Δυναμική & Ρύθμιση Διεργασιών

Διάλεξη 11:

Δυναμική Απόκριση Συστημάτων

συστήματα 2ης τάξης

Βήματα της Ρύθμισης Διεργασιών, μέρος Α

1. **Καθορίστε τη διεργασία που εξετάζεται**
    a. Διατύπωση υποθέσεων
    b. Ταξινόμηση μεταβλητών (χειριζόμενες, διαταραχές, εσωτερικές, ελεγχόμενες, μετρούμενες)
    c. Διατύπωση μοντέλου διεργασίας
    d. Προσδιορισμός του επιθυμητού σημείου λειτουργίας
    e. Διατύπωση περιγραφής χώρου κατάστασης
    f. Διατύπωση περιγραφής συναρτήσεων μεταφοράς
    g. Αναγνώριση διεργασιών (αν χρειάζεται)

2. **Ανάλυση Διεργασίας**
    a. Ανάλυση παρατηρησιμότητας
    b. Ανάλυση ελεγξιμότητας / ρυθμισιμότητας
    c. Ανάλυση ευστάθειας
    d. **Ανάλυση δυναμικής συμπεριφοράς**
        a. **Απόκριση σε παλμική αλλαγή**
        b. Απόκριση σε ημιτονική αλλαγή

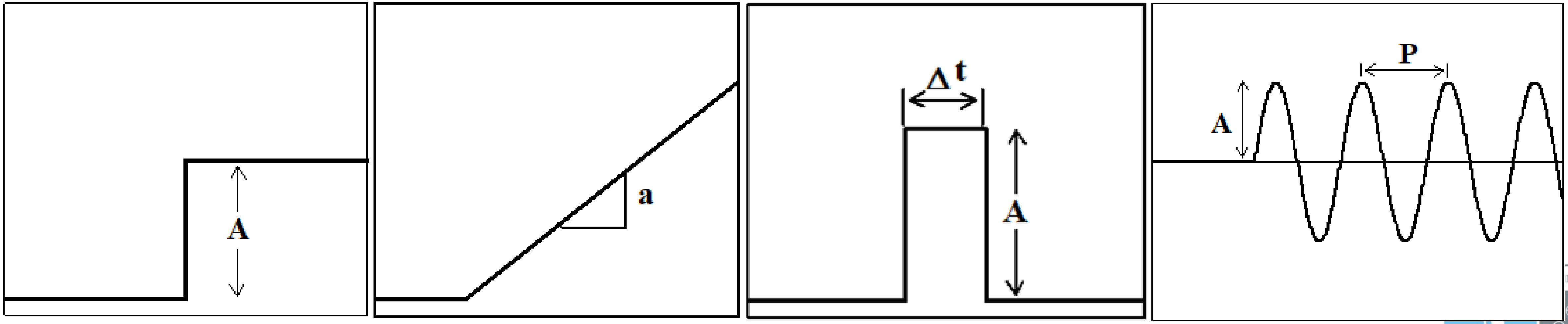
UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Εξερεύνηση δυναμικής συμπεριφοράς

- Σημείωση: *Μεταβατική συμπεριφορά = Δυναμική συμπεριφορά*
- Η μεταβατική συμπεριφορά του συστήματος είναι απαραίτητο να κατανοηθεί και να βρεθεί ένα ελάχιστος αριθμός μεταβλητών που να την περιγράφουν (προσεγγιστικά).
- Για την εξερεύνηση της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος πρότυπες μεταβολές της εισόδου χρησιμοποιούνται.
  - Βήμα
  - Παλμός
  - Κρουστικός παλμός
  - Γραμμική μεταβολή
  - Ημίτονο
- Γενικές μεταβολές της εισόδου μπορούν να γραφούν ως συνδυασμός αυτών.

Εξερεύνηση δυναμικής συμπεριφοράς

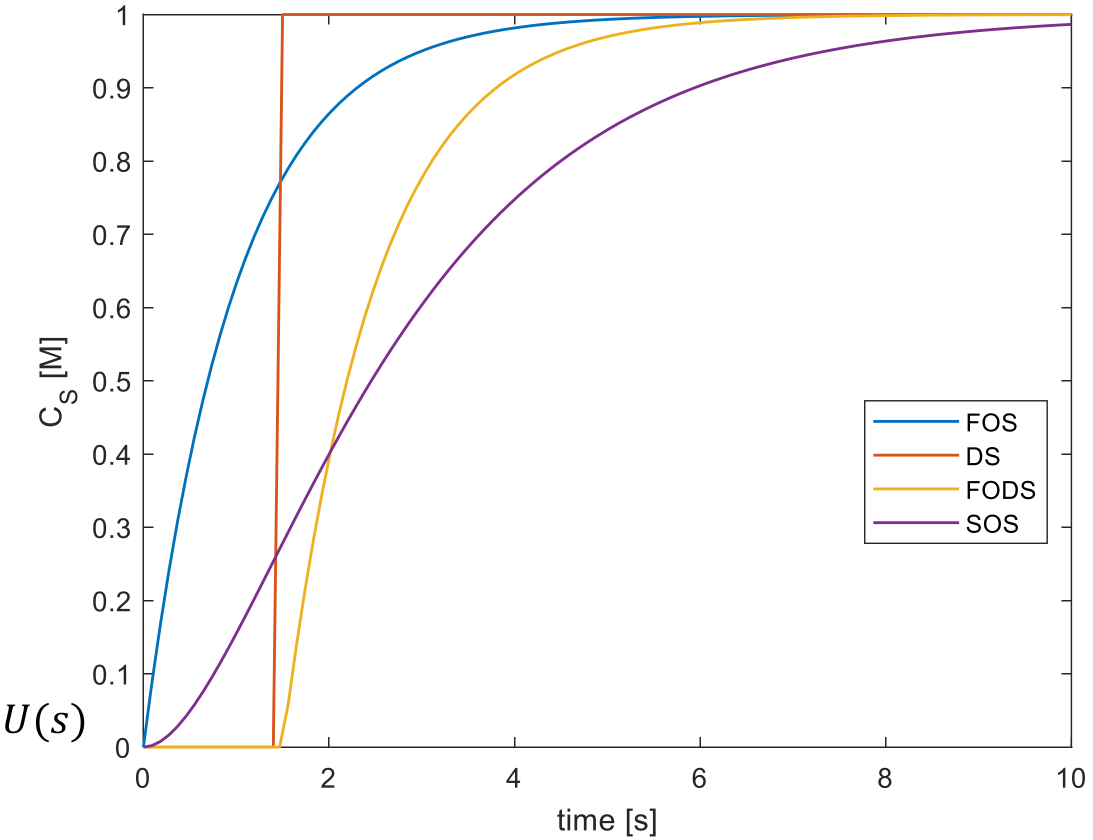
- Για την εξερεύνηση της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος πρότυπες μεταβολές της εισόδου χρησιμοποιούνται.
  - Γενικές μεταβολές της εισόδου μπορούν να γραφούν ως συνδυασμός αυτών.
  - Βήμα
  - Παλμός
  - Κρουστικός παλμός
  - Γραμμική μεταβολή
  - Ημίτονο



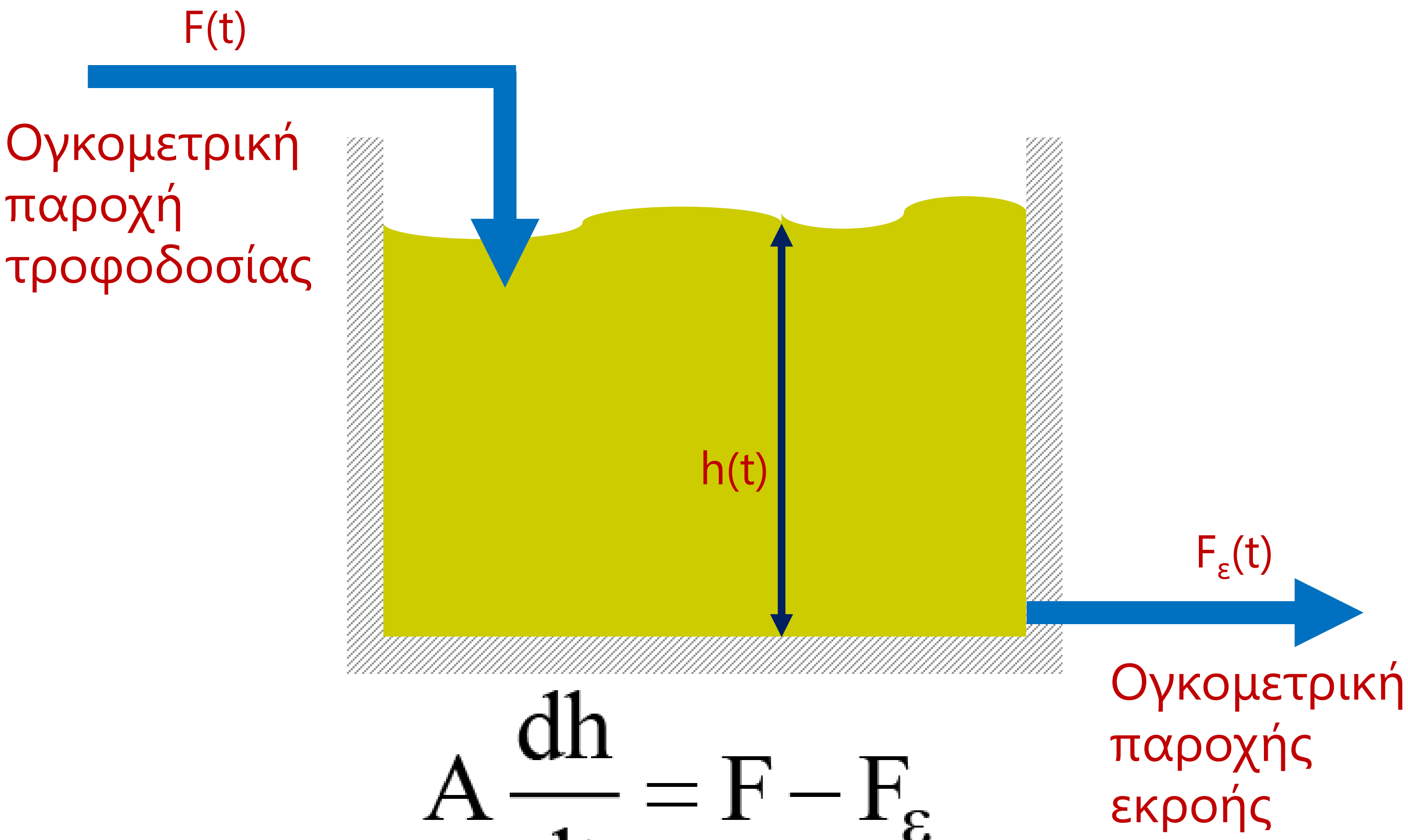
Εξερεύνηση δυναμικής συμπεριφοράς

- Η μεταβατική συμπεριφορά του συστήματος είναι απαραίτητο να κατανοηθεί και να βρεθεί ένα ελάχιστος αριθμός μεταβλητών που να την περιγράφουν (προσεγγιστικά).

