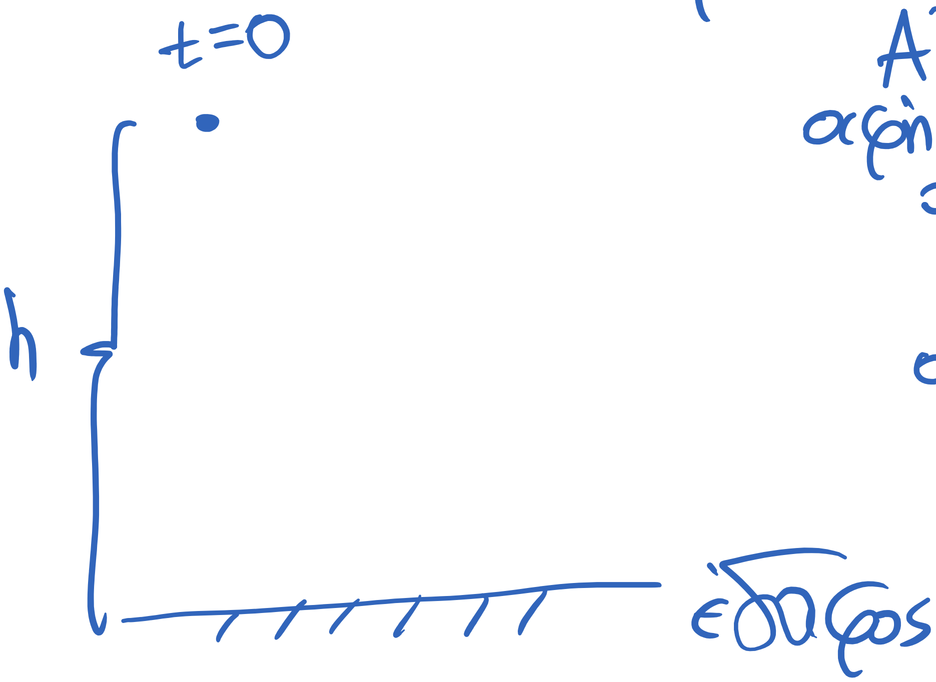
Παράδειγμα 4.8

Αλεξιπτωτιστής αφήνεται από αερόστατο σε ύψος. Το αλεξίπτωτο τον προσδίδει δύναμη αντίστα-σης με μέτρο bv



b: σταθερά > 0.

v: ταχύτητα σε χρόνο t

Να βρεθεί $v(t)$, $y(t)$

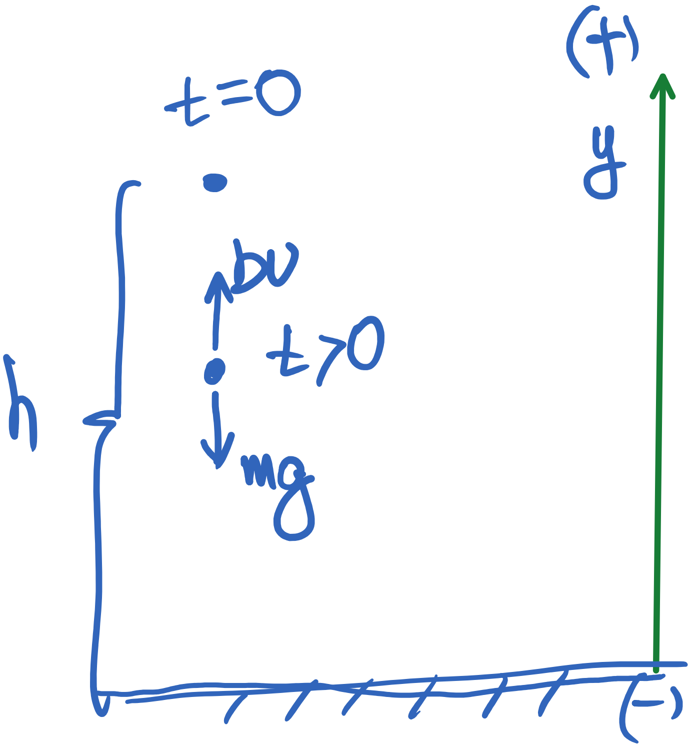
Δυο δυνάμεις δρουν

$2^{ος}$ Νόμος Νεύτωνα

$$\Sigma F_y = ma$$

$$-mg - bv = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{b}{m}v = -g$$



$$\frac{dv}{dt} + \frac{b}{m}\left(v + \frac{mg}{b}\right) = 0$$

Θέτω

$$v_0 = \frac{mg}{b}$$

$$\beta = \frac{b}{m}$$

$$\frac{dv}{dt} + \beta(v + v_0) = 0$$

$$\frac{d(v+v_0)}{dt} = -\beta(v+v_0) \rightsquigarrow v + v_0 = Ae^{-\beta t}$$

Εναλλακτικά, χωριζομ. μεταβλη.

