05-10-23

Ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση (a = σταθερή)

$v(t) = x'(t)$ (1)

$a(t) = v'(t)$ (2)

$x(t) = \int u(t)dt + c$ (3)

$v(t) = \int a(t)dt + c$ (4)

$$(4) \Longrightarrow v(t) = \int a\,dt + c \xRightarrow{a=\sigma\tau\alpha\vartheta} v(t) = a\int dt + c$$

$\Rightarrow v(t) = at + c$, δηλαδή η ταχύτητα αυξάνεται γραμμικά σε σχέση με τον χρόνο

Αλλιώς: $u(t) = at + v_0$

$$x(t) = \int u(t)dt + c' = \int (at + u_0)dt + c' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = a\int t\,dt + v_0\int dt + c'$$

$$\Rightarrow x(t) = a\frac{t^2}{2} + v_0 t + c'$$

Αλλιώς $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$

★ Υπάρχουν δύο είδη ακινησίας:

- Ολική ακινησία – πλήρης
- Στιγμιαία ακινησία, όταν από αρνητική

Άσκηση Ένα υλικό σημείο κινείται επάνω σε μια ευθεία έτσι ώστε η απομάκρυνση του να δίνεται από την εξίσωση: $x(t) = At - B\sin(\omega t)$. Να βρεθεί η μικρότερη χρονική στιγμή σε sec μετά από $t=0$ όπου το κινητό ακινητοποιείται στιγμιαία.

Σημειώσεις: στις γωνίες πρέπει να χρησιμοποιήσετε ΑΚΤΙΝΙΑ (rad)

Δίνονται οι σταθερές: $A = 10\frac{m}{s}$, $B = 20m$, $\omega = 1.2\frac{rad}{s}$

$$u(t) = x'(t) = A - \omega B\cos(\omega t)$$

Εστω $v = 0\ \frac{m}{s}$

$$u(t) = 0 \Rightarrow A = \omega B\cos(\omega t) \Rightarrow \cos(\omega t) = \frac{A}{\omega B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(1{,}2t) = \frac{10 \cdot 1\cancel{0}}{12 \cdot 2\cancel{0}} \Rightarrow \cos(1{,}2t) = \frac{5}{12}$$

$$1{,}2t = 1{,}141 \Rightarrow \boxed{t = 0{,}95\ \text{sec}}$$

Άσκηση: Δύο υλικά σημεία (1) και (2) κινούνται επάνω σε μία ευθεία έτσι ώστε η απομάκρυνσή τους από την αρχή O να δίνεται από τις σχέσεις:

$$x_1(t) = At^4 + Bt^3$$
$$x_2(t) = Ct^2$$

Όταν η ταχύτητα του (1) γίνεται διπλάσια από αυτή του (2), να βρεθεί η μεταξύ τους απόσταση σε m. Δίνονται: $A = 0{,}2\,ms^{-4}$ $B = 1{,}6\,ms^{-3}$ $C = 1{,}1\,ms^{-2}$

Θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τις ταχύτητες των (1),(2):

$$v_1(t) = x_1'(t) = 4At^3 + 3Bt^2$$

και $v_2(t)\, x_2'(t) = 2Ct$

Από την εκφώνηση: $v_1(t_1) = 2v_2(t_1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4At^3 + 3Bt^2 = 4Ct \underset{\substack{\text{γιατί για}\\ t=0,\ v_1=v_2=0}}{\overset{t\neq 0}{\Rightarrow}} 4At^2 + 3Bt - 4C = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}8t^2 + 4{,}8t - 4{,}4 = 0 \overset{:0{,}4}{\Rightarrow} 2t^2 + 12t - 11 = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{t_1 = -6{,}8\,s} \text{ άκυρη} \quad \text{και} \quad \boxed{t_2 = 0{,}81\,s}$$

Για $t_1 = 0{,}81$ sec έχουμε:

$$x_1 = 0{,}2 \cdot 0{,}81^4 + 1{,}6 \cdot 0{,}81^3 \Rightarrow \boxed{x_1 = 0{,}93\ m}$$

$$x_2 = 1{,}1 \cdot 0{,}81^2 \Rightarrow \boxed{x_2 = 0{,}72\ m}$$

Και παίρνουμε την διαφορά τους:

$$d_{12} = |x_1 - x_2| \Rightarrow \boxed{d_{12} = 0{,}21\ m}$$

Άσκηση: Έστω κινητό στη μία διάσταση το οποίο κινείται με μία επιτάχυνση που δίνεται από την εξής έκφραση:

$$a(t) = a_0 \cos(\omega t)$$

Εάν στο $t=0$ το κινητό βρίσκεται στη θέση $x = 2m$, και ξεκινάει απ' την ηρεμία, να βρεθεί η απομάκρυνση του σε κάθε χρονική στιγμή t.

Δίνονται $\omega = \pi/4\ rad/s$, $a_0 = 2 m/s^2$

$$a(t) = \upsilon'(t) = x''(t)$$

Ολοκληρώνουμε δύο φορές την επιτάχυνση για να βρούμε τον τύπο που εκφράζει την απομάκρυνση.

$$\upsilon(t) = \int a(t)dt = a_0 \int \cos(\omega t)\, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon(t) = \frac{a_0}{\omega} \sin(\omega t) + c_1$$

Εφαρμόζουμε τις αρχικές συνθήκες για την ταχύτητα $\upsilon(0) = 0$, και παίρνουμε $c_1 = 0$. Άρα:

$$\upsilon(t) = \frac{a_0}{\omega} \sin(\omega t) = \frac{8}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{4} t\right)$$

$$x(t) = \int u(t)\,dt = \frac{a_0}{\omega}\int \sin(\omega t)\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = -\frac{a_0}{\omega^2}\cos(\omega t) + C_2$$

Εφαρμόζουμε τις αρχικές συνθήκες για την απομάκρυνση $x(0) = 2$ και παίρνουμε

$$C_2 = 2 + \frac{32}{\pi^2}$$

Άρα $$x(t) = -\frac{2}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 2 + \frac{32}{\pi^2}$$

$$\Rightarrow x(t) = -\frac{32}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot t\right) + \frac{32}{\pi^2} + 2$$