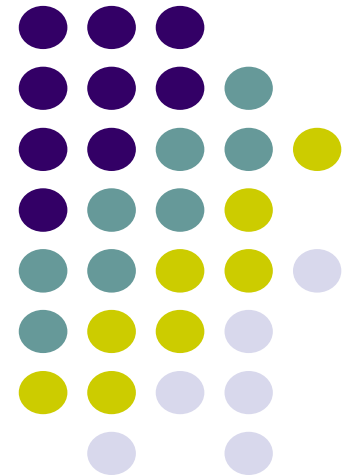


Φροντιστήριο 1

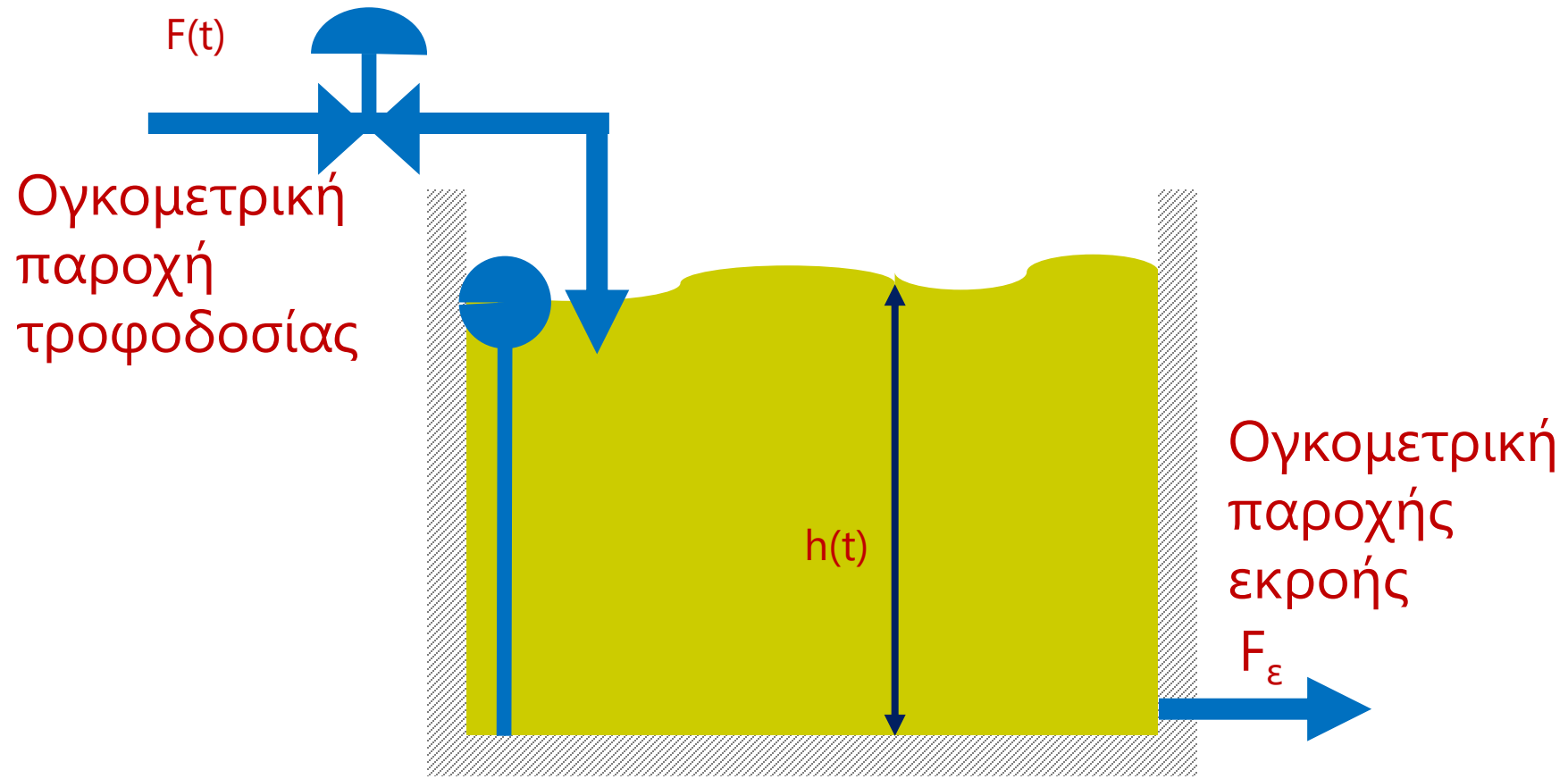
Παραδείγματα συστημάτων





- Σήματα (μεταβλητές) εισόδου
 - Επηρεάζουν την κατάσταση της διεργασίας
 - Διαταραχές
 - Χειριζόμενες μεταβλητές
- (Εσωτερικές) μεταβλητές κατάστασης
 - Περιγράφουν την κατάσταση της διεργασίας
 - Σταθερή τιμή όταν σε ισορροπία
- Σήματα (μεταβλητές) εξόδου
 - Είναι το αποτέλεσμα της διεργασίας
 - Ρυθμιζόμενες μεταβλητές
 - Θόρυβος
 - Μετρούμενες μεταβλητές

