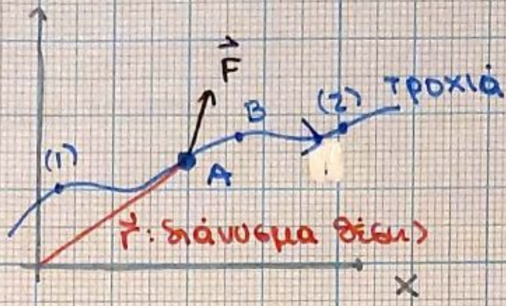
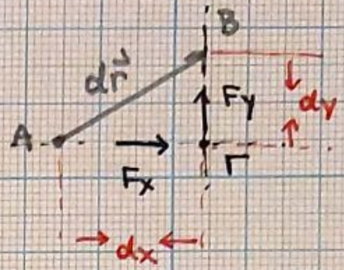
~ Έργο - Ενέργεια ~

Σε χρόνο dt το κινητό πηγαίνει απ' το σημείο (A) στο (B)

$d\vec{r} = \vec{AB}$

έχει συνιστώσες dx, dy



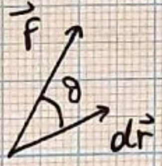


ΟΡΙΣΜΟΣ: $W_{1,2} = \int_1^2 \vec{F}_1\, d\vec{r}$, όμως $\left.\begin{array}{l} d\vec{r} = (dx, dy) \\ \vec{r} = (x, y) \\ \vec{F} = (F_x, F_y) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow W_{1,2} = \int_1^2 (F_x dx + F_y dy)$$

Στο διάστημα AB επειδή είναι απειροστό, $\vec{F} \approx$ σταθερή

$$dW_{AB} = \vec{F}\cdot d\vec{r} \Rightarrow dW_{AB} = |\vec{F}||d\vec{r}|\cos\theta$$

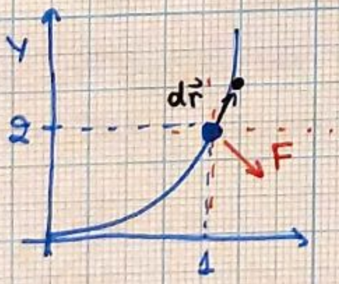


$$dW_{AB} = |\vec{F}|\cdot|d\vec{r}|\cdot\cos\theta$$

$1 \to 2$: μη απειροστό, δηλ $W_{12} = \int dW_{AB}$

Παράδειγμα 6.4

Μια διανυσματική δύναμη $\vec{F} = c(2xy, -y^2)$, όπου $c = 30\ N/m^2$, δρα σε κινητό το οποίο κινείται στην παραβολή $y = 2x^2$. Να βρεθεί το έργο της δύναμης όταν δρα στο κινητό από $x = 1m$ έως $x = 4m$.



$\vec{F}$ στο $(1,2) \to \vec{F} = 30(4, -4)$

$$W = \int_{x=1}^{x=4} (F_x dx + F_y dy) \overset{\substack{y=2x^2 \\ x=1 \\ y=2}}{\Longrightarrow} W = \int_{x=1}^{4} F_x dx + \int_{y=2}^{32} F_y dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = c\int_{x=1}^{4} 2xy\,dx - c\int_{y=2}^{32} y^2 dy \Rightarrow$$

$y = ;$ → θέτω $y = 2x^2$

$$\Rightarrow W = 4c\int_{x=1}^{4} x^3 dx - c\int_{y=2}^{32} y^2 dy = c\left[x^4\right]_1^4 - c\left[\tfrac{1}{3}y^3\right]_2^{32} =$$

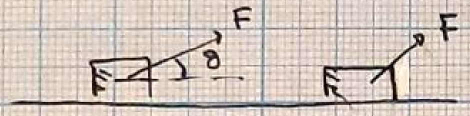
$$= 30\left(4^4 - 1^4 - \tfrac{1}{3}32^3 + \tfrac{1}{3}2^3\right) = \ldots \Rightarrow W \cong -3{,}2\cdot 10^5\ J$$

