



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Φυσική Ι

Ενότητα 2: Κίνηση σε επίπεδο – Υλικό σημείο

Κουζούδης Δημήτρης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Χημικών Μηχανικών

Σκοποί ενότητας

- Επανάληψη θεωρίας διανυσμάτων
- Εξοικείωση με τη χρήση τους στην περιγραφή της κίνησης
 - Θέση
 - Ταχύτητα
 - Επιτάχυνση
- Επίλυση απλών προβλημάτων
- Εισαγωγή στις βολές και στην κυκλική κίνηση



Περιεχόμενα ενότητας

- Διανύσματα στο επίπεδο (2d)
 - Πράξεις διανυσμάτων
- Διανύσματα θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης στο επίπεδο
 - Παραδείγματα
- Βολές
- Διανύσματα στην κυκλική κίνηση



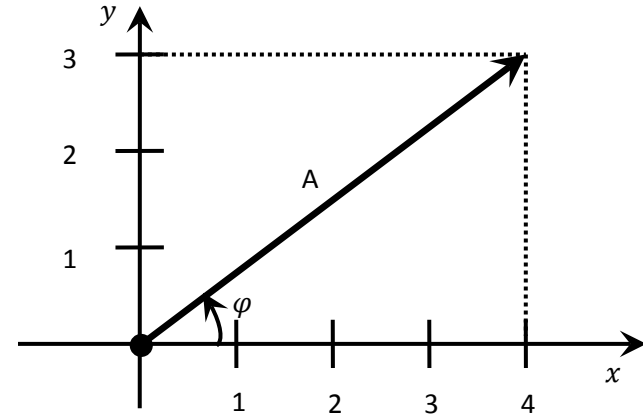
Κίνηση σε επίπεδο

2 διαστάσεις – υλικό σημείο

Διανύσματα στο επίπεδο (2d)

- Διανύσματα στις 2 διαστάσεις
- Συντεταγμένες A_x και A_y
 - Μέτρο $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$
 - Κατεύθυνση (φορά+διεύθυνση)

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{A_y}{A_x} \right)$$



- **Παράδειγμα 1:** Σε διάνυσμα που βρίσκεται στο 4^ο τεταρτημόριο με μέτρο 10 και x-συντεταγμένη=8.66, ποια είναι η y-συντεταγμένη και ποια η γωνία φ με τον άξονα x;

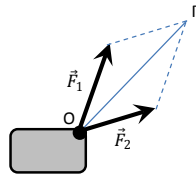
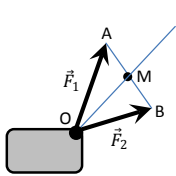
$$B^2 = B_x^2 + B_y^2 \Rightarrow 10^2 = 8.66^2 + B_y^2 \rightarrow B_y = \pm 5$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{B_y}{B_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{-5}{8.66} \right) = -30^\circ$$



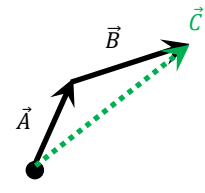
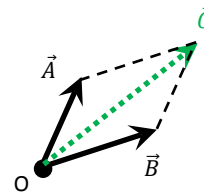
Πρόσθεση διανυσμάτων

- Π.χ. δράση δύο δυνάμεων σε σημείο \rightarrow Συνισταμένη δύναμη



$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \Rightarrow C_x = A_x + B_x \text{ \& } C_y = A_y + B_y$$

- Κανόνας παραλληλογράμμου
- Κανόνας μύτης-αρχής



- Παράδειγμα 2:** Να βρεθεί το μέτρο και η κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ όπου $\vec{A} = (-3, 4)$ και $\vec{B} = (2, 1)$.

$$C_x = -3 + 2 = -1 \quad C_y = 4 + 1 = 5$$

$$|\vec{C}| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2} = 5.10$$

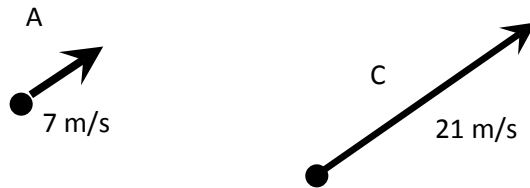
$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{5}{-1} \right) = 101.3^\circ$$



Πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό

- Ίδια κατεύθυνση με αρχικό διάνυσμα
- Φορά ανάλογα πρόσημο
- Πολλαπλάσιο μέτρο
- Πολλαπλασιάζονται και οι συνιστώσες

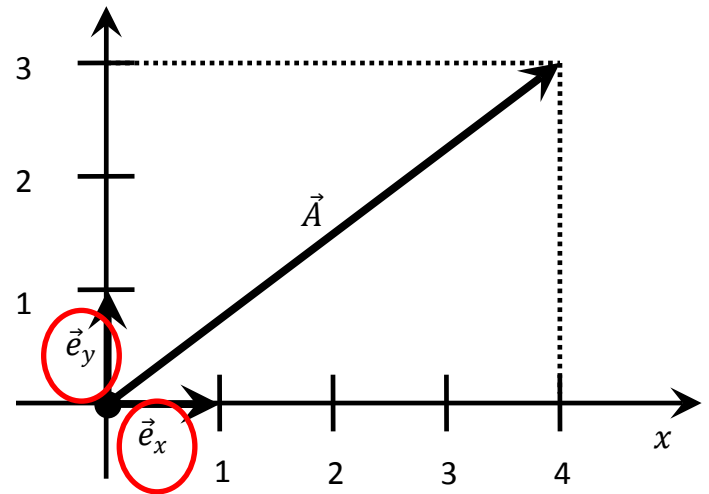
$$\vec{C} = \beta \vec{A} \Rightarrow C_x = \beta A_x \text{ \& } C_y = \beta A_y$$



Μοναδιαία διανύσματα

- Μέτρο = 1
- Άξονες συντεταγμένων
- Κάθε διάνυσμα αναλύεται σε μοναδιαία:

$$\vec{A} = (A_x, A_y) = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y$$



- Παράδειγμα 3: Βρείτε το μέτρο του $\vec{A} = 6\vec{e}_x - 8\vec{e}_y$

$$|\vec{A}| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$$

- Εσωτερικό γινόμενο:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos\theta$$



Διάνυσμα θέσης και ταχύτητας

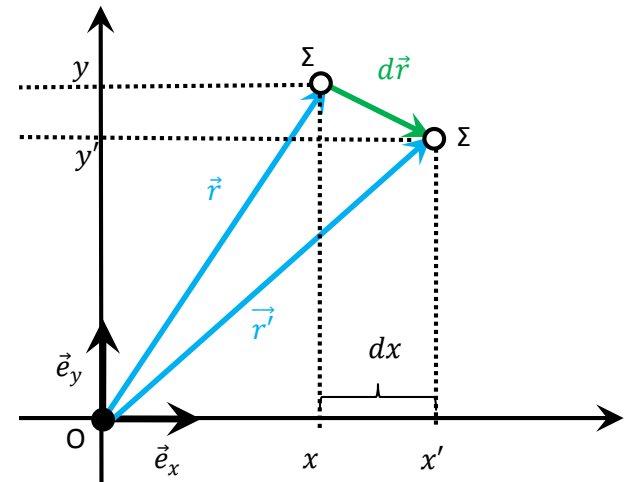
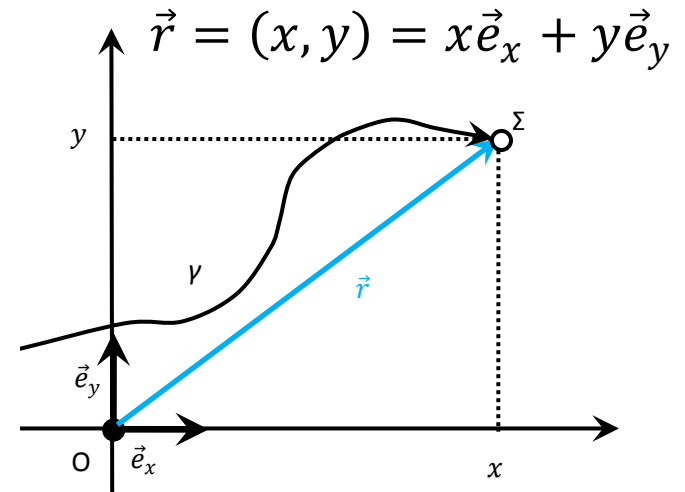
- Διάνυσμα θέσης – διάνυσμα μετατόπισης \rightarrow απειροστή μετατόπιση