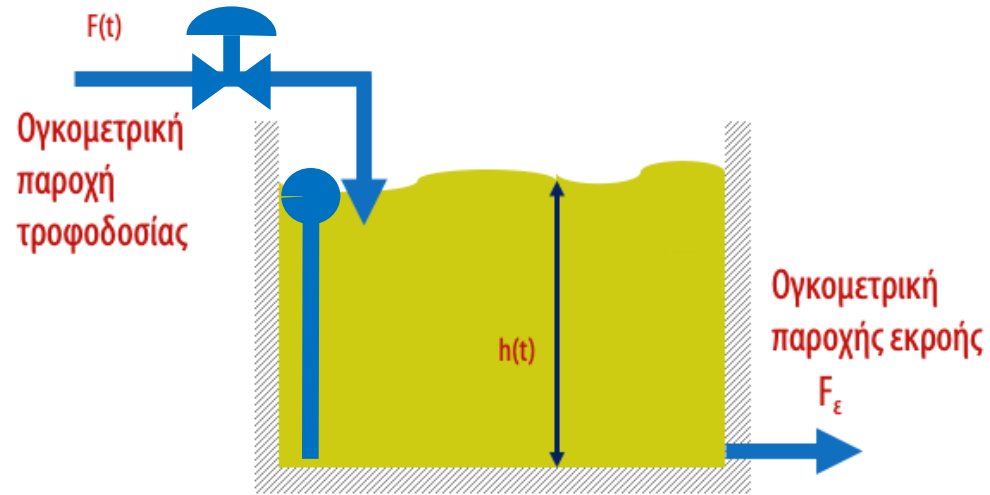
Δεξαμενή υγρού με διαρροή



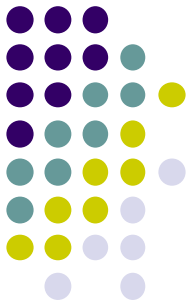
Δυναμικό μοντέλο διεργασίας

Γράφουμε το δυναμικό μοντέλο της διεργασίας
→ ισοζύγιο μάζας

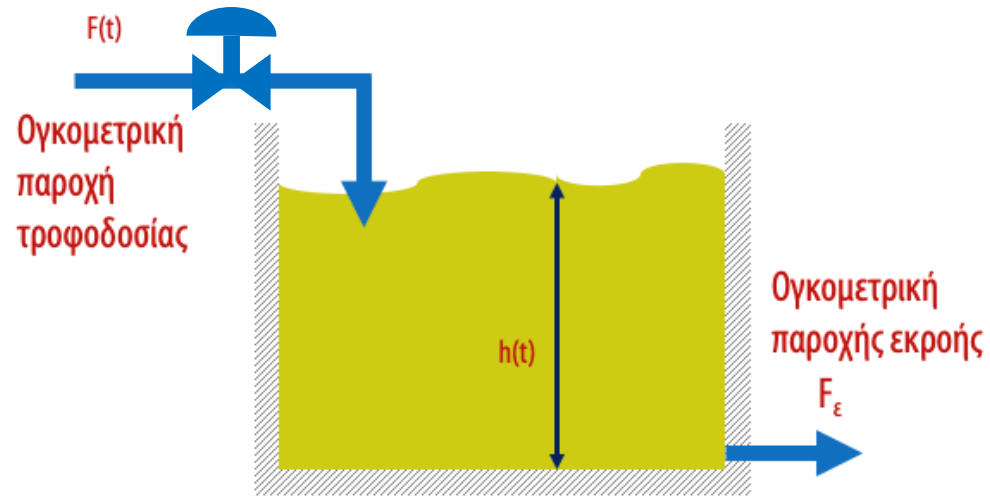
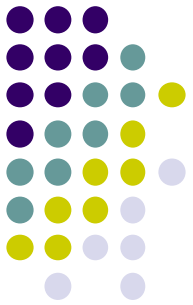
$$A \frac{dh}{dt} = F - F_{\varepsilon}$$



- Διαταραχή (d) _____
- Χειριζόμενη μετ. (u) _____
- Ρυθμιζόμενη μετ. (y_c) _____
- Μετρούμενη μετ. (y_m) _____
- Μετ. Κατάστασης (x) _____



Περιγραφή χώρου καταστάσεων



Βήματα διαδικασίας:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = 0 \\ y_c = y_s \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 0 = f(x, u, d) \\ y_s = h_c(x, u, d) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x = x - x_s \\ u = u - u_s \\ d = d - d_s \\ y = y - y_s \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{dx}{dt} = Ax + Bu + Wd \\ y = Cx + Du + Ed \end{aligned}$$



Περίπτωση 1 Η εκροή του ρευστού γίνεται υπό την επίδραση της βαρύτητας και η ροή στον σωλήνα εκροής είναι στρωτή

$$F_{\varepsilon} = \frac{h}{R}$$

Μοντέλο διεργασίας:



$$AR \frac{dh}{dt} + h = RF(t)$$

Έχουμε δοθεί το επιθυμητό σημείο λειτουργίας $h = h_s$.
Ποιο είναι το σημείο αναφοράς?

Στη μόνιμη κατάσταση, η στάθμη είναι σταθερή:

$$\frac{dh}{dt} = 0 \Rightarrow F_s = \frac{h_s}{R}$$



Περίπτωση 1

Η εκροή του ρευστού γίνεται υπό την επίδραση της βαρύτητας και η ροή στον σωλήνα εκροής είναι στρωτή

$$AR \frac{dh}{dt} + h = RF(t)$$



$$x = h - h_s$$
$$u = F - F_s$$

$$AR \frac{dx}{dt} + x = R u(t)$$



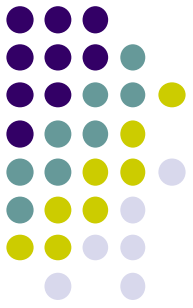
$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{AR} x + \frac{1}{A} u$$

$$y = x$$

$$A = \left[-\frac{1}{AR} \right], \quad B = \left[\frac{1}{A} \right], \quad W = [0]$$
$$C = [1], \quad D = [0], \quad E = [0]$$

Περιγραφή Χώρου Καταστάσεων

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + Wd$$
$$y = Cx + Du + Ed$$



Περίπτωση 2 Η εκροή του ρευστού γίνεται υπό την επίδραση της βαρύτητας, αλλά η ροή στον σωλήνα εκροής είναι τυρβώδης

$$F_{\varepsilon} = C\sqrt{h}$$

Μοντέλο διεργασίας:

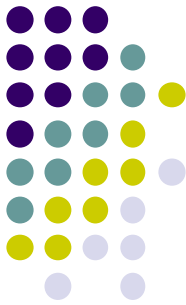


$$A \frac{dh}{dt} = -C\sqrt{h} + F(t)$$

Μας έχει δοθεί σημείο λειτουργίας $h = h_s$. Ποιο είναι τώρα το σημείο αναφοράς?

