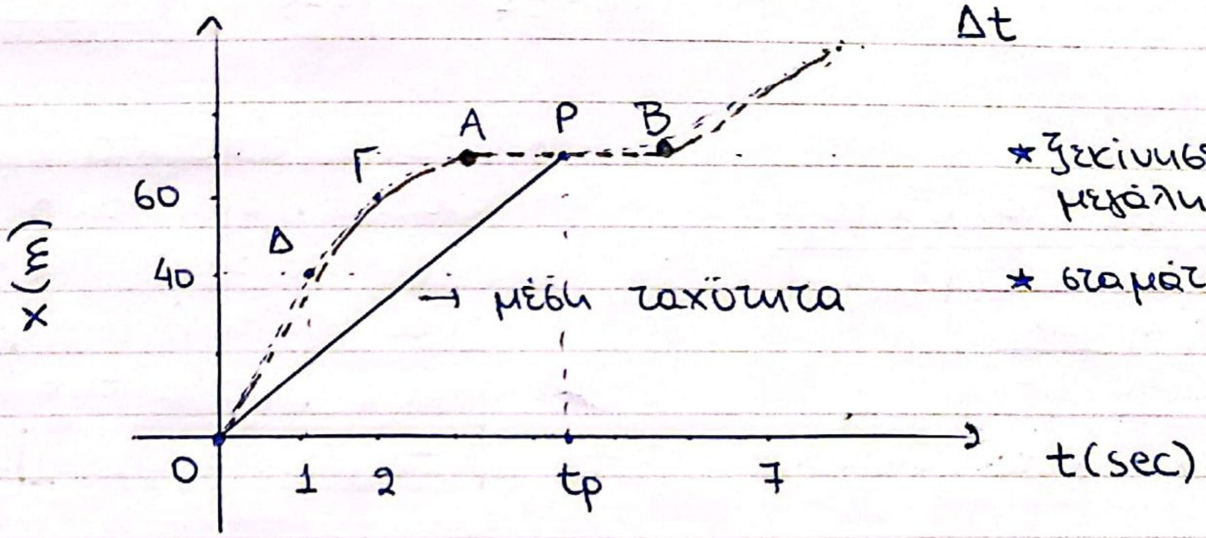
Κίνηση σε ευθεία γραμμή

Ταχύτητα (γενικός τύπος): $\upsilon = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ → κλίση



* ξεκίνησε με μεγάλη υ_0
* σταμάτησε στο A–B

$\upsilon_\Delta = \frac{40-0}{1-0}\frac{m}{s} \Rightarrow \boxed{\upsilon_\Delta = 40\frac{m}{s}}$

$\upsilon_\Gamma = \frac{60-0}{2-0}\frac{m}{s} \Rightarrow \boxed{\upsilon_\Gamma = 30\frac{m}{s}}$

$\upsilon_A = \frac{70-0}{5-0}\frac{m}{s} \Rightarrow \boxed{\upsilon_A = 14\frac{m}{s}}$

$\upsilon_P = \frac{70-0}{7-0} \Rightarrow \upsilon_P = 10\frac{m}{s}$ → Το οποίο είναι **ΛΑΘΟΣ**

* η κλίση της γραφικής παράστασης x–t είναι η ταχύτητα

διότι $\upsilon_\Delta, \upsilon_\Gamma, \upsilon_A, \upsilon_P$ είναι μέση ταχύτητα, όχι στιγμιαία ταχύτητα, δηλαδή αν ένα σημιακό αντικείμενο ξεκινούσε την ίδια χρονική στιγμή με το σημ. αντικείμενο του διαγράμματος εκτελώντας Ε.Ο.Κ. με $\upsilon = \upsilon_P = 10\frac{m}{s}$, θα συναντιόντουσαν στο σημείο P κι ας είχε ξεκινήσει το άλλο σώμα με μεγαλύτερη ταχύτητα σε χρόνο t_P

Αρα, αντι για $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0}$ παίρνω τοπικά

$\Delta x, \Delta t$, δηλαδή: $\upsilon_P = \frac{x_P - x_A}{t_P - t_A} = \frac{70-70}{7-5} \Rightarrow \boxed{\upsilon_P = 0 \frac{m}{s}}$

Αρα:

Στιγμιαία Ταχύτητα:

$$\boxed{\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (1)}$$

με $x = f(t)$, δηλαδή:

★ Οταν η ταχύτητα είναι σταθερή (άρα και η κλίση στο διάγραμμα x-t είναι σταθερή), τότε το σώμα εκτελεί ΕΟΚ και $\boxed{\upsilon_{στιγμιαία} = \upsilon_{μέση}}$

→ Το x είναι η εξαρτημένη μεταβλητή
→ Το t είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή

$$(1) \Rightarrow \upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{\upsilon = x'(t)}$$

$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta t = dt$: διαφορικό της ανεξάρτητης μεταβλητής

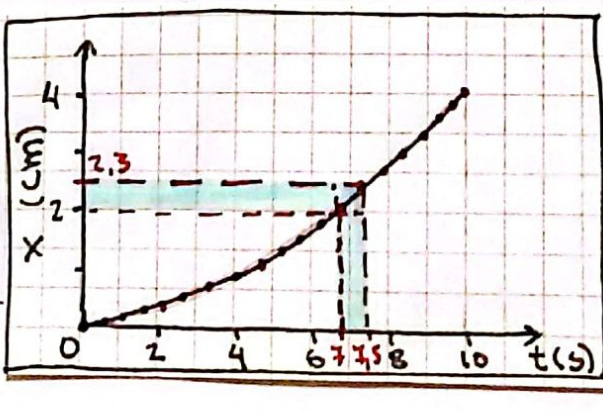
→ Η (1) διαφορετικά: $\boxed{\upsilon = \frac{dx}{dt}}$

Παράδειγμα:

υ: κλίση του ευθύγρ. τμήματος (τοπικά)

$u = \frac{dx}{dt}$: τοπική κλίση

$u = x'(t)$: παράγωγος



Να βρεθεί η ταχύτητα στο t = 7s γραφικά ή αλγεβρικά

Τελευταίο σημείο : (10,4)
Αρχικό σημείο : (0,0)

Άρα η Γ.Π. είναι της μορφής $y = ax^2 + b$, όπου $\underline{b=0}$

$$\xRightarrow{(10,4)} 4 = a \cdot 10^2 + 0 \Rightarrow a = \frac{4}{100} \Rightarrow \underline{a = 0{,}04}$$

δηλαδή $\underline{x = 0{,}04t^2}$
και $v = x' \Rightarrow v = \underline{0{,}08t}$

Για $t = 7\,sec$: $\boxed{v = 0{,}56\ \frac{m}{s}}$

$dx = x'(t)\,dt$ Διαφορικό της εξαρτημένης μεταβλητής

Με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε την στ. επιτάχυνση.

Στιγμιαία Επιτάχυνση:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \underline{\frac{du}{dt}} = \underline{v'(t)}$$

↱ Παράδειγμα 1.9

<u>Άσκηση</u>: Ένα υλικό σημείο κινείται στη μία διάσταση έτσι ώστε η απομάκρυνσή του να περιγράφεται από την εξίσωση : $x(t) = x_m(1-e^{-bt})$, όπου x_m και b θετικές σταθερές σε μονάδες m και s^{-2} αντίστοιχα και $t \geq 0$.

(α) Να βρεθεί η στιγμιαία ταχύτητα κ' η επιτάχυνση του κινητού

(β) Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση x-t.

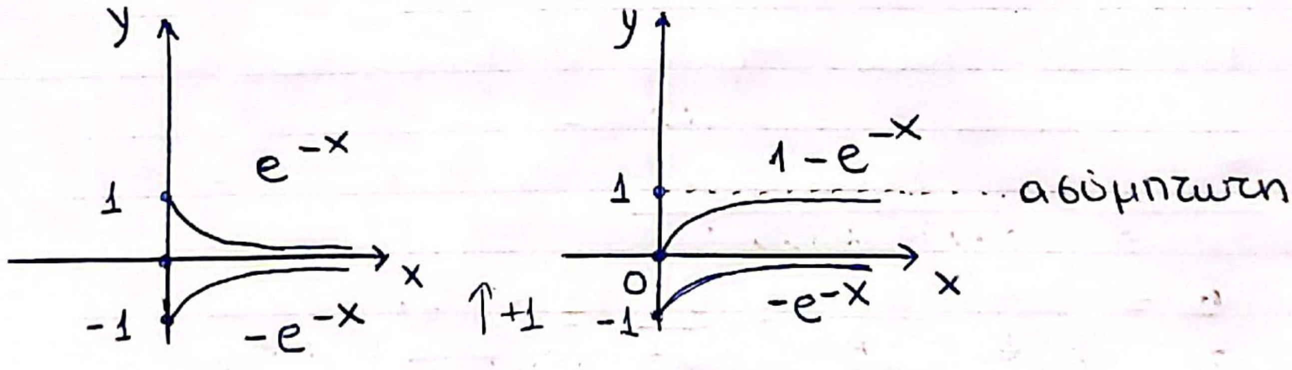
(γ) Να σχολιαστεί εάν η κλίση της γραφικής παράστασης συμφωνεί με την στιγμιαία ταχύτητα

