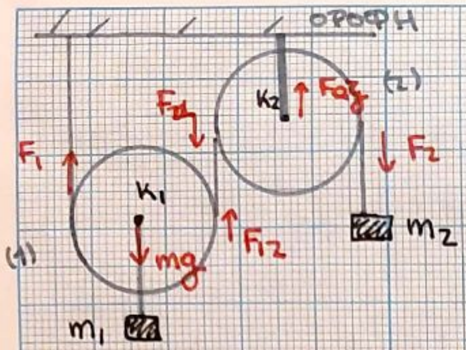


(1): Στο κέντρο ασκείται $m_1 g$.

$$m_1 g = F_1 + F_2$$

* ιδανικές τροχαλίες: οι δυνάμεις εκατέρωθεν είναι ίσες

$$\boxed{F_1 = F_{12} = \frac{m_1 g}{2}}$$

* $F_{21} = F_{12}$: δράση - αντίδραση

(2): $F_{21} = -\dfrac{m_1 g}{2}$, $F_2 = m_2 g$ } ιδανική τροχαλία → $\boxed{F_{\alpha\xi} = F_{21} + F_2}$ $\boxed{\dfrac{m_1}{2} = m_2}$

01-11-23

{Δυνάμεις} Νόμοι του Νεύτωνα

– 1ος Νόμος του Νεύτωνα ή Νόμος της Αδράνειας: $\sum \vec{F} = \vec{0}$

Απουσία δυνάμεων σ' ένα σώμα συμβαίνει ότι διατηρεί την κινητική του κατάσταση, δηλαδή: αν κινείται με $\vec{υ}$, τότε θα συνεχίσει να κινείται ευθεία με ταχύτητα $υ$, αν είναι ακίνητο, παραμένει ακίνητο.

02-11-23

– 2ος Νόμος του Νεύτωνα

$$\underbrace{\sum \vec{F}}_{\text{διανυσματικό άθροισμα}} = m\vec{a}$$

$m\vec{a}$ → Πολ/μος θετικής σταθεράς με διάνυσμα $\vec{a}$

$\vec{a} \upuparrows \sum \vec{F}$

* Ισχύουν οι ίδιες εξισώσεις σε συνιστώσες ή μέτρο

⇓

$$\begin{bmatrix} \sum F_x = m \cdot a_x \\ \sum F_y = m \cdot a_y \end{bmatrix}$$

ΜΕΤΡΟ

$$|\sum \vec{F}| = m \cdot |\vec{a}|$$

Στη 1η διάσταση: $\sum F = m a \Rightarrow \sum F = m \dfrac{du}{dt}$

$\sum F$ → γνωρίζω αυτό

$\dfrac{du}{dt}$ → βρίσκω αυτό με ολοκλήρωση

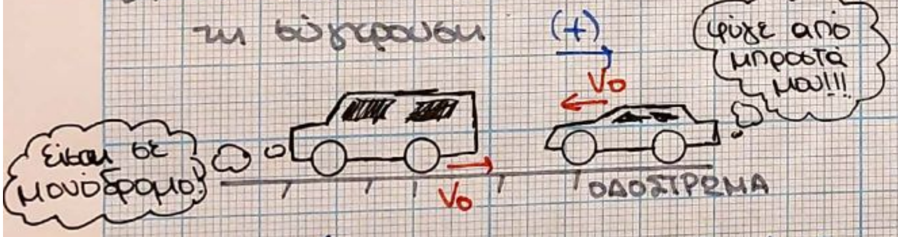
Παράδειγμα 4.7 Σε μια δομική σύγκρουση, ένα αυτοκίνητο μάζας 2.500 kg κ' ένα μικρό φορτηγό 10 τόνων (10.000 kg) οδηγούνται προς μετωπική σύγκρουση το ένα επάνω στο άλλο με την ίδια σταθερή ταχύτητα 10 m/s. Το οδόστρωμα είναι λείο κ' χωρίς τριβές, η σύγκρουση τελείως ελαστική λόγω των μικρών ταχυτήτων και δεν έγινε χρήση των φρένων τόσο πριν αλλά τόσο κ' μετά τη σύγκρουση. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η δύναμη της σύγκρουσης που έδρασε στο αυτοκίνητο συναρτήσει του χρόνου. Να βρεθούν:

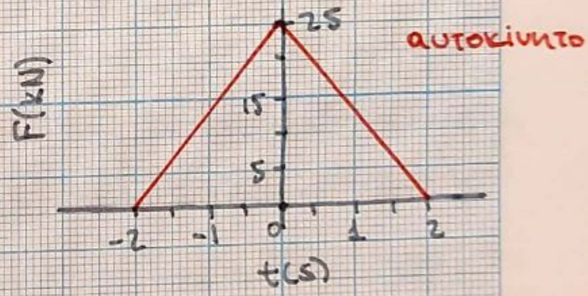
α) η μαθηματική εξίσωση που περιγράφει τη δύναμη (με τη βοήθεια της γρ. παράστασης)

β) η δύναμη που δρα στο φορτηγό συναρτήσει του χρόνου

γ) οι ταχύτητες των δύο οχημάτων συναρτήσει του χρόνου κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης.

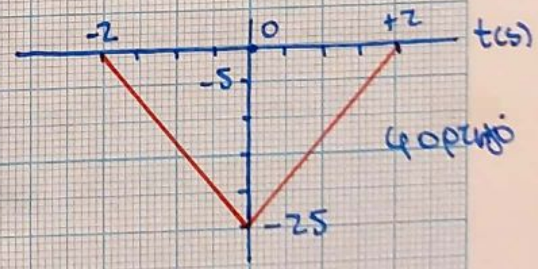
δ) οι ταχύτητες των δύο οχημάτων συναρτήσει του χρόνου μετά τη σύγκρουση





α) $f = \begin{cases} 12{,}5t + 25, & -2 \le t < 0 \\ -12{,}5t + 25, & 0 \le t < 2 \end{cases}$

β)



γ) επιταχύνσεις

$a = \dfrac{f}{m} = \begin{cases} 0, & t \le -2 \\ 5t + 10, & -2 < t < 0 \\ -5t + 10, & 0 \le t < 2 \\ 0, & t > 2 \end{cases}$

για το αυτοκίνητο

$A = \begin{cases} 0, & t < -2 \\ -1{,}25 \cdot t - 2{,}5, & -2 < t < 0 \\ 1{,}25 \cdot t - 2{,}5, & 0 \le t < 2 \\ 0, & t > 2 \end{cases}$

↓

φορτηγό

αυτοκ.: $v = \int a\,dt = \begin{cases} c_1, & t \le -2 \\ \frac{5}{2}t^2 + 10t + c_2 \\ -\frac{5}{2}t^2 + 10 + c_3 \\ c_4, & t > 2 \end{cases}$

Αρχική συνθήκη: $t = -2$, $v = v_0 = 10\,m/s$

Άρα $c_1 = -10$

Οριακά για $t = -2$: $v = v_0 \rightarrow c_2 = 0$

(Η σύγκρουση είναι τελείως ελαστική)

Από επιβολή συνέχειας του $u(t)$ στο $t=0$: πρέπει $\lim\limits_{t\to 0^+} u(t) = \lim\limits_{t\to 0^-} u(t) \rightarrow$

$\rightsquigarrow C_2 = C_3 \rightsquigarrow \boxed{C_3 = 0}$

Τελική συνθήκη: οριακά $t=2 \rightsquigarrow C_4 = -\dfrac{5\cdot 2^2}{2} + 10\cdot 2 - 20 \Rightarrow \boxed{C_4 = +10}$

Άρα v αυτοκινήτου
$$\begin{cases} -10, & t \le -2 \\ \dfrac{5t^2}{2} + 10t, & -2 < t < 0 \\ -\dfrac{5t^2}{2} + 10t, & 0 \le t < 2 \\ +10, & t \ge 2 \end{cases}$$

* Άρα, μετά την σύγκρουση οι ταχύτητες των δύο οχημάτων είναι: $v = +10$ m/s, $V = -10$ m/s

φορτ: $V = \int A\,dt$

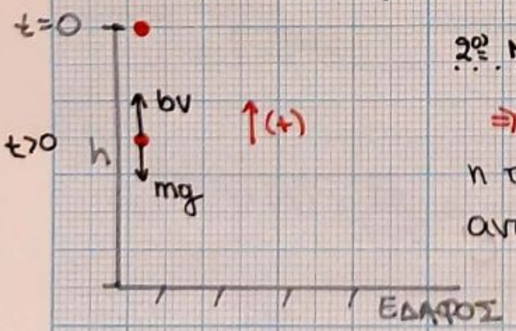
$$\Rightarrow V = \begin{cases} w_1, & t < -2 \\ -\dfrac{5}{4}t^2 - 2{,}5t + w_2, & t \ge -2,\ t < 0 \\ \dfrac{5}{4}t^2 - 2{,}5t + w_3, & 0 \le t < 2 \\ w_4, & t > 2 \end{cases}$$

* Άρα, πριν την σύγκρουση οι ταχύτητες των δύο οχημάτων είναι: $v = 10$ m/s, $V = +10$ m/s

Ομοίως, $w_1 = 10$, $w_2 = 0$, $w_3 = 0$, $w_4 = -10$

Παράδειγμα 4.8 08-11-23

Αλεξιπτωτιστής μάζας m εκτελεί ελεύθερη πτώση με μηδενική αρχ. ταχύτητα από αερόστατο που βρίσκεται ακίνητο σε ύψος h από το έδαφος. Εάν η δύναμη τριβής του αέρα έχει μέτρο bv όπου $v(t)$ η ταχύτητα του αλεξιπτωτιστή σε κάθε χρονική στιγμή t και b μια σταθερά, να βρεθούν η v και το ύψος h του αλεξιπτωτιστή συναρτήσει του χρόνου.



↑(+)

2ος Νόμος του Νεύτωνα $\Sigma F_y = m\cdot a$

$\Rightarrow -mg - bv = m\cdot a = \dfrac{dv}{dt}\cdot m \Rightarrow \boxed{\dfrac{du}{dt} + \dfrac{b}{m}u = -g} \Rightarrow$

η τριβή είναι πάντα αντίθετη της κίνησης

b: σταθ > 0

$\Rightarrow \dfrac{du}{dt} + \dfrac{b}{m}\left(u + \dfrac{mg}{b}\right) = 0$

Θέτω $v_0 = \dfrac{mg}{b}$ και $B = \dfrac{b}{m}$

$\Rightarrow \dfrac{du}{dt} + B(v - v_0) = 0 \Rightarrow \dfrac{d(v+v_0)}{dt} + B(v - v_0) = 0 \Rightarrow \dfrac{d(v+v_0)}{dt} = -B(v-v_0$

$\rightsquigarrow v + v_0 = A e^{-Bt}$

Εναλλακτικά

$$\frac{d(v+v_0)}{dt} = -b(v+v_0) \xrightarrow{\text{ολοκληρώνω}}$$

$$\int \frac{d(v+v_0)}{(v+v_0)} = -\int b\,dt$$

Θέτω $\omega = v+v_0$

$$\int \frac{d\omega}{\omega} = \ln\omega$$

$$\Rightarrow \ln(v+v_0) = -bt + c$$

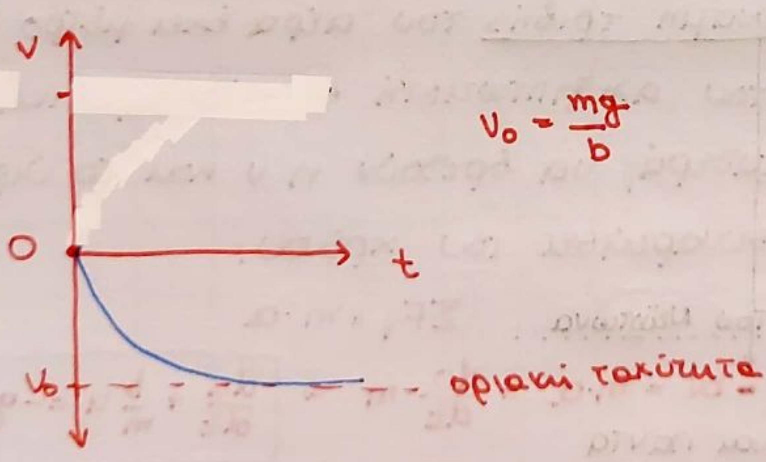
$$\Rightarrow v+v_0 = e^{-bt+c} = e^{-bt}\cdot e^{c}$$

Θέτω $A = e^{c}$: σταθερά $\quad \boxed{v+v_0 = Ae^{-bt}}$

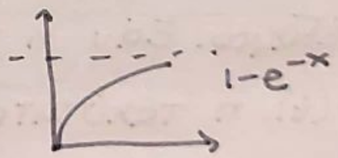
$$\Rightarrow \boxed{v = -v_0 + Ae^{-bt}}$$

Αρχική συνθήκη $v(0)=0 \rightsquigarrow 0 = -v_0 + A\cdot e^{0} \Rightarrow \boxed{A = v_0}$

άρα $v(t) = v_0(e^{-bt}-1) \Rightarrow \boxed{v(t) = -v_0(1-e^{-bt})}$



$v_0 = \frac{mg}{b}$



$$y(t) = \int v(t)\,dt = -v_0 t + \frac{v_0 e^{-bt}}{-b} + c'$$

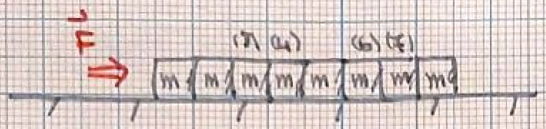
Αρχικές συνθήκες $t=0$: $y(0)=h \Rightarrow$

$$\Rightarrow h = -\frac{v_0}{b} + c' \Rightarrow c' = h + \frac{v_0}{b}$$

άρα $\boxed{y(t) = -v_0 t + \frac{v_0}{b}(1-e^{-bt}) + h}$

Παράδειγμα 4.11

Οκτώ κιβώτια σε επαφή μεταξύ τους σε λείο δάπεδο

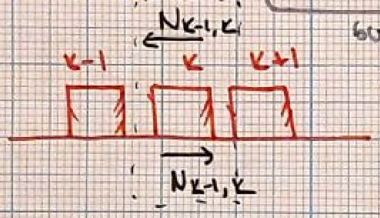


Να βρεθεί ο λόγος $\dfrac{N_{34}}{N_{67}}$, όπου $N_{\kappa,\kappa+1}$ δύναμη αλληλεπίδρασης κιβωτίου κ με το κ+1.

Συνολική μάζα $M=8m$

$F=8m\cdot a \Rightarrow \boxed{F = M\alpha} \Rightarrow \boxed{a = \dfrac{F}{M}}$ (1)

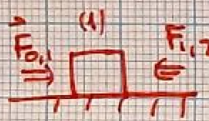
συσσωμάτωμα



2ος N.N: $N_{\kappa-1,\kappa} - N_{\kappa+1,\kappa} = m\cdot a$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{N_{\kappa-1,\kappa} - N_{\kappa+1,\kappa} = \dfrac{F}{8}}$ (2)

Για $\kappa=1$: $\vec{F}_{0,1} = \vec{F}$



$(2) \overset{\kappa=1}{\Rightarrow} F - N_{12} = \dfrac{F}{8} \Rightarrow \boxed{N_{12} = \dfrac{7F}{8}}$

Η δύναμη F ελαττώνεται κάθε φορά κατά $\frac{1}{8}$

Για $\kappa=2$: $N_{12} - N_{32} = \dfrac{F}{8} \Rightarrow \boxed{N_{32} = \dfrac{6F}{8}}$ ⟶ άρα γενικά ο τύπος

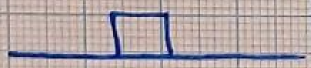
$N_{\kappa+1,\kappa} = (8-\kappa)\dfrac{F}{8}$

Ο λόγος είναι: $\dfrac{N_{34}}{N_{67}} = \dfrac{8-3}{8-6} = \dfrac{5}{2} = 2,5$

★ Παράδειγμα ★

Σ' ένα σώμα μάζας m στην 1-διάσταση εφαρμόζεται δύναμη $F=F_0\cos\omega t$, όπου F_0, ω: σταθερές >0

Εάν στο $t=0$ το κινητό βρίσκεται στο $x=x_0$ με μηδενική ταχύτητα, να βρεθεί το $x(t)$ για $t>0$.



$a(t) = \dfrac{F_0}{m}\cos\omega t \xrightarrow{\text{ολοκλ.}} v(t) = \dfrac{F_0}{m\omega}\sin\omega t + c_1$

Στο $t=0$, $v(0)=0 \Rightarrow c_1=0$

άρα $v(t) = \dfrac{F_0}{m\omega}\sin\omega t \xrightarrow{\text{ολοκλ}} x(t) = -\dfrac{F_0}{m\omega^2}\cos\omega t + c_2$

Στο $t=0$: $x=x_0 \Rightarrow$ ~~...~~ $\Rightarrow c_2 = x_0 + \dfrac{F_0}{m\omega^2}$