



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΑΤΡΩΝ  
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά  
μαθήματα ΠΠ

# Αριθμητική Ανάλυση

Ενότητα 3: Εισαγωγή – Βασικές Έννοιες Ειδικά Θέματα  
Αριθμητικής Παραγωγίσης – Αριθμητική Ολοκλήρωση

Φραγκίσκος Κουτελιέρης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Χημικών Μηχανικών

# Ειδικά θέματα στην παραγωγή

---

1. Μη ισοκατανεμημένα δεδομένα
2. Δεύτερη παράγωγος
3. Μερικές παράγωγοι

# Διάφορες ... Διαφορές

---

**Προς τα εμπρός (forward)**  $f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$

**Προς τα πίσω (backward)**  $f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$

**Κεντρικές (central)**  $f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{x_{i+1} - x_{i-1}}$

# Μη ισοκατανεμημένα δεδομένα

---

## **Παράδειγμα στο EXCEL**

Αριθμητική Ανάλυση

# Δεύτερη παράγωγος

---

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) + \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x) + \dots +$$

$$f(x - \Delta x) = f(x) - \Delta x f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) - \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x) + \dots + \quad (+)$$

---

$$f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) = 2f(x) + \Delta x^2 f''(x) \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2}$$

# Δεύτερη παράγωγος

---

$$f''(x) = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2}$$

**ΓΡΑΦΕΤΑΙ ΜΕ ΜΟΝΑΔΙΚΟ ΤΡΟΠΟ!!!**

# Μερικές παράγωγοι

---

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \dots, x_N) - f(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\Delta x_1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_N) - f(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\Delta x_2}$$

⋮

# Μερικές παράγωγοι

---

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \approx \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \dots, x_N) - f(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\Delta x_1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} \approx \frac{f(x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_N) - f(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\Delta x_2}$$

⋮



# 3. Αριθμητική ολοκλήρωση

# Διακριτοποίηση

---

Διαμερίζουμε (χωρίζουμε) το πεδίο ορισμού **[a,b]** της συνάρτησης σε ***N***-το-πλήθος υποδιαστήματα, που το καθένα τους έχει μήκος