Μια διάσταση : $\vec{F} \parallel x \quad d\vec{r} \parallel x$

$$W = \int_1^2 F(x)\,dx$$

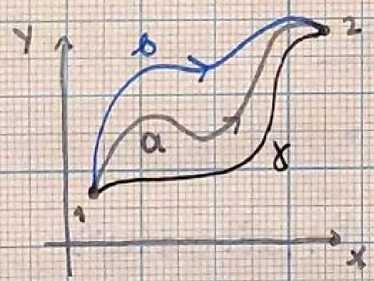
π.χ. Για να βρούμε έργο ενός αστροναύτη δεν παίρνω mg, θα βρω μεγαλύτερο έργο. Βρίσκω σχέση F - x και ολοκληρώνω

Μια διάσταση x
δύο διαστάσεις $\vec{F}$



$$\boxed{W = \int F(x)\,dx \cdot \cos\theta}$$

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ



$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Για κάποιες δυνάμεις : W: ανεξάρτητο της διαδρομής

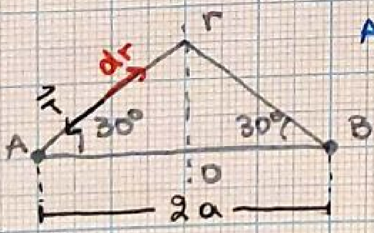
εξαρτάται μόνο το αρχικό κ' το τελικό σημείο

Εάν $W_{12}^{(\alpha)} = W_{12}^{(\beta)} = W_{12}^{(\gamma)}$, τότε F ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ
(μπορώ να ορίσω δυναμική ενέργεια)
Δύναμη Πίεσης
Βάρος

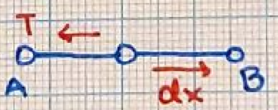
Διαφορετικά, F ΜΗ-ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ
Τριβή

Παράδειγμα 6.8

Στο παρακάτω σχήμα ένα υλικό σημείο βρίσκεται στο σημείο A ενός ισοσκελούς τριγώνου με μήκος βάσης AB = 2α. Υπολογίστε το έργο για τις δύο διαδρομές AOB (ευθύγραμμη κατά μήκος της βάσης) και AΓB (κατά μήκος των δύο ίσων πλευρών) των εξής δύο δυνάμεων : (α) της τριβής ολίσθησης (T=σταθ και ίση με T παντού και (β) μιας τυχαίας σταθ. δύναμης F με κατεύθυνση κατά τον θετικό άξονα x (δηλαδή $\vec{F} = F\vec{e}_x$



A. Έργο τριβής



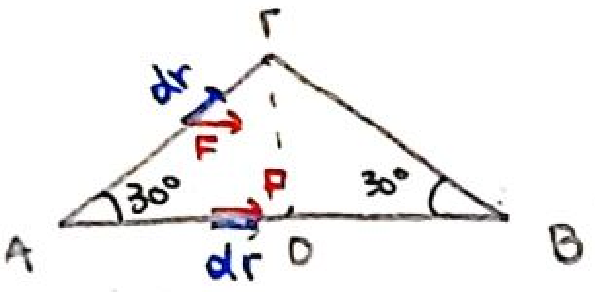
$$W_{AB}^{(T)} = \int_A^B |\vec{T}|\,dx \cdot \cos(180^\circ) = -T\int_A^B dx = -T\,2\alpha$$

$$W_{A\Gamma B}^{(T)} = \int_A^\Gamma |\vec{T}|\,dr\,\cos(180^\circ) + \int_\Gamma^B |\vec{T}|\,dr\,\cos(180^\circ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_{A\Gamma B}^{(T)} = -T\,\frac{2\alpha}{\sqrt{3}/2} = -4\frac{T}{\sqrt{3}}\alpha$$

το έργο της τριβής εξαρτάται από την διαδρομή, άρα T: ΜΗ-ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ

Για την σταθ $\vec{F}$



$A\Gamma \cos 30^\circ = AO$

$\Gamma B \cos 30^\circ = OB$

B. Έργο $\vec{F}$

AB: $dr = dx$

$\cdot\, W_{AB}^{(F)} = F(AB) = \underline{2Fa}$.

