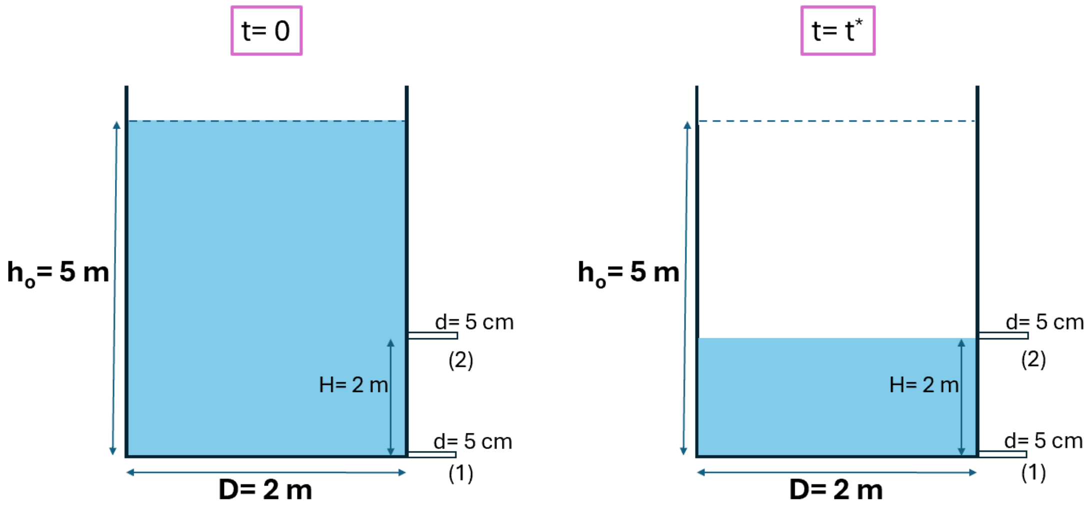
Άσκηση Δ7



Δεδομένα

Διάμετρος δεξαμενής: D= 2 m

Αρχικό ύψος νερού: h_o= 5 m

Διάμετρος βάνας εξόδου: d= 5 cm

Ύψος βάνας 1: h=0 m

Ύψος βάνας 2: h = H= 2 m

Για διευκόλυνση, δίνεται: $\int \frac{dh}{\sqrt{h}+\sqrt{h-H}} = \frac{2}{3H}\left[h^{\frac{3}{2}} - (h-H)^{\frac{3}{2}}\right] + c$

Ζητούμενα

α) t= ? για να αδειάσει η δεξαμενή

β) γραφική παράσταση h vs t

Επίλυση

Ως όγκος ελέγχου ορίζεται το νερό της δεξαμενής.

Για την επίλυση του προβλήματος, πρέπει να οριστούν δύο χρονικές περίοδοι ως εξής:

i) Για $0 \le t \le t^*$, με χρόνο t^* ο χρόνος που απαιτείται για να πέσει η στάθμη του νερού στην δεξαμενή σε ύψος $h = H$. Στην περίπτωση αυτή, το νερό εξέρχεται από την δεξαμενή από δύο βαλβίδες εξόδου.

ii) Για $t \ge t^*$, όπου η στάθμη του νερού πέφτει κάτω από ύψος H και το νερό εξέρχεται μόνο από μία έξοδο στην βάση της δεξαμενής.

α) Εφαρμόζουμε ισοζύγιο μάζας για το χρονικό διάστημα $0 \le t \le t^*$:

$$\frac{dm}{dt} = \cancel{\dot{m}_{in}} - \dot{m}_{out} \rightarrow \frac{dm}{dt} = -\dot{m}_1 - \dot{m}_2 \xrightarrow[\rho=\frac{m}{V}]{} \frac{d(\rho\, V)}{dt} = -\rho\, F_{1,out} - \rho\, F_{2,out}$$

$$\xrightarrow[\rho=\sigma\tau\alpha\theta]{} \frac{dV}{dt} = -F_{1,out} - F_{2,out} = -A_1 \cdot u_1 - A_2 \cdot u_2$$

$$\rightarrow \pi \frac{D^2}{4}\frac{dh}{dt} = -\pi \frac{d^2}{4}\, \sqrt{2\,g}\,\sqrt{h} - \pi \frac{d^2}{4}\, \sqrt{2\,g}\,\sqrt{h-H}$$

$$\rightarrow\ \pi \frac{D^2}{4}\frac{dh}{dt} = -\pi \frac{d^2}{4}\, \sqrt{2\,g}\,\left(\sqrt{h} + \sqrt{h-H}\right)$$

$$\rightarrow \frac{dh}{\sqrt{h}+\sqrt{h-H}} = -\left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2\,g}\ \ dt\ \rightarrow \int \frac{dh}{\sqrt{h}+\sqrt{h-H}} = -\int \left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2\,g}\ \ dt$$

$$\rightarrow\ \frac{2}{3H}\left[h^{\frac{3}{2}} - (h-H)^{\frac{3}{2}}\right] = -\left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2\,g}\,t + c$$

