$2^{ος}$ νόμος του Νεύτωνα

Παρουσία ενός αριθμού δυνάμεων σε ένα σώμα με συνισταμένη $\Sigma\vec{F}$, αυτό αποκτάει επιτάχυνση $\vec{a}$ που δίνεται από τον τύπο

$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$	$2^{ΟΣ}$ ΝΟΜΟΣ ΝΕΥΤΩΝΑ	(4.1)

όπου m είναι η μάζα του σώματος. Προσέξτε ότι η παραπάνω είναι διανυσματική εξίσωση. Σύμφωνα με αυτά που είπαμε στον πολλαπλασιασμό διανυσμάτων με αριθμό, το $\Sigma\vec{F}$και η $\vec{a}$ έχουν πάντοτε την ίδια κατεύθυνση εφόσον η μάζα είναι εξ 'ορισμού θετική. Επίσης μπορούμε να γράψουμε και για τα αντίστοιχα μέτρα μια παρόμοια εξίσωση:

$\Sigma F = ma$	$2^{ΟΣ}$ ΝΟΜΟΣ ΝΕΥΤΩΝΑ - ΜΕΤΡΟ	(4.2)

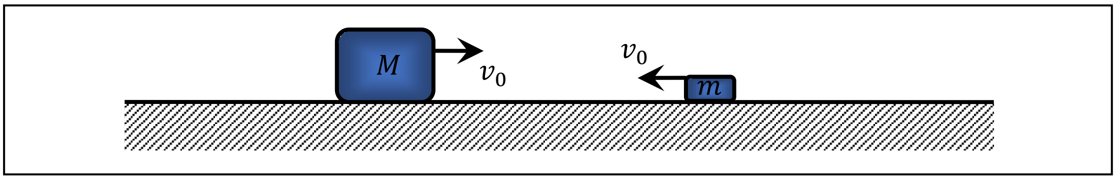
Στην παραπάνω εξίσωση το ΣF έχει την έννοια της διανυσματικής άθροισης όλων των δυνάμεων ακολουθούμενη από την πράξη του μέτρου. Από την άλλη, εάν μας είναι πιο βολικό, μπορούμε να αναλύσουμε και σε συνιστώσες. Είδαμε στον εδάφιο με τα διανύσματα ότι όταν πολλαπλασιάζουμε ένα διάνυσμα με ένα αριθμό, την μάζα στην προκειμένη περίπτωση, τότε πολλαπλασιάζονται και οι συνιστώσες της με τον ίδιο αριθμό. Επομένως ισχύει για τις συνιστώσες της Εξ. 1 ότι

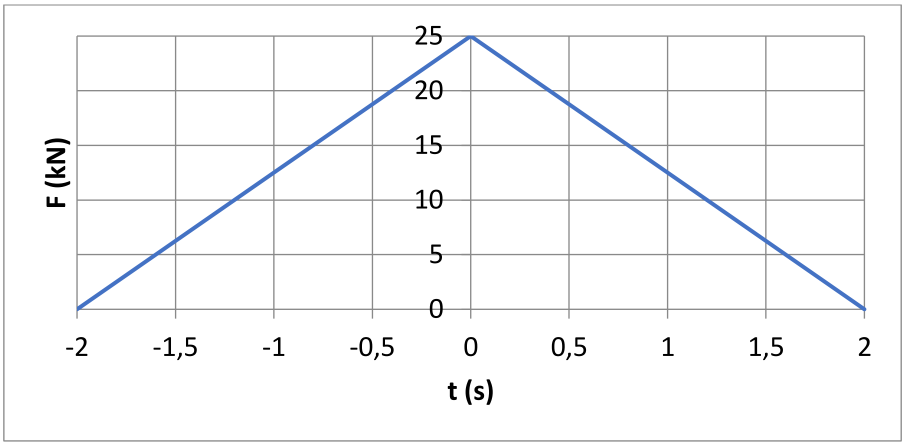
$\Sigma F_x = ma_x$	$2^{ΟΣ}$ ΝΟΜΟΣ ΝΕΥΤΩΝΑ x - ΣΥΝΙΣΤΩΣΑ	(4.3α)
$\Sigma F_y = ma_y$	$2^{ΟΣ}$ ΝΟΜΟΣ ΝΕΥΤΩΝΑ y - ΣΥΝΙΣΤΩΣΑ	(4.3β)