$\cdot\, W_{A\Gamma B}^{(F)} = W_{A\Gamma}^{(F)} + W_{\Gamma B}^{(F)} =$

$= \int_A^\Gamma |\vec{F}||d\vec{r}|\cos 30^\circ + \int_\Gamma^B |\vec{F}||d\vec{r}|\cos(30^\circ)$

$= F\frac{\sqrt{3}}{2}\int_A^\Gamma dr + F\frac{\sqrt{3}}{2}\int_\Gamma^B dr =$

$= F\frac{\sqrt{3}}{2}(A\Gamma) + F\frac{\sqrt{3}}{2}(\Gamma B)$

$= F(AO) + F(OB) = F(AB) = \underline{2Fa}$

άρα η F είναι συντηρητική δύναμη

Για συντηρητικές δυνάμεις ορίζεται μια συνάρτηση, γνωστή ως συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας $U(x)$, ως εξής

$$\boxed{F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}}$$

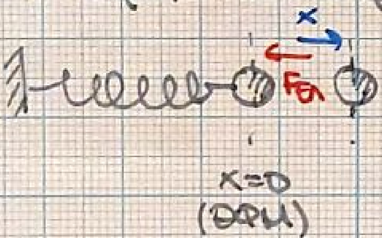
$$W_{12} = \int_1^2 F(x)\,dx = -\int_1^2 \frac{dU(x)}{\cancel{dx}}\,\cancel{dx} = -\int_1^2 dU(x) = -(\underbrace{U(x_2)-U(x_1)}_{\text{διαφορά δυναμικού}})$$

άρα το έργο (για συντηρητικές δυνάμεις)
ΔΕΝ εξαρτάται απ' την διαδρομή

π.χ. • Βάρος $\vec{B} = m\vec{g} \Rightarrow B = -mg$

$$-mg = -\frac{dU}{dy} \Rightarrow U(y) = mgy + C$$

• Δύναμη Ελατηρίου $F_{ελ} = -kx$



$$-kx = -\frac{dU(x)}{dx} \Rightarrow U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

• Ηλεκτροστατική Δύναμη $F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$ $\vec{F} = -\frac{dU}{dr}$

$$k\frac{q_1 q_2}{r^2} = -\frac{dU(x)}{dr} \Rightarrow U(r) = k\frac{q_1 q_2}{r}$$

23-11-23

Παράδειγμα 6.9

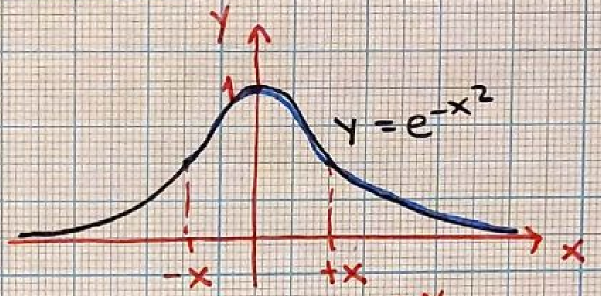
Η δυναμική ενέργεια μιας δύναμης που δρα σε μια διάσταση δίνεται από τη σχέση: $U(x) = c\cdot e^{-bx^2}$, όπου b, c = σταθ και b, c > 0
(α) Να βρεθεί η δύναμη F(x). (β) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις U(x) και F(x) και να ερμηνευτεί η μεταξύ τους σχέση.

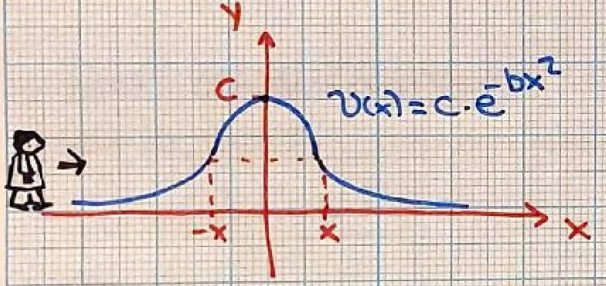
Λύση: α) F δύναμη ?

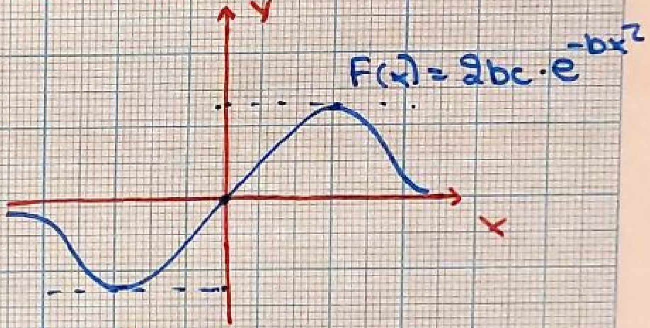
$$F(x) = -\frac{dU}{dt} \Rightarrow \boxed{F(x) = 2bcxe^{-bx^2}}$$

Δυναμική ενέργεια μιας δύναμης: $U(x) = c\cdot e^{-bx^2}$

β) Μαθηματικά
$y = e^{-x^2}$
Για $x = 0 \rightarrow y = 1$
Για $x \rightarrow \infty \rightarrow y \rightarrow 0$







! Στις 2 Διαστάσεις: $\vec{F} = (\vec{F}_x, \vec{F}_y)$!