Μόνιμη κατάσταση:

$$\frac{dh}{dt} = 0 \Rightarrow F_s = C\sqrt{h_s}$$



Περίπτωση 2 Η εκροή του ρευστού γίνεται υπό την επίδραση της βαρύτητας, αλλά η ροή στον σωλήνα εκροής είναι τυρβώδης $F_e = C\sqrt{h}$

Μοντέλο διεργασίας:

$$A \frac{dh}{dt} = -C\sqrt{h} + F(t)$$

Μη γραμμικό!

Γραμμικοποίηση κοντά σε
μόνιμη κατάσταση αναφοράς

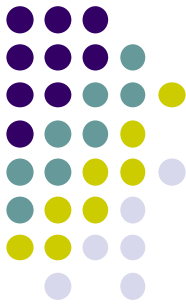
$$\sqrt{h} \approx \sqrt{h_{s,ref}} + \frac{1}{2\sqrt{h_{s,ref}}}(h - h_{s,ref})$$

$$(h_{s,ref}, F_{s,ref})$$



$$A \frac{dh}{dt} \approx -C\sqrt{h_{s,ref}} - \frac{C}{2\sqrt{h_{s,ref}}}(h - h_{s,ref}) + F(t)$$

Γραμμικοποιημένο μοντέλο



Περίπτωση 2 Η εκροή του ρευστού γίνεται υπό την επίδραση της βαρύτητας, αλλά η ροή στον σωλήνα εκροής είναι τυρβώδης $F_\varepsilon = C\sqrt{h}$

$$A \frac{dh}{dt} \approx -C\sqrt{h_{s,\text{ref}}} - \frac{C}{2\sqrt{h_{s,\text{ref}}}}(h - h_{s,\text{ref}}) + F(t)$$



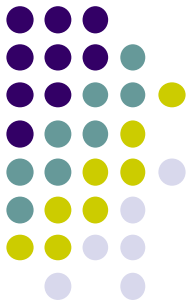
$$x = h - h_s$$
$$u = F - F_s$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{Cx}{2A\sqrt{h_s}} + \frac{1}{A}u$$

Αν θέσω $R = \frac{2\sqrt{h_s}}{C}$, καταλήγω πάλι στο:

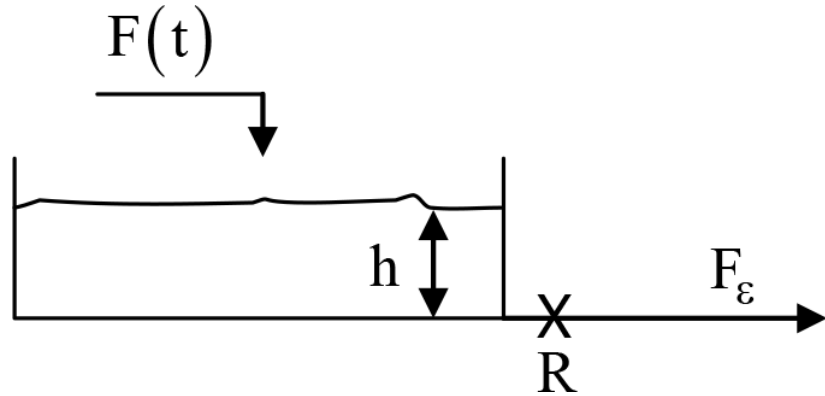
$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{AR}x + \frac{1}{A}u$$

$$A = \left[-\frac{1}{AR} \right], \quad B = \left[\frac{1}{A} \right], \quad W = [0]$$
$$C = [1], \quad D = [0], \quad E = [0]$$



Περίπτωση 3

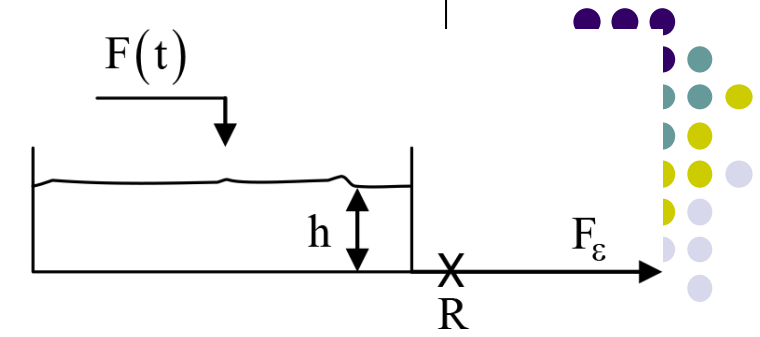
Η μεταβλητή εξόδου ενός συστήματος δεν είναι κατ' ανάγκη η εξαρτημένη μεταβλητή της διαφορικής εξίσωσης



- Διαταραχή (d) : F
- Χειριζόμενη μετ. (u) : 1/R
- Ρυθμιζόμενη μετ. (y_c) : F_ε
- Μετρούμενη μετ. (y_m) : F_ε
- Μετ. Κατάστασης (x) : h

$$\begin{cases} A \frac{dh}{dt} = F(t) - \frac{h}{R} \\ F_{\varepsilon} = \frac{h}{R} \end{cases} \quad \longrightarrow \quad AR \frac{dF_{\varepsilon}}{dt} + F_{\varepsilon} = F$$