	ΠΧΚ	ΠΣΜ
DS	$y = Ku(t-\theta)$	$Y(s) = Ke^{-\theta s}U(s)$
FOS	$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{\tau}x_1 + \frac{K}{\tau}u(t)$, $y = x_1$	$Y(s) = \frac{K}{\tau s + 1}U(s)$
FODS	$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{\tau}x_1 + \frac{K}{\tau}u(t-\theta)$, $y = x_1$	$Y(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{\tau s + 1}U(s)$
SODS	$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{\tau_1}x_1 + \frac{K}{\tau_1}u(t-\theta)$, $\frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{\tau_2}x_1 + \frac{1}{\tau_2}x_1$, $y = x_2$	$Y(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}U(s)$



Παράδειγμα: Δεξαμενή Υγρού



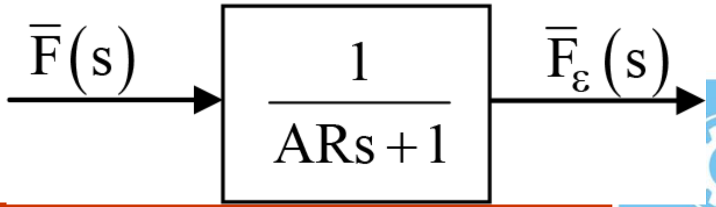
$$A\frac{dh}{dt} = F - F_{\varepsilon}$$

$$x = \bar{h}(t)$$
$$u = \bar{F}(t)$$
$$y = \bar{F}_{\epsilon} = \frac{\bar{h}(t)}{R}$$

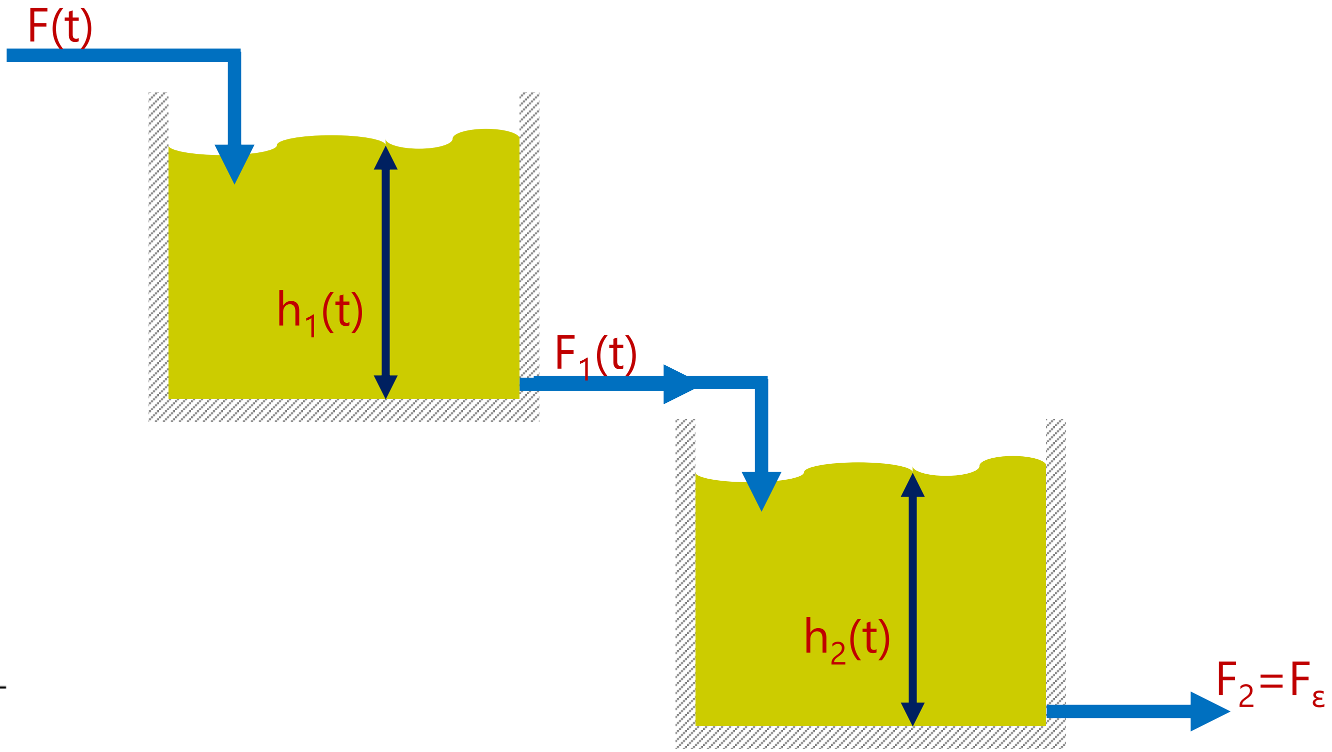
$$\tau = AR$$
$$k = 1$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\tau}x + \frac{k}{\tau}u$$
$$y = x$$

$$Y(s) = G_u(s)U(s)$$
$$G_u(s) = \frac{1}{ARs + 1}$$



Σύνδεση σε σειρά: Σύστημα 2ης τάξης



$$A_1\frac{dh_1}{dt} = -\frac{h_1}{R_1} + F$$

$$A_2\frac{dh_2}{dt} = \frac{h_1}{R_1} - \frac{h_2}{R_2}$$

$$F_\varepsilon = \frac{h_2}{R_2}$$

$$\begin{cases} A_1 R_1 \dfrac{dF_1}{dt} = -F_1 + F \\ A_2 R_2 \dfrac{dF_2}{dt} = F_1 - F_2 \\ F_\varepsilon = F_2 \end{cases}$$

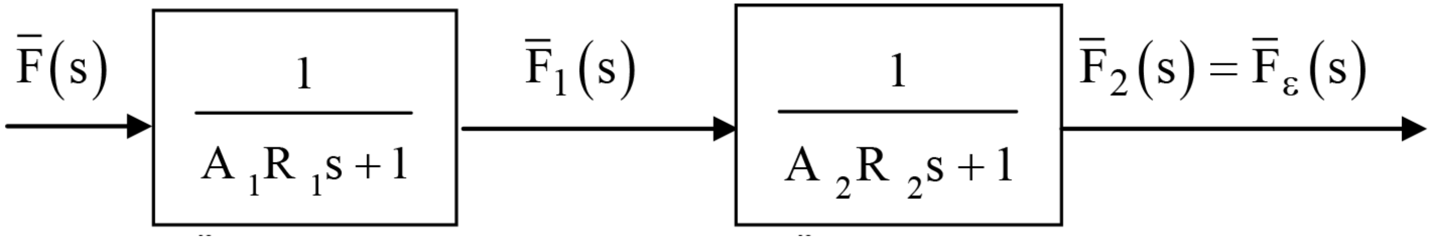
UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering

$$\begin{cases} A_1 R_1 \dfrac{dF_1}{dt} = -F_1 + F \\ A_2 R_2 \dfrac{dF_2}{dt} = F_1 - F_2 \\ F_\varepsilon = F_2 \end{cases} \Rightarrow$$

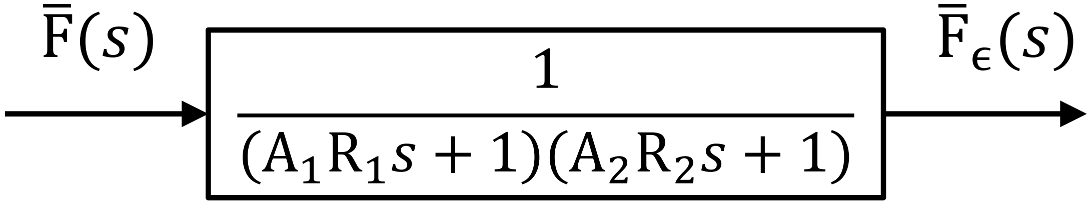
$$\bar{F}_1(s) = \frac{1}{A_1 R_1 s + 1} \bar{F}(s)$$

$$\bar{F}_2(s) = \frac{1}{A_2 R_2 s + 1} \bar{F}_1(s)$$

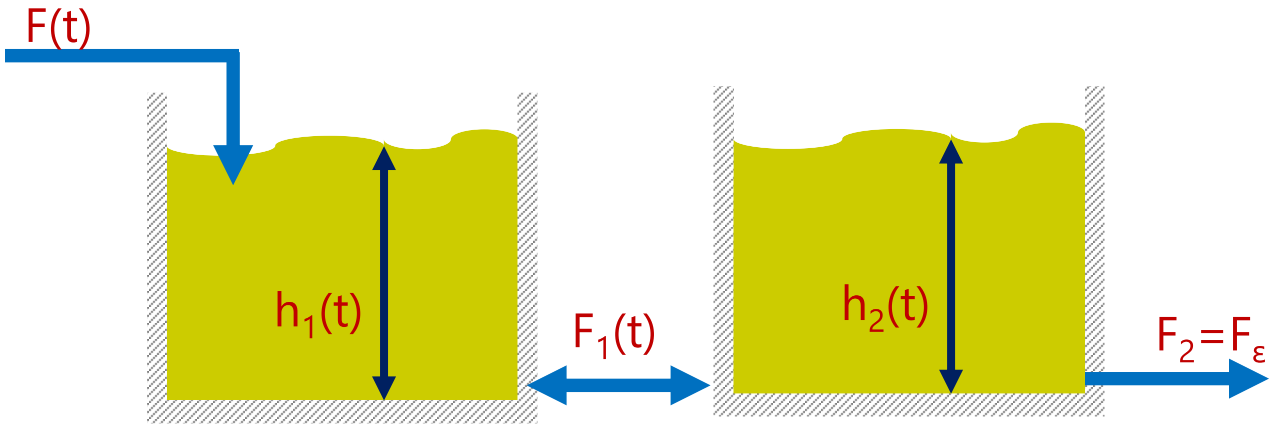
$$\bar{F}_\varepsilon(s) = \bar{F}_2(s)$$



$$\bar{F}_\varepsilon(s) = \frac{1}{(A_1 R_1 s + 1)(A_2 R_2 s + 1)} \bar{F}(s)$$



Σύνδεση με αλληλεπίδραση: Σύστημα;



$$\begin{cases} F_1 = \dfrac{h_1 - h_2}{R_1} \\ F_2 = \dfrac{h_2}{R_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 \dfrac{dh_1}{dt} = -\dfrac{h_1 - h_2}{R_1} + F \\ A_2 \dfrac{dh_2}{dt} = \dfrac{h_1 - h_2}{R_1} - \dfrac{h_2}{R_2} \\ F_\varepsilon = \dfrac{h_2}{R_2} \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
A_1 \dfrac{dh_1}{dt} = -\dfrac{h_1 - h_2}{R_1} + F \\[2ex]
A_2 \dfrac{dh_2}{dt} = \dfrac{h_1 - h_2}{R_1} - \dfrac{h_2}{R_2} \\[2ex]
F_\varepsilon = \dfrac{h_2}{R_2}
\end{cases}
\Longrightarrow
\begin{aligned}
A_1 s \bar{H}_1(s) &= -\frac{\bar{H}_1(s) - \bar{H}_2(s)}{R_1} + \bar{F}(s) \\
A_2 s \bar{H}_2(s) &= \frac{\bar{H}_1(s) - \bar{H}_2(s)}{R_1} - \frac{\bar{H}_2(s)}{R_2} \\
\bar{F}_\varepsilon(s) &= \frac{\bar{H}_2(s)}{R_2}
\end{aligned}
$$

