



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΑΤΡΩΝ  
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά  
μαθήματα ΠΠ

# Φυσική Ι

Ενότητα 1: Κίνηση σε ευθεία γραμμή – Υλικό σημείο

Κουζούδης Δημήτρης  
Πολυτεχνική Σχολή  
Τμήμα Χημικών Μηχανικών

# Σκοποί ενότητας

- Κατάστροση εξισώσεων κίνησης σε ευθεία (1 διάσταση)
- Εξοικείωση με την έννοια του «υλικού» σημείου
- Χαρακτηριστικές γραφικές παραστάσεις ταχύτητας και ερμηνεία τους μέσω διαφορικών



# Περιεχόμενα ενότητας

- Ορισμός ταχύτητας-στιγμιαίας ταχύτητας
- Ερμηνεία γραφικών παραστάσεων ταχύτητας
- Ορισμός διαφορικού
- Στιγμιαία επιτάχυνση
- Μονοδιάστατες κινήσεις
  - Ακίνητο σώμα
  - Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση
  - Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση
  - Αρμονικός ταλαντωτής
- Προβλήματα πιο σύνθετων κινήσεων



# Κίνηση σε ευθεία γραμμή

1 διάσταση – υλικό σημείο

# Ορισμός ταχύτητας

- Στην Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση, η ταχύτητα ενός υλικού σημείου ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της απομάκρυνσης του σημείου

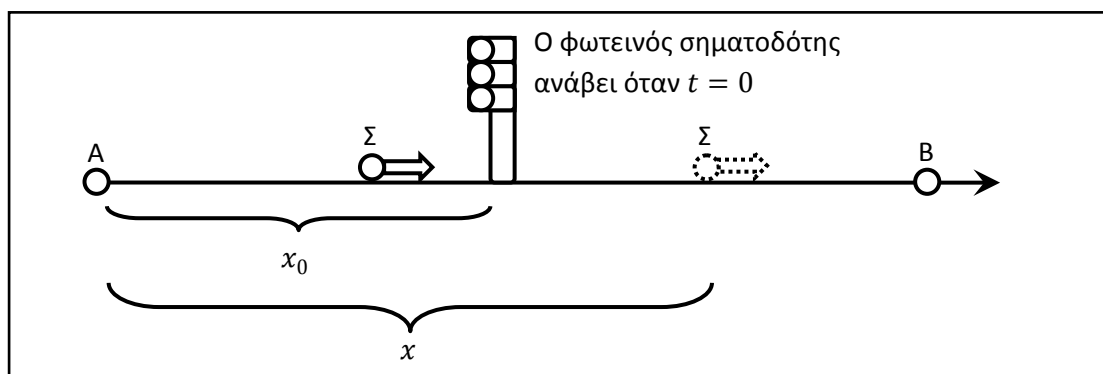
$$v = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

- $x$ : η απομάκρυνση (ή μετατόπιση) σε μέτρα (m)
- $t$ : ο χρόνος σε δευτερόλεπτα (sec)
- $x_0, t_0$ : αρχικές τιμές



# Παράδειγμα 1

Ακίνητο όχημα  $\Sigma$  περιμένει να ανάψει ένας φωτεινός σηματοδότης ο οποίος βρίσκεται σε απόσταση 150m από την αρχή του συστήματος των συντεταγμένων (**A**). Το ρολόι δείχνει μηδέν όταν ο σηματοδότης γίνει πράσινος αλλά ο οδηγός περνάει τον σηματοδότη την χρονική στιγμή 5s. Έστω ότι ο οδηγός κινείται με σταθερή ταχύτητα αφού περάσει τον σηματοδότη. Ποια η ταχύτητα του οχήματος  $\Sigma$  στη θέση  $x=250\text{m}$  εάν το ρολόι μας εκεί δείχνει  $t=15\text{s}$ .



$$v = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{250 - 150}{15 - 5} = 10 \text{ m/s}$$