Περίπτωση 3 Η μεταβλητή εξόδου ενός συστήματος δεν είναι κατ' ανάγκη η εξαρτημένη μεταβλητή της διαφορικής εξίσωσης



$$\begin{cases} A \frac{dh}{dt} = F(t) - \frac{h}{R} \\ F_\epsilon = \frac{h}{R} \end{cases}$$

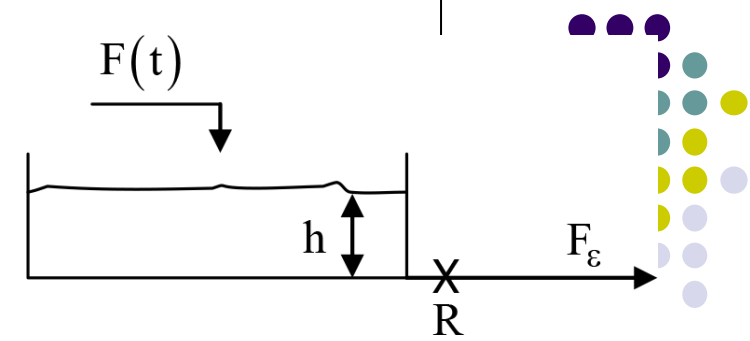


$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{1}{A} xu + \frac{1}{A} d \\ y &= xu \end{aligned}$$

Μη γραμμικό!

- Διαταραχή (d) : F
- Χειριζόμενη μετ. (u) : $1/R$
- Ρυθμιζόμενη μετ. (y_c) : F_ϵ
- Μετρούμενη μετ. (y_m) : F_ϵ
- Μετ. Κατάστασης (x) : h

Περίπτωση 3 Η μεταβλητή εξόδου ενός συστήματος δεν είναι κατ' ανάγκη η εξαρτημένη μεταβλητή της διαφορικής εξίσωσης



$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{A}xu + \frac{1}{A}d \quad \text{ss} \Rightarrow \quad 0 = -\frac{1}{A}x_s u_s + \frac{1}{A}d_s \Leftrightarrow \quad x_s u_s = d_s \quad y \equiv y_s$$

$$y = xu \quad d \equiv d_s \quad y = x_s u_s \quad y = x_s u_s \quad d \equiv d_s \quad x_s u_s = d_s \quad ?$$

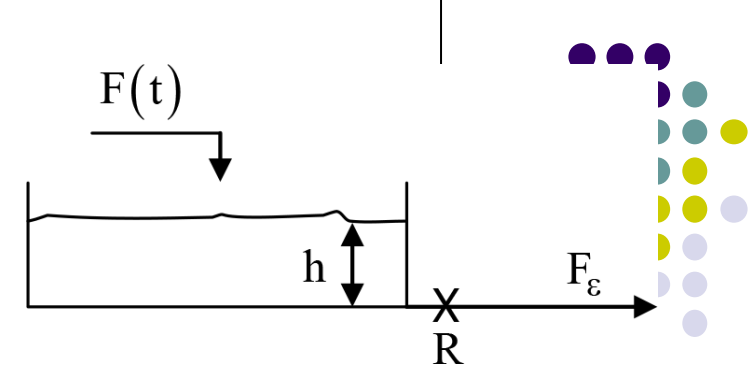
$$y_s = x_s u_s \quad ?$$

Άρα έχουμε τροχιά αναφοράς (x_0, u_0, d_s) !

$$\frac{dx_0}{dt} = -\frac{1}{A}x_0 u_0 + \frac{1}{A}d_s \Rightarrow \quad \frac{dx_0}{dt} = -\frac{1}{A}y_s + \frac{1}{A}d_s$$

$$y_s = x_0 u_0 \quad u_0 = y_s / x_0$$

Περίπτωση 3 Η μεταβλητή εξόδου ενός συστήματος δεν είναι κατ' ανάγκη η εξαρτημένη μεταβλητή της διαφορικής εξίσωσης



$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{A}xu + \frac{1}{A}d$$

$$y = xu$$

$$\frac{dx_0}{dt} = -\frac{1}{A}y_s + \frac{1}{A}d_s$$

$$u_0 = y_s/x_0$$

Γραμμικοποίηση γύρω από την τροχιά αναφοράς ($x_0, u_0, d_0 \equiv d_s, y_0 \equiv y_s$)

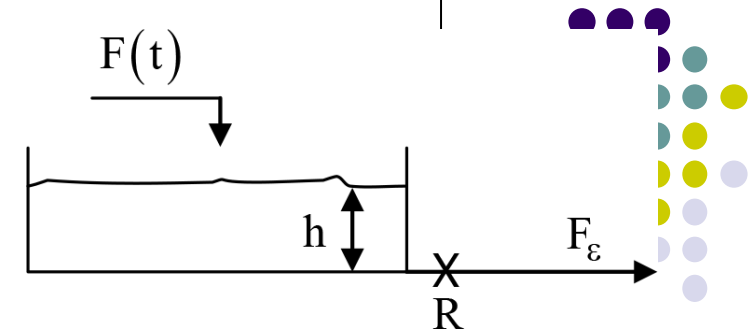
$$f(x, u, d) \cong f(x_0, u_0, d_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, u_0, d_0)} (x - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x_0, u_0, d_0)} (u - u_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial d} \right|_{(x_0, u_0, d_0)} (d - d_0)$$

$$f \approx -\frac{1}{A}x_0u_0 + \frac{1}{A}d_s - \frac{u_0}{A}(x - x_0) - \frac{x_0}{A}(u - u_0) + \frac{1}{A}(d - d_s)$$

$$h \approx x_0u_0 + u_0(x - x_0) + x_0(u - u_0)$$

Περίπτωση 3

Η μεταβλητή εξόδου ενός συστήματος δεν είναι κατ' ανάγκη η εξαρτημένη μεταβλητή της διαφορικής εξίσωσης