Σώμα διαγράφει καμπύλη x, y. Εάν το έργο της $\vec{F}$ είναι ανεξάρτητο της διαδρομής (⇒ η δύναμη είναι συντηρητική) ΟΡΙΖΕΤΑΙ η δυναμική ενέργεια U(x, y)

$$\boxed{F_x = -\frac{dU}{dx} \quad \text{και} \quad F_y = -\frac{dU}{dy}}$$

π.χ. $\frac{d(y^2x + \sin y)}{dx} = ;$

Αγνοώ το y (το θεωρώ σταθερό) κι παραγωγίζω ως προς x

Άρα έχουμε: $\frac{d(y^2x+\sin y)}{dx} = y^2(x)' + 0 = y^2$

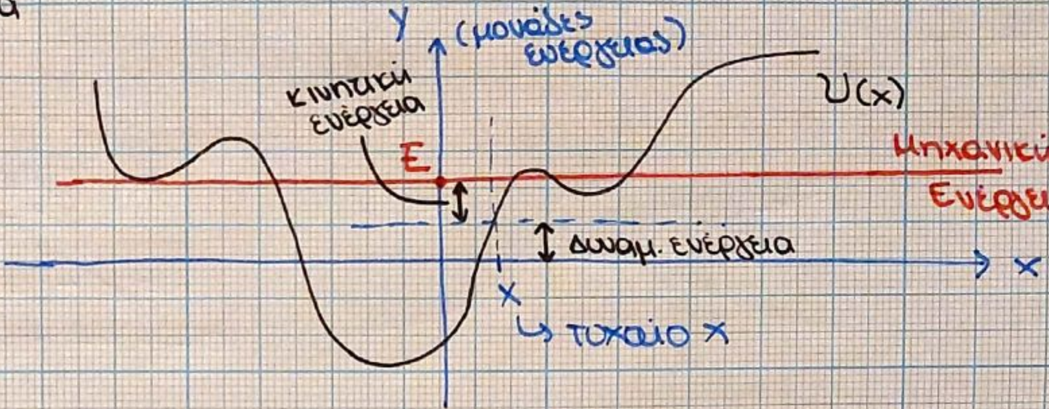
ομοίως, $\frac{d(e^{-xy^2})}{dy} = (-xy^2)'\cdot e^{-xy^2} = -2xy\cdot e^{-xy^2}$

★ Δυναμική Ενέργεια και σημεία ισορροπίας - Δέσμιες τροχιές ★

Γενικά, εάν $U(x)$ προέρχεται από μία μόνο δύναμη που δρα στο σώμα, τότε η Μηχανική Ενέργεια διατηρείται

$\boxed{E = K + U \ : \text{σταθερό}}$, όπου K: Κινητική ενέργεια

Μηχανική Ενέργεια

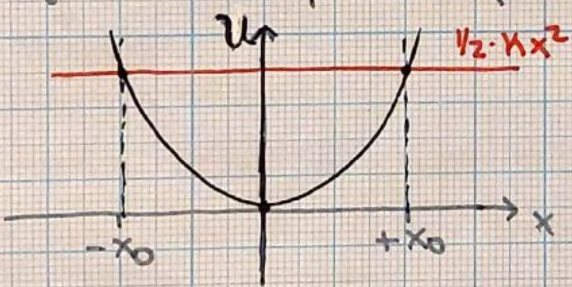


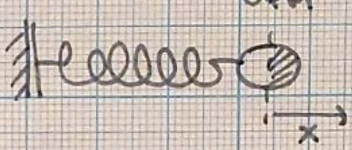
Πάνω απ' την οριζόντια ευθεία της (E) θα είχα $K<0$: ΑΤΟΠΟ