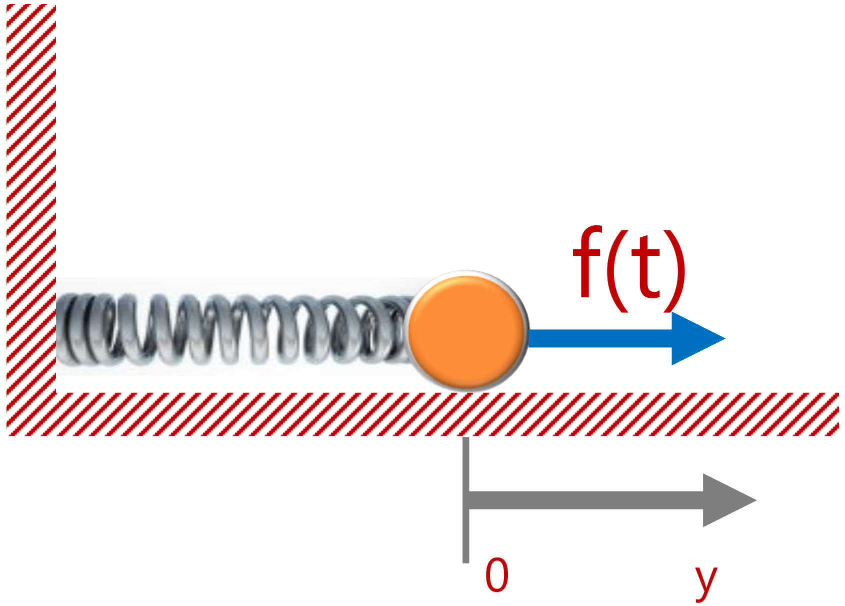
$$\bar{H}_1(s) = \frac{R_1\left(A_2R_2 s + 1 + \dfrac{R_2}{R_1}\right)}{A_1R_1A_2R_2 s^2 + \left(A_1R_1 + A_1R_2 + A_2R_2\right)s + 1}\bar{F}(s)$$

$$\bar{H}_2(s) = \frac{R_2}{A_1R_1A_2R_2 s^2 + \left(A_1R_1 + A_1R_2 + A_2R_2\right)s + 1}\bar{F}(s)$$

$$\bar{F}_\varepsilon(s) = \frac{1}{A_1R_1A_2R_2 s^2 + \left(A_1R_1 + A_1R_2 + A_2R_2\right)s + 1}\bar{F}(s)$$

$$\bar{F}(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{A_1R_1A_2R_2 s^2 + \left(A_1R_1 + A_1R_2 + A_2R_2\right)s + 1}} \longrightarrow \bar{F}_\varepsilon(s)$$

Παράδειγμα: Συστήμα κινούμενης μάζας



(Μάζα) x (Επιτάχυνση) = Σ(Δυνάμεων)

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -k\,y - C\frac{dy}{dt} + f$$

$$\boxed{m\frac{d^2y}{dt^2} + C\frac{dy}{dt} + k\,y = f}$$

Γενική περιγραφή συστήματος 2ης τάξης

$$ms^2Y(s)+CsY(s)+kY(s)=F(s)$$

$$\Rightarrow \qquad Y(s)=\frac{1}{ms^2+Cs+k}F(s)$$

$$F(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{ms^2+Cs+k}} \longrightarrow Y(s)$$

$$\tau^2\frac{d^2y}{dt^2}+2\zeta\tau\frac{dy}{dt}+y=kf$$

$$\tau>0$$

$$\zeta\geq 0$$

$$G(s)=\frac{k}{\tau^2s^2+2\zeta\tau s+1}$$

ο <u>χαρακτηριστικός χρόνος</u>: $\tau=\sqrt{\frac{m}{k}}$ ή εναλλακτικά

η <u>φυσική συχνότητα</u> (natural frequency) $\omega_N=\frac{1}{\tau}=\sqrt{\frac{k}{m}}$

ο <u>συντελεστής αποσβέσεως</u>: $\zeta=\frac{C}{2\sqrt{mk}}$
(damping factor)

η <u>στατική ενίσχυση</u>: $k=\frac{1}{k}$
(static gain)

Επίλυση διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης

$$\tau^2\frac{d^2y}{dt^2}+2\zeta\tau\frac{dy}{dt}+y=ku(t)$$

$$y(0),\frac{dy}{dt}(0)\ \ \text{δεδομένα}$$

$$\tau^2\left(s^2Y(s)-sy(0)-\frac{dy}{dt}(0)\right)+2\zeta\tau\left(sY(s)-y(0)\right)+Y(s)=kU(s)$$

$$Y(s)=\frac{\tau^2s+2\zeta\tau}{\tau^2s^2+2\zeta\tau s+1}y(0)+\frac{\tau^2}{\tau^2s^2+2\zeta\tau s+1}\frac{dy}{dt}(0)+\frac{k}{\tau^2s^2+2\zeta\tau s+1}U(s)$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\tau^2s+2\zeta\tau}{\tau^2s^2+2\zeta\tau s+1}y(0)+\frac{\tau^2}{\tau^2s^2+2\zeta\tau s+1}\frac{dy}{dt}(0)+\frac{k}{\tau^2s^2+2\zeta\tau s+1}U(s)\right]$$

UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Σημασία συντελεστή απόσβεσης ζ

$$U(s) \longrightarrow \boxed{\dfrac{k}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}} \longrightarrow Y(s)$$

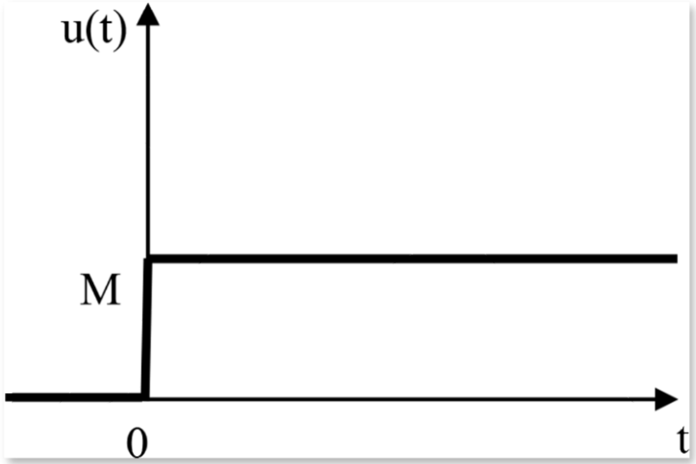
ζ>1 ⟷ απλοί πραγματικοί πόλοι $-\dfrac{\zeta}{\tau} \pm \dfrac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau}$

ζ=1 ⟷ διπλός πραγματικός πόλος $-\dfrac{1}{\tau}$

0≤ζ<1 ⟷ μιγαδικοί συζυγείς πόλοι $-\dfrac{\zeta}{\tau} \pm i\dfrac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\tau}$

Σημασία συντελεστή απόσβεσης ζ

Παράδειγμα η βηματική απόκριση:



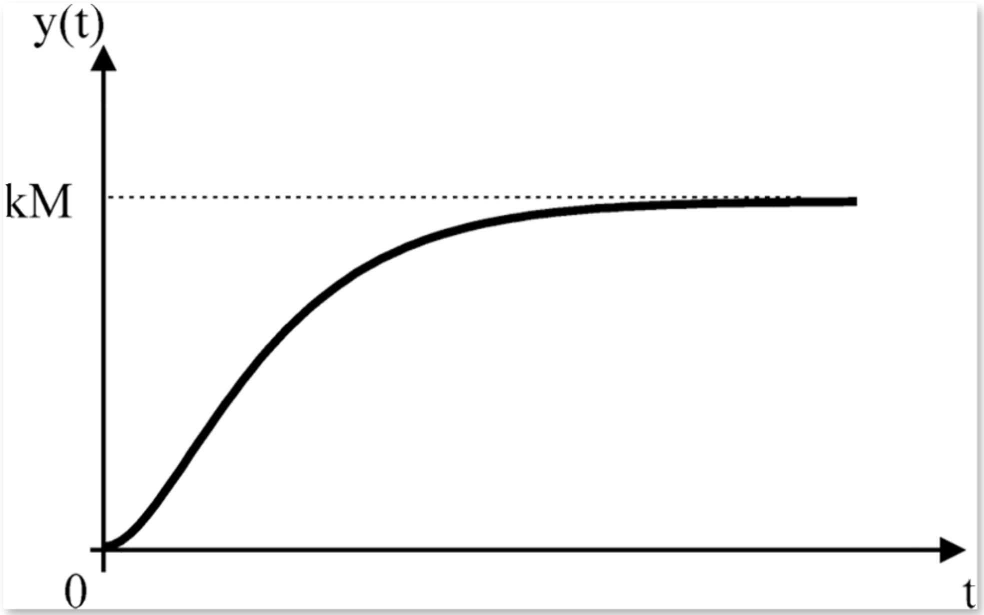
$$U(s) = \frac{M}{s} \longrightarrow \boxed{\frac{k}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}} \xrightarrow{Y(s)}$$

$$Y(s) = \frac{kM}{s\left(\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1\right)}$$

Σημασία συντελεστή απόσβεσης ζ

Περίπτωση ζ>1

$$Y(s)=\left\{\frac{1}{s}-\frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}\right)}{s+\frac{\zeta}{\tau}-\frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\tau}}-\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}\right)}{s+\frac{\zeta}{\tau}+\frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\tau}}\right\}kM$$



$$y(t)=\left[1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}\right)\exp\left\{-\left(\frac{\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}}{\tau}\right)t\right\}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}\right)\exp\left\{-\left(\frac{\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}}{\tau}\right)t\right\}\right]kM$$

$$=\left[1-e^{-\frac{\zeta}{\tau}t}\left(\cosh\left\{\frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\tau}t\right\}+\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}\sinh\left\{\frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\tau}t\right\}\right)\right]kM$$

UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

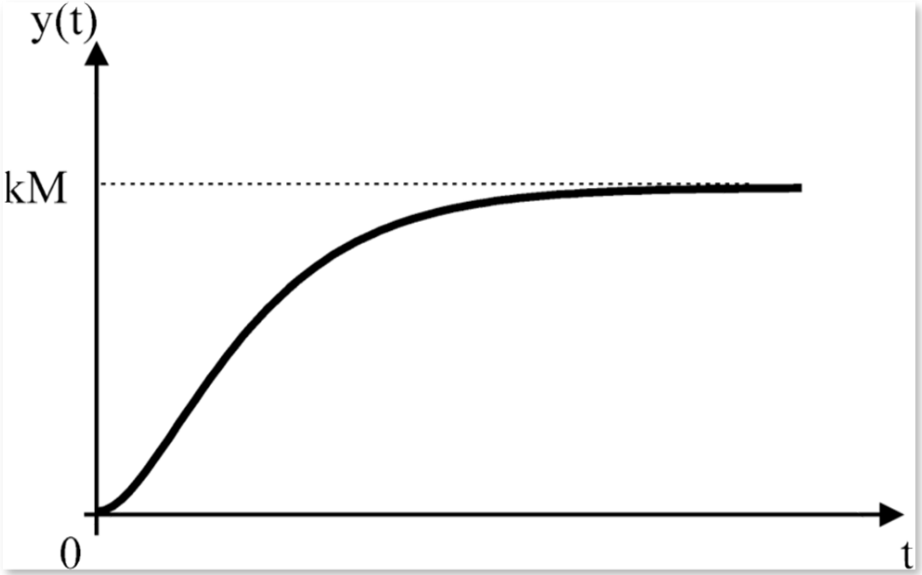
Σημασία συντελεστή απόσβεσης ζ

Περίπτωση ζ=1

$$Y(s) = \frac{kM}{s(\tau s+1)^2}$$

$$= \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{\tau}} - \frac{\frac{1}{\tau}}{\left(s+\frac{1}{\tau}\right)^2} \right) kM$$

$$y(t) = \left(1 - \left(1+\frac{t}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} \right) kM$$



