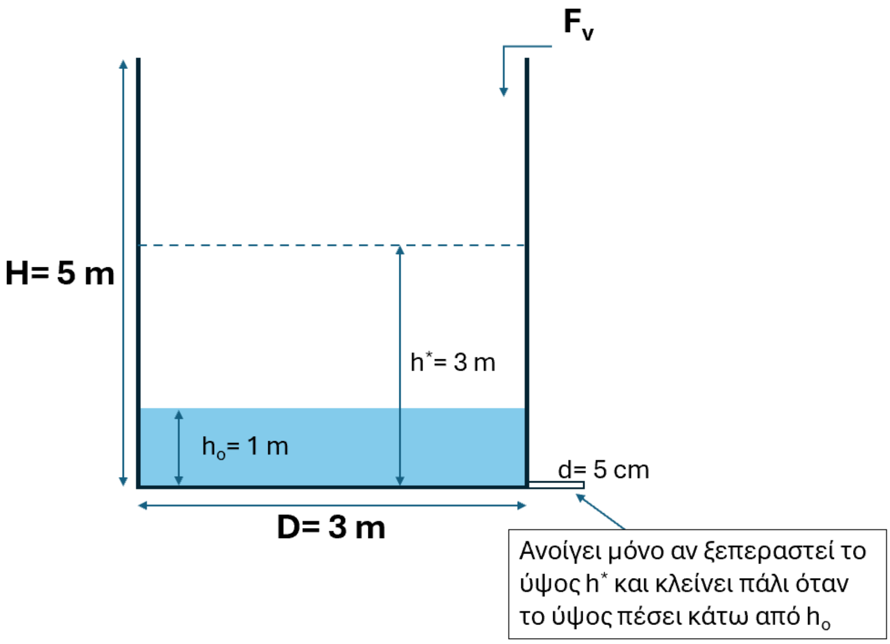
Άσκηση Δ1



Δεδομένα

Κυλινδρική δεξαμενή

Διάμετρος δεξαμενής: D= 3 m

Ύψος δεξαμενής: H= 5 m

Αρχικό ύψος νερού: h_o= 1 m

Διάμετρος βαλβίδας: d= 0.05 cm

Ταχύτητα δίνεται από την σχέση: $u = \sqrt{2gh}$

Ζητούμενα

α) h(t) για ογκομετρική παροχή F_1= 12.5 l/s και F_2= 50 l/s

β) γραφική παράσταση h vs t

Επίλυση

Ως όγκος ελέγχου ορίζεται το νερό της δεξαμενής.

Για την επίλυση του προβλήματος πρέπει να οριστούν δύο χρονικές περίοδοι ως εξής:

i) Για $0 \leq t \leq t^*$, με χρόνο t^* ο χρόνος που απαιτείται για να ανέβει η στάθμη του νερού στην δεξαμενή σε ύψος $h = h^*$. Στην περίπτωση αυτή, η βαλβίδα εξόδου στην βάση της δεξαμενής είναι κλειστή και έχουμε μόνο είσοδο νερού.

ii) Για $t \geq t^*$, όπου και ανοίγει η βαλβίδα στην βάση της δεξαμενής και ταυτόχρονα έχουμε και είσοδο και έξοδο νερού.

α) Εφαρμόζουμε ισοζύγιο μάζας για την χρονική περίοδο $0 \leq t \leq t^*$:

$$(Συσσώρευση) = (Είσοδος) - (Έξοδος)$$

$$\rightarrow \frac{dm}{dt} = \dot{m}_{in} - \cancel{\dot{m}_{out}} \rightarrow \frac{dm}{dt} = \dot{m}_{in} \xrightarrow[\rho=\frac{m}{V}]{} \frac{d(\rho\, V)}{dt} = \rho\, F_{in} \xrightarrow[\rho=\sigma\tau\alpha\theta]{} \frac{dV}{dt} = F_{in}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\pi \frac{D^2}{4}\, h\right) = F_{in} \rightarrow \pi \frac{D^2}{4} \frac{dh}{dt} = F_{in} \rightarrow dh = \frac{4\, F_{in}}{\pi\, D^2}\, dt$$

$$\rightarrow \int dh = \int \frac{4\, F_{in}}{\pi\, D^2}\, dt \rightarrow h = \frac{4\, F_{in}}{\pi\, D^2}\, t + c_1$$

Για την εύρεση της σταθεράς ολοκλήρωσης, χρησιμοποιούμε την αρχική συνθήκη:

$$t = 0 \rightarrow h = h_o = 1\, m$$

$$c_1 = h_o = 1$$

Άρα:

$$h = h_o + \frac{4\, F_{in}}{\pi\, D^2}\, t \qquad (1)$$

- Για $F_1 = 12.5\; l/s\; = 0.0125\; m^3/s$

$$(1) \rightarrow \; h = 1 + \frac{4 \cdot 0.0125\; m^3/s}{\pi \cdot (3\; m)^2} \rightarrow \; h = 1 + 0.00176 \cdot t$$