$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{A}xu + \frac{1}{A}d$$

$$y = xu$$

$$\frac{dx_0}{dt} = -\frac{1}{A}y_s + \frac{1}{A}d_s$$
$$u_0 = y_s/x_0$$



$$d = d - d_s$$
$$u = u - u_0$$
$$y = y - y_s$$
$$x = x - x_0$$

$$\frac{dx}{dt} \approx -\frac{u_0}{A}x - \frac{x_0}{A}u + \frac{1}{A}d$$

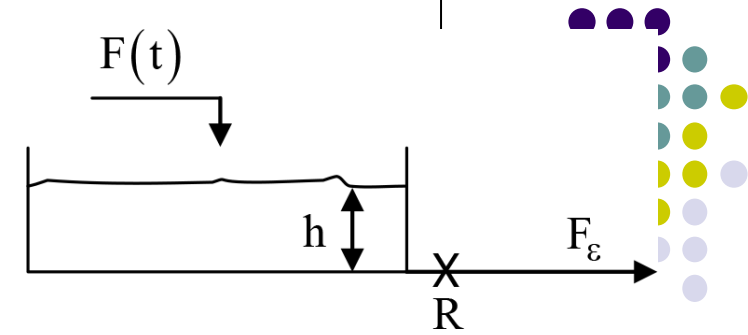
$$y \approx u_0x + x_0u$$

$$A = \left[-\frac{u_0}{A}\right], \quad B = \left[-\frac{x_0}{A}\right], \quad W = \left[\frac{1}{A}\right]$$

$$C = [u_0], \quad D = [x_0], \quad E = [0]$$

Περίπτωση 3

Η μεταβλητή εξόδου ενός συστήματος δεν είναι κατ' ανάγκη η εξαρτημένη μεταβλητή της διαφορικής εξίσωσης



Αν $y_s = d_s$ τότε:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{A}xu + \frac{1}{A}d$$

$$y = xu$$



$$d = d - d_s$$

$$u = u - u_s$$

$$y = y - y_s$$

$$x = x - x_s$$

$$\frac{dx}{dt} \approx -\frac{u_s}{A}x - \frac{x_s}{A}u + \frac{1}{A}d$$

$$y \approx u_s x + x_s u$$

$$x_s = \text{ότι θελω!!}$$

$$u_s = y_s/x_s$$

$$A = \left[-\frac{u_s}{A}\right], \quad B = \left[-\frac{x_s}{A}\right], \quad W = \left[\frac{1}{A}\right]$$

$$C = [u_s], \quad D = [x_s], \quad E = [0]$$

Περιγραφή συναρτήσεων μεταφοράς



$$\frac{dx}{dt} \approx -\frac{u_s}{A}x - \frac{x_s}{A}u + \frac{1}{A}d$$

$$y \approx u_s x + x_s u$$

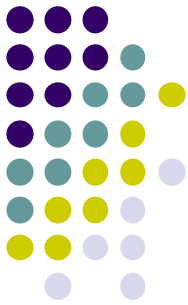
$$A = \left[-\frac{u_s}{A}\right], \quad B = \left[-\frac{x_s}{A}\right], \quad W = \left[\frac{1}{A}\right]$$

$$C = [u_s], \quad D = [x_s], \quad E = [0]$$

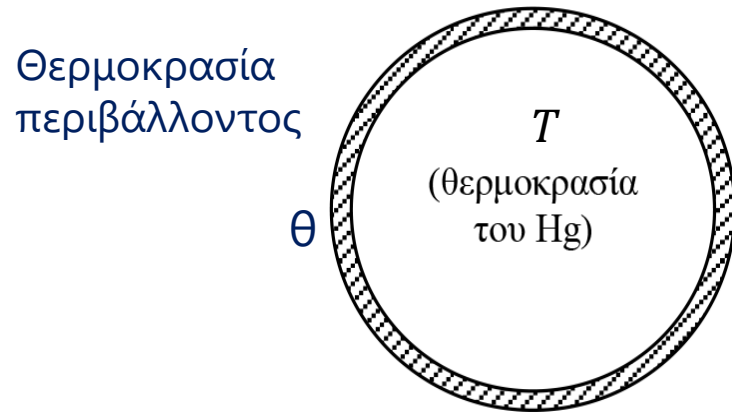
$$Y = C(s - A)^{-1}BU(s) + DU(s) + C(s - A)^{-1}WD(s) + ED(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \left[u_s \left(\frac{1}{s + \frac{u_s}{A}} \right) \left(-\frac{x_s}{A} \right) + x_s \right] \Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{x_s A s}{u_s + A s}$$

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \left[u_s \left(\frac{1}{s + \frac{u_s}{A}} \right) \left(\frac{1}{A} \right) \right] \Rightarrow \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{u_s}{u_s + A s}$$