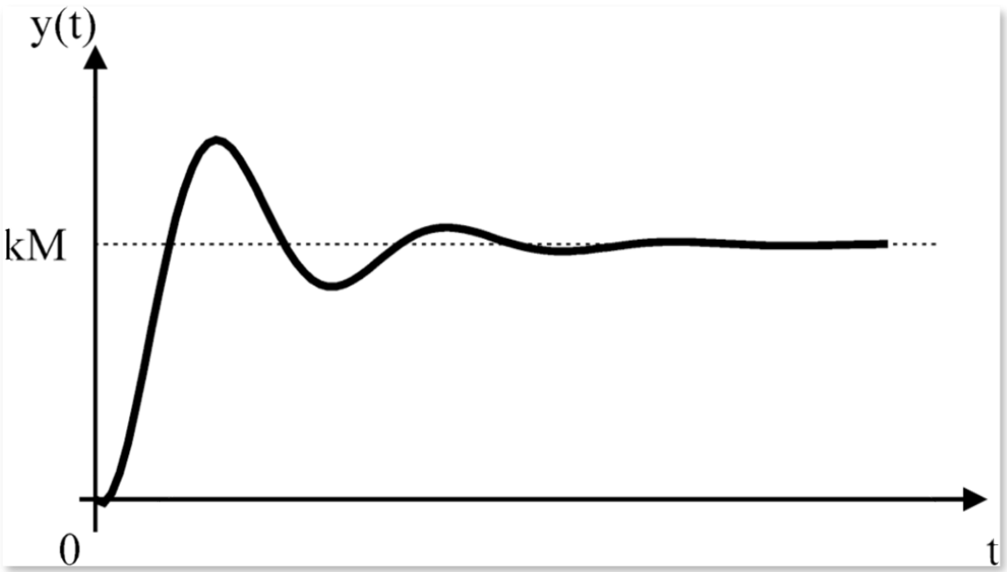
Σημασία συντελεστή απόσβεσης ζ

Περίπτωση 0<ζ<1

$$Y(s)=\left[\frac{1}{s}-\frac{\frac{1}{2}\left(1+i\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}{s+\frac{\zeta}{\tau}-i\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau}}-\frac{\frac{1}{2}\left(1-i\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}{s+\frac{\zeta}{\tau}+i\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau}}\right]kM$$

$$=\left[\frac{1}{s}-\frac{s+\frac{\zeta}{\tau}}{\left(s+\frac{\zeta}{\tau}\right)^2+\frac{1-\zeta^2}{\tau^2}}-\frac{\frac{\zeta}{\tau}}{\left(s+\frac{\zeta}{\tau}\right)^2+\frac{1-\zeta^2}{\tau^2}}\right]kM$$

$$y(t)=\left[1-e^{-\frac{\zeta}{\tau}t}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau}t\right)+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau}t\right)\right]\right]kM$$

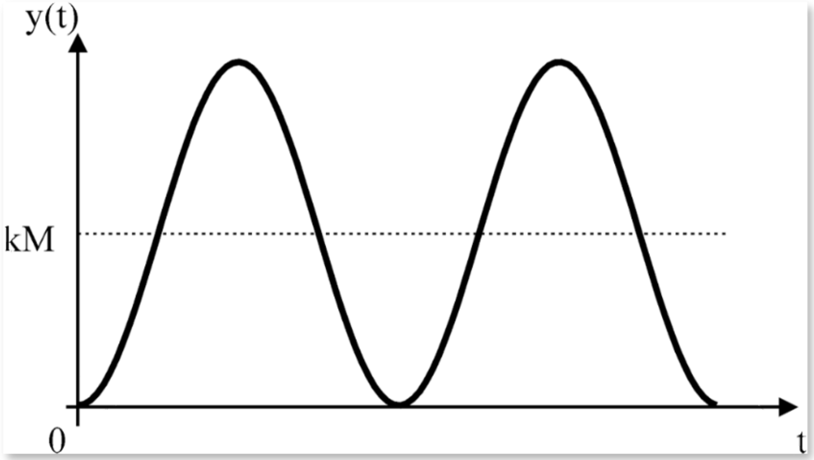


Σημασία συντελεστή απόσβεσης ζ

Περίπτωση ζ=0

$$Y(s) = \frac{kM}{s\left(\tau^2 s^2 + 1\right)} = \left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \frac{1}{\tau^2}}\right] kM$$

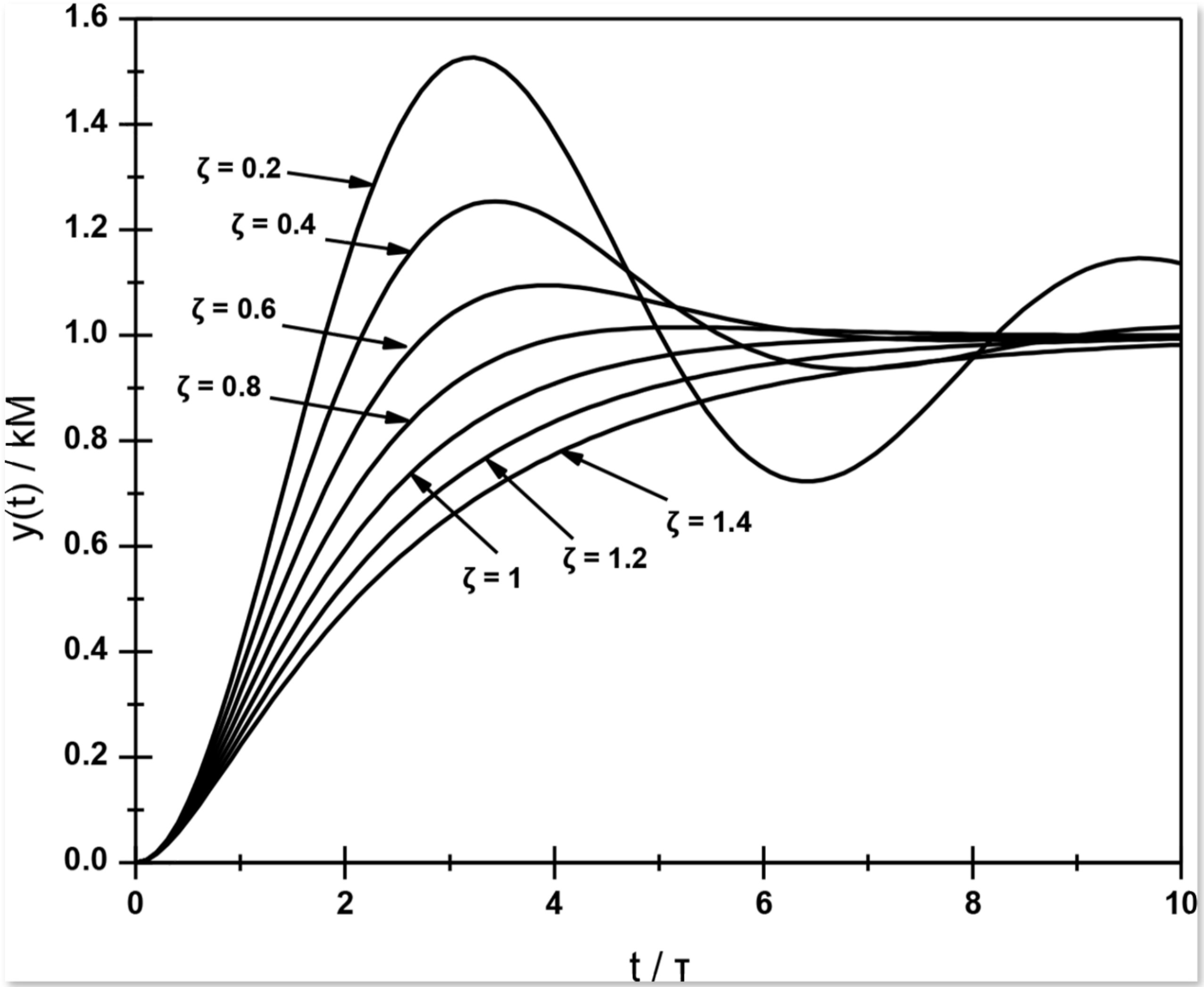
$$y(t) = \left(1 - \cos\left(\frac{t}{\tau}\right)\right) kM$$