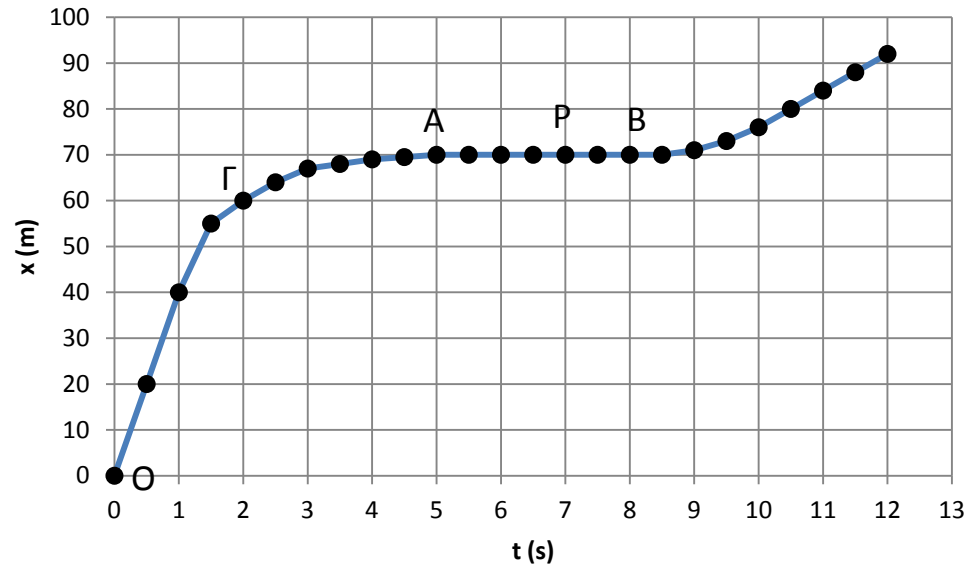


# Στιγμιαία ταχύτητα

- Σε περιπτώσεις ευθύγραμμης ΜΗ ομαλής κίνησης, ο παραπάνω ορισμός δίνει την μέση τιμή της ταχύτητας
- Η στιγμιαία ταχύτητα δίνεται από

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Όπου τα  $\Delta x$  και  $\Delta t$  είναι απειροστά μικρά



## Παράδειγμα 2

Ταχύτητα στο σημείο P για  $\Delta t \rightarrow 0$

$$v = \Delta x / \Delta t = (x_P - x_A) / (t_P - t_A) = (70 - 70) / (7 - 5) = 0 \text{ m/s}$$



# Ορισμός στιγμιαίας ταχύτητας

- Εάν το  $x$  είναι μία συνάρτηση ως προς  $t$ , δηλαδή  $x(t)$ , τότε γενικά η ταχύτητα δίνεται από την παράγωγο της απομάκρυνσης ως προς τον χρόνο

$$v = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = x'(t)$$

- Αντίστοιχα, η απομάκρυνση δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$x(t) = \int v(t) dt$$





# Παράδειγμα 3

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω εξίσωση, να βρεθεί η απομάκρυνση του κινητού  $x(t)$  όταν έχει στιγμιαία ταχύτητα **α)** μηδέν, **β)** σταθερή και **γ)** γραμμική συνάρτηση του χρόνου.

Περίπτωση α):  $x'(t) = v(t) = 0$  και οπότε αναγκαστικά  $x(t)$ : σταθερό.

Περίπτωση β):  $x'(t) = v \rightarrow x(t) = \int v(t) dt \rightarrow x(t) = vt + c$ , όπου  $c = x(0)$ . Δηλαδή, για την ομαλή κίνηση:

$$x(t) = vt + x(0)$$

Περίπτωση γ)  $x'(t) = v(t) = at + b \rightarrow x(t) = \int (at + b) dt \rightarrow x(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c$ , όπου  $c = x(0)$  και  $b = v(0)$ . Άρα, για την ομαλά επιταχυνόμενη ισχύει:

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v(0)t + x(0)$$



# Παράδειγμα 4

Με βάση τα δεδομένα του πίνακα, βρείτε την στιγμιαία ταχύτητα για  $t=2.6s$ .

- Χωρίς συνάρτηση δεν μπορούμε να παραγωγίσουμε
- Χρησιμοποιούμε μικρό  $\Delta t=0.1s$  στο προηγούμενο σημείο ( $t=2.5s$ )

$$v \approx \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{5.42 - 6.20}{2.6 - 2.5} = -7.8 \text{ m/s}$$