(δ) Να σχολιαστεί το είδος της κίνησης για $t \to \infty$

(α) $u(t) = x'(t) = -x_m e^{-bt}(-b) \Rightarrow \boxed{u(t) = x_m b e^{-bt}}$

$a(t) = u'(t) = -b^2 x_m e^{-bt}$

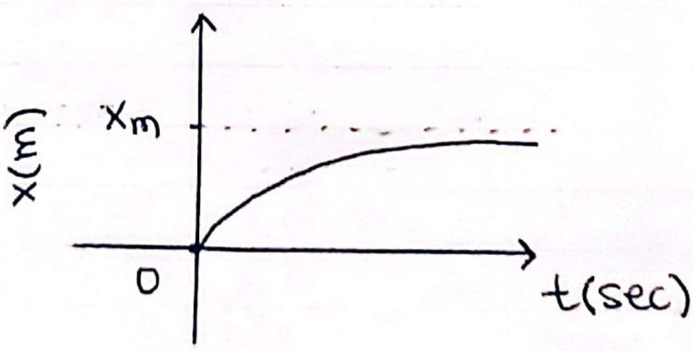
(β)



Για $t=0$: $x=0$

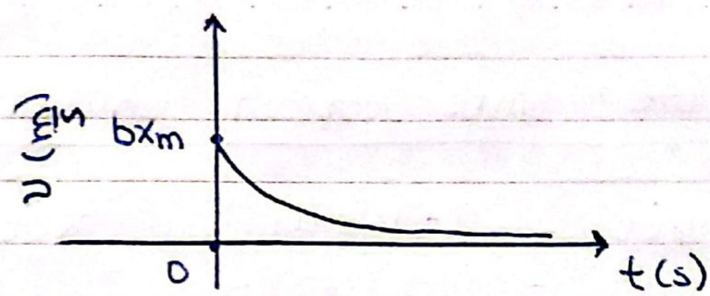
Για $t \to \infty$: $x \to x_m$

$x(t) = x_m(1-e^{-bt})$



Scanned with CamScanner

(γ) $\upsilon = b x_m e^{-bt}$



Η κλίση της γραφικής παράστασης x-t είναι η παράγωγός της, δηλαδή $x'(t) = \upsilon(t)$, και συμφωνεί με την στιγμιαία ταχύτητα καθώς όσο ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης (η ταχύτητα) μειώνεται, τόσο δηλαδή η κλίση της γραφικής παράστασης x-t μειώνεται μέχρι που το σημείο σταματά να μετατοπίζεται, όπου $\upsilon \to 0$.

(ή $t\uparrow \rightsquigarrow \upsilon\downarrow$)

(δ) Όσο $t \to \infty$, τόσο $\upsilon \to 0$, δηλαδή έχουμε ακινησία

★ <u>Θεωρία που θα χρησιμοποιήσουμε:</u>

<u>Αόριστο ολοκλήρωμα</u>:

π.χ. $\int x^n \, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$, όπου c σταθερά (πραγματικός)

$\cos x \to \sin x$, $\sin x \to -\cos x$

(συνx → ημx) (ημx → −συνx)

© NEXT Co. GREECE

Scanned with CamScanner

05-10-23

Ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση (a = σταθερή)

$v(t) = x'(t)$ (1) $\qquad x(t) = \int u(t)dt + c$ (3)

$a(t) = v'(t)$ (2)

$v(t) = \int a(t)dt + c$ (4)

$$(4) \Longrightarrow v(t) = \int a\,dt + c \xrightarrow{a=\sigma\tau\alpha\vartheta} v(t) = a\int dt + c$$

$\Rightarrow v(t) = at + c$, δηλαδή η ταχύτητα αυξάνεται γραμμικά σε σχέση με τον χρόνο

Αλλιώς: $u(t) = at + v_0$

$$x(t) = \int u(t)dt + c' = \int (at + u_0)dt + c' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = a\int t\,dt + v_0 \int dt + c'$$

$$\Rightarrow x(t) = a\frac{t^2}{2} + v_0 t + c'$$

Αλλιώς $\quad x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$

★ Υπάρχουν δύο είδη ακινησίας:

- Ολική ακινησία – πλήρης
- Στιγμιαία ακινησία, όταν από αρνητική

Scanned with CamScanner

Άσκηση Ένα υλικό σημείο κινείται επάνω σε μια ευθεία έτσι ώστε η απομάκρυνση του να δίνεται από την εξίσωση: $x(t) = At - B\sin(\omega t)$. Να βρεθεί η μικρότερη χρονική στιγμή σε sec μετά από $t=0$ όπου το κινητό ακινητοποιείται στιγμιαία.