$$\frac{d}{dt}(u+u_0) = -b(u+u_0)$$

$$\frac{d(u+u_0)}{u+u_0} = -b\,dt$$ ολοκληρώνω

$$\int \frac{d(u+u_0)}{u+u_0} = -b\int dt$$

θέτω
$w = u+u_0$
$\int \frac{dw}{w} = \ln w$

$$\ln(u+u_0) = -bt + c$$ υψώνω e

$$u+u_0 = e^{-bt+c} = e^{-bt}e^{c}$$

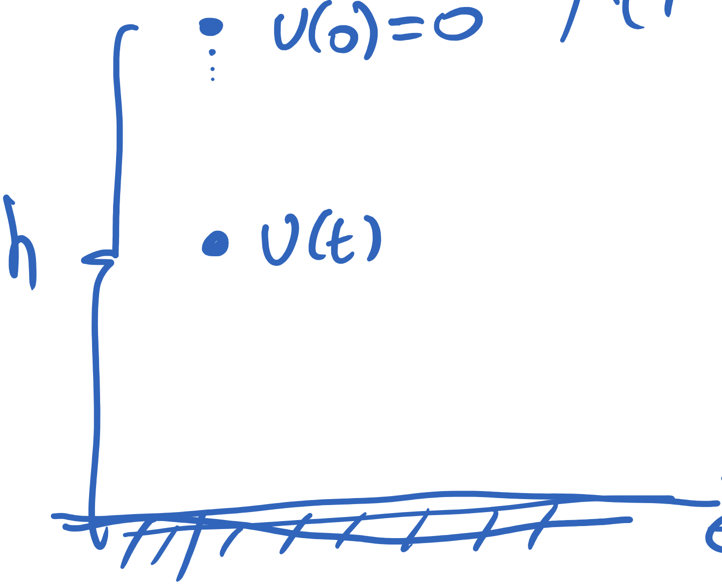
Θέτω $A = e^{c}$: σταθερά

$$\boxed{u+u_0 = Ae^{-bt}}$$

$$v = -v_0 + Ae^{-\beta t}$$

$t=0$

Αρχική συνθήκη $v(0)=0$



έδαφος

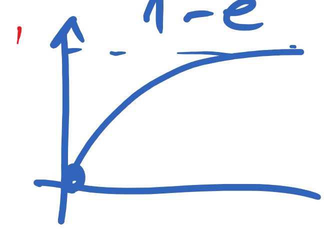
$\beta = \frac{b}{m}$

$v_0 = \frac{mg}{b}$

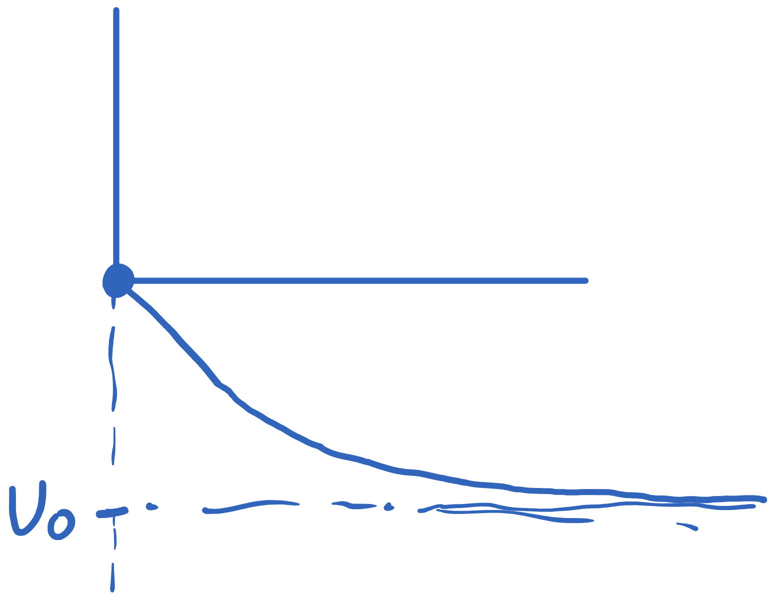
$0 = -v_0 + A \Rightarrow$

$A = v_0$

$1-e^{-x}$



$$v(t) = -v_0(1-e^{-\beta t})$$



$v_0 = \frac{mg}{b}$

οριακή ταχύτητα

Τετάρτη, 8 Νοεμβρίου 2023 10:21 πμ

$$v(t) = -v_0\left(1 - e^{-\beta t}\right)$$

$$y(t) = \int v(t)\,dt = -v_0 t + \frac{v_0}{-\beta} e^{-\beta t} + c'$$

Αρχικές συνθήκες $t=0$, $y(0)=h$

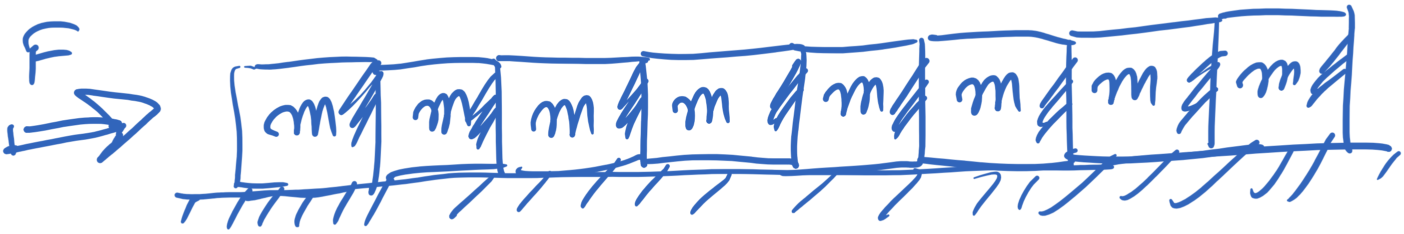
$$h = -\frac{v_0}{\beta} + c' \Rightarrow \boxed{c' = h + \frac{v_0}{\beta}}$$

