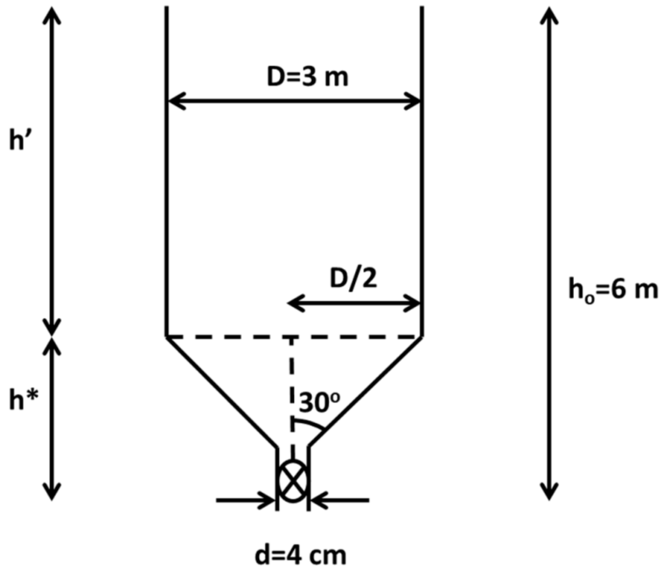
Διαθέτουμε κυλινδρική δεξαμενή διαμέτρου 3m, ο πυθμένας της οποίας έχει κωνικό σχήμα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η δεξαμενή αδειάζει από σωλήνα διαμέτρου 4 cm του ανεστραμμένου κώνου. Σε χρόνο t=0, όποτε ανοίγεται η στρόφιγγα εξόδου, το ύψος του νερού στη δεξαμενή είναι h_0=6 m.

a) Να βρεθεί πόσος χρόνος απαιτείται για να αδειάσει η δεξαμενή
b) Να γίνει γραφική παράσταση της στάθμης του h του νερού σαν συνάρτηση του χρόνου
c) Ας υποθέσουμε ότι την χρονική στιγμή t=0 (h_0=6 m) ανοίγουμε ταυτόχρονα με τη στρόφιγγα εξόδου (B) και την στρόφιγγα (A) που τροφοδοτεί τη δεξαμενή με σταθερή ογκομετρική παροχή νερού F= 3 L/s. Βρείτε το ύψος όπου θα ισορροπήσει η στάθμη του νερού.
d) Σε πόσο χρόνο θα ισορροπήσει η στάθμη του νερού;

a)



Αρχικά, ορίζουμε σαν όγκο ελέγχου τον όγκο του νερού. Με βάση το σχήμα έχουμε:

$$\tan(30^o) = \frac{\frac{D}{2}}{h^*} \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1.5}{h^*} \Rightarrow$$

$$\mathbf{h^* = 2.6\ m}$$

Οπότε,

$$h' + h^* = 6\ m$$

$$\mathbf{h' = 3.4\ m}$$

Εφαρμόζουμε ισοζύγιο μάζας <u>μέχρι να αδειάσει ο κύλινδρος</u>:

$$\frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{dt}} = \dot{m}_{in} - \dot{m}_{out} \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}(\rho V)}{\mathrm{dt}} = 0 - \rho \cdot F_{out} \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}(\rho V)}{\mathrm{dt}} = 0 - \rho \cdot A \cdot u \Rightarrow$$

$$\rho \frac{\mathrm{d}\left(\pi \frac{D^2}{4} \cdot h\right)}{\mathrm{dt}} = -\rho \cdot \pi \frac{d^2}{4} \cdot u \Rightarrow$$

$$\pi \frac{D^2}{4} \frac{\mathrm{dh}}{\mathrm{dt}} = -\pi \frac{d^2}{4} \cdot \sqrt{2g h} \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{dh}}{\mathrm{dt}} = -\frac{d^2}{D^2} \cdot \sqrt{2g} \cdot \sqrt{h} \Rightarrow$$

Προκύπτει μια διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών, όπου ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$\int \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{d^2}{D^2} \cdot \sqrt{2g}\, dt + C$$