όπου a_x και a_y είναι οι συνιστώσες της επιτάχυνσης όπως τις μελετήσαμε στο κεφάλαιο “Κίνηση σε Επίπεδο”, ενώ ΣF_x και ΣF_y είναι οι συνιστώσες της συνολικής δύναμης που δρα στο σώμα. Και πάλι η άθροιση Σ είναι αλγεβρική. Οι παραπάνω νόμοι θα αποσαφηνισθούν στο παρακάτω εδάφιο που θα δούμε εφαρμογές αυτών:

Παράδειγμα 4.7

Σε μια δοκιμή σύγκρουσης, ένα αυτοκίνητο μάζας $2500\ kg$ και ένα μικρό φορτηγό 10 τόνων $(10{,}000\ kg)$ οδηγούνται προς μετωπική σύγκρουση το ένα επάνω στο άλλο με την ίδια σταθερή ταχύτητα $10\ m/s$. Το οδόστρωμα είναι λείο και χωρίς τριβές, η σύγκρουση τελείως ελαστική λόγω των μικρών ταχυτήτων και δεν έγινε χρήση των φρένων τόσο πριν αλλά όσο και μετά τη σύγκρουση. Στην παρακάτω γραφική παράσταση φαίνεται η δύναμη της σύγκρουσης που έδρασε στο αυτοκίνητο συναρτήσει του χρόνου. Να βρεθούν: (α) Η μαθηματική εξίσωση του περιγράφει αυτή τη δύναμη με την βοήθεια της γραφικής παράστασης. (β) Η δύναμη που δρα στο φορτηγό συναρτήσει του χρόνου. (γ) Οι ταχύτητες των δυο οχημάτων συναρτήσει του χρόνου κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης. (δ) Οι ταχύτητες των δυο οχημάτων συναρτήσει του χρόνου μετά τη σύγκρουση





Λύση:

(α) Η δοθείσα γραφική παράσταση είναι τμηματικώς γραμμική, άρα θα είναι της μορφής $f(t) = c_1 t + c_2$ όπου c_1 και c_2 σταθερές. Από δυο τυχαία σημεία στην κάθε μεριά της γραφικής παράστασης μπορούμε εύκολα να δούμε ότι

$$f(t) = \begin{cases} 12.5t + 25 & -2 \le t < 0 \\ -12.5t + 25 & 0 \le t \le 2 \end{cases}$$

όπου οι μονάδες της δύναμης αυτής είναι σε kN ενώ ο χρόνος σε s.

(β) Από τον 3ο νόμο του Νεύτωνα, η δύναμη που ασκεί το αυτοκίνητο στο φορτηγό είναι ίση και αντίθετη με αυτή που ασκεί το φορτηγό στο αυτοκίνητο άρα κατά μέτρο η ζητούμενη δύναμη είναι όπως στην γραφική παράσταση παραπάνω αλλά αρνητική, δηλαδή

$$F(t) = \begin{cases} -12.5t - 25 & -2 \le t < 0 \\ 12.5t - 25 & 0 \le t \le 2 \end{cases}$$

