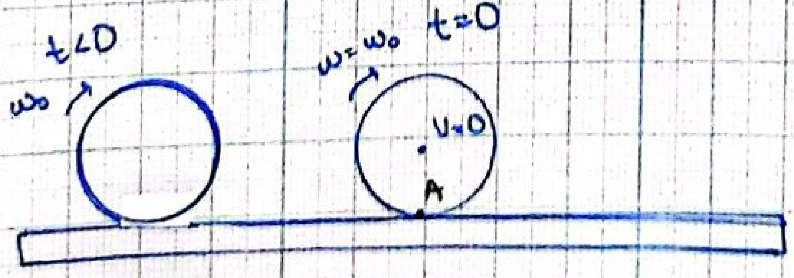
$υ < ωR$ → "σπινιάρισμα"

$υ > ωR$ → "μπλοκάρισμα"

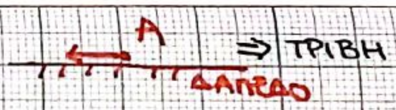
T: ολίσθησης για το χαμηλότερο σημείο της κύλισης ($υ \neq 0$)

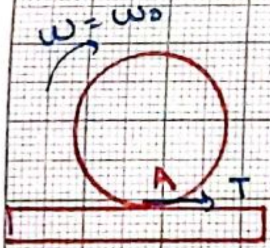


Παράδειγμα 10.10 → Αγαπημένο



Σχετική κίνηση σημείου Α





Μεταφορικά $\quad T = m\,a_{κμ}$

Περιστροφικά $\quad -TR = I\cdot\alpha$

όπου $T = σταθ$
$= mg\cdot\mu$
γνωστό

Μέχρι να πιάσει συνθήκη κύλισης χωρίς ολίσθηση

$$\boxed{a_{κμ} \neq a_\gamma \cdot R}$$

ολοκληρώνω

$$a_{κμ} = \frac{T}{m} = σταθ$$

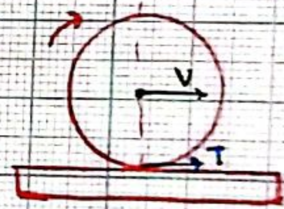
$$v = \cancel{v_0}^{\,0} + a_{κμ}\cdot t$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\alpha = \frac{-TR}{I} = -\frac{TR}{\frac{1}{2}mR^2} = \frac{-2T}{mR} = σταθ$$

Οριακά → κύλιση χωρίς ολίσθηση

οριακά: $v = \omega R$, $t = t_1$

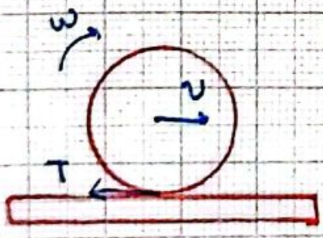


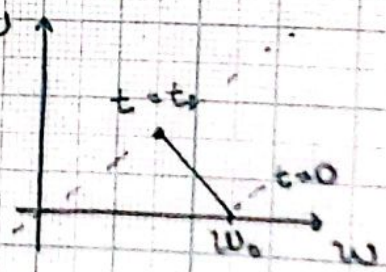
$$\Rightarrow \boxed{\omega R = v} \rightarrow \left(\omega_0 + \frac{-2T}{mR}t\right)R = \frac{T}{m}t_1$$