$$h = \frac{|b - a|}{N} = \Delta x$$

# Παραλληλόγραμμα

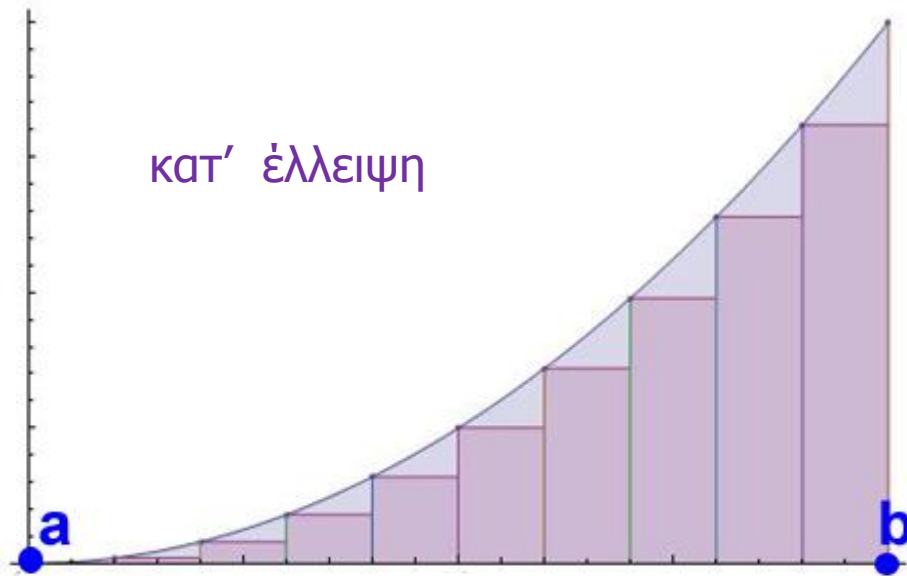
---



Αριθμητική Ανάλυση

# Παραλληλόγραμμα

---

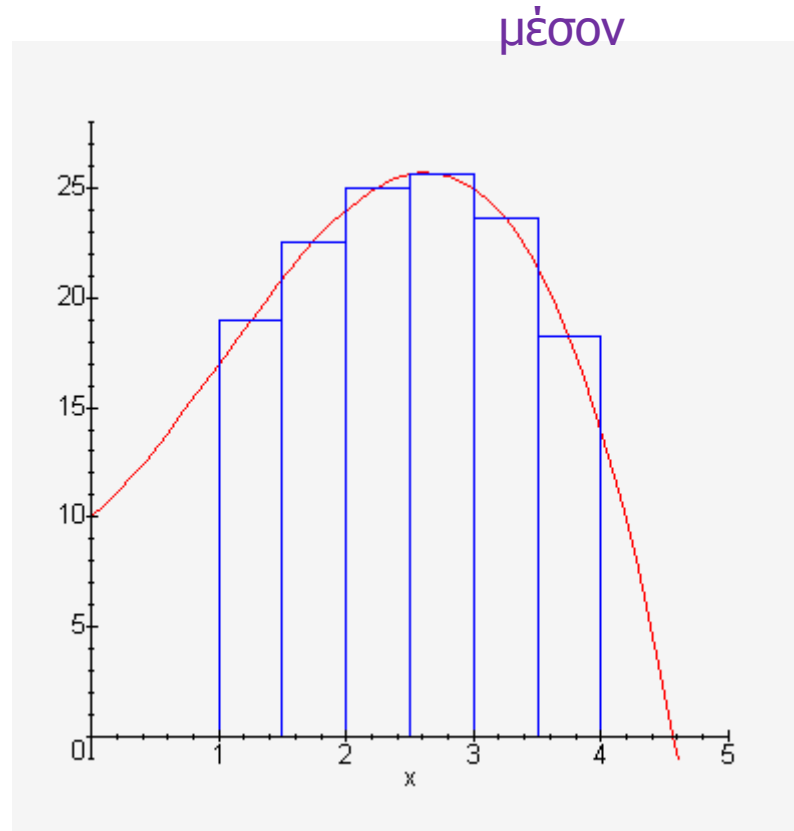


$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h \rightarrow 0} \sum hf(x)$$

Αριθμητική Ανάλυση

# Παραλληλόγραμμα

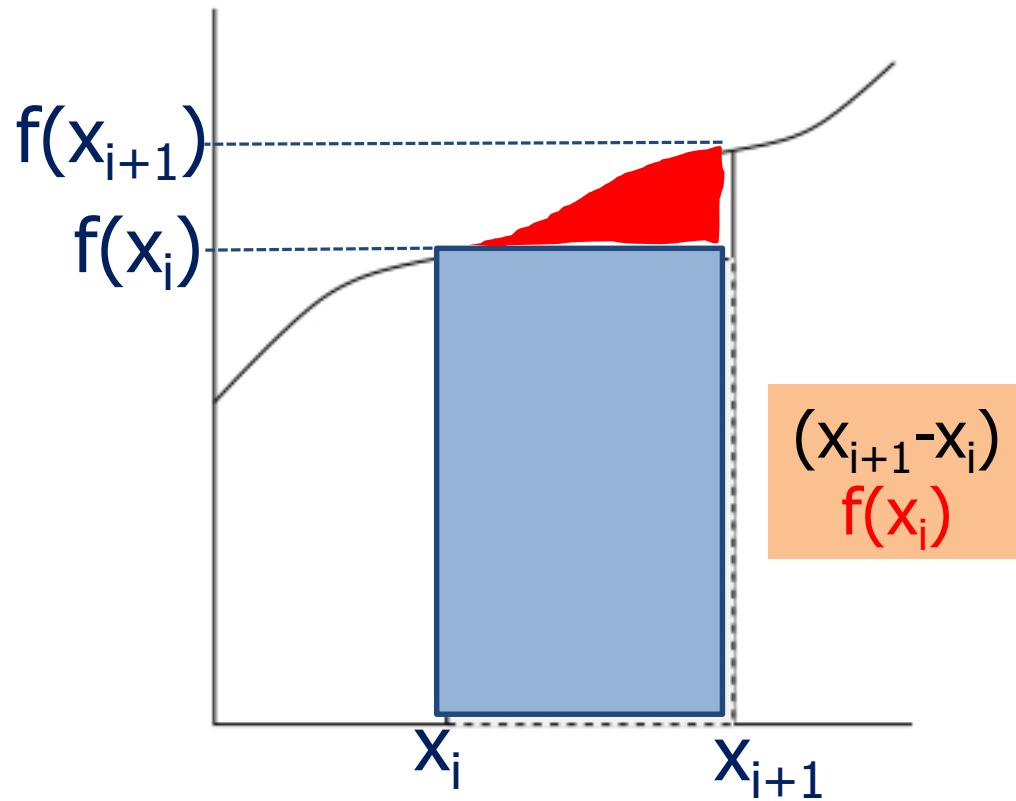
---



Αριθμητική Ανάλυση

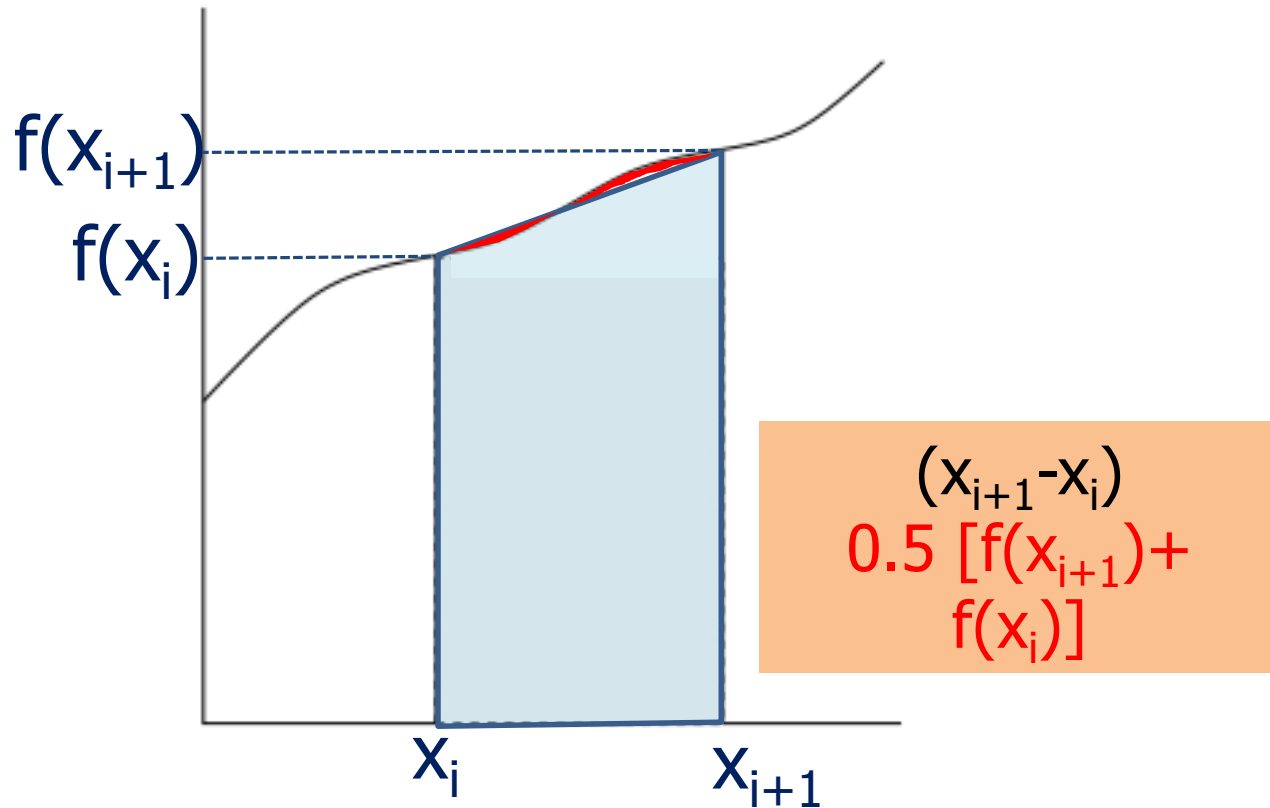
# Παραλληλόγραμμα

---



Αριθμητική Ανάλυση

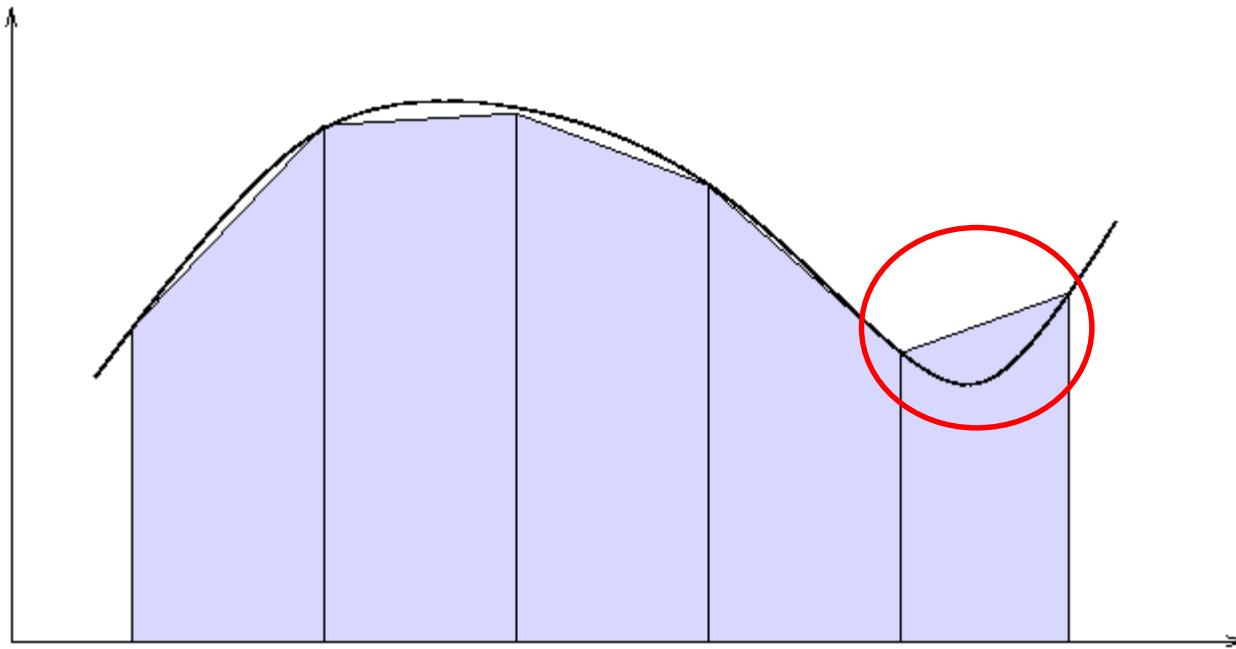
# Τραπέζια



Αριθμητική Ανάλυση

# Τραπεζία

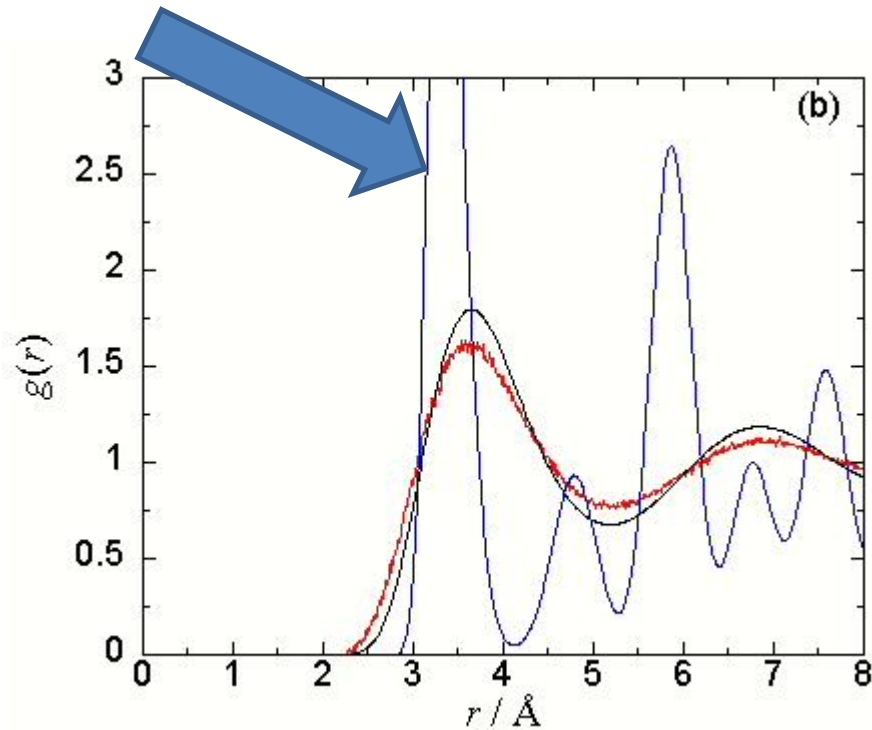
---



Αριθμητική Ανάλυση

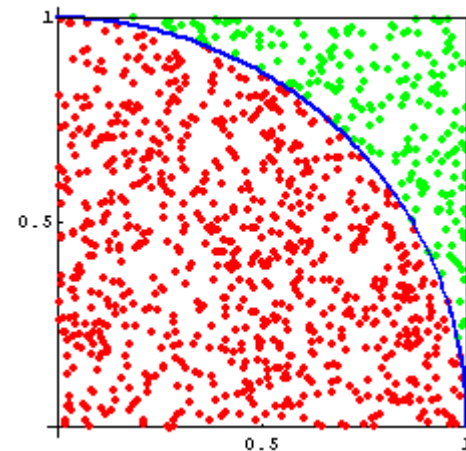
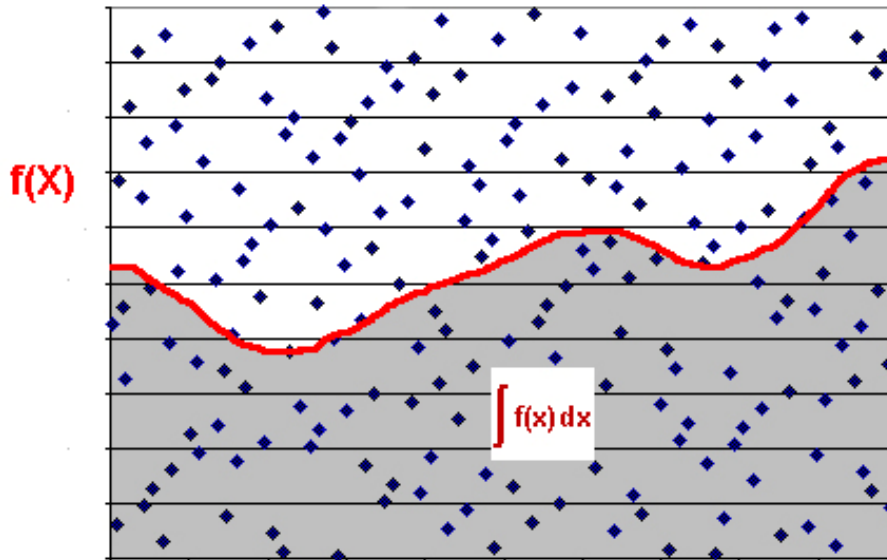


# Μη ομαλές συναρτήσεις



Αριθμητική Ανάλυση