- Διανυσματική ταχύτητα: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

– Μέτρο: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

– Κατεύθυνση: $\varphi = \tan^{-1} \frac{v_y}{v_x}$

- Εφαπτόμενη της τροχιάς



Διάνυσμα επιτάχυνσης

- Διανυσματική ταχύτητα: $\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y$
- Παραγωγή: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$
- Διανυσματική επιτάχυνση: $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y$
 - Συνιστώσες:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = v'_x(t)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = v'_y(t)$$



Παράδειγμα 4

Ένα υλικό σημείο κινείται έτσι ώστε οι συντεταγμένες του συναρτήσει του χρόνου να δίνονται από τις εκφράσεις $x(t)=b+ct$ και $y(t)=kt$ όπου $b=3\text{m}$, $c=0.6\text{m/s}$ και $k=1.2\text{m/s}$. Να βρεθούν α) Το διάνυσμα και το μέτρο της ταχύτητας του κινητού κάθε χρονική στιγμή t , β) Το διάνυσμα και το μέτρο της επιτάχυνσης του κινητού κάθε χρονική στιγμή t και γ) Το είδος της τροχιάς που διαγράφει το κινητό. δ) Δείξτε ότι η κλίση της τροχιάς είναι ίδια με την γωνία της ταχύτητας με τον x .

- α) $v_x = x'(t) = c = 0.6 \text{ m/s}$ $v_y = y'(t) = k = 1.2 \text{ m/s}$
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{0.6^2 + 1.2^2} = 1.34 \text{ m/s}$$
- β) αφού v_x και v_y είναι σταθερές, η παράγωγος τους είναι μηδέν, άρα το διάνυσμα της επιτάχυνσης είναι το $(0,0)$ με μέτρο 0.
- γ) Απαλείφοντας το t : $x = b + c \frac{y}{k} \Rightarrow y = \frac{k}{c}(x - b) \Rightarrow y = 2(x - 3)$
- δ) Η κλίση της τροχιάς (ευθεία) $= 2 \rightarrow \tan(\theta) = 2 \rightarrow \theta = 63.4^\circ$
Γωνία ταχύτητας με τον x : $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = 63.4^\circ$



Παράδειγμα 5

Ένα υλικό σημείο Σ εκτελεί αρμονική ταλάντωση πλάτους x_m και κυκλικής συχνότητας ω ως προς x και ελεύθερη πτώση ως προς y . Εάν την χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων και η κατακόρυφη ταχύτητά του είναι μηδέν, να βρεθούν α) Οι συνιστώσες του διανύσματος της ταχύτητας του κινητού κάθε χρονική στιγμή β) Οι συνιστώσες του διανύσματος της επιτάχυνσης του κινητού κάθε χρονική στιγμή και γ) Η τροχιά που διαγράφει το κινητό στην περίπτωση που $x_m=0.2\text{m}$ και $\omega=3.14\text{ rad/s}$. Έστω $g=10\text{ms}^{-2}$ για ευκολία.