Για $h = h^*$:

$$t^* = 1136.36\; sec$$

- Για $F_2 = 50\; l/s\; = 0.05\; m^3/s$

$$(1) \rightarrow \; h = 1 + \frac{4 \cdot 0.05\; m^3/s}{\pi \cdot (3\; m)^2} \rightarrow \; h = 1 + 0.00707 \cdot t$$

Για $h = h^*$:

$$t^* = 283\; sec$$

Εφαρμόζουμε ισοζύγιο μάζας για την χρονική περίοδο $t \geq t^*$:

$$(\Sigma\upsilon\sigma\sigma\acute{\omega}\rho\varepsilon\upsilon\sigma\eta) = (E\acute{\iota}\sigma o\delta o\varsigma) - (\acute{E}\xi o\delta o\varsigma)$$

$$\rightarrow \frac{dm}{dt} = \dot{m}_{in} - \dot{m}_{out} \xrightarrow[\rho=\frac{m}{V}]{} \frac{d(\rho\, V)}{dt} = \rho\, F_{in} - \rho\, F_{out} \xrightarrow[\rho=\sigma\tau\alpha\theta]{} \frac{dV}{dt} = F_{in} - F_{out}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\pi \frac{D^2}{4}\, h\right) = F_{in} - A\, u \rightarrow \pi \frac{D^2}{4}\frac{dh}{dt} = F_{in} - \pi \frac{d^2}{4}\sqrt{2g}\,\sqrt{h}$$

$$\rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{4\, F_{in}}{\pi\, D^2} - \left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2g}\,\sqrt{h} \quad (2)$$

Η εξίσωση (2) είναι μία μη-γραμμική διαφορική εξίσωση 1ου βαθμού, η οποία δεν μπορεί να επιλυθεί με τις υπάρχουσες γνώσεις.

Έστω ότι για τις δύο ογκομετρικές παροχές που δίνονται στην εκφώνηση,= το σύστημα μετά από πολύ χρόνο φτάνει σε μόνιμη κατάσταση, δηλαδή:

$$\frac{dh}{dt} = 0 \xrightarrow[(2)]{} \frac{4\, F_{in}}{\pi\, D^2} - \left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2g}\,\sqrt{h} = 0$$

$$\rightarrow \sqrt{h} = \frac{4\, F_{in}}{\pi\, d^2\, \sqrt{2g}}$$

$$\rightarrow h = \left(\frac{4\, F_{in}}{\pi\, d^2\, \sqrt{2g}}\right)^2 \quad (3)$$

- Για $F_1 = 12.5\ l/s\ = 0.0125\ m^3/s$

$$(3) \rightarrow \quad h = 2.065\ m$$

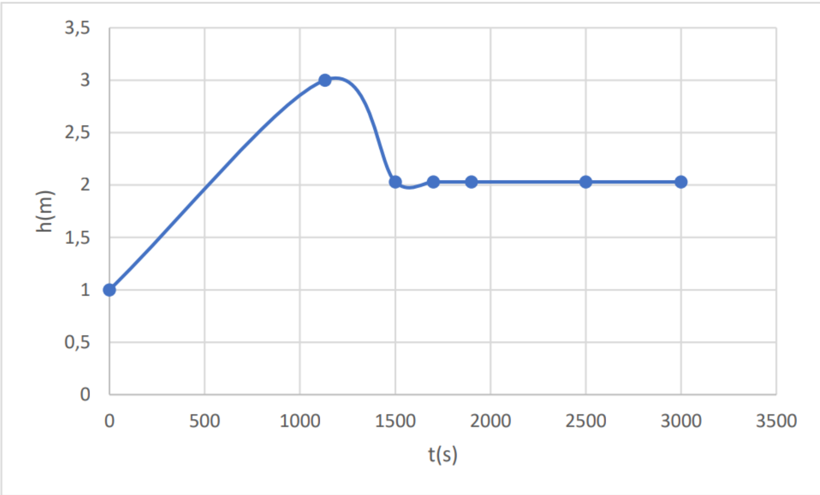
- Για $F_2 = 50\ l/s\ = 0.05\ m^3/s$

$$(3) \rightarrow \quad h = 33\ m \quad (\upsilon\pi\varepsilon\rho\chi\varepsilon\acute{\iota}\lambda\iota\sigma\eta)$$

Παρατηρούμε ότι για την ογκομετρική παροχή F_1 το σύστημα επιτυγχάνει μόνιμη κατάσταση σε ένα ύψος ανάμεσα από το 1m (σημείο που ανοίγει η βαλβίδα εξόδου) και τα 3m (σημείο που κλείνει η βαλβίδα εξόδου). Συνεπώς, η παροχή εισόδου και εξόδου σε αυτό το σημείο είναι ίσες.

Αντίθετα, στην περίπτωση της ογκομετρικής παροχής F_2, η παροχή εξόδου είναι σταθερά μικρότερη από αυτή της εξόδου και έτσι, η στάθμη του νερού θα συνεχίζει να αυξάνεται έως τα 5m όπου και η δεξαμενή θα υπερχειλίσει. Σε περίπτωση που το ύψος της δεξαμενής ήταν μεγαλύτερο, το σύστημα θα έφτανε σε μόνιμη κατάσταση στα 33m.

β) Για ογκομετρική παροχή F_1:



Για ογκομετρική παροχή F_2: