Φροντιστήριο 3

Δυναμική Απόκριση Συστημάτων 1ης και 2ης τάξης

Συστήματα 1ης ταξης

Είναι εκείνα (γραμμικά ή γραμμικοποιημένα) που περιγράφονται από 1ης διαφορικές εξισώσεις:

$$\tau_p \frac{dy}{dt} + y = K_p x(t)$$

Ορίζοντας μεταβλητές απόκλισης (Y, X) γύρω από μία σταθερή κατάσταση (y_s, x_s):

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_p}{\tau s + 1}}$$

$$X(s) \longrightarrow \overset{G(s)}{\boxed{\frac{K_p}{\tau s + 1}}} \longrightarrow Y(s)$$

Δυναμική απόκριση συστημάτων 1ης ταξης

Βηματική επιβολή μεγέθους Α:

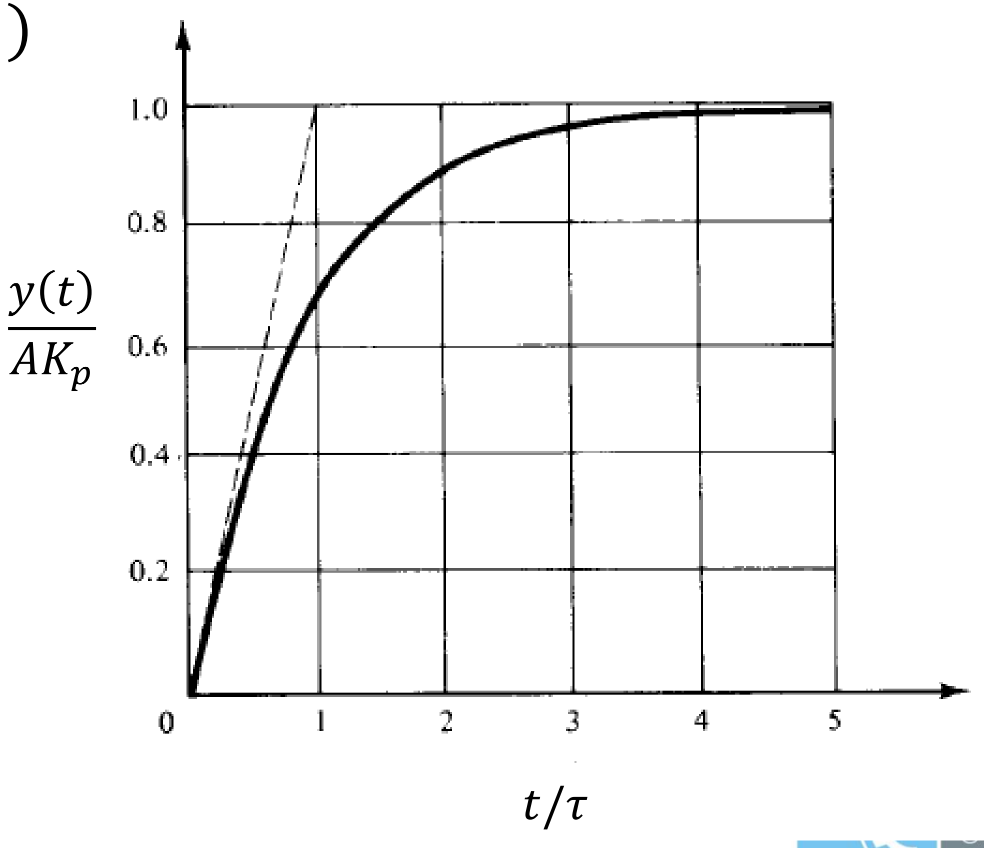
$$X(s) = \frac{A}{s}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_p}{\tau s + 1}}$$

