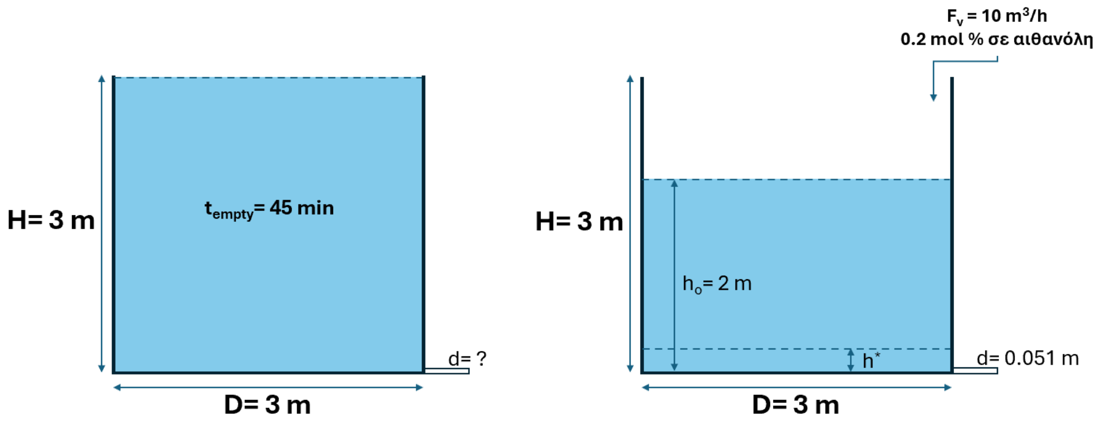
Άσκηση Δ3



Δεδομένα

Διάμετρος δεξαμενής: D= 3 m

Ύψος δεξαμενής: H= 3 m

Αν H= 3 m, τότε t_{empty}= 45 min

Αρχικό ύψος νερού: h_o= 2 m

Τροφοδοσία: F=10 m^3/h με 0.2 mol % σε αιθανόλη

Πυκνότητα: σταθερή

Ζητούμενα

α) Διάμετρος βάνας εξόδου

β) χρόνος t_1 ώστε η στάθμη της δεξαμενής να απέχει 1% από την τελική τιμή της μόνιμης κατάστασης

γ) διαφορικό ισοζύγιο αιθανόλης

Επίλυση

α) Χρησιμοποιούμε το δεδομένο ότι η δεξαμενή, αν είναι πλήρως γεμάτη, χρειάζεται 45 min για να αδειάσει:

$$\text{Ισοζύγιο μάζας: } \frac{dm}{dt} = \cancel{\dot{m}_{in}} - \dot{m}_{out} \xrightarrow[\rho=\frac{m}{V}]{} \frac{d(\rho V)}{dt} = -\rho\, F_{out} \xrightarrow[\rho=\sigma\tau\alpha\theta]{} \frac{dV}{dt} = -A\, u$$

$$\pi \frac{D^2}{4}\frac{dh}{dt} = -\pi \frac{d^2}{4}\sqrt{2g}\sqrt{h} \rightarrow \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2g}\, dt$$

$$\rightarrow \int \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\int \left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2g}\, dt \rightarrow \left[2\sqrt{h}\right]_{3m}^{0m} = -\left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2g}\, [t]_{0min}^{45min}$$

$$\rightarrow\ -2\sqrt{3} = -\left(\frac{d}{3m}\right)^2 \sqrt{2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}} \cdot 45min \cdot 60\frac{sec}{min}$$

$$\rightarrow\ d = 0.051m$$

β) Στην μόνιμη κατάσταση:

$$\frac{dm}{dt} = 0 \ \rightarrow\ F_{in} - F_{out} = 0 \ \rightarrow\ F_V = A\,u$$

$$\rightarrow 10\frac{m^3}{1h \cdot 60\frac{min}{h} \cdot 60\frac{sec}{min}} = \pi\frac{d^2}{4}\sqrt{2\,g\,h} \ \rightarrow\ 0.0028\frac{m^3}{sec} = \pi\frac{(0.051m)^2}{4}\sqrt{2 \cdot 9.81\frac{m}{\sec^2}\ h}$$

$$\rightarrow h = 0.096\,m$$

Ζητούμενο ύψος:

$$h_1 = h + 0.01h \rightarrow\ h_1 = 0.097\,m$$

Ισοζύγιο μάζας:

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m}_{in} - \dot{m}_{out} \xrightarrow[\rho=\frac{m}{V}]{} \frac{d(\rho V)}{dt} = \rho\,F_v - \rho\,F_{out} \xrightarrow[\rho=\sigma\tau\alpha\theta]{} \frac{dV}{dt} = F_v - A\,u$$

$$\pi\frac{D^2}{4}\frac{dh}{dt} = F_v - \pi\frac{d^2}{4}\sqrt{2g}\sqrt{h}$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι μία μη-γραμμική διαφορική εξίσωση 1^{ου} βαθμού και είναι πολύ περίπλοκη για να επιλυθεί.

γ) Ισοζύγιο μάζας αιθανόλης:

$$\frac{dm_A}{dt} = \dot{m}_{in,A} - \dot{m}_{out,A} \xrightarrow[n=\frac{m}{Mr}]{} \frac{d(Mr\ \cdot n_A)}{dt} = Mr \cdot \dot{n}_{in,A} - Mr \cdot \dot{n}_{out,A}$$

$$\xrightarrow[Mr=\sigma\tau\alpha\theta]{} \frac{dn_A}{dt} = \underset{(A)}{\dot{n}_{in,A}} - \underset{(B)}{\dot{n}_{out,A}} \qquad (1)$$

Αναλύουμε κάθε όσο ξεχωριστά:

$$(A):\ n_{in,A} = 0.002 \cdot n_{in,total} = 0.002 \cdot \frac{\dot{m}_{in}}{Mr} = 0.002 \cdot \frac{F_v \cdot \rho}{Mr}$$

$$(B):\ \dot{n}_{out,A} = c_{out,A} \cdot F_{out,A} = \frac{n_A}{V} \cdot A \cdot u = \frac{n_A}{\pi \frac{D^2}{4}\ h}\ \pi \frac{d^2}{4}\ \sqrt{2g}\,\sqrt{h}$$

$$\rightarrow\ \dot{n}_{out,A} = n_A \cdot \left(\frac{d}{D}\right)^2 \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{h}}$$

Αντικαθιστώντας τους παραπάνω όρους στην εξίσωση (1), έχουμε:

$$\frac{dn_A}{dt} = 0.002 \cdot \frac{F_v \cdot \rho}{Mr} - n_A \cdot \left(\frac{d}{D}\right)^2 \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{h}}$$