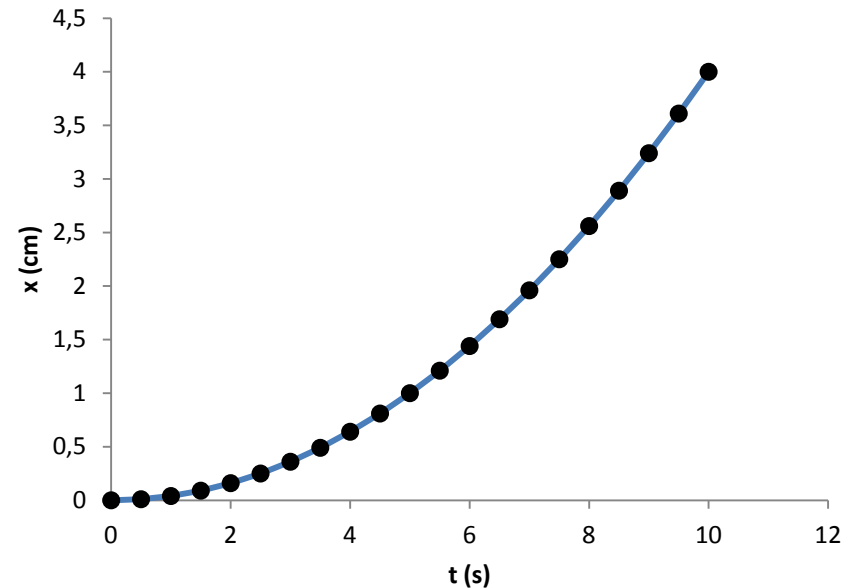
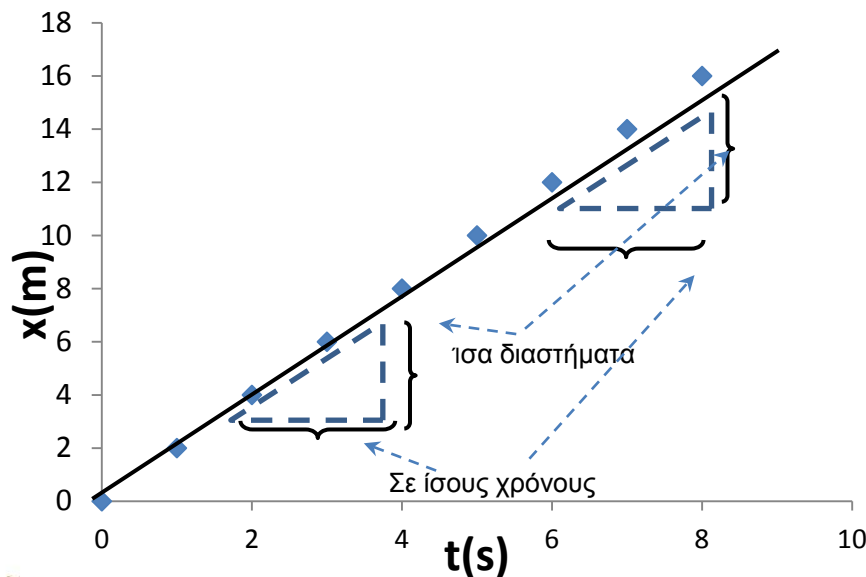
| t(s) | x(m)  |
|------|-------|
| 2.0  | 9.49  |
| 2.1  | 9.13  |
| 2.2  | 8.70  |
| 2.3  | 7.50  |
| 2.4  | 7.23  |
| 2.5  | 6.20  |
| 2.6  | 5.42  |
| 2.7  | 4.91  |
| 2.8  | 3.99  |
| 2.9  | 2.64  |
| 3.0  | 1.83  |
| 3.1  | 1.21  |
| 3.2  | -0.22 |



# Γραφική παράσταση ταχύτητας

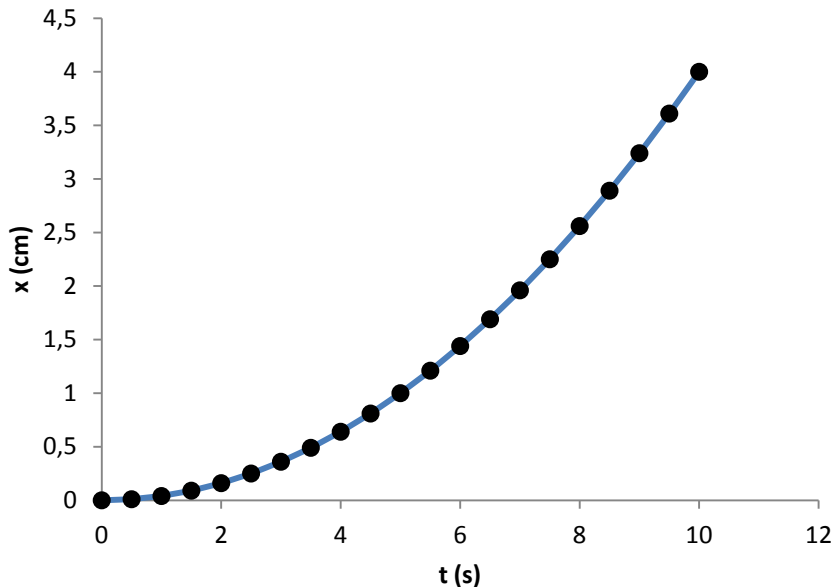
Σε γραφική παράσταση της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου, η κλίση σε κάθε σημείο ισούται με την στιγμιαία ταχύτητα