$$Y(s) = \frac{AK_p}{s(\tau_p s + 1)}$$

Με αντιστροφή έχουμε: $y(t) = AK_p(1 - e^{-\frac{t}{\tau_p}})$

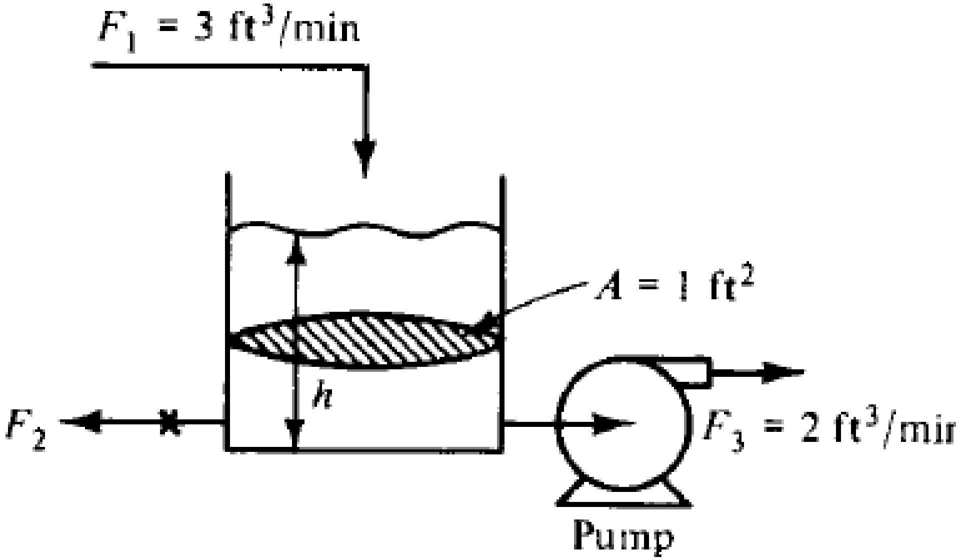
- Το σύστημα φτάνει σε νέα μόνιμη κατάσταση.
- Η αρχική κλίση είναι: $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = \frac{AK_p}{\tau}$
- Η χρονική σταθερά είναι δείκτης της **ταχύτητας απόκρισης** του συστήματος



Άσκηση 1

Υποθέστε ότι θέλετε να ελέγξετε το επίπεδο του υγρού στην δεξαμενή στα 5m μεταβάλλοντας την παροχή F_2 σε διαταραχές του F_2 σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

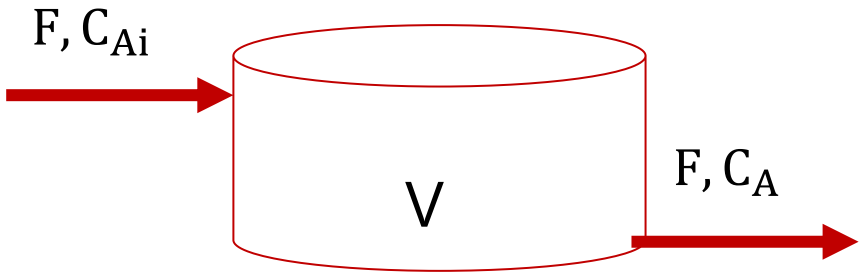
$$F_2 = 10(h - 5\,) + 1$$



a) Βρείτε την συνάρτηση μεταφοράς μεταξύ h και F_1
b) Βρείτε την χρονική σταθερά και την ενίσχυση της δεξαμενής
c) Υπολογίστε την απόκριση του συστήματος σε βηματική μεταβολή της F_1 κατά 1 m³/min
d) Υπολογίστε την καινούρια μόνιμη κατάσταση του συστήματος

Άσκηση 2

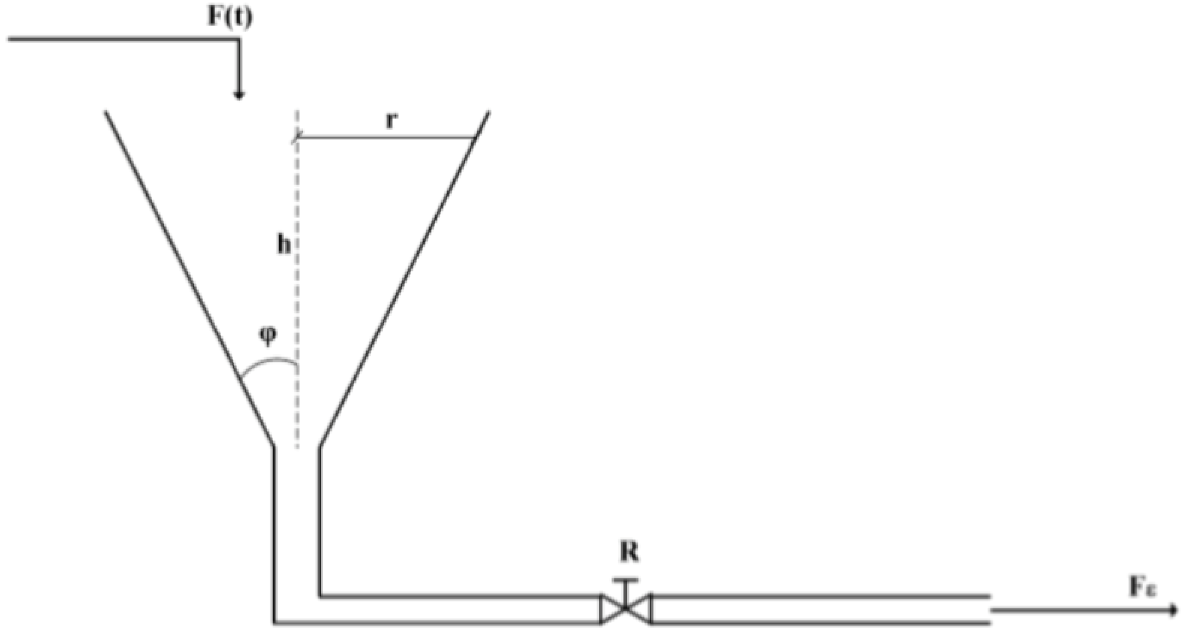
Ένας ισοθερμοκρασιακός αντιδραστήρας συνεχούς ροής όπου γίνεται η μη αντιστρεπτή αντίδραση, $\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$, εμφανίζει κινητική 1ης τάξης $r = kC_A$.



(α) Δείξτε ότι η συγκέντρωση c_A ακολουθεί δυναμική πρώτης τάξης σε μεταβολές της συγκέντρωσης τροφοδοσίας c_{Ai}.
(β) Βρείτε την ενίσχυση, την χρονική σταθερά του συστήματος και την συνάρτηση μεταφοράς μεταξύ C_A, C_{Ai}
(γ) Σχεδιάστε ποιοτικά την απόκριση του συστήματος σε μοναδιαία παλμική μεταβολή στην C_{Ai}. Ο αντιδραστήρας έχει όγκο V και οι παροχές εισόδου εξόδου είναι ίσες με F.

Άσκηση 3

Μία δεξαμενή υγρού έχει σχήμα κώνου. Υποθέτοντας σταθερή πυκνότητα ρευστού και γραμμική σχέση μεταξύ παροχής εκροής και στάθμης $F_e = \frac{h}{R}$,



a) να γράψετε το ισοζύγιο μάζας για τη δεξαμενή
b) να γραμμικοποιήσετε την εξίσωση που βρήκατε στο ερώτημα (α) γύρω από τη μόνιμη κατάσταση h_s.

UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering

Συστήματα 2ης ταξης

Είναι εκείνα που περιγράφονται από 2ης τάξης διαφορικές εξισώσεις:

$$\tau^2 \frac{d^2y}{dt} + 2\zeta\tau\frac{dy}{dt} + y = K_p x(t)$$

Ορίζοντας μεταβλητές απόκλισης (Y, X) γύρω από μία σταθερή κατάσταση (y_s, x_s):

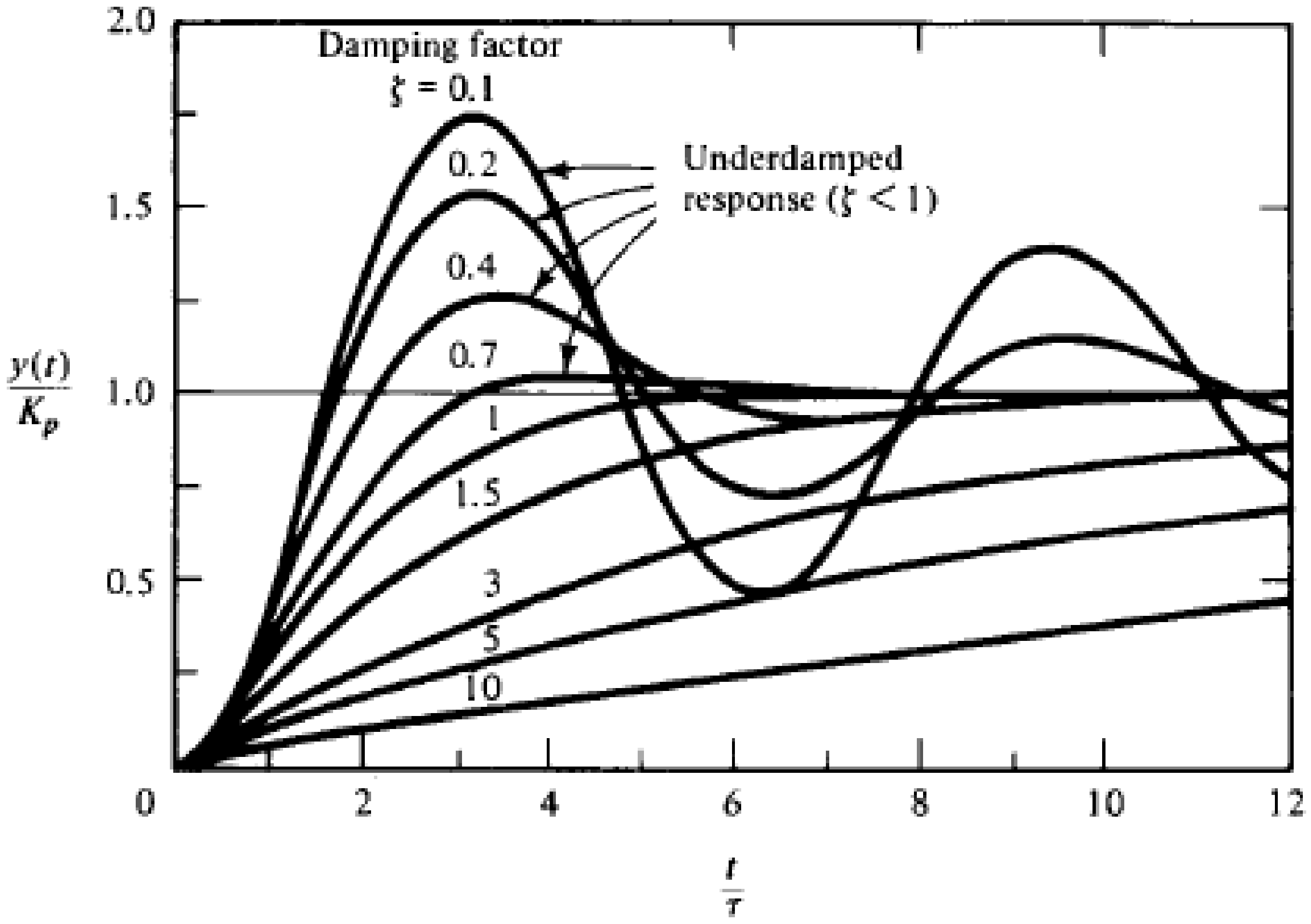
$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_p}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}}$$

τ: Περίοδος ταλάντωσης συστήματος
ζ: συντελεστής απόσβεσης

$$X(s) \longrightarrow \overset{G(s)}{\boxed{\frac{K_p}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}}} \longrightarrow Y(s)$$

UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

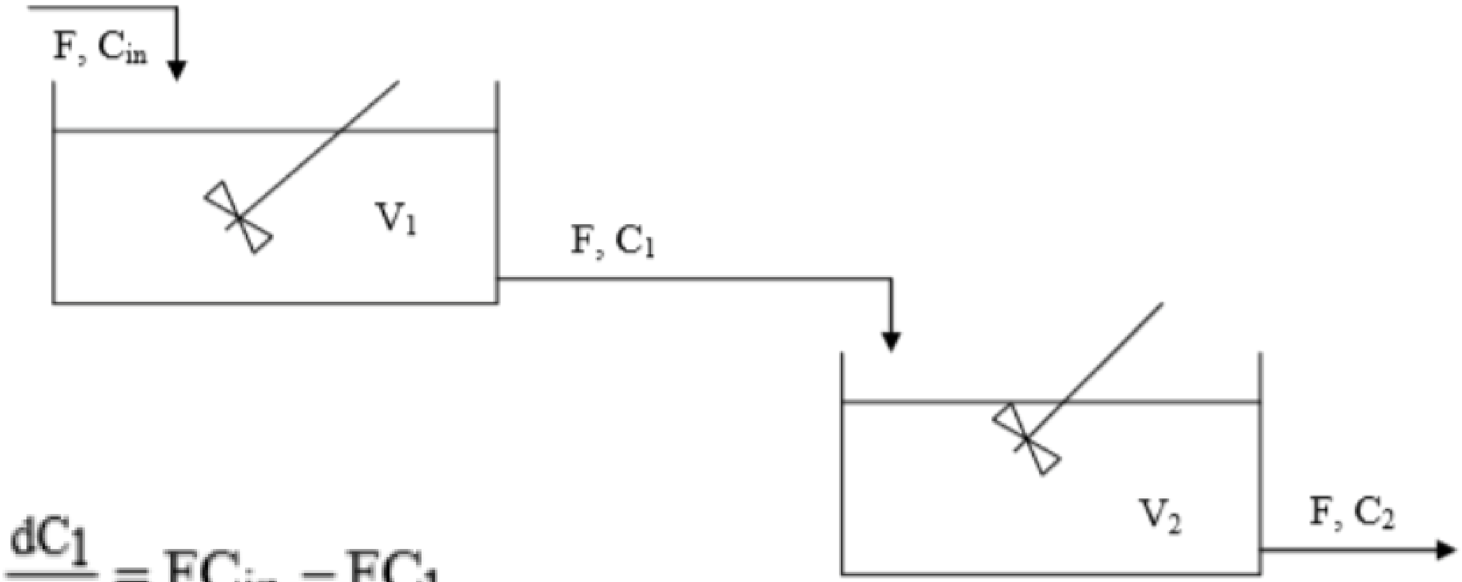
Συστήματα 2ης τάξης



(b)

Άσκηση 4

Για το παρακάτω σύστημα ανάδευσης να υπολογίσετε τις συγκεντρώσεις C1(t), C2(t) για τις ακόλουθες περιπτώσεις:



$$V_1 \frac{dC_1}{dt} = FC_{in} - FC_1$$

$$V_2 \frac{dC_2}{dt} = FC_1 - FC_2$$

$$\tau = \frac{V_1}{F} = \frac{V_2}{F} = 10 \text{ min}$$

A$_1$) $C_{in}(t)=0$ (δηλ. η τροφοδοσία αποτελείται από καθαρό νερό)
$C_1(0)=0$ (δηλ. στο δοχείο 1 υπάρχει καθαρό νερό)
$C_2(0)=10$ kg m^{-3} (δηλ. υπάρχει κάποια ποσότητα χρωστικής ουσίας στο δοχείο 2).

A$_2$) $C_{in}(t)=0$ (δηλ. η τροφοδοσία αποτελείται από καθαρό νερό)
$C_1(0)=10$ kg m^{-3} (δηλ. στο δοχείο 1 υπάρχει ποσότητα χρωστικής ουσίας)
$C_2(0)=0$ (δηλ. υπάρχει καθαρό νερό στο δοχείο 2).

B) Τα δύο δοχεία αρχικά περιέχουν καθαρό νερό (δηλ. $C_1(0)=C_2(0)=0$) αλλά στην τροφοδοσία υπάρχει βηματική μεταβολή χρωστικής ουσίας μεγέθους M=10 kg m^{-3}.