Η λύση της εξίσωσης δίνεται από τη γενική μορφή

$$2\sqrt{h} = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{D}^2} \cdot \sqrt{2\mathrm{g}}\, dt \;+\; C$$

Για t = 0 s → h = 6m, οπότε C=$2\sqrt{6}$

Άρα μέχρις ότου να αδειάσει το κυλινδρικό κομμάτι της δεξαμενής θα ισχύει η ακόλουθη εξίσωση

$$\boldsymbol{2\sqrt{h} = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{D}^2} \cdot \sqrt{2\mathrm{g}} \cdot t \;+ 2\sqrt{6}} \qquad \textbf{(1)}$$

Το κυλινδρικό τμήμα της δεξαμενής θα αδειάσει σε χρόνο t_1 που αντιστοιχεί σε ύψος h*=2.6 m

t_1=2125 sec

Εφαρμόζουμε ισοζύγιο μάζας μέχρι να αδειάσει ο κώνος:

$$\tan(30^o) = \frac{\frac{D'}{2}}{h} \Rightarrow$$

$$D' = \frac{2h\sqrt{3}}{3}$$

Όπου D’ είναι η διάμετρος του κώνου που μεταβάλλεται με το ύψος h!

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m}_{in} - \dot{m}_{out} \Rightarrow$$

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = 0 - \rho \cdot F_{out} \Rightarrow$$

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = 0 - \rho \cdot A \cdot u \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} V_{κώνου} = \frac{\pi D'^2 h}{12} \\ D' = \frac{2h\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$$

$$V_{κώνου} = \frac{\pi h^3}{9}$$

$$\rho \frac{d\left(\frac{\pi h^3}{9}\right)}{dt} = -\rho \cdot \ \pi \frac{d^2}{4} \cdot u \ \Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{9}\frac{dh^3}{dt} = -\ \pi \frac{d^2}{4} \cdot u \ \Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{9}\frac{dh^3}{dt} = -\ \pi \frac{d^2}{4} \cdot \sqrt{2gh} \Rightarrow$$

$$\frac{3h^2}{9}\frac{dh}{dt} = -\frac{d^2}{4} \cdot \sqrt{2gh} \ \ \Rightarrow$$

$$\int \frac{3h^2}{9\sqrt{h}} dh = -\frac{d^2}{4} \cdot \sqrt{2g}\, dt \ \Rightarrow$$

$$\frac{3 \cdot 2 \cdot h^{5/2}}{9 \cdot 5} = -\frac{d^2}{4} \cdot \sqrt{2g} \ \cdot t + C \Rightarrow$$

Για t = 0 s → h = 2.6m, οπότε C=1.46

Άρα για όσο αδειάει το κωνικό τμήμα της δεξαμενής ισχύει η ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{\mathbf{2 \cdot h^{5/2}}}{\mathbf{3 \cdot 5}} = -\frac{\mathbf{d^2}}{\mathbf{4}} \cdot \sqrt{\mathbf{2g}} \cdot \mathbf{t + 1.46} \qquad \mathbf{(2)}$$

Το κωνικό τμήμα της δεξαμενής θα αδειάσει σε χρόνο t_2 που αντιστοιχεί σε ύψος h=0 m

t_2=812 sec

(χρόνος για να αδειάσει ο κώνος)