Παράδειγμα συστήματος 1^{ης} τάξης: Θερμόμετρο Υδραργύρου



$$(\text{Εισροή}) - (\text{Εκροή}) = (\text{Συσσώρευση})$$

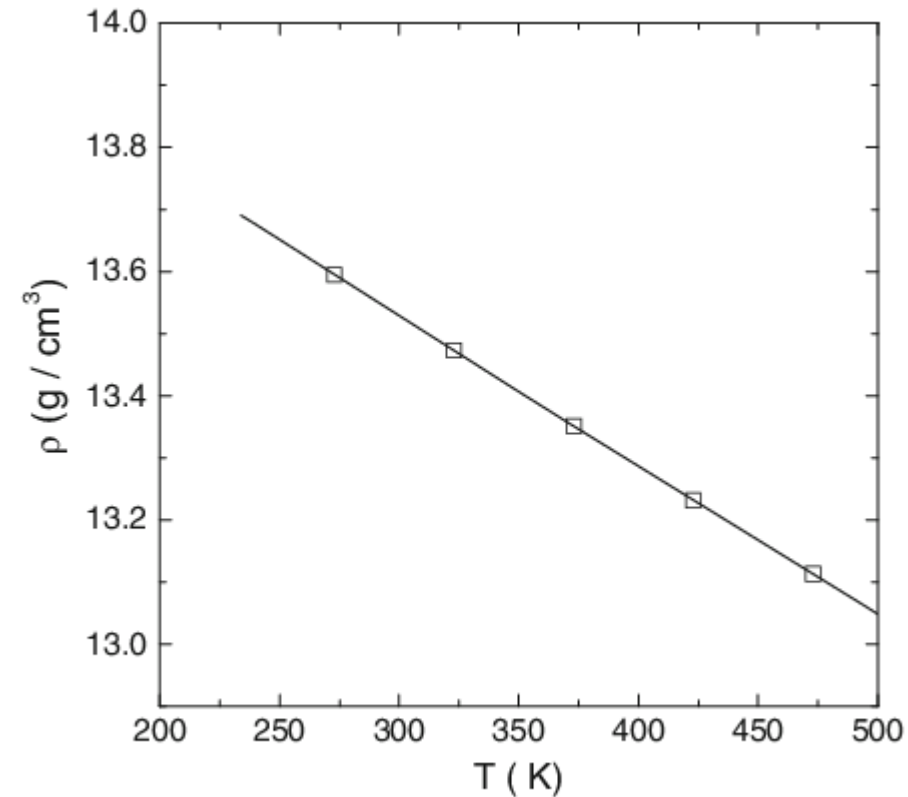
$$h A (\theta - T) = m c \frac{dT}{dt}$$

↑
συντελεστής μεταφοράς θερμότητας

↑
επιφάνεια

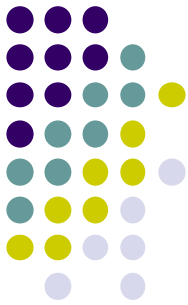
↑
μάζα του Hg

↑
ειδική θερμότητα του Hg

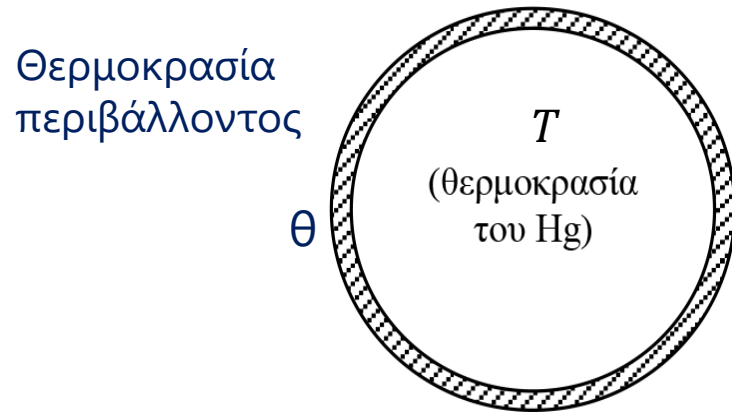


$$\rho(T) = \rho_r [1 - \beta(T - T_r)]$$

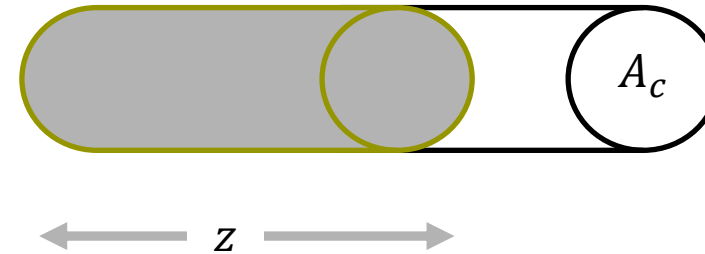
↑
συντελεστής κυβικής διαστολής



Παράδειγμα συστήματος 1^{ης} τάξης: Θερμόμετρο Υδραργύρου



$$\rho(T) = \rho_r [1 - \beta(T - T_r)]$$



(Εισροή) - (Εκροή) = (Συσσώρευση)

$$h A (\theta - T) = m c \frac{dT}{dt}$$

h : συντελεστής μεταφοράς θερμότητας
 A : επιφάνεια
 m : μάζα του Hg
 c : ειδική θερμότητα του Hg

$$\rho(T) A_c z = \rho_r A_c z_r \Rightarrow z = z_r \frac{\rho_r}{\rho(T)} = h(T)$$

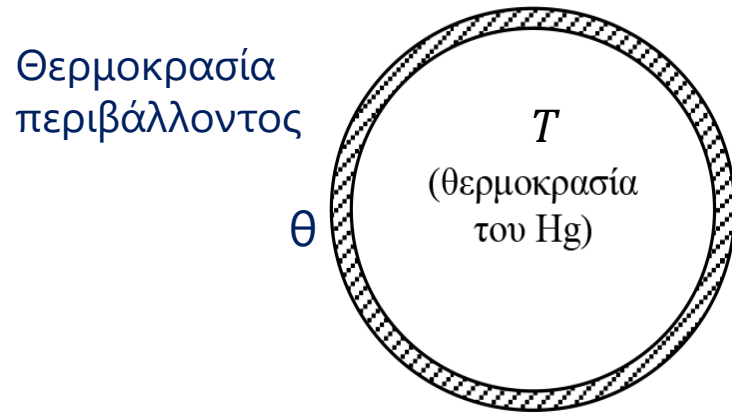
$$\Rightarrow z \cong z_r + \frac{\partial h}{\partial T} (T - T_r)$$

$$\Rightarrow z - z_r = z_r \frac{\rho_r (-1)(-\beta)}{\rho_r (1 - \beta(T - T_r))^2} \Big|_{T \leftarrow T_r} (T - T_r)$$

