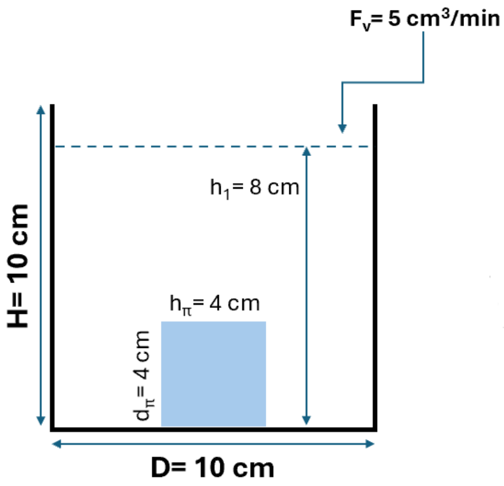
Άσκηση Δ2



Δεδομένα

Διάμετρος δοχείου: D= 10 cm

Ύψος δοχείου: H= 10 cm

Διάμετρος πάγου: $d_π$= 4 cm

Ύψος πάγου: $h_π$= 4 cm

Ογκομετρική παροχή: F_v= 5 cm^3/min

Στάθμη διακοπής ογκομετρικής παροχής: h_1= 8 cm

Πυκνότητα νερού: $ρ_{νερού}$= 1.03 g/cm^3

Πυκνότητα πάγου: $ρ_{πάγου}$= 0.91 g/cm^3

Ζητούμενα

α) συνάρτηση h(t) και χρόνος t_1 πού το ύψος του νερού στην δεξαμενή φτάνει σε ύψος h_1

β) γραφική παράσταση h vs t

γ) για $t \geq t_1$ ο πάγος λιώνει. Να βρεθεί η τελική στάθμη h_f του νερού

Επίλυση

α) Η Αρχή του Αρχιμήδη καθορίζει ότι τα υγρά ασκούν δύναμη σε κάθε σώμα που βυθίζεται μέσα σε αυτά. Η δύναμη αυτή λέγεται άνωση και έχει διεύθυνση κατακόρυφη και φορά προς τα πάνω και το μέτρο της ισούται με το βάρος του υγρού που εκτοπίζει το σώμα

Μαθηματικά η Άνωση (A) μπορεί να εκφρασθεί με τον τύπο: $A = \rho_{υγ}\, V_{υγ}\, g$, όπου:

ρ: πυκνότητα ρευστού

g: επιτάχυνση βαρύτητας (9.81 m/s^2)

V: όγκος εκτοπιζόμενου υγρού

Όμως σε κατάσταση ισορροπίας η δύναμη A είναι ίση με το βάρος του σώματος. Άρα

$$A = m_{στ}\, g = \rho_{στ}\, V_{στ}\, g$$

όπου:

$m_{στ}$: μάζα του στερεού

Όποτε στο πρόβλημά μας θα ισχύουν τα εξής:

$$\rho_{υγ}\, V_{υγ}\, g = \rho_{στ}\, V_{στ}\, g \rightarrow \frac{\rho_{στ}}{\rho_{υγ}} = \frac{V_{υγ}}{V_{στ}} = \frac{0.91\,\frac{g}{cm^3}}{1.03\,\frac{g}{cm^3}} = \frac{8}{9}$$

Όμως ο όγκος του εκτοπιζόμενου νερού ισούται με τον όγκο του πάγου που είναι βυθισμένος στο νερό. Οπότε μέσα στο νερό είναι βυθισμένα τα 8/9 του πάγου.

Γνωρίζοντας ότι το κομμάτι πάγου είναι κυλινδρικό, άρα και το νερό που εκτοπίζεται είναι κυλινδρικού σχήματος, η σχέση που ισχύει για τους όγκους στερεού και υγρού, θα ισχύει και για τα αντίστοιχα ύψη. Έτσι, το ύψος του πάγου που θα είναι βυθισμένο στο νερό θα είναι:

$$h^* = \frac{8}{9}\, h_\pi = 3.55\ cm$$

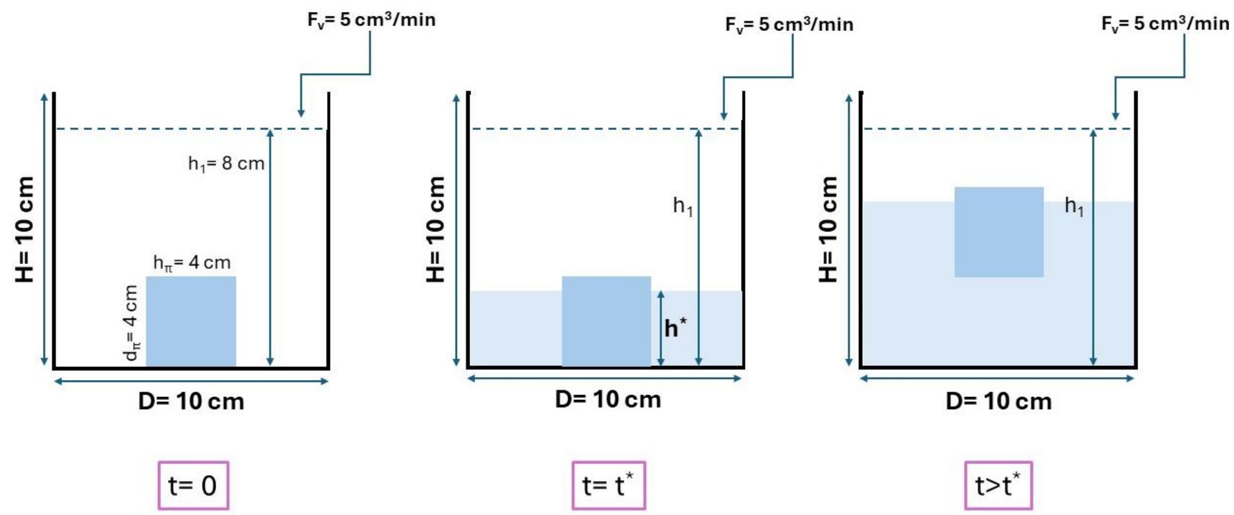
Ως όγκος ελέγχου ορίζεται το νερό της δεξαμενής.

Για την επίλυση του προβλήματος πρέπει να οριστούν δύο χρονικές περίοδοι ως εξής:

i) Για $0 \le t \le t^*$, με χρόνο t^* ο χρόνος που απαιτείται για να ανέβει η στάθμη του νερού στην δεξαμενή σε ύψος $h = h^*$. Στην περίπτωση αυτή, ο όγκος της δεξαμενής που γεμίζει με νερό περιορίζεται μεταξύ δεξαμενής και πάγου και δίνεται από την σχέση:

$$V = \pi \frac{D^2}{4}\, h - \pi \frac{d_\pi^2}{4}\, h = \pi \frac{D^2 - d_\pi^2}{4}\, h \quad (1)$$

ii) Για $t^* \le t \le t_1$, όπου και το κομμάτι πάγου αρχίζει να επιπλέει ενώ τα 8/9 του είναι βυθισμένα στο νερό. Στην περίπτωση αυτή γεμίζει ο ολικό όγκος της δεξαμενής χωρίς να εμποδίζεται από το κομμάτι πάγου.



Ισοζύγιο μάζας για $0 \le t \le t^*$:

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m}_{in} - \cancel{\dot{m}_{out}} \rightarrow \frac{dm}{dt} = \dot{m}_{in} \xrightarrow[\rho=\frac{m}{V}]{} \frac{dV}{dt} = F_{in}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\pi \frac{D^2 - d_\pi^2}{4}\, h\right) = F_{in} \rightarrow \ \pi \frac{D^2 - d_\pi^2}{4} \frac{dh}{dt} = F_{in}$$

$$\rightarrow dh = \frac{4\,F_{in}}{\pi\,(D^2 - d_\pi^2)} dt \;\rightarrow\; \int dh = \int \frac{4\,F_{in}}{\pi\,(D^2 - d_\pi^2)} dt$$

$$\rightarrow\; h = \frac{4\,F_{in}}{\pi\,(D^2 - d_\pi^2)} t + c_1$$

Για την εύρεση της σταθεράς ολοκλήρωσης, χρησιμοποιούμε την αρχική συνθήκη:

$$t = 0 \rightarrow h = 0$$

$$c_1 = 0$$

Άρα:

$$h = \frac{4\,F_{in}}{\pi\,(D^2 - d_\pi^2)} t \rightarrow\; h = 0.0758\,t \quad (2)$$

Για $h^* = 3.55\ cm$:

$$\underset{(2)}{\longrightarrow}\; t^* = 46.9\ sec$$

Ισοζύγιο μάζας για $t^* \leq t \leq t_1$:

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m}_{in} - \cancel{\dot{m}_{out}} \rightarrow \frac{dm}{dt} = \dot{m}_{in} \xrightarrow[\rho=\frac{m}{V}]{} \frac{dV}{dt} = F_{in}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\pi \frac{D^2}{4}\, h\right) = F_{in} \rightarrow\; \pi \frac{D^2}{4} \frac{dh}{dt} = F_{in}$$

$$\rightarrow dh = \frac{4\,F_{in}}{\pi\,D^2} dt \;\rightarrow\; \int dh = \int \frac{4\,F_{in}}{\pi\,D^2} dt$$

$$\rightarrow\; h = \frac{4\,F_{in}}{\pi\,D^2} t + c_2$$

Για την εύρεση της σταθεράς ολοκλήρωσης, χρησιμοποιούμε την συνοριακή συνθήκη:

$$t^* = 46.9\ s \rightarrow h^* = 3.55\ cm$$

$$c_2 = 0.57$$

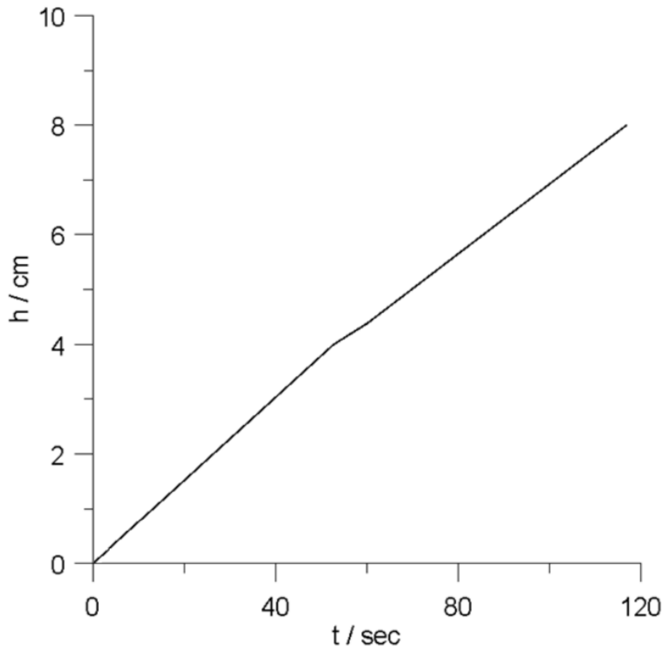
Άρα:

$$h = \frac{4\,F_{in}}{\pi\,D^2}t + 0.57 \rightarrow \quad h = 0.0637\,t + 0.57 \quad (3)$$

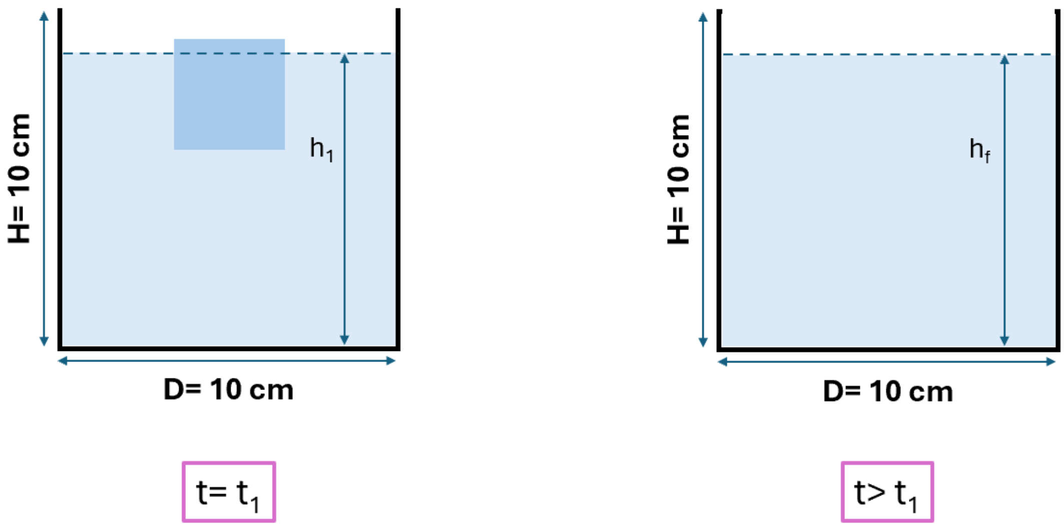
Για $h_1 = 8\ cm$:

$$\underset{(3)}{\longrightarrow} t_1 = 116.64\ sec$$

β) Η γραφική παράσταση που δίνεται από τις σχέσεις (2) και (3) είναι:



γ) Για $t \geq t_1$ ο πάγος λιώνει.



Για να βρεθεί το τελικό ύψος του νερού της δεξαμενής αφού λιώσει ο πάγος, εφαρμόζουμε την Αρχή διατήρησης της μάζας:

$$m_{αρχ} = m_{τελ} \rightarrow \underset{(A)}{m_{νερ,αρχ}} + \underset{(B)}{m_{παγ}} = \underset{(Γ)}{m_{νερ,τελ}} \quad (4)$$

Αναλύουμε τον κάθε όρο ξεχωριστά:

$$(A):\ m_{νερ,αρχ} = \rho_{νερ}\, V_{νερ,αρχ} = \rho_{νερ}\, F_{in}\, t_1 = 1.03 \frac{g}{cm^3}\, 5 \frac{cm^3}{s}\, 116.64\, s$$

$$\rightarrow m_{νερ,αρχ} = 600.7\ gr$$

$$(B): m_{παγ} = \rho_{παγ}\, V_{παγ} = \rho_{παγ}\, \pi \frac{d^2}{4} h = 0.91 \frac{g}{cm^3}\, \pi \frac{(4\ cm)^2}{4}\, 4\ cm$$

$$\rightarrow m_{παγ} = 45.74\ gr$$

$$(Γ): m_{νερ,τελ} = \rho_{νερ}\, V_{νερ,τελ} = \rho_{νερ}\, \pi \frac{D^2}{4}\, h_f$$

Αντικαθιστώντας όλους τους όρους στην εξίσωση (4), έχουμε:

$$600.7\ gr + 45.74\ gr = 1.03 \frac{g}{cm^3}\, \pi \frac{(10\ cm)^2}{4}\, h_f$$

$$\rightarrow\ h_f = 8\ cm$$