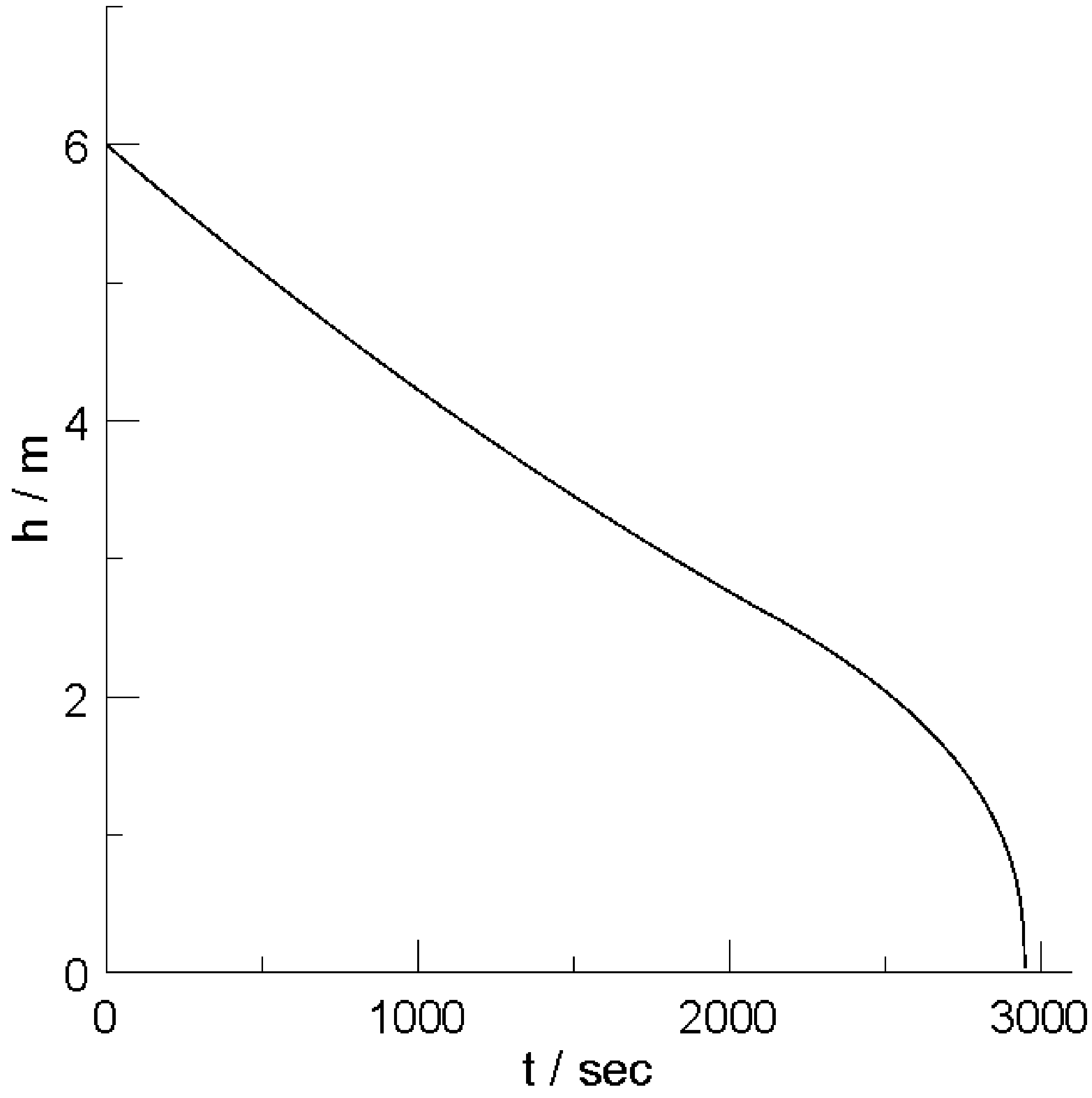
Άρα ο συνολικός χρόνος για να αδειάσει η δεξαμενή (κώνος & κύλινδρος) ισούται με:

$$t_{ολικό} = t_1 + t_2 \quad \Rightarrow$$

$$t_{ολικό} = 2125\ s + 812\ s \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{t_{ολικό} = 2937\ s\ ή\ 48.9\ min}$$

b)



$$\begin{cases} 2\sqrt{h} = -\dfrac{d^2}{D^2} \cdot \sqrt{2g} \cdot t + 2\sqrt{6} & 0<t<t_1 \\[2ex] \dfrac{2 \cdot h^{5/2}}{3 \cdot 5} = -\dfrac{d^2}{4} \cdot \sqrt{2g} \cdot t + 1.46 & t_1<t<t_{\text{ολικό}} \end{cases}$$

c) Θα βρούμε την στάθμη που θα ισορροπήσει η στάθμη του νερού σε μόνιμη κατάσταση dm/dt=0