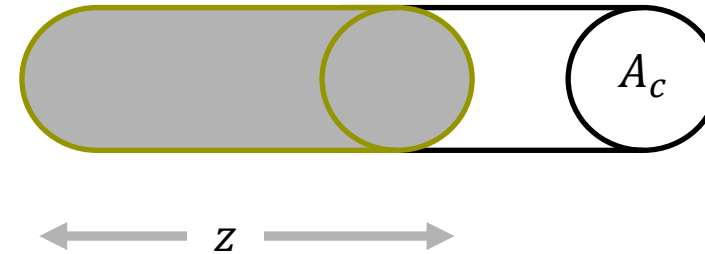
$$\Rightarrow z - z_r = z_r \beta (T - T_r)$$



Παράδειγμα συστήματος 1^{ης} τάξης: Θερμόμετρο Υδραργύρου



$$\rho(T) = \rho_r [1 - \beta(T - T_r)]$$



(Εισροή) - (Εκροή) = (Συσσώρευση)

$$h A (\theta - T) = m c \frac{dT}{dt}$$

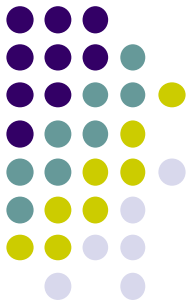
h : συντελεστής μεταφοράς θερμότητας
 A : επιφάνεια
 m : μάζα του Hg
 c : ειδική θερμότητα του Hg

$$z - z_r = z_r \beta (T - T_r)$$

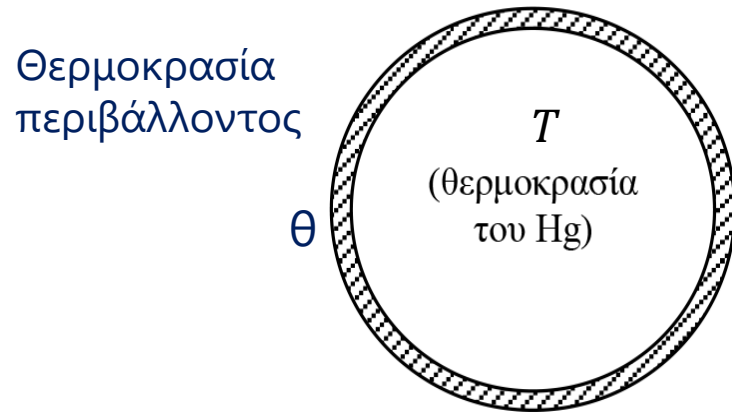
$$u = \theta - \theta_r$$

$$x = T - T_r \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{hA}{mc} (u - x)$$

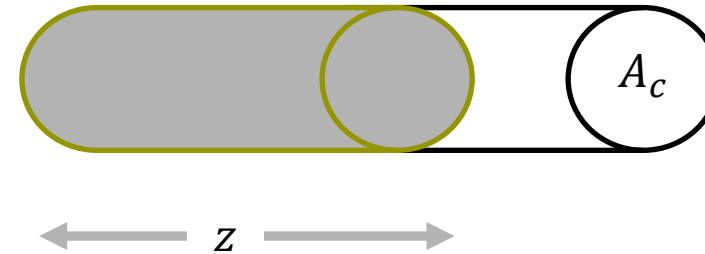
$$y = z - z_r \quad \rightarrow \quad y = z_r \beta x$$



Παράδειγμα συστήματος 1^{ης} τάξης: Θερμόμετρο Υδραργύρου



$$\rho(T) = \rho_r [1 - \beta(T - T_r)]$$



(Εισροή) - (Εκροή) = (Συσσώρευση)

$$h A (\theta - T) = m c \frac{dT}{dt}$$

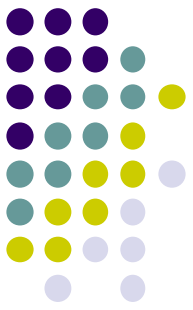
h : συντελεστής μεταφοράς θερμότητας
 A : επιφάνεια
 m : μάζα του Hg
 c : ειδική θερμότητα του Hg

$$z - z_r = z_r \beta (T - T_r)$$

Άλλος τρόπος κατασκευής του μοντέλου:

$$\frac{dz_r \beta (T - T_r)}{dt} = z_r \beta \frac{hA}{mc} (\theta - \theta_r) - \frac{hA}{mc} z_r \beta (T - T_r)$$

$$\left. \begin{array}{l} u = \theta - \theta_r \\ y = z - z_r \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = z_r \beta \frac{hA}{mc} u - \frac{hA}{mc} y$$



Παράδειγμα συστήματος 1^{ης} τάξης: Θερμόμετρο Υδραργύρου



(Εισροή) – (Εκροή) = (Συσσώρευση)

$$h A (\theta - T) = m c \frac{dT}{dt}$$

h: συντελεστής μεταφοράς θερμότητας
 A: επιφάνεια
 m: μάζα του Hg
 c: ειδική θερμότητα του Hg