# Ολοκλήρωση Monte Carlo

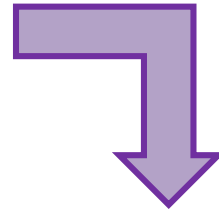
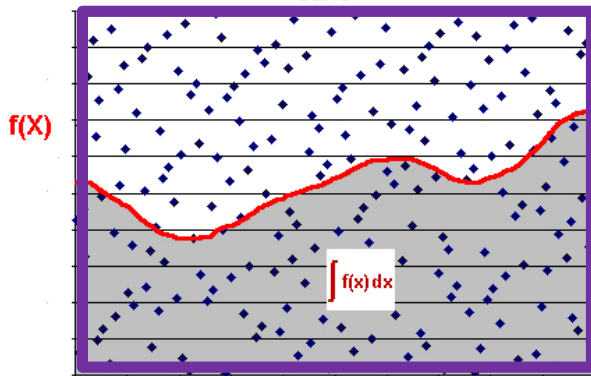


~~ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ =  $\frac{\text{ΠΛΗΘΟΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΤΗΝ ΚΑΜΠΥΛΗ}}{\text{ΠΛΗΘΟΣ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ}}$~~

Αριθμητική Ανάλυση

# Ολοκλήρωση Monte Carlo

$$\text{ΛΟΓΟΣ ΣΗΜΕΙΩΝ } \underline{\lambda} = \frac{\text{ΠΛΗΘΟΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΚΑΤΩ ΑΠ'Ο ΤΗΝ ΚΑΜΠΥΛΗ}}{\text{ΠΛΗΘΟΣ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ}}$$



**ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ =  $\underline{\lambda}$  ΕΜΒΑΔΟΝ ΠΕΡΙΟΧΗΣ ΓΙΑ ΌΛΑ ΤΑ ΣΗΜΕΙΑ**

Αριθμητική Ανάλυση

# Εφαρμογές

---

## **Παράδειγμα στο EXCEL**

«Το υλικό της παρουσίασης προέρχεται από τις πανεπιστημιακές παραδόσεις του καθηγητή Φρ. Κουτελιέρη».

Αριθμητική Ανάλυση

Τέλος Ενότητας

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.