Σημειώσεις: στις γωνίες πρέπει να χρησιμοποιήσετε ΑΚΤΙΝΙΑ (rad)

Δίνονται οι σταθερές: $A = 10\frac{m}{s}$, $B = 20m$, $\omega = 1.2\frac{rad}{s}$

$$v(t) = x'(t) = A - \omega B\cos(\omega t)$$

Έστω $v = 0\ \frac{m}{s}$

$$v(t) = 0 \Rightarrow A = \omega B\cos(\omega t) \Rightarrow \cos(\omega t) = \frac{A}{\omega B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(1{,}2t) = \frac{10\cdot 1\cancel{0}}{12\cdot 2\cancel{0}} \Rightarrow \cos(1{,}2t) = \frac{5}{12}$$

$$1{,}2t = 1{,}141 \Rightarrow \boxed{t = 0{,}95\ sec}$$

Scanned with CamScanner

Άσκηση: Δύο υλικά σημεία (1) και (2) κινούνται επάνω σε μία ευθεία έτσι ώστε η απομάκρυνσή τους από την αρχή O να δίνεται από τις σχέσεις:

$$x_1(t) = At^4 + Bt^3$$
$$x_2(t) = Ct^2$$

Όταν η ταχύτητα του (1) γίνεται διπλάσια από αυτή του (2), να βρεθεί η μεταξύ τους απόσταση σε m. Δίνονται: $A = 0{,}2\,ms^{-4}$ $B = 1{,}6\,ms^{-3}$ $C = 1{,}1\,ms^{-2}$

Θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τις ταχύτητες των (1),(2):

$$v_1(t) = x_1'(t) = 4At^3 + 3Bt^2$$

και $$v_2(t)\, x_2'(t) = 2Ct$$

Από την εκφώνηση: $v_1(t_1) = 2v_2(t_1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4At^3 + 3Bt^2 = 4Ct \overset{t \neq 0}{\Rightarrow} 4At^2 + 3Bt - 4C = 0 \Rightarrow$$

γιατί για $t=0,\ v_1 = v_2 = 0$

$$\Rightarrow 0{,}8t^2 + 4{,}8t - 4{,}4 = 0 \overset{:0{,}4}{\Rightarrow} 2t^2 + 12t - 11 = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{t_1 = -6{,}8\,s} \quad \text{και} \quad \boxed{t_2 = 0{,}81s}$$

άκυρη

Scanned with CamScanner

Για $t_1 = 0{,}81$ sec έχουμε:

$$x_1 = 0{,}2 \cdot 0{,}81^4 + 1{,}6 \cdot 0{,}81^3 \Rightarrow \boxed{x_1 = 0{,}93\ m}$$

$$x_2 = 1{,}1 \cdot 0{,}81^2 \Rightarrow \boxed{x_2 = 0{,}72\ m}$$

Και παίρνουμε την διαφορά τους:

$$d_{12} = |x_1 - x_2| \Rightarrow \boxed{d_{12} = 0{,}21\ m}$$

Ασκηση: Εστω κινητό στη μία διάσταση το οποίο κινείται με μία επιτάχυνση που δίνεται από την εξής έκφραση:

$$a(t) = a_0 \cos(\omega t)$$

Εαν στο $t=0$ το κινητό βρίσκεται στη θέση $x=2m$, και ξεκινάει απ' την ηρεμία, να βρεθεί η απομάκρυνση του σε κάθε χρονική στιγμή t.

Δίνονται $\omega = \pi/4$ rad/s, $a_0 = 2 m/s^2$

$$a(t) = v'(t) = x''(t)$$

Ολοκληρώνουμε δύο φορές την επιτάχυνση για να βρούμε τον τύπο που εκφράζει την απομάκρυνση.

$$v(t) = \int a(t)dt = a_0 \int \cos(\omega t)\, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{a_0}{\omega} \sin(\omega t) + c_1$$

Εφαρμόζουμε τις αρχικές συνθήκες για την ταχύτητα $v(0)=0$, και παίρνουμε $c_1 = 0$. Άρα:

$$v(t) = \frac{a_0}{\omega} \sin(\omega t) = \frac{8}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{4} t\right)$$

Scanned with CamScanner

$$x(t) = \int u(t)\,dt = \frac{a_0}{\omega}\int \sin(\omega t)\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = -\frac{a_0}{\omega^2}\cos(\omega t) + C_2$$

Εφαρμόζουμε τις αρχικές συνθήκες για την απομάκρυνση $x(0) = 2$ και παίρνουμε

$$C_2 = 2 + \frac{32}{\pi^2}$$

Άρα $$x(t) = -\frac{2}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 2 + \frac{32}{\pi^2}$$

$$\Rightarrow x(t) = -\frac{32}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot t\right) + \frac{32}{\pi^2} + 2$$

Scanned with CamScanner