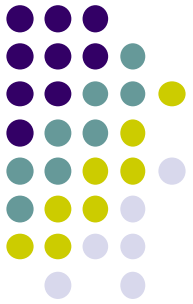
$$\frac{dy}{dt} = z_r \beta \frac{hA}{mc} u - \frac{hA}{mc} y$$

$$\frac{mc}{hA} \frac{dy}{dt} + y = z_r \beta u$$

$K = z_r \beta$ στατική ενίσχυση

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = K u$$

$\tau = \frac{mc}{hA}$ σταθερά χρόνου



Ασκήσεις στον μετασχηματισμό Laplace

Μετασχηματισμός συνάρτησης $f(t)$: $L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$



Κάντε την αντιστροφή των παρακάτω μετασχηματισμών:

	$f(t)$	$F(s)$
Βήμα	1 ή $H(t)$	$\frac{1}{s}$
Δύναμη	$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
Εκθετική	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
Ημίτονο	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
Συνημίτονο	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

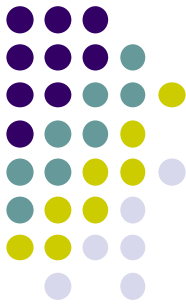
$$L^{-1} \left[\frac{3}{s} \right] = 3$$

$$L^{-1} \left[\frac{3}{s+2} \right] = 3e^{-2t}$$

$$L^{-1} \left[\frac{3}{s^3} \right] = L^{-1} \left[\frac{3}{2} \frac{2}{s^2+1} \right] = \frac{3}{2} t^2$$

$$L^{-1} \left[\frac{\frac{1}{2}}{(s^2+9)} \right] = L^{-1} \left[\frac{1}{6} \frac{3}{s^2+3^2} \right] = \frac{1}{6} \sin(3t)$$

$$L^{-1} \left[\frac{3}{s^2+4s+8} \right] = L^{-1} \left[\frac{3}{(s+2)^2+2^2} \right] = L^{-1} \left[\frac{3}{2} \frac{2}{(s+2)^2+2^2} \right] = \frac{3}{2} e^{-2t} \sin(2t)$$



$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 3x = u(t), \quad x'(0) = x(0) = 0$$

Μετασχηματισμός Laplace:

$$[s^2x(s) - sx(0) - x'(0)] + 4[sx(s) - x(0)] + 3x(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow$$

$$s^2x(s) + 4sx(s) + 3x(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow$$

$$x(s)[s^2 + 4s + 3] = \frac{1}{s} \Rightarrow x(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4s + 3)}$$

Αναλύουμε σε μερικά κλάσματα:

$$\frac{1}{s(s^2 + 4s + 3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s + 3)} + \frac{C}{(s + 1)}$$

$$A(s^2 + 4s + 3) + Bs(s + 1) + Cs(s + 3) = 1 \Rightarrow$$

$$s = 0: A = \frac{1}{3}$$

$$s = -3: B = \frac{1}{6}$$

$$s = -1: C = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{s(s^2 + 4s + 3)} = \frac{1}{3s} + \frac{1}{6(s + 3)} - \frac{1}{2(s + 1)} \Rightarrow x(t) = \frac{1}{3} + \frac{e^{-3t}}{6} - \frac{e^{-t}}{2}$$

Λύστε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό Laplace



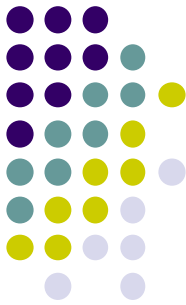
$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x &= u(t), x(0) = x'(0) = 0 \\ [s^2x(s) - sx(0) - x'(0)] + 2[sx(s) - x(0)] + x(s) &= 1/s \Rightarrow \\ s^2x(s) + 2sx(s) + x(s) &= \frac{1}{s} \Rightarrow \\ x(s)[s^2 + 2s + 1] &= \frac{1}{s} \Rightarrow \\ x(s) &= \frac{1}{s(s^2 + 2s + 1)}\end{aligned}$$

Αναλύουμε σε μερικά κλάσματα:

$$\begin{aligned}\frac{1}{s(s^2 + 2s + 1)} &= \frac{1}{s(s + 1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s + 1)} + \frac{C}{(s + 1)^2} \\ 1 &= A(s + 1)^2 + Bs(s + 1) + sC(s) \\ s = 0 &\Rightarrow A = 1 \\ s = -1 &\Rightarrow C = -1 \\ B &= -1\end{aligned}$$

Άρα έχουμε:

$$x(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s + 1)} - \frac{1}{(s + 1)^2} \Rightarrow x(s) = 1 - e^{-t} - e^{-t}t = 1 - e^{-t}(1 + t)$$



$$2 \frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + x = u(t), \quad x'(0) = x(0) = 0$$

Μετασχηματισμός Laplace:

$$2[s^2x(s) - sx(0) - x'(0)] + 2[sx(s) - x(0)] + x(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow$$

$$2s^2x(s) + 2sx(s) + x(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow$$

$$x(s)[2s^2 + 2s + 1] = \frac{1}{s} \Rightarrow x(s) = \frac{1}{s(2s^2 + 2s + 1)}$$

Ανάλυση σε μερικά κλάσματα:

$$\frac{1}{s(2s^2 + 2s + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{2s^2 + 2s + 1} \Rightarrow$$

$$A(2s^2 + 2s + 1) + (Bs + C)s = 1 \Rightarrow$$

$$s = 0 \Rightarrow A = 1$$

$$s = 1 \Rightarrow 5 + B + C = 1 \Rightarrow B + C = -4$$

$$s = -1 \Rightarrow 1 + B - C = 1 \Rightarrow B - C = 0 \Rightarrow$$

$$B = C = -2$$

$$x(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{s} - \frac{\left(s+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} \Rightarrow x(t) = 1 - e^{-\frac{t}{2}} \left[\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right]$$