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$



# Παράδειγμα 5

Από την παρακάτω γραφική παράσταση να βρείτε α)προσεγγιστικά τη στιγμιαία ταχύτητα του κινητού στο  $t=7s$ , εκτιμώντας τις συντεταγμένες του ευθύγραμμου τμήματος μεταξύ  $6s$  και  $7s$ , και β) η ακριβής στιγμιαία ταχύτητα στο  $t=7s$  εάν γνωρίζουμε ότι το  $x(t)$  είναι ανάλογο του τετραγώνου του  $t$ .



α) για  $t=7s$ ,  $x \sim 2m$ , για  $t=6s$ ,  $x \sim 1.4m$

$$v \approx \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{2 - 1.4}{7 - 6} = 0.6 \text{ m/s}$$

β) περνάει από το  $(0,0) \rightarrow x(t) = at^2$   
Από το σημείο  $(10,4) \rightarrow a = 1/25 \text{ m/s}^2$

$$v(t) = x'(t) \rightarrow v = 2at \rightarrow$$

$$v = 2 \times \frac{1}{25} 7 = 0.56 \text{ m/s}$$



# Η έννοια του διαφορικού

- Μαθηματική έννοια
  - Το όριο της τιμής καθώς τείνει στο μηδέν
- Εξαρτημένες μεταβλητές : απομάκρυνση ( $x$ ), ταχύτητα ( $v$ ), επιτάχυνση( $a$ )
- Ανεξάρτητη μεταβλητή: χρόνος ( $t$ )

$$dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t, \text{ ανεξάρτητη}$$

$$dx = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta x = x'(t)dt, \text{ εξαρτημένη}$$

- Στιγμιαία ταχύτητα  $\rightarrow v(t) = x'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$

- **Παράδειγμα 6**

- Το διαφορικό του  $x(t) = at^3 \rightarrow dx = x'(t)dt = 3at^2dt$

$$x(t) = \alpha \cos(\beta t) \rightarrow dx = x'(t)dt = -\alpha\beta \sin(\beta t)dt$$



# Παράδειγμα 7

Ένας φοιτητής μελετάει έναν αρμονικό ταλαντωτή ο οποίος περιγράφεται από τη σχέση  $x(t)=A \sin(\omega t)$  με  $A=0.25\text{m}$  και  $\omega=6.28 \text{ rad/s}$ . Λόγω της ακρίβειας του ρολογιού του, μπορεί να παίρνει μετρήσεις κάθε  $0.01\text{s}$ . Να βρεθεί πόσο μεταβάλλεται το  $x$  μέσα σε αυτό το χρονικό διάστημα  $0.01\text{s}$  όταν  $t=0$  και όταν  $t=0.35\text{s}$ .

Ακριβής λύση:

$$x(0.01)-x(0)=0.25 \sin(6.28 \times 0.01)-0.25 \sin(0)=0.01569 \text{ m}$$

$$x(0.36)-x(0.35)=0.25 \sin(6.28 \times 0.36)-0.25 \sin(6.28 \times 0.35)=-0.00961 \text{ m}$$

Προσεγγιστική λύση,  $\Delta t \approx dt$ :

$$dx=x'(t)dt=A\omega \cos(\omega t) dt = 0.25 \times 6.28 \times \cos(0) \times 0.01=0.01570 \text{ m}$$

$$dx=x'(t)dt=A\omega \cos(\omega t)dt=0.25 \times 6.28 \times \cos(6.28 \times 0.35) \times 0.01=-0.00921 \text{ m}$$



# Στιγμιαία επιτάχυνση

- Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του κινητού προς τον χρόνο
- Παράγωγος της ταχύτητας ως προς το χρόνο
- 2<sup>η</sup> παράγωγος της απομάκρυνσης ως προς το χρόνο

$$a = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \frac{dv}{dt} = v'(t) = x''(t)$$

- Η κλίση σε κάθε σημείο της γραφικής παράστασης  $v - t$
- Στιγμιαία ταχύτητα

$$v(t) = \int a(t) dt$$



# Μονοδιάστατες κινήσεις

- Ακίνητο σώμα
  - Απόλυτα:  $v=0, a=0$
  - Στιγμιαία:  $v=0, a \neq 0$
- Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση
  - $v$ : σταθερό και  $a=0 \rightarrow x=x_0+vt$
- Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση
  - $v=v_0+at, a$ : σταθερό  $\rightarrow x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$
- Αρμονικός ταλαντωτής
  - $x_m$ : πλάτος ταλάντωσης σε m,  $\omega$ : κυκλική συχνότητα σε rad/s και  $\phi$ : αρχική φάση σε rad
  - $v(t)=v_m \cos(\omega t+\phi)$  με  $v_m=\omega x_m$ ,  $a(t)=-a_m \sin(\omega t+\phi)$  με  $a_m=\omega^2 x_m$   
 $\rightarrow x(t)=x_m \sin(\omega t+\phi)$





# Πιο σύνθετες κινήσεις

- Παράδειγμα 9

- Ένα υλικό σημείο κινείται στη μια διάσταση έτσι ώστε η απομάκρυνσή του να περιγράφεται από την εξίσωση  $x(t)=x_m (1-e^{-bt})$  όπου  $x_m$  και  $b$  σταθερές σε μονάδες  $m$  και  $s^{-1}$  αντίστοιχα. α) Να βρεθεί η στιγμιαία ταχύτητα και επιτάχυνση του κινητού. β) Να σχεδιασθεί η γραφική παράσταση  $x-t$ . γ) Να σχολιασθεί εάν η κλίση της γραφικής παράστασης συμφωνεί με την στιγμιαία ταχύτητα που βρήκατε παραπάνω. δ) Να σχολιασθεί το είδος της κίνησης για  $t \rightarrow \infty$ .

- Παράδειγμα 10

- Ένα υλικό σημείο κινείται στη μια διάσταση έτσι ώστε η ταχύτητα του να περιγράφεται από την εξίσωση  $v(t)=bt-dt^3$  όπου  $b$  και  $d$  σταθερές σε μονάδες  $ms^{-2}$  και  $ms^{-4}$  αντίστοιχα. Εάν η αρχική θέση του κινητού στο  $t=0$  είναι  $2 m$ , να βρεθεί η απομάκρυνση και η στιγμιαία επιτάχυνση του κινητού.

- Παράδειγμα 11

- Μια μικρή πέτρα εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω. Μετά από χρόνο  $1.5 s$  βρίσκεται στο υψηλότερο σημείο. Εάν θεωρήσουμε ότι πάνω της δρα μόνο η βαρύτητα οπότε της προσδίδει αρνητική επιτάχυνση  $g=9.8 ms^{-2}$  (προς τα κάτω), να βρεθούν α) η ταχύτητα της πέτρας στο σημείο αυτό και β) η ταχύτητα της πέτρας  $0.01 s$  αργότερα και γ) Το μέγιστο ύψος που φτάνει η πέτρα.



# Βιβλιογραφία

- Serway R.A., Jewett W. Jr., 2012, *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς : μηχανική, ταλαντώσεις και μηχανικά κύματα, θερμοδυναμική, σχετικότητα, Κλειδάριθμος, Αθήνα*
- Halliday D., Resnick R., Walker J., 2008, *Φυσική, τ.1. Μηχανική, Κυματική, Θερμοδυναμική, Gutenberg, Αθήνα*
- Young H.D., 1994, *Πανεπιστημιακή φυσική , 8<sup>η</sup> έκδ., Παπαζήσης , Αθήνα*
- Kittel C., Knight W. D., Ruderman M.A., 1985, *Μηχανική, Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων , Αθήνα*
- Wells D.A. , Slusher H. S., 1983, *Schaum's outline of theory and problems of physics for engineering and science, McGraw - Hill Book Company, New York*



Τέλος Ενότητας

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών

Δημήτριος Κουζούδης. «Φυσική Ι»

Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:  
<https://eclass.upatras.gr/courses/CMNG2162/>



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού-Μη Εμπορική Χρήση-Όχι Παράγωγα Έργα 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.