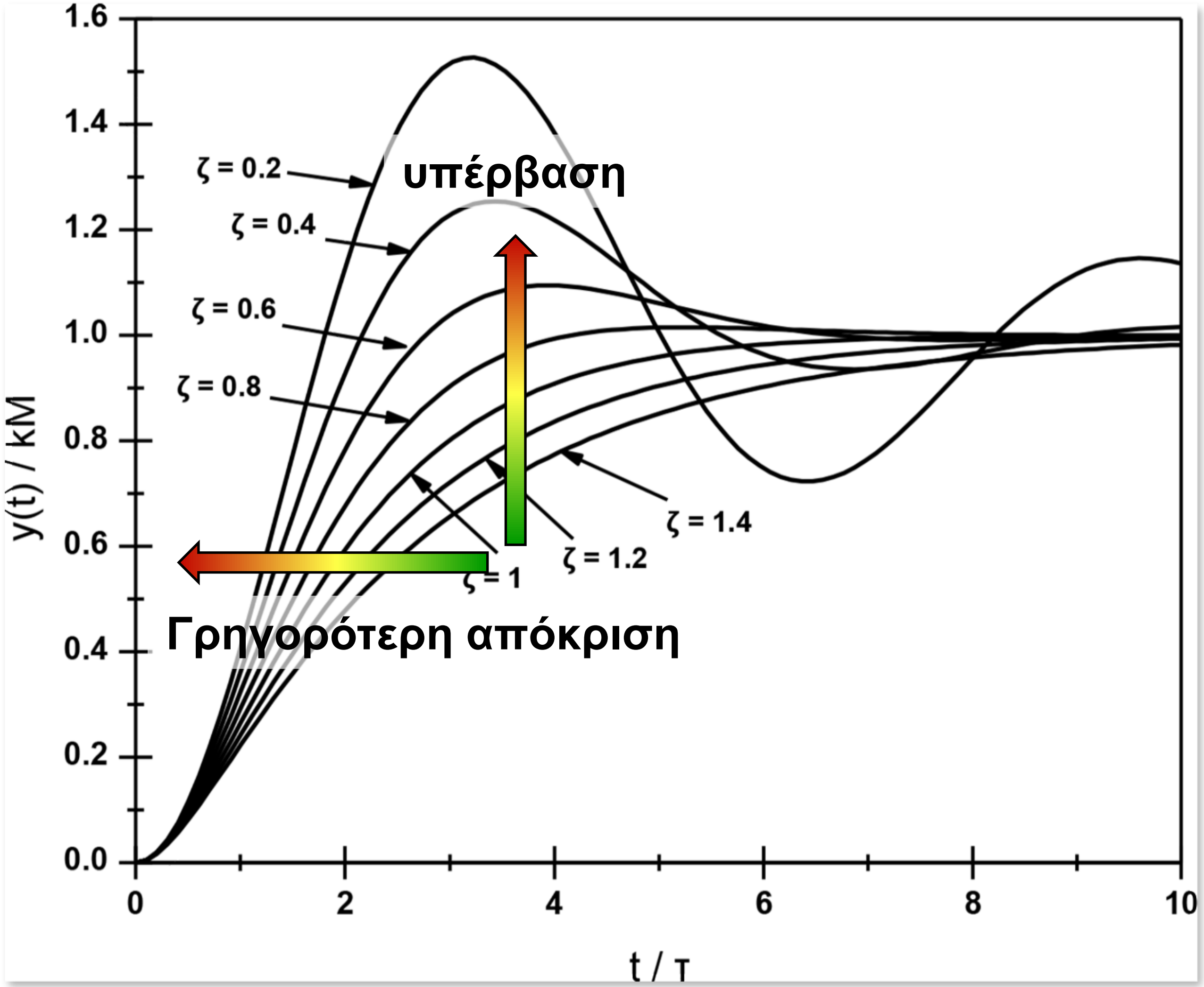
Σημασία συντελεστή απόσβεσης ζ

Περίπτωση		Ρίζες παρονομαστή της συναρτήσεως μεταφοράς	Φύση των ριζών του παρονομαστή της συναρτήσεως μεταφοράς
Υπερκρίσιμη απόσβεση	$\zeta > 1$	$-\frac{\zeta}{\tau} \pm \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau}$	Πραγματικές αρνητικές απλές ρίζες
Κρίσιμη απόσβεση	$\zeta = 1$	$-\frac{1}{\tau}, -\frac{1}{\tau}$	Πραγματική αρνητική διπλή ρίζα
Υποκρίσιμη απόσβεση	$0 < \zeta < 1$	$-\frac{\zeta}{\tau} \pm i\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau}$	Μιγαδικές συζυγείς με αρνητικό πραγματικό μέρος
Μηδενική απόσβεση	$\zeta = 0$	$\pm i\frac{1}{\tau}$	Φανταστικές συζυγείς

Σημασία συντελεστή απόσβεσης ζ



Σημασία συντελεστή απόσβεσης ζ

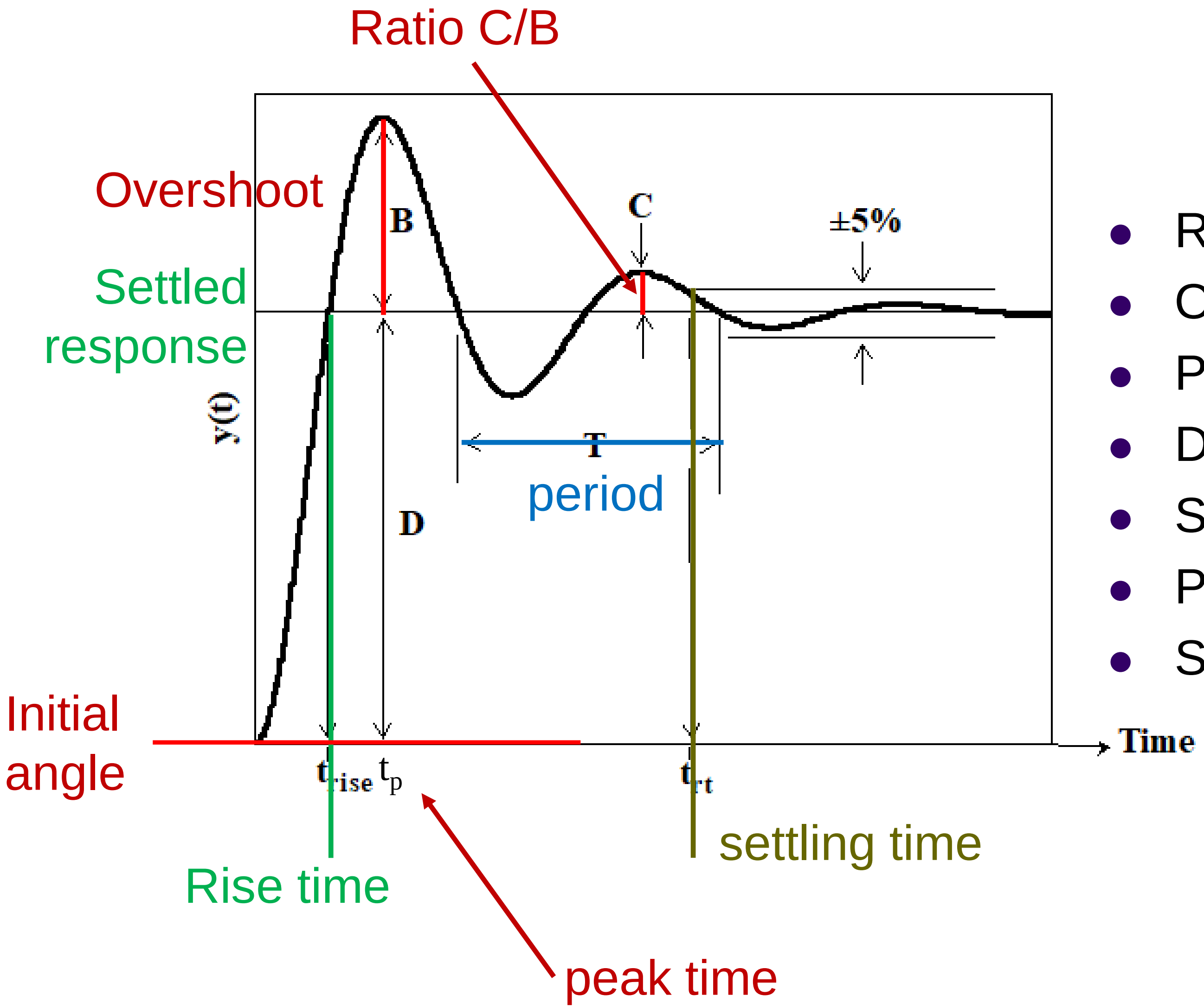


ζ>1

ζ=1

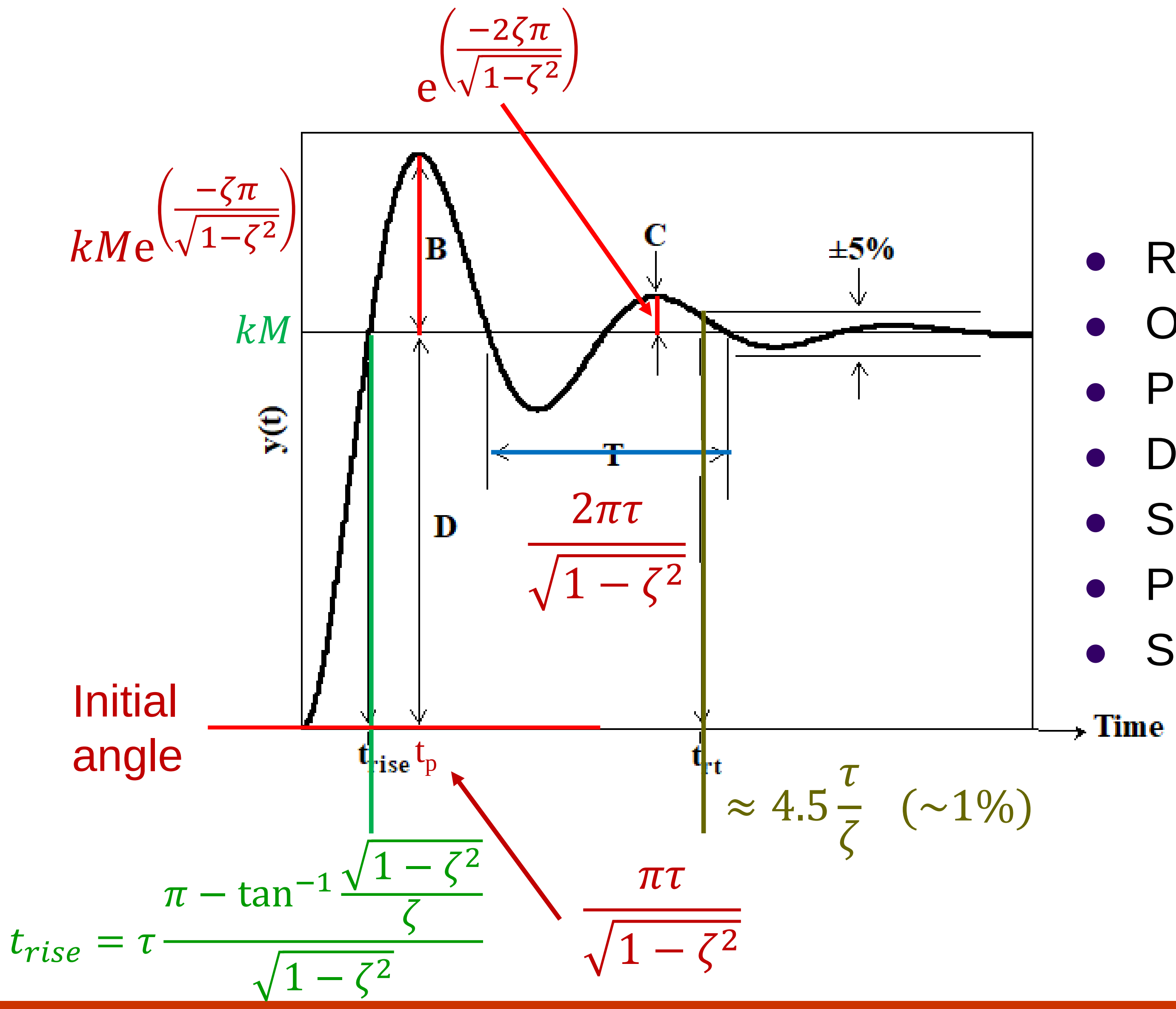
ζ<1

Χαρακτηριστικά υποκρίσιμης απόσβεσης



- Rise time – Χρόνος ανύψωσης (t_{rise})
- Overshoot – Υπέρβαση (B)
- Peak time – Χρόνος μέγιστης απόκρισης (t_p)
- Decay ratio – Λόγος απόσβεσης (C/B)
- Settling time – Χρόνος απόκρισης (t_{rt})
- Period – Περίοδος (T)
- Settled response – Τελική απόκριση (D)

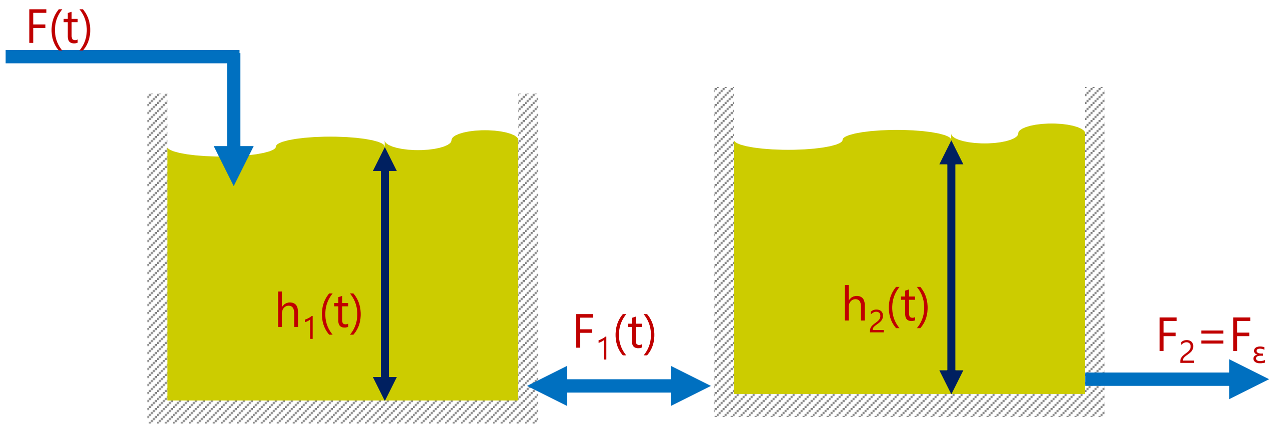
Χαρακτηριστικά υποκρίσιμης απόσβεσης



$$G_p(s) = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$$

- Rise time - Χρόνος ανύψωσης (t_{rise})
- Overshoot – Υπέρβαση (B)
- Peak time – Χρόνος μέγιστης απόκρισης (t_p)
- Decay ratio – Λόγος απόσβεσης (C/B)
- Settling time – Χρόνος απόκρισης (t_{rt})
- Period – Περίοδος (T)
- Settled response – Τελική απόκριση