Γ) Τα δύο δοχεία αρχικά περιέχουν καθαρό νερό (δηλ. $C_1(0)=C_2(0)=0$) αλλά στην τροφοδοσία υπάρχει παλμική μεταβολή χρωστικής ουσίας ύψους H=10 kg m^{-3} και διάρκειας $t_w=2.5$ min.

Δ) Τα δύο δοχεία αρχικά περιέχουν καθαρό νερό (δηλ. $C_1(0)=C_2(0)=0$) αλλά στην τροφοδοσία υπάρχει οριακή παλμική μεταβολή χρωστικής ουσίας μεγέθους ίσου με αυτού του ερωτήματος Γ.

E) Τα δύο δοχεία αρχικά περιέχουν καθαρό νερό (δηλ. $C_1(0)=C_2(0)=0$) αλλά στην τροφοδοσία υπάρχει γραμμική μεταβολή χρωστικής ουσίας με κλίση M=0.1 kg m^{-3} min^{-1}.

UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

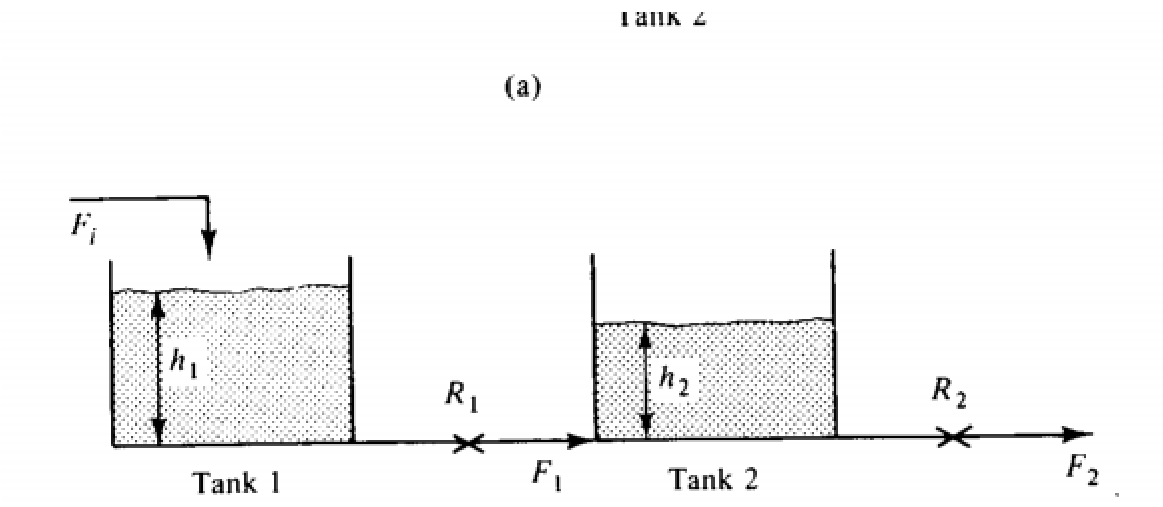
Άσκηση 5

Οι δεξαμενές του παρακάτω σχήματος αλληλεπιδρούν. Το σύστημα αρχικά βρίσκεται σε σταθερή κατάσταση με παροχή στην πρώτη δεξαμενή $F_{in} = \frac{10m^3}{min}$.

Α) Εαν η παροχή εισόδου αλλάξει σε $F_{in} = 11m^3/min$ βρείτε την συνάρτηση μεταφοράς του $\mathrm{H}_2(s)$ σε σχέση με το F_{in}.
Β) Βρείτε $H(1), H(4), H(\infty)$.
Γ) Βρείτε τα αρχικά επίπεδα στάθμης $h_1(0), h_2(0)$.
Δ) Βρείτε την συνάρτηση μεταφοράς του $H_1(s)$ σε σχέση με την F_{in}.