Για την εύρεση της σταθεράς ολοκλήρωσης, χρησιμοποιούμε την αρχική συνθήκη:

$$\Gamma\iota\alpha\ t = 0 \rightarrow h = h_o \rightarrow\ \ c = 2$$

Άρα:

$$\frac{2}{3H}\left[h^{\frac{3}{2}} - (h-H)^{\frac{3}{2}}\right] = -\left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2\,g}\,t + 2$$

$$\rightarrow\ \frac{2}{3 \cdot 2}\left[h^{\frac{3}{2}} - (h-2)^{\frac{3}{2}}\right] = -\left(\frac{0.05}{2}\right)^2 \sqrt{2 \cdot 9.81}\,t + 2$$

$$\rightarrow h^{\frac{3}{2}} - (h-2)^{\frac{3}{2}} = -0.00831 \cdot t + 6 \qquad (1)$$

Για $h = H = 2\ m$, έχουμε:

$$(1) \rightarrow 2^{\frac{3}{2}} - (2-2)^{\frac{3}{2}} = -0.00831 \cdot t^* + 6\ \rightarrow\ \ t^* = 382\ sec$$

Εφαρμόζουμε ισοζύγιο μάζας για το χρονικό διάστημα $t \geq t^*$:

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m}_{in} - \dot{m}_{out} \rightarrow\ \frac{dm}{dt} = -\dot{m}_1 \quad \xrightarrow[\rho=\frac{m}{V}]{}\ \frac{d(\rho\, V)}{dt} = -\rho\, F_{1,out}$$

$$\xrightarrow[\rho=\sigma\tau\alpha\theta]{} \frac{dV}{dt} = -F_{1,out} = -A_1 \cdot u_1 \rightarrow \pi \frac{D^2}{4}\frac{dh}{dt} = -\pi \frac{d^2}{4}\sqrt{2\,g}\,\sqrt{h}$$

$$\rightarrow \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2\,g}\;\; dt \;\rightarrow \int \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\int \left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2\,g}\;\; dt$$

$$\rightarrow 2\sqrt{h} \; = -\left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2\,g}\; t + c$$

Για την εύρεση της σταθεράς ολοκλήρωσης, χρησιμοποιούμε την συνοριακή συνθήκη:

$$\Gamma\iota\alpha\; t = t^* \rightarrow h = 0 \rightarrow \;\; c = 3.89$$

Άρα:

$$2\sqrt{h} \; = -\left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2\,g}\; t + 3.89$$

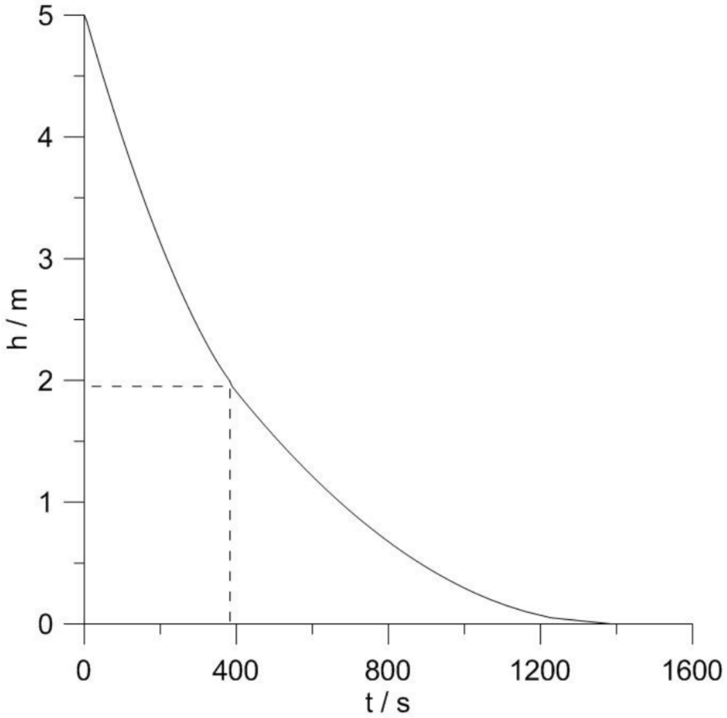
$$\rightarrow \;\; 2\sqrt{h} \; = -\left(\frac{0.05}{2}\right)^2 \sqrt{2 \cdot 9.81}\; t + 3.89$$

$$\rightarrow h = (-0.00138\, t + 1.945)^2 \qquad (2)$$

Για $h = 0$, έχουμε:

$$(2) \rightarrow 0 = (-0.00138\, t + 1.945)^2 \rightarrow \;\; t = 1409\; sec$$

β) Η γραφική αναπαράσταση των σχέσεων (1) και (2) φαίνεται παρακάτω:



5
4
3
2
1
0
h / m
0
400
800
1200
1600
t / s