



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Αριθμητική Ανάλυση

Ενότητα 5: Εισαγωγή – Βασικές Έννοιες Ειδικά Θέματα
Αριθμητικής Παραγωγής – Επίλυση Γραμμικών
Συστημάτων Αλγεβρικών Εξισώσεων

Φραγκίσκος Κουτελιέρης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Χημικών Μηχανικών

Ειδικά θέματα στην επίλυση

1. Πολλαπλές ρίζες
2. Αρχικές τιμές

Πολλαπλές ρίζες: Διχοτόμηση

Βρίσκει μόνο **μια ρίζα σε κάθε
διάστημα**



**Επιλέγουμε κατάλληλα το διάστημα
και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία**

Πολλαπλές ρίζες: N-R

Βρίσκει μόνο μια ρίζα, την πλησιέστερη στην αρχική τιμή



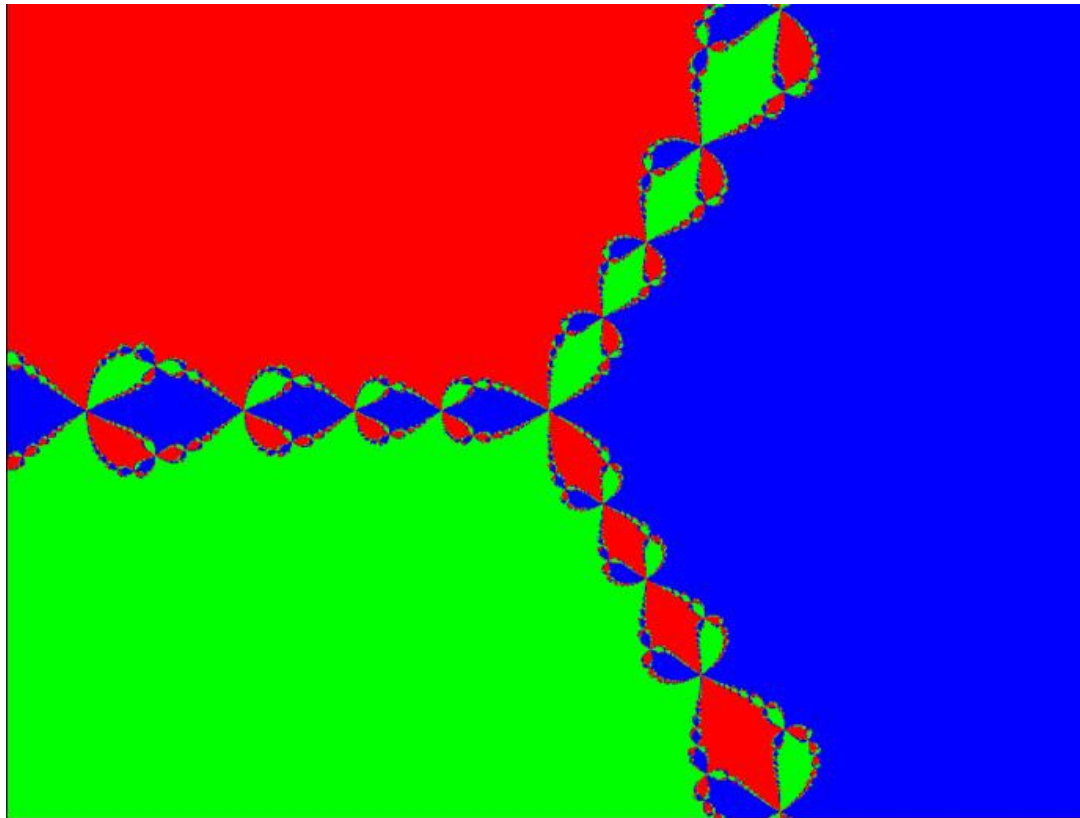
Επιλέγουμε κατάλληλα την αρχική τιμή και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία

Πολλαπλές ρίζες και Αρχικές τιμές

Η ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΒΟΗΘΑΕΙ!

Αριθμητική Ανάλυση

Πολλαπλές ρίζες + Αρχικές τιμές



Πηγή: Ματαράς & Κουτελιέρης, "FORTRAN 90/95 ΓΙΑ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΕΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ", Εκδ. Τζιόλα, Θεσσαλονίκη, 2001, σελ 529

Αριθμητική Ανάλυση

Πολλαπλές ρίζες + Αρχικές τιμές



Αριθμητική Ανάλυση

5. Αριθμητική επίλυση συστημάτων αλγεβρικών εξισώσεων

Αλγεβρικό σύστημα

- **απευθείας επίλυση (direct methods)**

Μέθοδος Gauss

- **επαναληπτική επίλυση (iterative methods)**

Μέθοδος Jacobi

Μέθοδος Gauss - Seidel

Επαναληπτική επίλυση

δημιουργία μιας ακολουθίας τιμών

$$\{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}, k=0, \dots, M, M \rightarrow \infty\}$$

έπειτα από μεγάλο αλλά **πεπερασμένο** αριθμό βημάτων

συγκλίνει στη λύση $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ του γραμμικού συστήματος

Για να λειτουργήσει η επαναληπτική διαδικασία χρειάζεται να οριστεί μια αρχική προσέγγιση για το διάνυσμα x των αγνώστων, η οποία είναι η $x_0 = \{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\}$.

Απευθείας επίλυση: Μέθοδος Gauss

- **ΦΑΣΗ 1: Απαλοιφή**

*μετατρέπει τον τετραγωνικό πίνακα των συντελεστών των αγνώστων σε **άνω τριγωνικό***

- **ΦΑΣΗ 2: Αντικατάσταση**

*αντικατάσταση ξεκινώντας από την **τελευταία** εξίσωση και καταλήγοντας στην πρώτη*

Απευθείας επίλυση: Μέθοδος Gauss

Για $i=1,2,\dots,n-1$

Για $j=i+1,i+2,\dots,n$

Θέτουμε $m_{ij} = a_{ji}/a_{ii}$

Εκτελούμε την πράξη $(\varepsilon_j - m_{ij}\varepsilon_i) \rightarrow (\varepsilon_j)$

Τέλος

Θέτουμε $x_n = a_{n,n+1}/a_{n,n}$

Για $i=n-1,n-2,\dots,2,1$

Θέτουμε $x_n = [a_{i,n+1} - \sum a_{i,j}x_j]/a_{i,i}$

Τέλος

Επαναληπτική επίλυση: Μέθοδος Jacobi

$$x_i^{(k)} = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k-1)} - \sum_{j=i+1}^n \alpha_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i}{\alpha_{ii}}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Επαναληπτική επίλυση: Μέθοδος Gauss-Seidel

$$x_i^{(k)} = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n \alpha_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i}{\alpha_{ii}}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Ερωτήματα

Gauss: Εφαρμόζεται πάντα;  $\alpha_{ii} \neq 0$

**Jacobi/Gauss-Seidel:
Συγκλίνει πάντα;**  **1)** $\alpha_{ii} \neq 0$
2) $||A|| < 1$

Σύγκλιση επαναληπτικής επίλυσης για μια εξίσωση

$$2x+3=0$$

1. $x = -x-3$ δηλ. $x_{i+1} = -x_i-3$ \Rightarrow αποκλίνει
2. $x = 3x+3$ δηλ. $x_{i+1} = 3x_i+3$ \Rightarrow αποκλίνει
3. $x = (x/3)-1$ δηλ. $x_{i+1} = (x_i/3)-1$ \Rightarrow $x = -1.5$!!!

Σύγκλιση επαναληπτικής επίλυσης για μια εξίσωση

ΚΡΙΤΗΡΙΟ

$$|F'(x)| < 1$$

Σύγκλιση επαναληπτικής επίλυσης για σύστημα

$$A x = (D+L+U) x = b$$

$$D x = -(L+U) x + b \Leftrightarrow$$

$$x = -D^{-1} (L+U) x + D^{-1} b \Leftrightarrow$$

$$x^{(k)} = T x^{(k-1)} + C$$

$$\text{με } T = -D^{-1} (L+U) \text{ και } C = D^{-1} b$$

Αριθμητική Ανάλυση

Σύγκλιση επαναληπτικής επίλυσης για σύστημα

**Πρέπει ο συντελεστής του αγνώστου
για τον οποίον λύνουμε, να είναι **ο κατ'
απόλυτη τιμή μεγαλύτερος** στη γραμμή
του.**

ΑΝΑΓΚΑΙΟ, ΟΧΙ ΙΚΑΝΟ

«Το υλικό της παρουσίασης προέρχεται από τις πανεπιστημιακές παραδόσεις του
καθηγητή Φρ. Κουτελιέρη».

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.