$$y(t) = -v_0 t - \frac{v_0}{\beta} e^{-\beta t} + h + \frac{v_0}{\beta}$$

$$\boxed{y(t) = -v_0 t + \frac{v_0}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right) + h}$$

Παράδειγμα 4.11

Οκτώ κιβώτια σε επαφή μεταξύ τους σε λείο δάπεδο



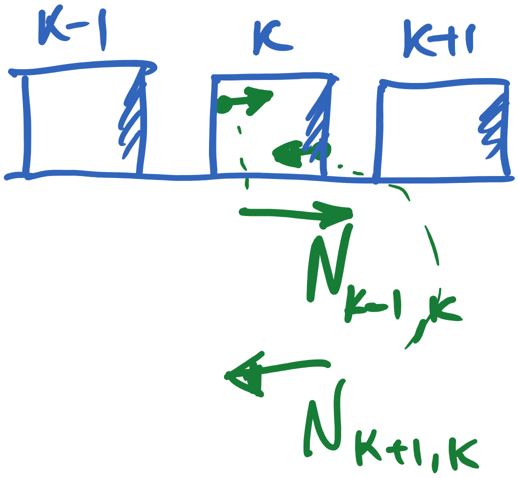
Να βρεθεί ο λόγος $\dfrac{N_{34}}{N_{67}}$

όπου $N_{\kappa,\kappa+1}$ δύναμη αλληλεπίδρασης κιβωτίου κ με κ+1

Συνολική μάζα $M = 8m$

$$F = Ma \Rightarrow a = \frac{F}{M} = \frac{F}{8m}$$

συσσωμάτωμα



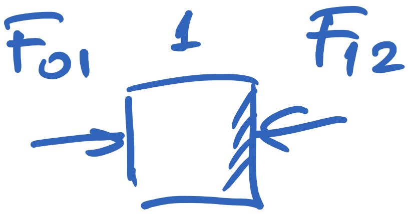
2ος Ν.Ν k

$$N_{k-1,k} - N_{k+1,k} = ma$$

$$\boxed{N_{k-1,k} - N_{k+1,k} = \frac{F}{8}}$$

$$\boxed{N_{k-1,k} - N_{k+1,k} = \frac{F}{8}}$$

$k=1$



$F_{01} = F$

$k=1$ $\quad F - N_{12} = \frac{F}{8} \Rightarrow N_{12} = \frac{7F}{8}$

$k=2$ $\quad N_{12} - N_{32} = \frac{F}{8} \Rightarrow N_{32} = \frac{6F}{8}$

Γενικός τύπος $\quad N_{k,k+1} = (8-k)\frac{F}{8}$

Ζητούμενος λόγος

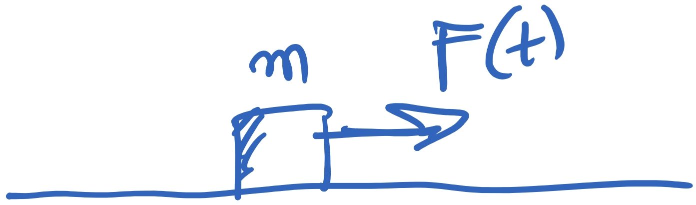
$$\frac{N_{34}}{N_{67}} = \frac{8-3}{8-6} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

Παράδειγμα

Σε σώμα μάζας m στην 1-διάσταση εφαρμόζεται δύναμη $F = F_0 \cos\omega t$ όπου F_0, ω : θετικές σταθερές. Εάν στο $t=0$ το κινητό βρίσκεται στο $x = x_0$ με μηδενική ταχύτητα, να βρεθεί το $x(t)$ για $t > 0$

2ο Ν.Ν.

$F(t) = ma$



$a(t) = \frac{F_0}{m} \cos\omega t$ $\rightarrow$ ολοκλήρωση

$$u(t) = \frac{F_0}{m\omega} \sin\omega t + c_1$$

Στο $t=0$, $u(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

Επανολοκληρώνω $x(t) = -\frac{F_0}{m\omega^2} \cos\omega t + c_2$

$\downarrow$

Στο $t=0$, $x(0) = x_0$ $\quad x_0 = -\frac{F_0}{m\omega^2} + c_2 \Rightarrow$

$$c_2 = x_0 + \frac{F_0}{m\omega^2}$$

Τελικά

$$\boxed{x(t) = x_0 + \frac{F_0}{m\omega^2}(1 - \cos\omega t)}$$