$$\frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{dt}} = \dot{m}_{in} - \dot{m}_{out} \Rightarrow$$

$$\dot{m}_{in} = \dot{m}_{out} \Rightarrow$$

$$\rho \cdot F_{εισόδου} = \rho \cdot A \cdot u \Rightarrow$$

$$\rho \cdot F_{εισόδου} = \rho \cdot \pi \frac{d^2}{4} \cdot \sqrt{2gh} \Rightarrow$$

$$\sqrt{h} = \frac{12 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{s}}{3.14 \cdot \sqrt{2 \cdot 9.18 \frac{m}{s^2}} \cdot (0.04m)^2} \Rightarrow$$

$$\mathbf{h = 0.29\ m}$$

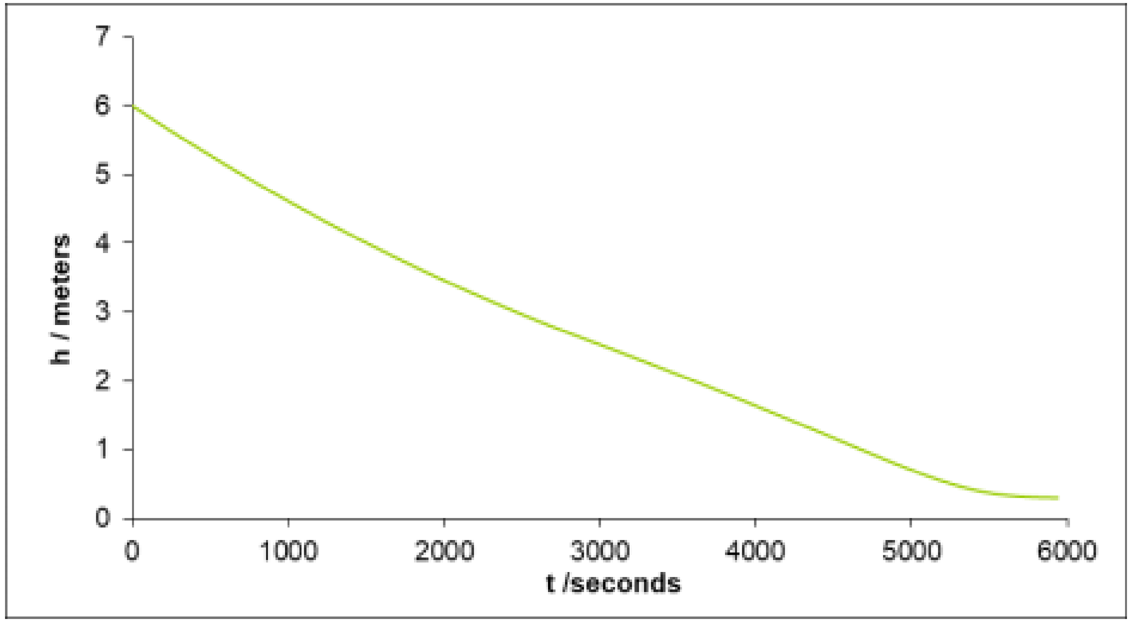
d)

Παρατηρούμε από την στάθμη (h=0.29 m) του προηγούμενου ερωτήματος ότι θα ισορροπήσει στο κομμάτι του κώνου, συνεπώς θα ισχύει το ισοζύγιο μάζας του κώνου:

$$\frac{\pi}{9}\frac{dh^3}{dt} = F_{εισόδου} - \pi\frac{d^2}{4}\cdot\sqrt{2gh} \Rightarrow$$

Σε αυτό το σημείο για να προσδιορίσουμε το χρόνο που θα ισορροπήσει η στάθμη του νερού χρειάζεται να επιλύσουμε αριθμητικά την παραπάνω διαφορική εξίσωση με κάποιο υπολογιστικό πρόγραμμα.

Λύνοντας αριθμητικά καταλήγουμε στο παρακάτω διάγραμμα:



Ποιοτικά μπορούμε να πούμε ότι σε χρόνο ***t=6000 s*** η στάθμη του νερού θα ισορροπήσει σε ύψος ***h=0.29 m***.