(γ) Αφού το αυτοκίνητο κινείται προς τα αριστερά πριν τη σύγκρουση τότε η αρχική του ταχύτητα είναι $-v_0 = -10\ m/s$ ενώ του φορτηγού είναι $v_0 = 10\ m/s$ αφού κινείται προς τα δεξιά. Κατά μέτρο τα δυο οχήματα έχουν ίση και σταθερή ταχύτητα πριν την σύγκρουση εφόσον δεν υπάρχουν τριβές. Από τον 2° νόμο του Νεύτωνα, όταν δρα η δύναμη $f(t)$ στο αυτοκίνητο, του προσδίνει αντίστοιχη επιτάχυνση $a(t) = f(t)/m$. Από την δεδομένη μάζα $m = 2.5\ tn$ έχουμε

$$a(t) = \begin{cases} 5t + 10 & -2 \leq t < 0 \\ -5t + 10 & 0 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Σε m/s από όπου με ολοκλήρωση προκύπτει ότι

$$v(t) = \begin{cases} 2.5t^2 + 10t + b_1 & -2 \leq t < 0 \\ -2.5t^2 + 10t + b_2 & 0 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Οι b_1 και b_2 είναι σταθερές ολοκλήρωσης. Γνωρίζουμε ότι λίγο πριν από τη σύγκρουση στο $t = -2$ η ταχύτητα του αυτοκινήτου ήταν $v = -v_0$. Εφαρμόζοντας αυτή την αρχική συνθήκη, βρίσκουμε εύκολα την μια σταθερά $b_1 = 0$. Για να βρούμε τη σταθερά b_2 σκεφτόμαστε ότι η ταχύτητα θα πρέπει να είναι συνεχής στο $t = 0$ άρα η παραπάνω τμηματική συνάρτηση πρέπει να δίνει την ίδια τιμή. Αυτό σημαίνει ότι και $b_2 = 0$

Έτσι η ταχύτητα του αυτοκινήτου κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης δίνεται από την έκφραση

$$v(t) = \begin{cases} 2.5t^2 + 10t & -2 \leq t < 0 \\ -2.5t^2 + 10t & 0 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Δουλεύοντας με ακριβώς την ίδια φιλοσοφία αλλά με αρνητική δύναμη $F(t)$ και θετική αρχική ταχύτητα $v_0 = 10\ m/s$, βρίσκουμε για την ταχύτητα V του φορτηγού

$$V(t) = \begin{cases} -\dfrac{1.25}{2}t^2 - 2.5t + c_1 & -2 \leq t < 0 \\ \dfrac{1.25}{2}t^2 - 2.5t + c_2 & 0 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Από την αρχική συνθήκη στο $t = -2\ s$ και την συνέχεια στο $t = 0$ παίρνουμε

$$V(t) = \begin{cases} -\dfrac{1.25}{2}t^2 - 2.5t + 7.5 & -2 \leq t < 0 \\ \dfrac{1.25}{2}t^2 - 2.5t + 7.5 & 0 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

(δ) Τη χρονική στιγμή $t = 2$ που παύει η δύναμη της σύγκρουσης, τα δυο οχήματα έχουν ταχύτητες $v(2) = 10\ m/s$ και $V(2) = 5\ m/s$, δηλαδή το αυτοκίνητο ανέστρεψε τελείως την ταχύτητά του ενώ το φορτηγό απλώς μείωσε την ταχύτητά του κατά το ήμισυ. Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε και εάν χρησιμοποιούσαμε την αρχή της διατήρησης της ορμής, δείτε επόμενα κεφάλαια.

Σημείωση: Είναι δύσκολο κάποιος να φανταστεί ότι όταν ένα μικρό σώμα συγκρουστεί με ένα τεράστιο σώμα, η δύναμη αλληλεπίδρασης είναι η ίδια και για τα δυο σώματα. Π.χ. όταν ένα τραίνο συγκρουστεί με ένα αυτοκίνητο, το αυτοκίνητο θα διαλυθεί ενώ φαίνεται ότι το τραίνο δεν παθαίνει τίποτα. Η δύναμη βέβαια είναι η ίδια απλώς λόγω της μεγάλης του μάζας, το τραίνο απλώς ελαττώνει λίγο την ταχύτητα του και αυτό μας δίνει την ψευδαίσθηση ότι η δύναμη που ασκείται πάνω του είναι πολύ μικρή.