Παράδειγμα 1: Σύνδεση με αλληλεπίδραση



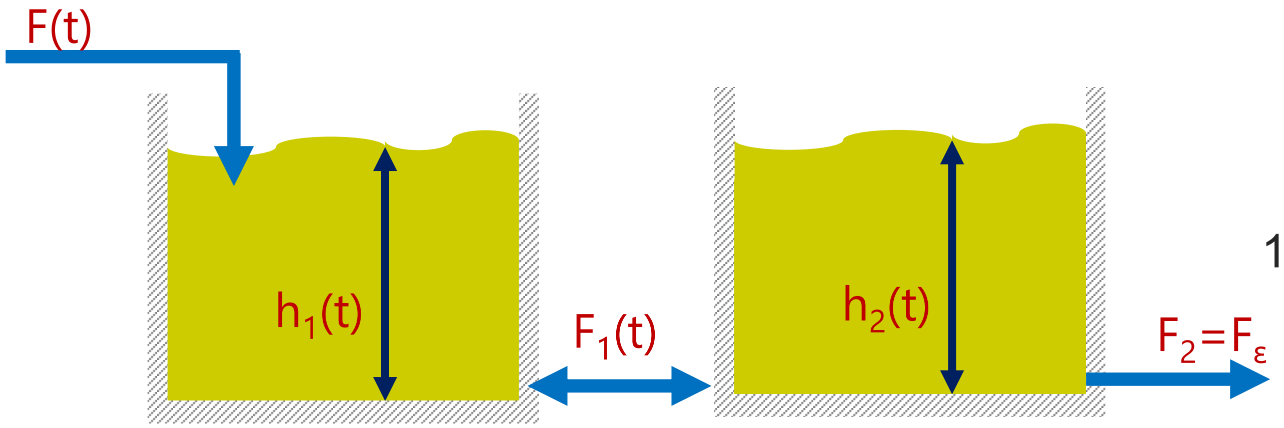
ΠΣΜ: $$G(s) = \frac{0.5}{2s^2 + 1.5s + 0.5}$$

κανονικοποιούμε

$$G(s) = \frac{1}{4s^2 + 3s + 1}$$

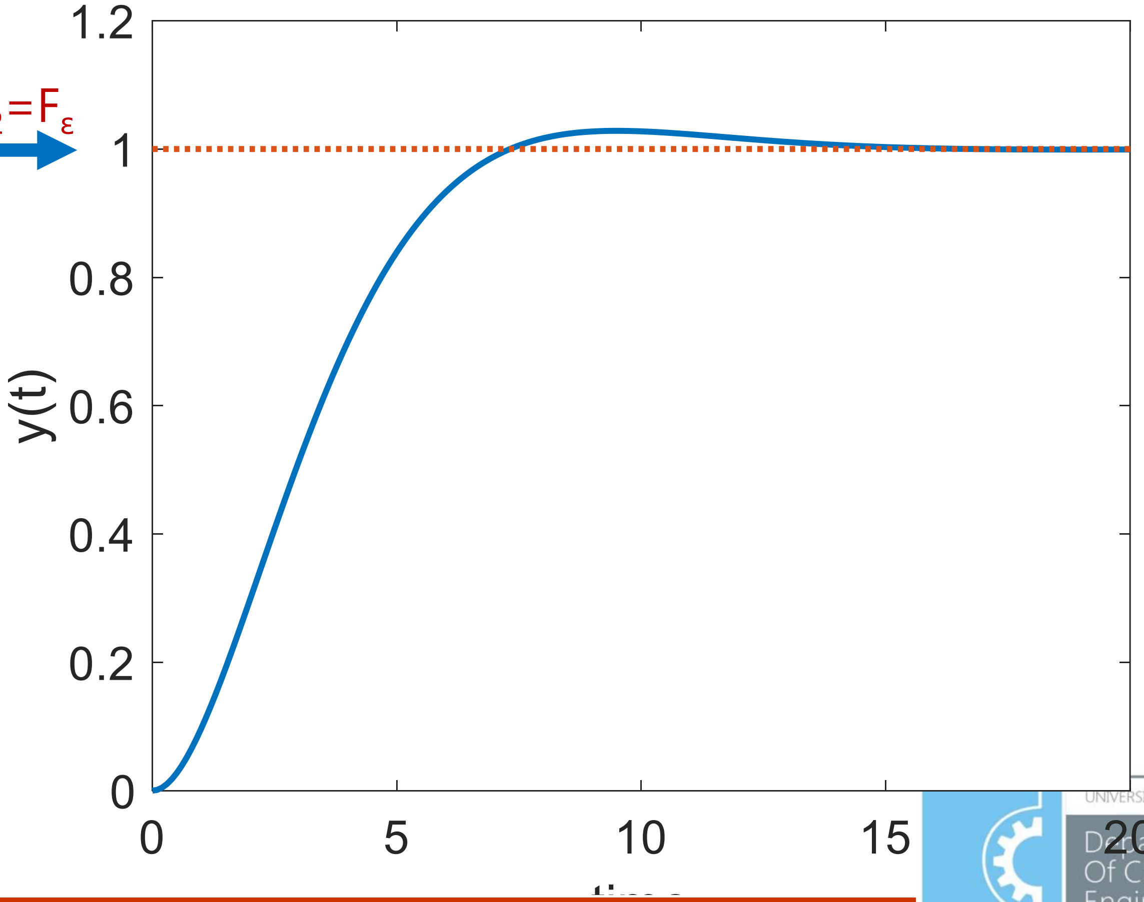
- Στατική ενίσχυση $\mathrm{k} = 1$
- Χαρακτηριστικός χρόνος $\tau = \sqrt{4} = 2$
- Συντελεστής απόσβεσης $\zeta = \frac{3}{2\tau} = 0.75$

Παράδειγμα 1: Σύνδεση με αλληλεπίδραση

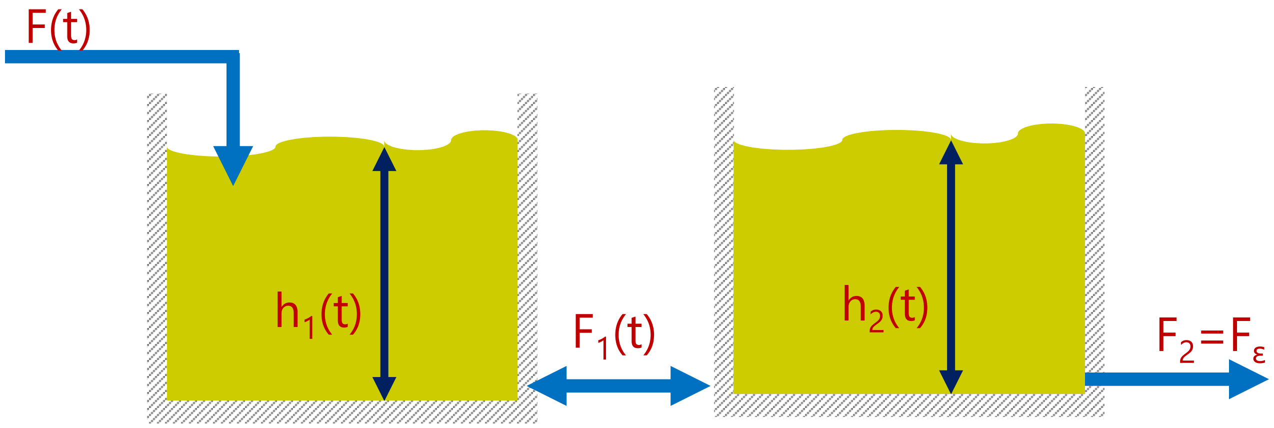


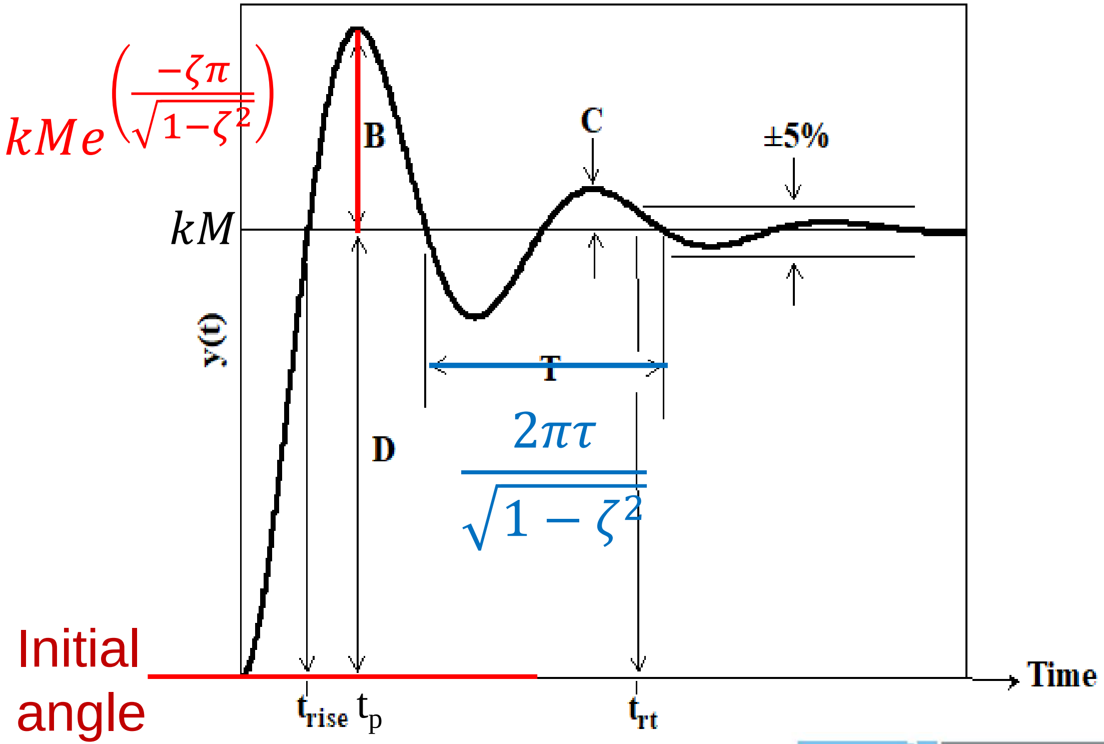
ΠΣΜ: $G(s) = \frac{1}{4s^2 + 3s + 1}$

- Στατική ενίσχυση $\mathrm{k} = 1$
- Χαρακτηριστικός χρόνος $\tau = \sqrt{4} = 2$
- Συντελεστής απόσβεσης $\zeta = \frac{3}{2\tau} = 0.75$