Για $t > t_1$: αλλάζει φορά η τριβή

γιατί η τάση του δίσκου
είναι να κινηθεί προς τα
δεξιά

(για πάντα

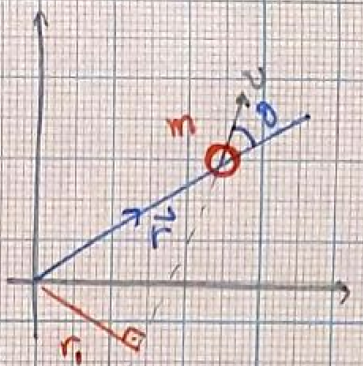




α) Ορισμός για σημειακή μάζα

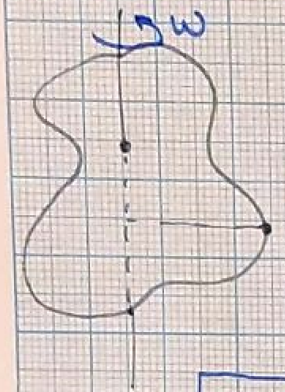
$L = rmυ\sin θ$

$\Rightarrow \boxed{L = rp\sin θ}$



21-12-23

β) Ορισμός για στερεό



$\boxed{L = I \cdot ω}$

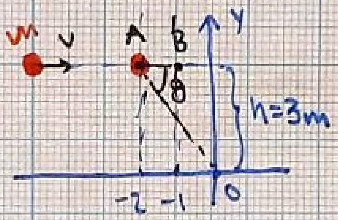
Ν.Ν. για περιστροφή

ροπή $\boxed{τ = \frac{dL}{dt}}$ στροφορμή

$L_1 = L_2 \Rightarrow \boxed{I_1 ω_1 = I_2 ω_2}$

(α) Παράδειγμα

Σώμα μάζας $m = 2kg$ κινείται οριζόντια με σταθ ταχύτητα $υ = 5 m/s$. Να βρεθεί η στροφορμή στα Α, Β.

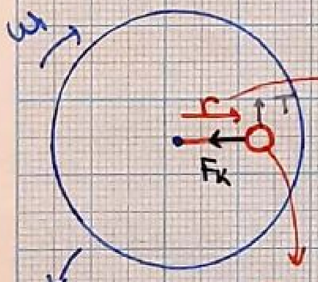


$L_A = r_A m υ \sin θ$
$= mυh$

$L_A = L_B = 2 \cdot 10 \cdot 3 = 30\ kg\,m^2/s$

Παράδειγμα 9.4

Έχουμε προσδέσει δύο ίσες σημειακές $m = 0{,}5kg$ στις άκρες αβαρούς ελατηρίου το οποίο αρχικά κρατείται συμπιεσμένο σε μήκος $x_1 = 0{,}8m$. Τοποθετούμε συμμετρικά το σύστημα μαζών επάνω σε λεπτό οριζόντιο δίσκο μάζας $M = 0{,}2kg$ κ' $R = 1{,}4m$ ($KM_m \equiv KM_{δίσκου}$). Θέτουμε το δίσκο σε περιστροφή με $ω_1 = 15\ r/s$. Αφήνεται το ελατήριο σπρώχνει τις μάζες σε νέο $x_2 = 1{,}2m$ μεταξύ τους. Να βρεθεί η νέα γωνιακή ταχύτητα



άρα $θ = 180°$

$I = \frac{1}{2}MR^2$

$I_0 = mr^2$

$F_κ$: κεντρομόλος

δύναμη νήματος + τριβή (εσωτερ. δύναμη δεν την λαμβάνουμε υπ' όψιν)

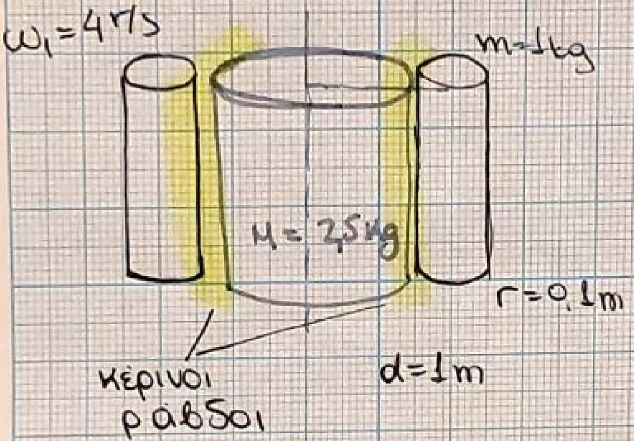
$τ = r \cdot F_κ \cdot \sin 180° \Rightarrow τ = 0$

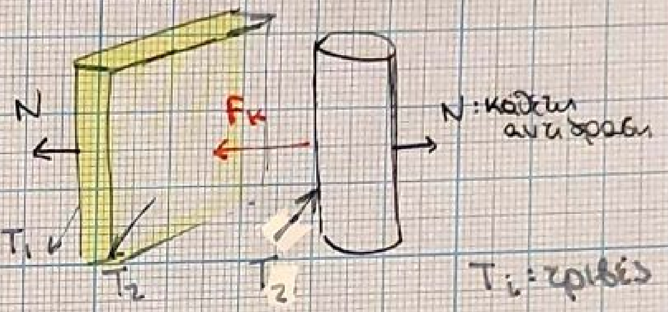
⇓

δεν υπάρχουν ροπές στο σύστημα, άρα χρησιμοποιώ την ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ

$I_{ολ_1} = \frac{1}{2}MR^2 + 2m r^2$, $r = \frac{x_1}{2}$

ΑΣΚΗΣΗ 9.2 Δύο μαγνήτες σε σχήμα λεπτού κυλίνδρου ακτίνας $r=0.1m$ και μάζας $m=1kg$ ο καθένας είναι προσκολλημένοι μαγνητικά επάνω σ' ένα σιδερένιο συμπαγή κύλινδρο μάζας $M=2,5kg$ και ακτίνας $R=0,4m$, ίδιου μήκους, αντιδιαμετρικά μεταξύ τους με τη βοήθεια δύο κέρινων ράβδων (αμελητέας μάζας) πάχους $d=0,1m$ ο καθένας. Εφαρμόζεται θέρμανση στο σύστημα και οι δύο κέρινοι ράβδοι λιώνουν και οι δύο μαγνήτες χωρίς να χάσουν τις σχετικές τους θέσεις έρχονται σε επαφή με το σιδερένιο κύλινδρο. Νέο $\omega_{ολ}=?$





Μαγνητική δύναμη παίζει το ρόλο της κεντρομόλου

$F_κ - N$

Εάν θεωρήσω τ' ολικό σύστημα, $F_κ, N, T$ εσωτερικές δυνάμεις κι άρα δημιουργούν εσωτερικές ροπές. Δηλ. ροπή → 0

διατηρείται η στροφορμή. Άρα $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$

$I_1 = I_{κυλ} + I_{κερ} + 2I_{μαγν}$

$I_{κυλ} \rightarrow \frac{1}{2}MR^2$

$I_{κερ} \rightarrow 0$ γιατί $m_{κερ}=0$

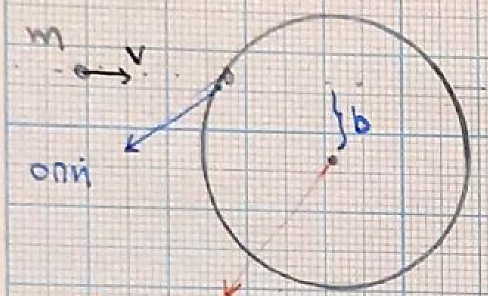
$I_{μαγν} \rightarrow \frac{1}{2}mr^2 + m\underbrace{(R+d+r)^2}_{steiner}$

Μετά το λιώσιμο του κεριού

$I_{μαγν}' = \frac{1}{2}mr^2 + m(R+r)$

ΑΣΚΗΣΗ 9.4

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, μικρή σημειακή μάζα $m=2gr$ αποκολλάται απ' την περιφέρεια κυκλικού δίσκου αμελητέου πάχους ~~βάρους~~ κ' αρχικής μάζας $M=2.0kg$, ακτίνας $R=1,4m$, ο οποίος βρίσκεται στο επίπεδο της σελίδας, με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί μικρή οπή. Ακολούθως, η σημειακή μάζα εκτοξεύεται με σταθ. ταχύτητα $v=16m/s$ με ευθύγραμμη τροχιά η οποία βρίσκεται στο επίπεδο της σελίδας με κατεύθυνση προς την οπή και με την προέκταση της τροχιάς της να απέχει απόσταση $b=0,75m$ από το κέντρο του δίσκου. Αρχικά, ο δίσκος είναι ακίνητος αλλά μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από σταθερό άξονα, ο οποίος περνάει από το κέντρο του και είναι κάθετος στη σελίδα. Η σημειακή μάζα σφηνώνεται στην οπή του δίσκου έτσι ώστε να συμπληρώνει πλήρως το αρχικό σχήμα με ομοιόμορφη κατανομή μάζας που τον αναγκάζει να περιστραφεί. Αμέσως μετά την προσκόλληση, να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου. Σημείωση: Δεν υπάρχει βαρύτητα ή οι ροπές της πλαστικής κρούσης είναι εσωτερικές για το σύστημα δίσκου-σημειακής μάζας.



ο άξονα (ιδανικός) ασκεί δύναμη αντιτίθεται στην δύναμη που ασκεί η m, άρα δεν διατηρείται η ορμή <u>ΜΟΝΟ</u> η στροφορμή

$m = 2\,g$ $\quad M = 2\,kg$ $\quad R = 1,4\,m$

$v = 16\,m/s$ $\quad b = 0,75\,m$

Επειδή οι δυνάμεις της κρούσης είναι εσωτερικές, διατηρείται η L.

ΑΡΧ: $L_1 = m\upsilon b = 2\cdot10^{-3}\cdot16\cdot\frac{3}{4}$

$\Rightarrow \boxed{L_1 = 0.024\ kg\,m^2/s}$

ΤΕΛ: $L_2 = I\cdot\omega = \frac{1}{2}MR^2\cdot\omega_2 = 1,96\,\omega_2$

ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ

$L_{ΑΡΧ} = L_{ΤΕΛ}$

$\boxed{L_1 = L_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\omega_2 = 0,012\ r/s}$