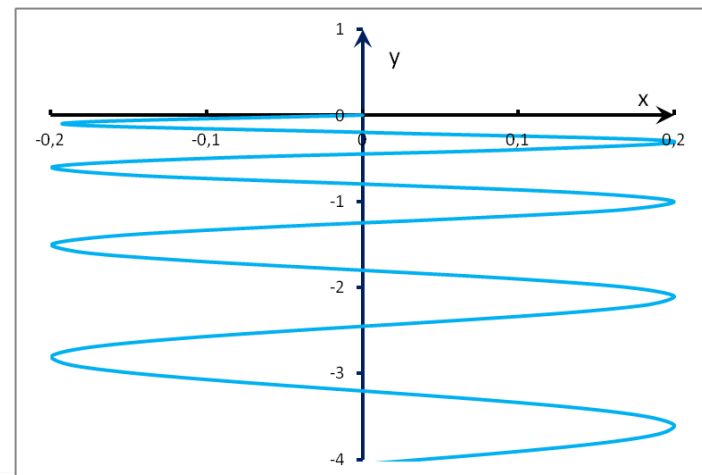
$$\alpha) x=0, t=0 \rightarrow \phi=0, \text{ \acute{a}\rho\alpha } x = x_m \sin(\omega t). \rightarrow v_x = \omega x_m \cos(\omega t)$$

$$y=0, t=0 \rightarrow y = -1/2gt^2. \rightarrow v_y = -gt$$

β) με παραγωγή της ταχύτητας

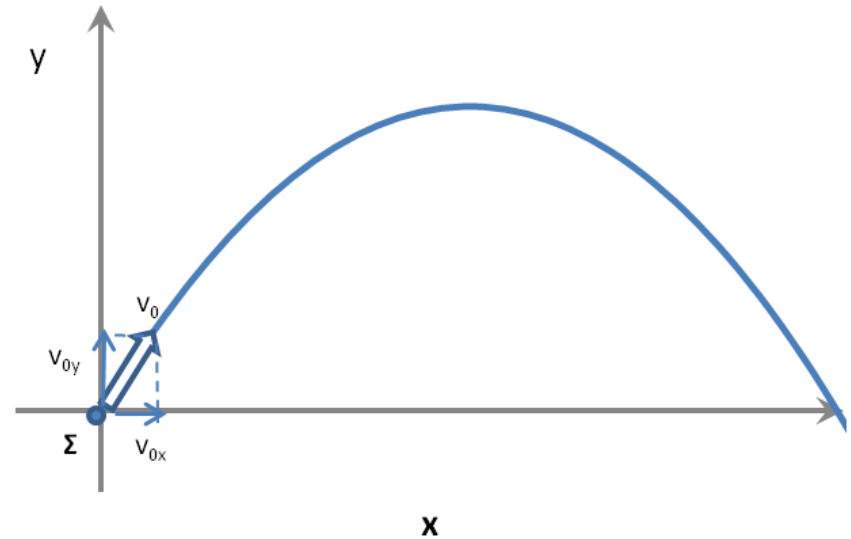
$$a_y = -g$$

$$a_x = -\omega^2 x_m \sin(\omega t)$$



Βολές

- Ιδανική βολή
 - Χωρίς τριβή
 - Μόνο βαρύτητα
- Αρχική ταχύτητα



	Άξονας x	Άξονας y
Κίνηση	Ομαλή	Ομαλά επιταχυνόμενη
Επιτάχυνση \vec{a}	0	$-g$
Αρχική ταχύτητα \vec{v}_0	v_{0x}	v_{0y}
Ταχύτητα $\vec{v}(t)$	$v_x = v_{0x}$	$v_y = v_{0y} - gt$
Μετατόπιση	$x(t) = v_{0x}t$	$y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$



Παράδειγμα 6

Πέτρα βάλλεται με $v_0=10\text{m/s}$, υπό γωνία $\theta=30^\circ$. α) Πόσος χρόνος απαιτείτε για να φτάσει στο υψηλότερο σημείο. β) Ποιό το ύψος του σημείου. γ) Ποιο το μέτρο της ταχύτητας σε αυτό το σημείο. δ) Ο χρόνος μέχρι να φτάσει στο έδαφος. ε) Ποιο το βεληνεκές. στ) Ποια η ταχύτητα λίγο πριν το έδαφος.