Παράδειγμα 2: Σύνδεση με αλληλεπίδραση

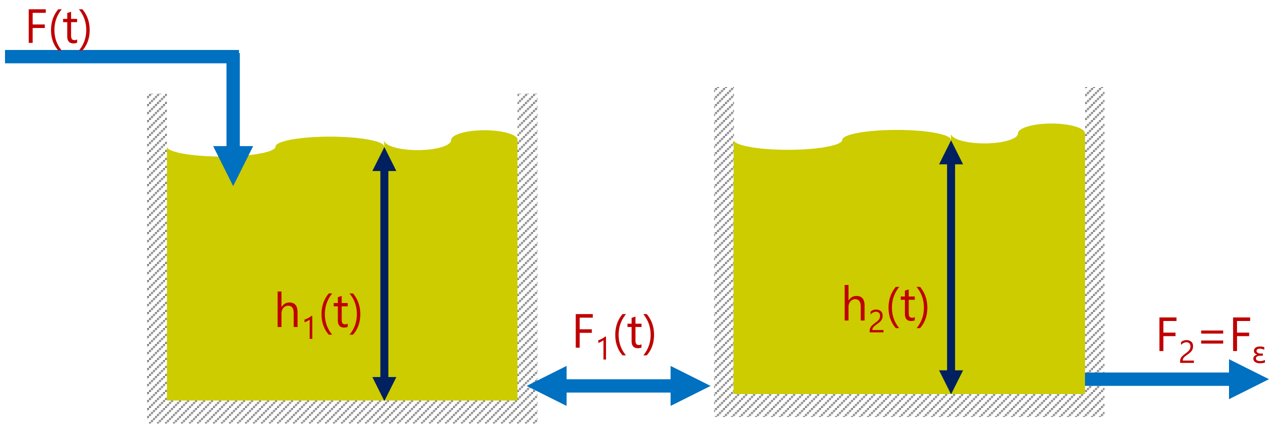


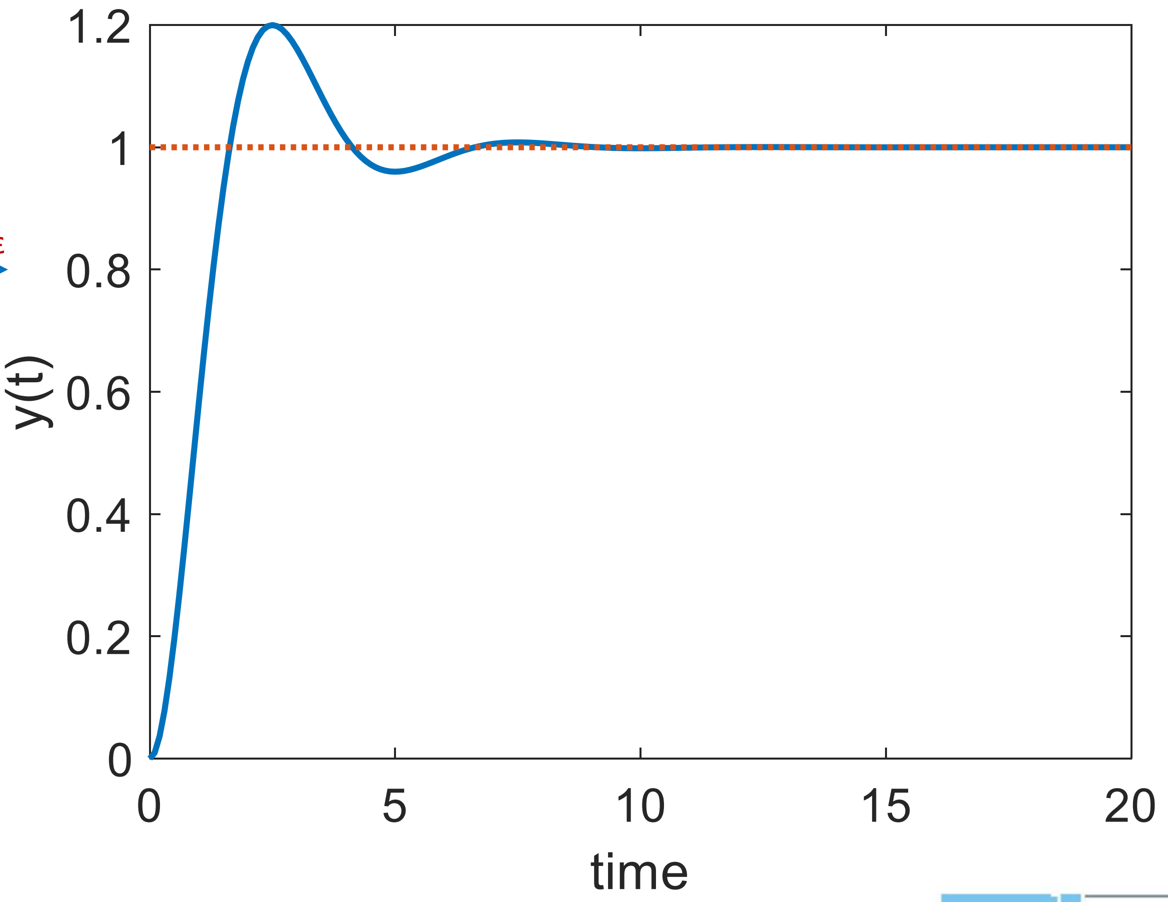


Χαρακτηρισμός του συστήματος

- Απόκριση σε βηματική είσοδο
- Παρατηρούμε:
  - Κλασική σιγμοειδή απόκριση
  - Υπέρβαση 20%
  - Ταλάντωση περιόδου 5 λεπτών

Παράδειγμα 2: Σύνδεση με αλληλεπίδραση

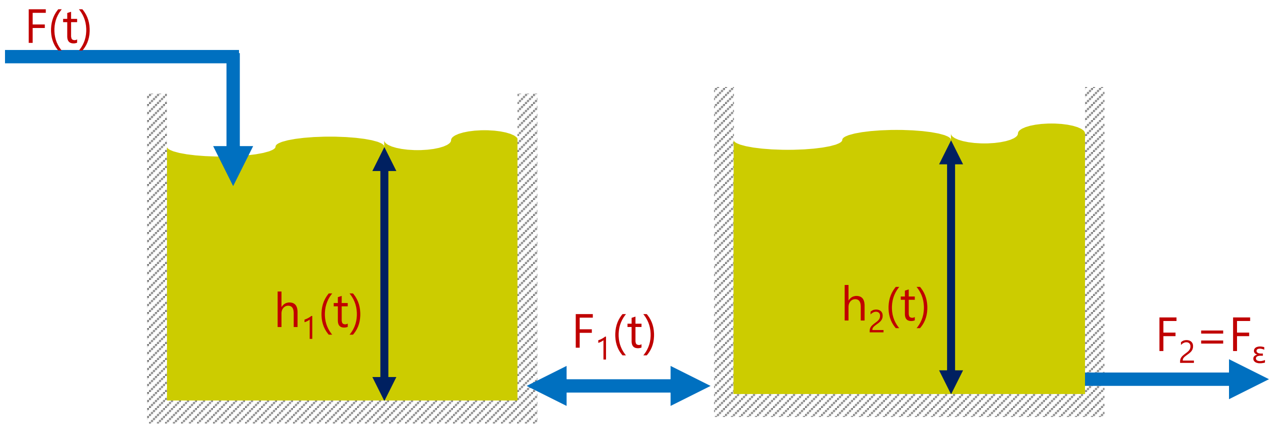




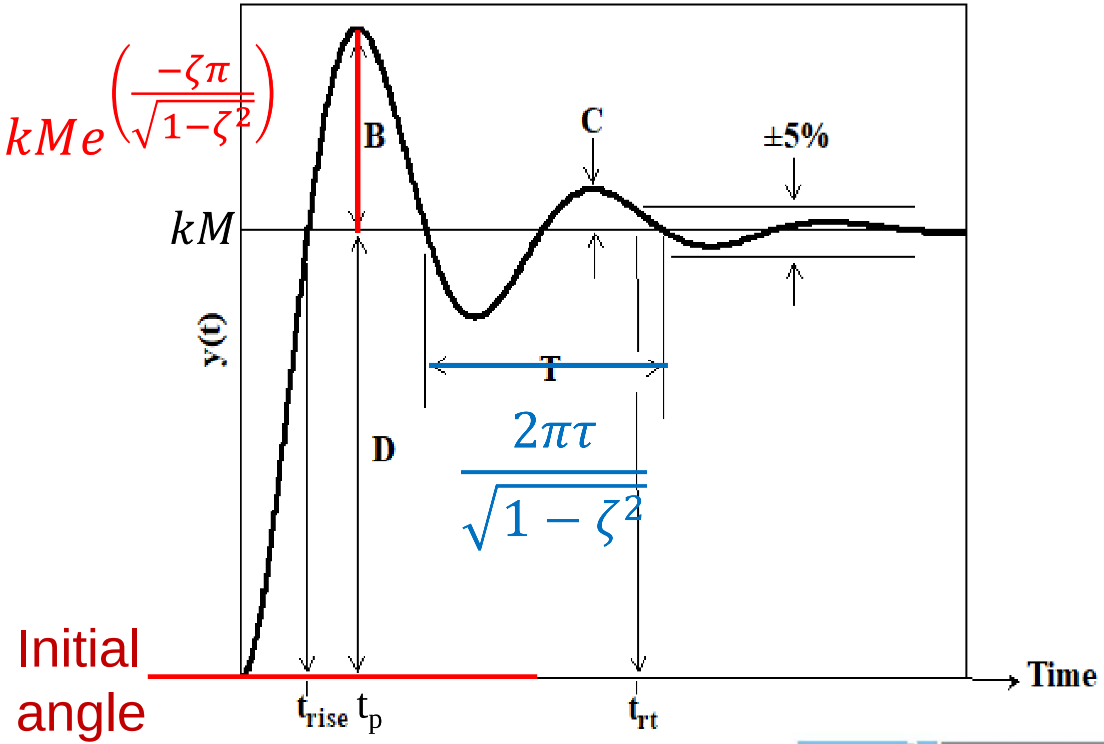
Χαρακτηρισμός του συστήματος
- Απόκριση σε βηματική είσοδο
- Παρατηρούμε:
  - Κλασική σιγμοειδή απόκριση
  - Υπέρβαση 20%
  - Ταλάντωση περιόδου 5 λεπτών

UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

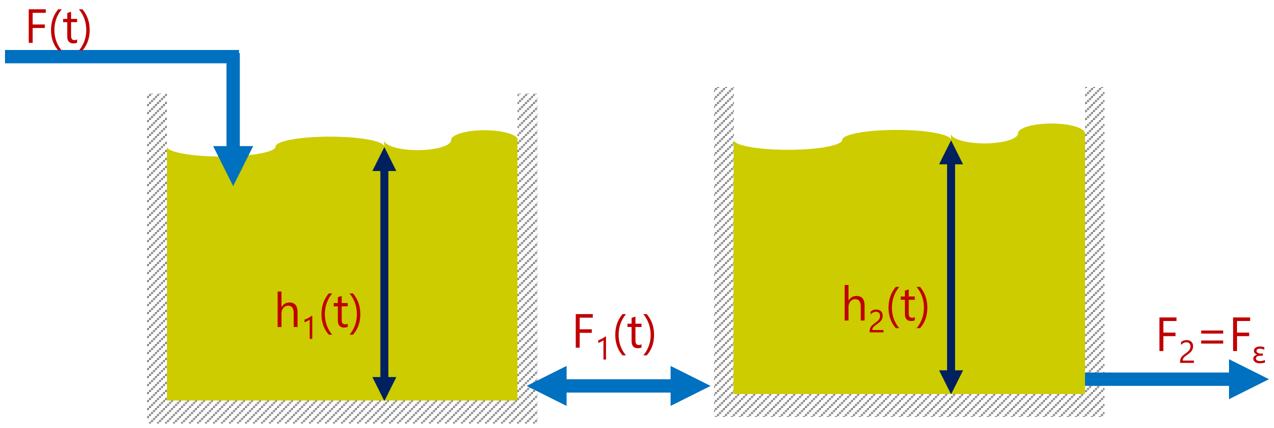
Παράδειγμα 2: Σύνδεση με αλληλεπίδραση



Χαρακτηρισμός του συστήματος
- Απόκριση σε βηματική είσοδο
- Παρατηρούμε:
  - Κλασική σιγμοειδή απόκριση
  - Υπέρβαση 20%
  - Ταλάντωση περιόδου 5 λεπτών

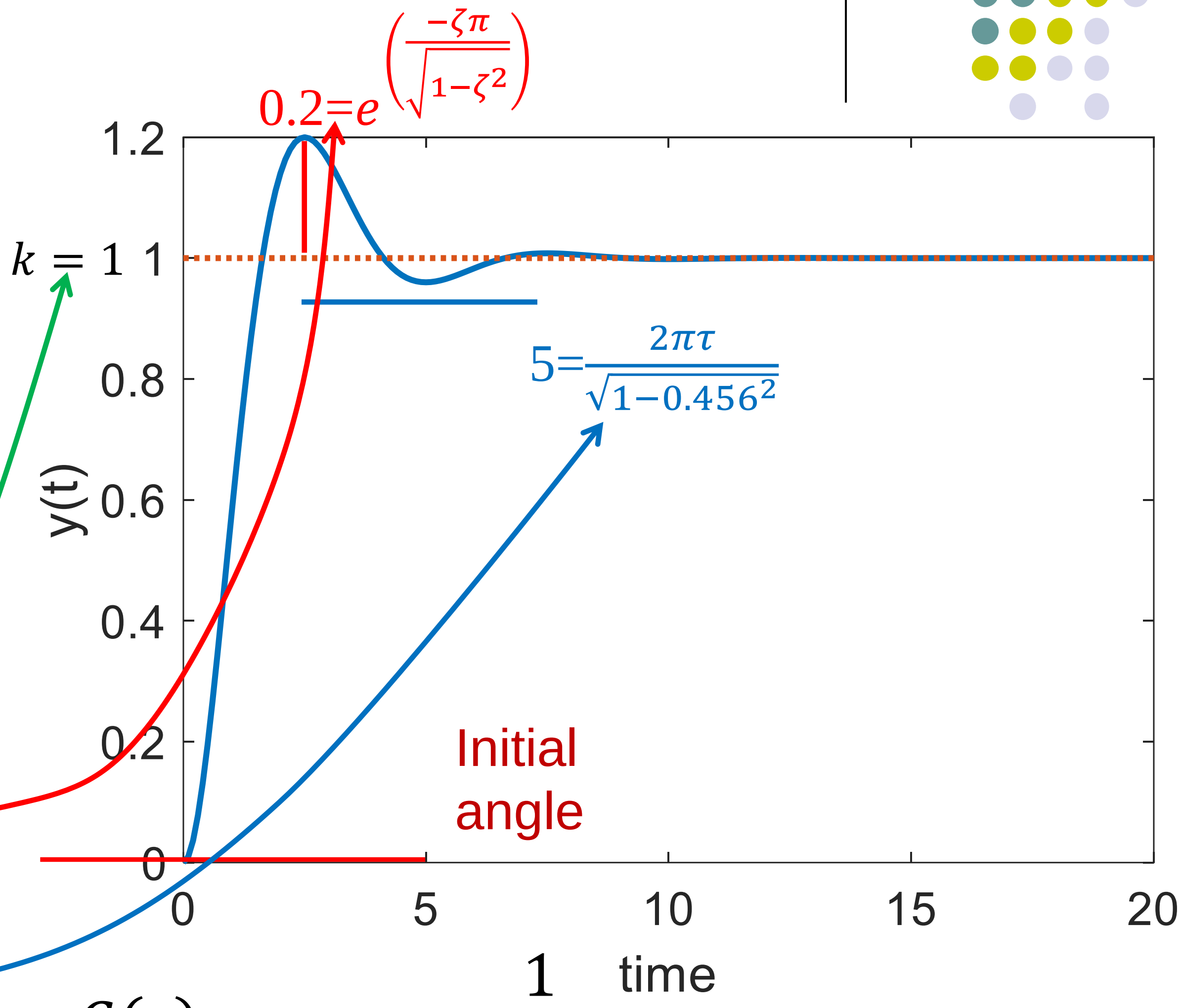


Παράδειγμα 2: Σύνδεση με αλληλεπίδραση



Χαρακτηρισμός του συστήματος

- Από την απόκριση υπολογίζουμε ότι στατική ενίσχυση πρέπει να είναι $k = 1$
- Από την υπέρβαση υπολογίζουμε $\zeta = 0.456$
- Από την περίοδο υπολογίζουμε $\tau = 0.708$ λεπτά.

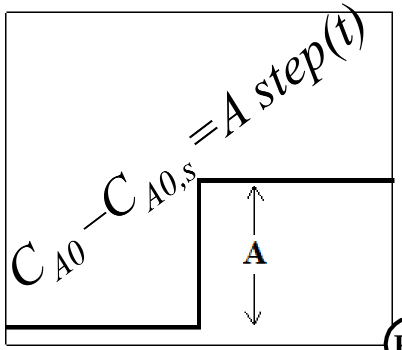


$$G(s) = \frac{1}{0.5s^2 + 0.646s + 1}$$

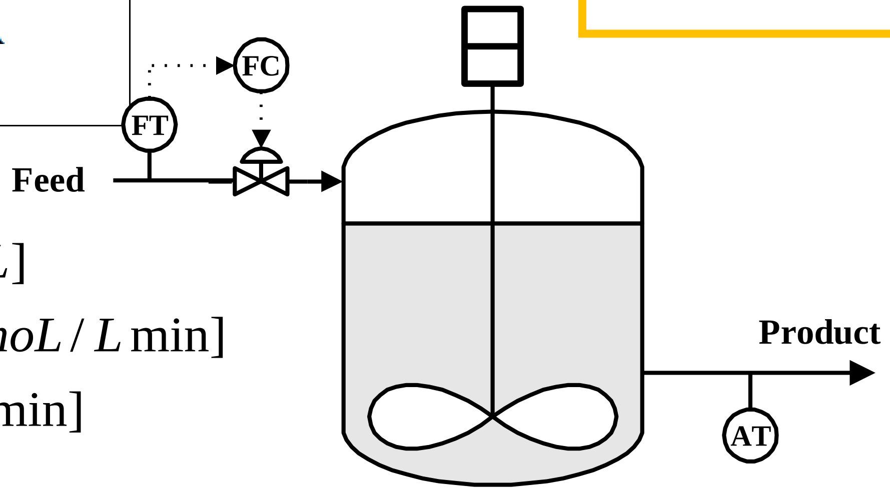
Απόκριση ΑΣΑΡ σε βηματική είσοδο

Αλλαγή συγκέντρωσης εισόδου από 2 σε 2.02:

$C_{A0} - C_{A0,s} = 0.02 \text{ step}(t) \rightarrow d = 0.02 \text{ step}(t)$



$$\boxed{Y = \frac{-0.0011s \quad + 0.001842}{s^2 + 4.006s + 3.502} U + \frac{0.4101}{s^2 + 4.006s + 3.502} D}$$



$V = 100[L]$

$k_1 = 0.2[moL / L \min]$

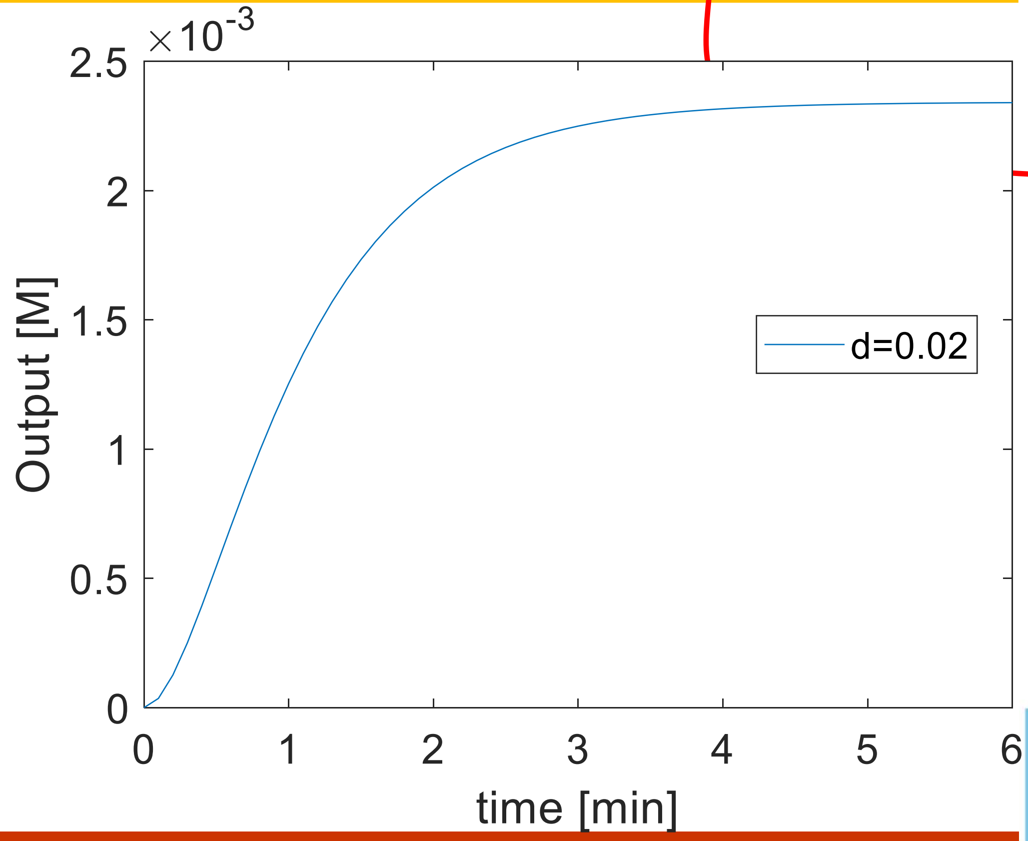
$k_2 = 3[1/\min]$

$F = 71.7[L/\min]$

$C_{A0,s} = 2.00[moL/L]$

$C_{A,s} = 1.4298[moL/L]$

$C_{B,s} = 0.1100[moL/L]$



$p_1 = -1.2889$

$p_2 = -2.717$

$none \qquad z$

$K = 0.1171$