Άρα η κίνηση περιορίζεται μόνο στα x για τα οποία ισχύει

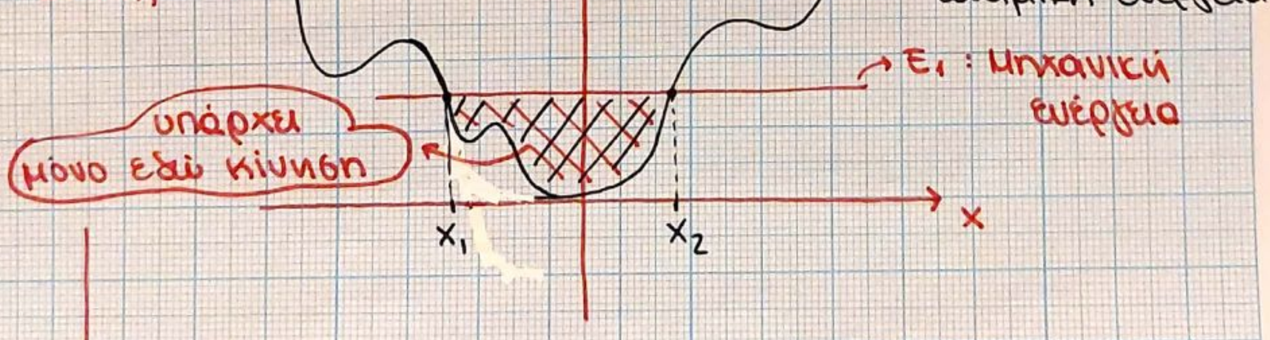
$\boxed{U(x) \le E}$

π.χ. Η γνωστή δύναμη ελατηρίου



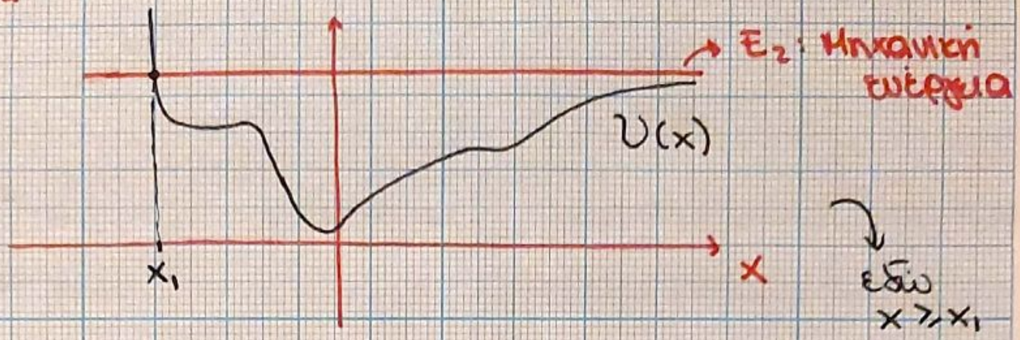


Γενικά, αν $E=E_1$

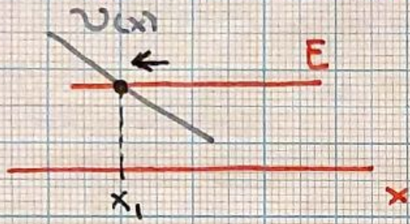


$\Rightarrow \boxed{x_1 \le x \le x_2}$: Δέσμια τροχιά

Εάν $E = E_2$



Τα σημεία όπου η $U(x)$ τέμνει την οριζόντια γραμμή E της μηχανικής ενέργειας λέγονται "σημεία αναστροφής"



στο $x = x_1$:

$$F = -\frac{dU}{dx} > 0$$

↓

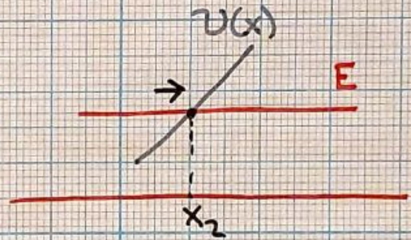
αρνητικό
(αρνητική κλίση)

στο $x = x_2$:

$$F = -\frac{dU}{dx} < 0$$

↓

θετικό
(θετική κλίση)



Στα σημεία όπου η κλίση της U είναι μηδέν

$\boxed{U(x) = 0 \Rightarrow F = 0}$: σημεία ισορροπίας