$$\alpha) \quad v_{0x} = |\vec{v}_0| \cos\theta = 10 \cos(30^\circ) = 8.66 \text{ m/s}$$
$$v_{0y} = |\vec{v}_0| \sin\theta = 10 \sin(30^\circ) = 5.00 \text{ m/s}$$
$$t = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{5}{10} = 0.5 \text{ s}$$

$$\beta) \quad y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow y(t) = 5.00 \times 0.5 - 1/2 \times 10 \times 0.5^2 = 1.25 \text{ m}$$

$$\gamma) \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_x^2 + 0} = 8.66 \text{ m/s}$$

$$\delta) \quad y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = t \left(v_{0y} - \frac{1}{2}gt \right) \rightarrow v_{0y} - \frac{1}{2}gt = 0 \Rightarrow t = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2 \times 5}{10} = 1 \text{ s}$$

$$\epsilon) \quad x = v_{0x}t = 8.66 \times 1 = 8.66 \text{ m}$$

$$\sigma\tau) \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{8.66^2 + (-5)^2} = 10.0 \text{ m/s}$$



Κυκλική κίνηση

- Καρτεσιανές συντεταγμένες

$$-x = R \cos \vartheta$$

$$-y = R \sin \vartheta$$

- Διάνυσμα θέσης

$$-x = R \cos \omega t$$

$$-y = R \sin \omega t$$

- Διάνυσμα ταχύτητας

$$-v_x = \omega R \sin \omega t$$

$$-v_y = \omega R \cos \omega t$$

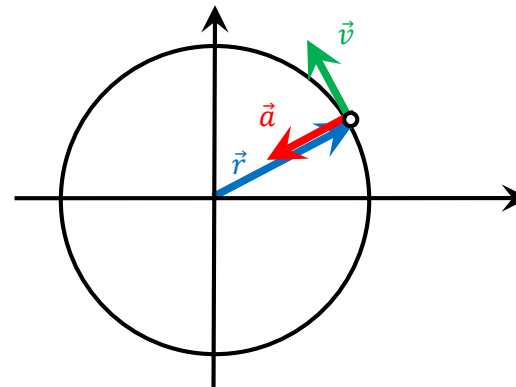
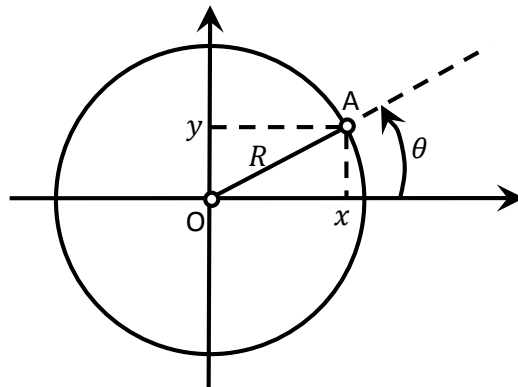
- Διάνυσμα επιτάχυνσης

$$-a_x = -\omega^2 R \cos \omega t$$

$$-a_y = -\omega^2 R \sin \omega t$$

- Κεντρομόλος επιτάχυνση

$$-a = \omega^2 R$$



Τέλος Ενότητας

Βιβλιογραφία

- Serway R.A., Jewett W. Jr., 2012, *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς : μηχανική, ταλαντώσεις και μηχανικά κύματα, θερμοδυναμική, σχετικότητα, Κλειδάριθμος, Αθήνα*
- Halliday D., Resnick R., Walker J., 2008, *Φυσική, τ.1. Μηχανική, Κυματική, Θερμοδυναμική, Gutenberg, Αθήνα*
- Young H.D., 1994, *Πανεπιστημιακή φυσική , 8^η έκδ., Παπαζήσης , Αθήνα*
- Kittel C., Knight W. D., Ruderman M.A., 1985, *Μηχανική, Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων , Αθήνα*
- Wells D.A. , Slusher H. S., 1983, *Schaum's outline of theory and problems of physics for engineering and science, McGraw - Hill Book Company, New York*



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών

Δημήτριος Κουζούδης. «Φυσική Ι»

Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
<https://eclass.upatras.gr/courses/CMNG2162/>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού-Μη Εμπορική Χρήση-Όχι Παράγωγα Έργα 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.