Δεδομένα:

$$\mathrm{A}_1 = 1m^2$$
$$A_2 = 1.25m^2$$
$$R_1 = 1m/(m^3\mathrm{min})$$
$$R_2 = 0.8m/(m^3 min).$$



Συστήματα 2ης Τάξης

Βηματική Απόκριση: (υπο-αποσβενούμενη απόκριση)

$$Y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\frac{t}{\tau}} \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\frac{t}{\tau} + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

Υπέρβαση: $\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{D}} = \exp\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$

Λόγος Απόσβεσης: $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}} = \exp\left(\frac{-2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$

Περίοδος Ταλάντωσης: $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau}$

Φυσική συχνότητα: $\omega_n = \frac{1}{\tau}$

Χρόνος Ανύψωσης: $t_{rise} = \tau\frac{\pi-\varphi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$ $\varphi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$

Χρόνος μέγιστης απόκρισης: $t_p = \tau\frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

University of Patras
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Άσκηση 6

Βηματική είσοδος με βήμα 4 εισάγεται σε σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{10}{s^2 + 1.6s + 4}$$

Να υπολογίσετε

(α) την % υπέρβαση

(β) τον χρόνο ανύψωσης

(γ) τη μέγιστη τιμή της απόκρισης

(δ) την τελική τιμή της εξόδου

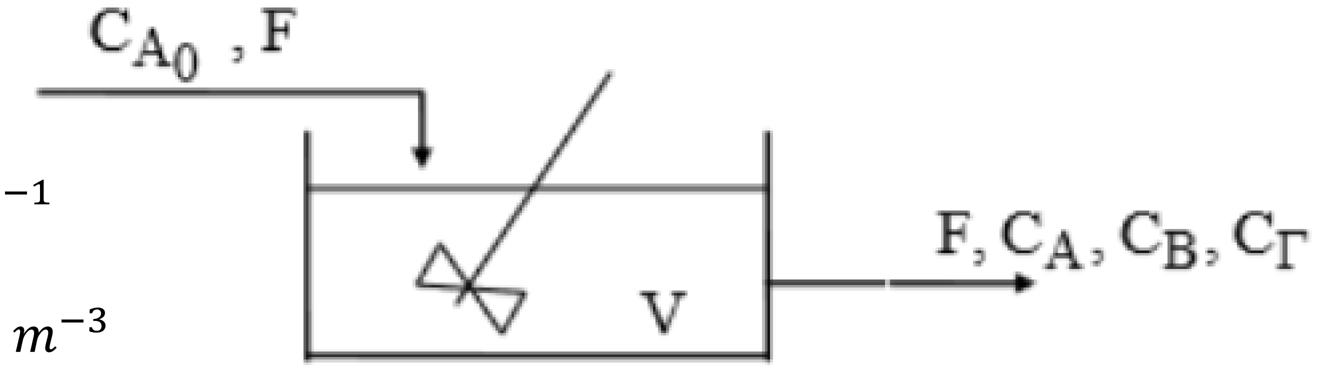
(ε) την περίοδο της ταλάντωσης

Άσκηση 7

Στον αντιδραστήρα CSTR του σχήματος λαμβάνουν χώρα οι αντιδράσεις:

$$\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B} \rightarrow \Gamma \rightarrow \Delta$$

Όλες οι αντιδράσεις είναι 1ης τάξης με κινητική σταθερά $k = 1\,min^{-1}$ και η θερμοκρασία διατηρείται σταθερή.



Παροχή εισόδου και εξόδου: $F = 1\,m^3 min^{-1}$
Όγκος αντιδραστήρα: $V = 1\,m^3$
Συγκέντρωση Α τροφοδοσίας: $C_{A0} = 10\,mol\,m^{-3}$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των C_A, C_B, C_Γ σε συνθήκες μόνιμης κατάστασης
β) Να κατασκευάσετε τη Περιγραφή Χώρου Καταστάσης του συστήματος
γ) Να υπολογίσετε τη συνάρτηση μεταφοράς μεταξύ C_Γ και C_{A0}.
δ) Να υπολογίσετε τη χρονική μεταβολή της C_Γ, εάν η C_{A0} μεταβληθεί βηματικά σε $12\,mol\,m^{-3}$