Δυναμική & Ρύθμιση Διεργασιών

Διάλεξη 10:

Δυναμική Απόκριση Συστημάτων

Συστήματα 1ης τάξης

Βήματα της Ρύθμισης Διεργασιών, μέρος Α

1. **Καθορίστε τη διεργασία που εξετάζεται**
   a. Διατύπωση υποθέσεων
   b. Ταξινόμηση μεταβλητών (χειριζόμενες, διαταραχές, εσωτερικές, ελεγχόμενες, μετρούμενες)
   c. Διατύπωση μοντέλου διεργασίας
   d. Προσδιορισμός του επιθυμητού σημείου λειτουργίας
   e. Διατύπωση περιγραφής χώρου κατάστασης
   f. Διατύπωση περιγραφής συναρτήσεων μεταφοράς
   g. Αναγνώριση διεργασιών (αν χρειάζεται)

2. **Ανάλυση Διεργασίας**
   a. Ανάλυση παρατηρησιμότητας
   b. Ανάλυση ελεγξιμότητας / ρυθμισιμότητας
   c. Ανάλυση ευστάθειας
   d. **Ανάλυση δυναμικής συμπεριφοράς**
      a. **Απόκριση σε παλμική αλλαγή**
      b. Απόκριση σε ημιτονική αλλαγή

UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Περιγραφή στο χώρο κατάστασης

- Η περιγραφή στο Χώρο Κατάστασης (ΠΧΚ) είναι

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + Wd, x(0) = x_0$$
$$y = Cx + Du + Ed$$

- Η λύση των μεταβλητών κατάστασης για κάθε γνωστή είσοδο του συστήματος είναι

$$x(t) = e^{At}x(0) + e^{At} * Bu(t) + e^{At} * Wd(t)$$

αρχική τιμή   χειριζόμενη μετ.   διαταραχή

- Η έξοδος λαμβάνει τιμή

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + Ce^{At} * Bu(t) + Du(t) + Ce^{At} * Wd(t) + Ed(t)$$

- **Ο πίνακας Α έχει βασικό ρόλο στην εξέλιξη των μεταβλητών κατάστασης στο χρόνο!**
- **Ο πίνακας Α έχει βασικό ρόλο στην εξέλιξη της εξόδου στο χρόνο!**
- Τι χρειάζεται να γνωρίζουμε για τον Α;
- **Οι ιδιοτιμές λ_i του πίνακα Α καθορίζουν την συμπεριφορά του Α**

Περιγραφή συναρτήσεων μεταφοράς

- Στην περιγραφή με συναρτήσεις μεταφοράς (ΠΣΜ)

$$Y = G_u U(s) + G_d D(s) + G_o x(0)$$

  - Οι συναρτήσεις μεταφοράς είναι συνήθως ρητές

$$G_u(s) = Y(s)/U(s) = C(s\mathrm{I} - A)^{-1}B$$
$$G_d(s) = Y(s)/D(s) = C(s\mathrm{I} - A)^{-1}W$$
$$G_o(s) = Y(s)/x(0) = C(s\mathrm{I} - A)^{-1}$$

  - Η βασική δομή άρα που θα εξετάσουμε είναι η $G_u(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{\mathrm{Z}(s)}{\mathrm{P}(s)}$
    - Οι ρίζες του $\mathrm{P}(s)$ ονομάζονται οι **πόλοι** της συνάρτησης μεταφοράς G_u
    - Οι ρίζες του $\mathrm{Z}(s)$ ονομάζονται τα μηδέν της συνάρτησης μεταφοράς G_u

$$y(t) = \mathrm{L}^{-1}[Y(s)] = \mathrm{L}^{-1}[G_u U(s)] = \mathrm{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{N} \frac{\gamma_i}{s - p_i} U(s)\right] = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i e^{p_i t} * u(t)$$

    - **Οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς έχουν βασικό ρόλο στην εξέλιξη της εξόδου στο χρόνο**

Ευστάθεια Εισόδου-Εξόδου (βάση ΠΣΜ!)

- Ο ορισμός της ευστάθειας αναφέρεται στο **ζεύγος**
  σύστημα-σημείο ισορροπίας
- **Ορισμός**: Το ζεύγος *σύστημα-σημείο ισορροπίας* είναι ευσταθές αν για οποιαδήποτε πεπερασμένο σε πλάτος προφίλ της εισόδου η έξοδος παραμένει σε πεπερασμένα όριο.

- Ανακαλύπτουμε αν ένα σύστημα μπορεί να μεταβεί σε νέο σημείο λειτουργίας.
- Οι πόλοι χαρακτηρίζουν την ΕΕΕ.
  - Καθορίζουν τόσο την ευστάθεια **όσο και την μεταβατική συμπεριφορά**.
- Τα μηδέν δεν συμμετέχουν στον χαρακτηρισμό της ΕΕΕ!!
  - **Έχουν ιδιαίτερο λόγο στη μεταβατική συμπεριφορά.**

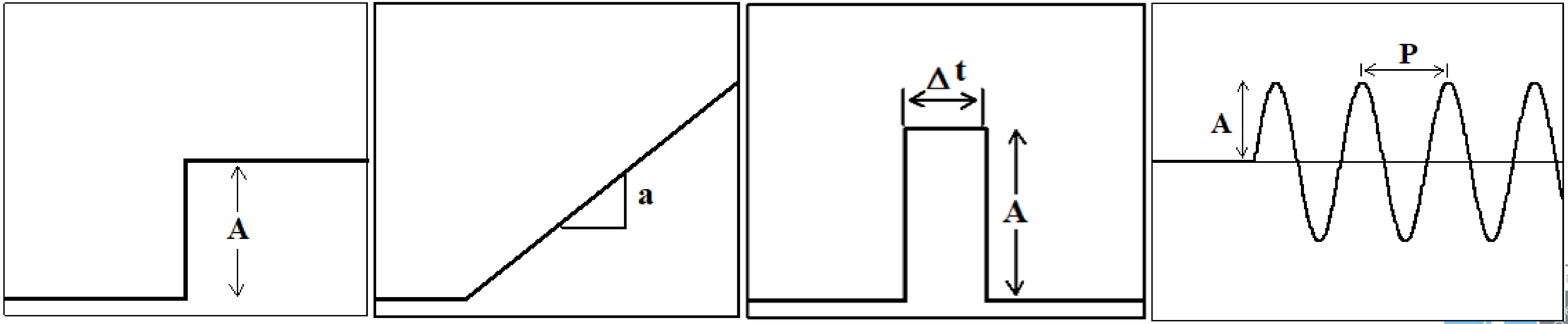
Εξερεύνηση δυναμικής συμπεριφοράς

- Σημείωση: *Μεταβατική συμπεριφορά = Δυναμική συμπεριφορά*
- Η μεταβατική συμπεριφορά του συστήματος είναι απαραίτητο να κατανοηθεί και να βρεθεί ένα ελάχιστος αριθμός μεταβλητών που να την περιγράφουν (προσεγγιστικά).
- Για την εξερεύνηση της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος πρότυπες μεταβολές της εισόδου χρησιμοποιούνται.
  - Βήμα
  - Παλμός
  - Κρουστικός παλμός
  - Γραμμική μεταβολή
  - Ημίτονο
- Γενικές μεταβολές της εισόδου μπορούν να γραφούν ως συνδυασμός αυτών.

UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

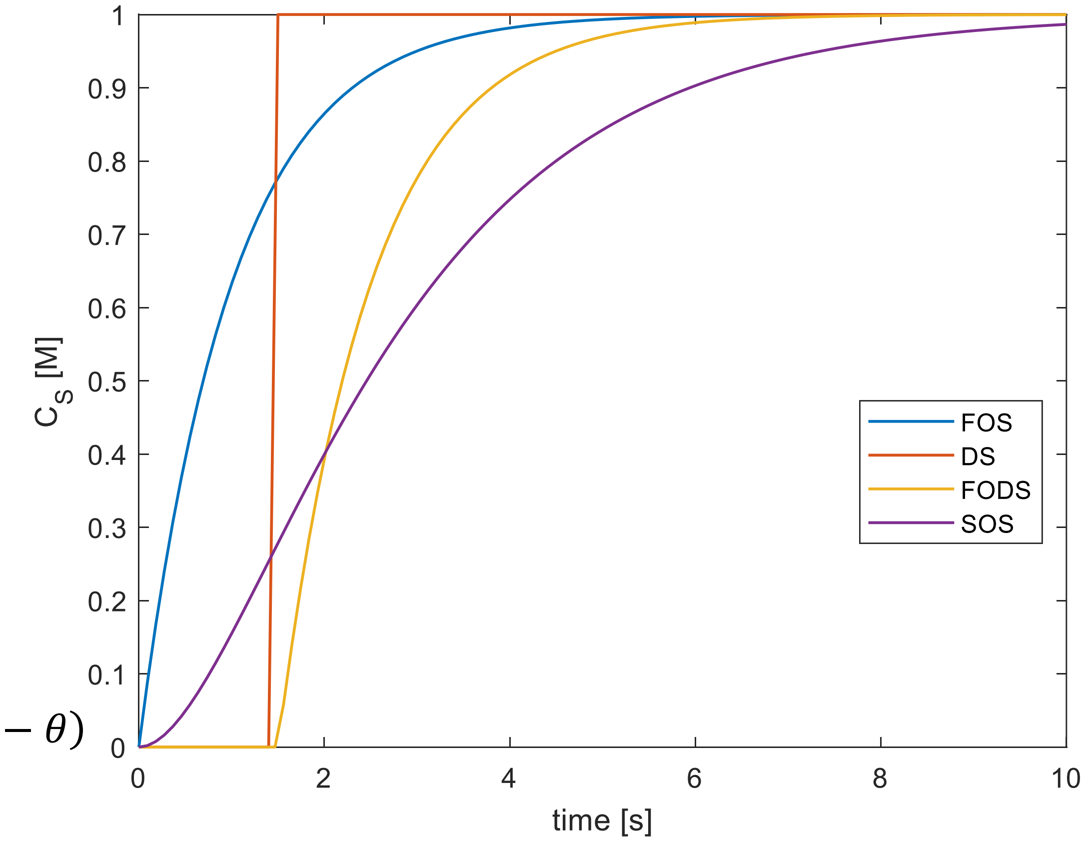
Εξερεύνηση δυναμικής συμπεριφοράς

- Για την εξερεύνηση της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος πρότυπες μεταβολές της εισόδου χρησιμοποιούνται.
  - Γενικές μεταβολές της εισόδου μπορούν να γραφούν ως συνδυασμός αυτών.
  - Βήμα
  - Παλμός
  - Κρουστικός παλμός
  - Γραμμική μεταβολή
  - Ημίτονο



Εξερεύνηση δυναμικής συμπεριφοράς

- Η μεταβατική συμπεριφορά του συστήματος είναι απαραίτητο να κατανοηθεί και να βρεθεί ένα ελάχιστος αριθμός μεταβλητών που να την περιγράφουν (προσεγγιστικά).
- ΠΧΚ — ΠΕΕ
  - **DS** $y = Ku(t-\theta)$ — $y = Ku(t-\theta)$
  - **FOS** $\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{\tau}x_1 + \frac{K}{\tau}u(t)$, $y = x_1$ — $\tau\frac{dy}{dt} + y = Ku(t)$
  - **FODS** $\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{\tau}x_1 + \frac{K}{\tau}u(t-\theta)$, $y = x_1$ — $\tau\frac{dy}{dt} + y = Ku(t-\theta)$
  - **SODS** $\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{\tau_1}x_1 + \frac{K}{\tau_1}u(t-\theta)$, $\frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{\tau_2}x_2 + \frac{1}{\tau_2}x_1$, $y = x_2$ — $\tau^2\frac{dy}{dt} + 2\tau\zeta\frac{dy}{dt} + y = Ku(t-\theta)$

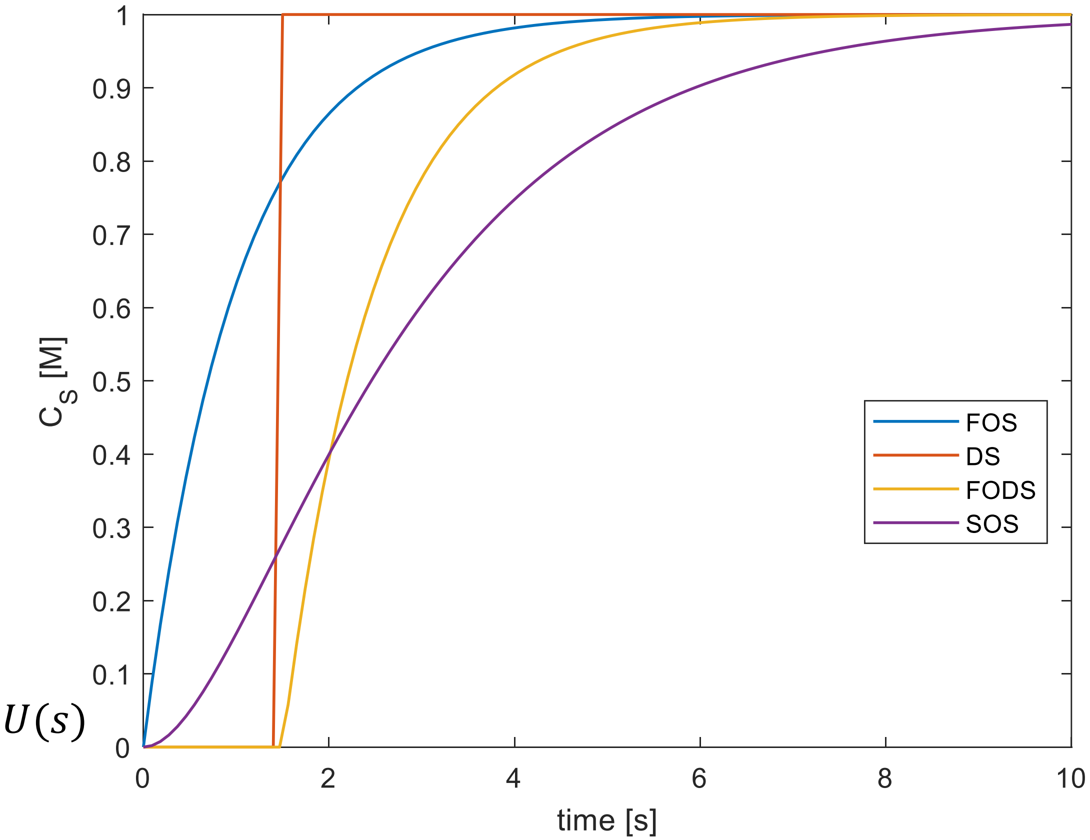


UNIVERSITY OF PATRAS Department Of Chemical Engineering ChemEngUP

Εξερεύνηση δυναμικής συμπεριφοράς

- Η μεταβατική συμπεριφορά του συστήματος είναι απαραίτητο να κατανοηθεί και να βρεθεί ένα ελάχιστος αριθμός μεταβλητών που να την περιγράφουν (προσεγγιστικά).

	ΠΧΚ	ΠΣΜ
DS	$y = Ku(t-\theta)$	$Y(s) = Ke^{-\theta s}U(s)$
FOS	$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{\tau}x_1 + \frac{K}{\tau}u(t)$, $y = x_1$	$Y(s) = \frac{K}{\tau s+1}U(s)$
FODS	$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{\tau}x_1 + \frac{K}{\tau}u(t-\theta)$, $y = x_1$	$Y(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{\tau s+1}U(s)$
SODS	$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{\tau_1}x_1 + \frac{K}{\tau_1}u(t-\theta)$, $\frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{\tau_2}x_2 + \frac{1}{\tau_2}x_1$, $y = x_2$	$Y(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}U(s)$



Παράδειγμα συστήματος 1ης τάξης: Θερμόμετρο Υδραργύρου

(Εισροή) – (Εκροή) = (Συσσώρευση)

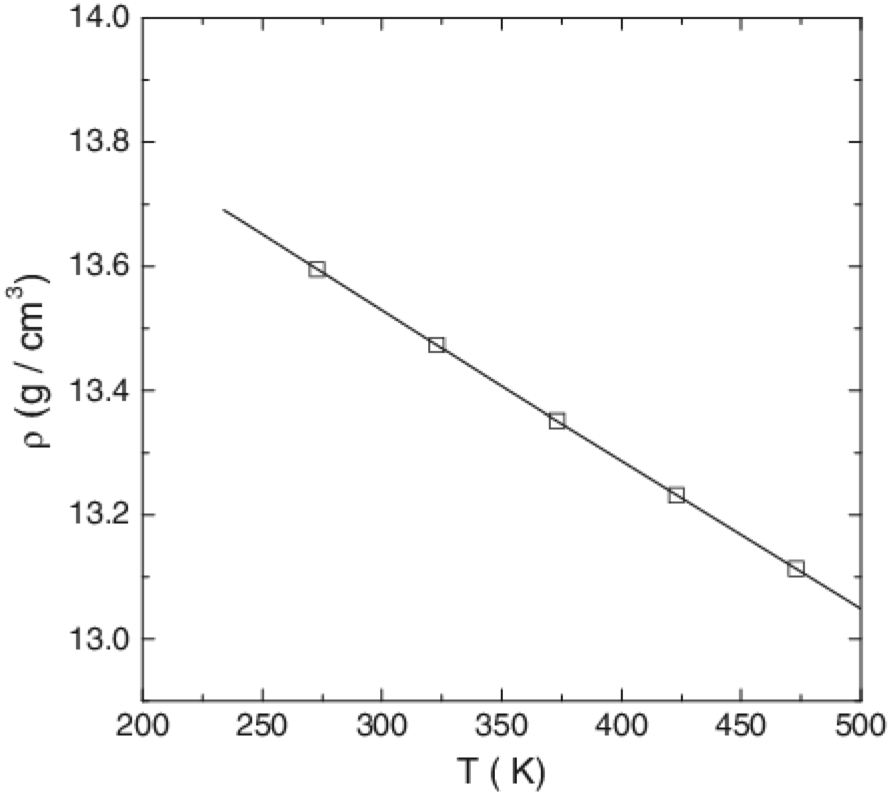
$$h\ A\ (\theta - T) = m\ c\ \frac{dT}{dt}$$

συντελεστής μεταφοράς θερμότητας

επιφάνεια

μάζα του Hg

ειδική θερμότητα του Hg



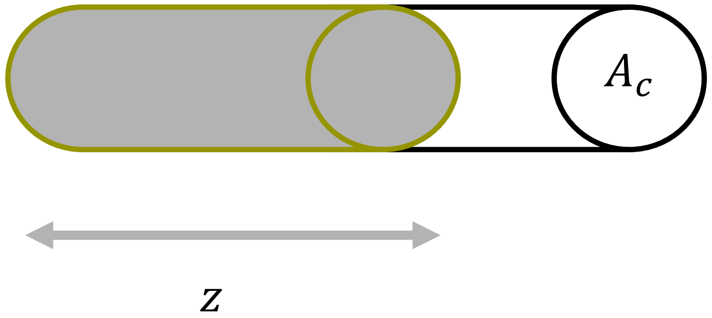
$$\rho(T) = \rho_r[1 - \beta(T - T_r)]$$

Παράδειγμα συστήματος 1ης τάξης: Θερμόμετρο Υδραργύρου

(Εισροή) – (Εκροή) = (Συσσώρευση)

$$\underbrace{h}_{\text{συντελεστής μεταφοράς θερμότητας}}\ \underbrace{A}_{\text{επιφάνεια}}\,(\theta - T) = \underbrace{m}_{\text{μάζα του Hg}}\ \underbrace{c}_{\text{ειδική θερμότητα του Hg}}\ \frac{dT}{dt}$$

$$\rho(T) = \rho_r[1 - \beta(T - T_r)]$$



$$\rho(T)A_c z = \rho_r A_c z_r \Rightarrow z = z_r \frac{\rho_r}{\rho(T)} = h(T)$$

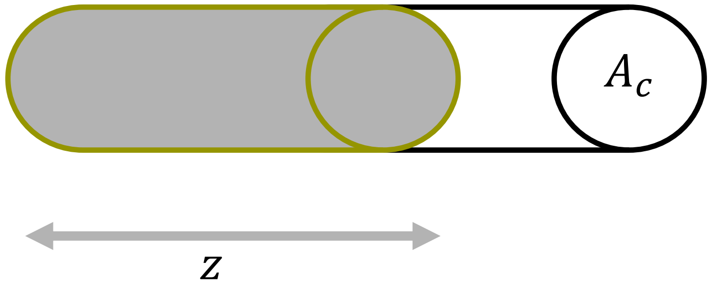
$$\Rightarrow z \cong z_r + \frac{\partial h}{\partial T}(T - T_r)$$

$$\Rightarrow z - z_r = z_r \left.\frac{\rho_r(-1)(-\beta)}{\rho_r\big(1 - \beta(T - T_r)\big)^2}\right|_{T \leftarrow T_r} (T - T_r)$$

$$\Rightarrow z - z_r = z_r \beta (T - T_r)$$

Παράδειγμα συστήματος 1ης τάξης: Θερμόμετρο Υδραργύρου

$$\rho(T) = \rho_r[1 - \beta(T - T_r)]$$



(Εισροή) – (Εκροή) = (Συσσώρευση)

$$\mathrm{h}\ \mathrm{A}\ (\theta - T) = \mathrm{m}\ \mathrm{c}\ \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{dt}}$$

h: συντελεστής μεταφοράς θερμότητας

A: επιφάνεια

m: μάζα του Hg

c: ειδική θερμότητα του Hg

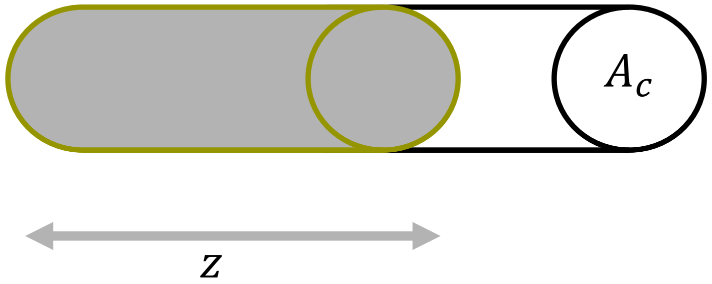
$$z - z_r = z_r\beta(T - T_r)$$

Σημείο αναφοράς (ισχύει ισορροπία): $\theta_r = T_r$

$$\frac{\mathrm{d}(T - T_r)}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{hA}}{\mathrm{mc}}(\theta - \theta_r + T_r - T)$$

Παράδειγμα συστήματος 1ης τάξης: Θερμόμετρο Υδραργύρου

$$\rho(T) = \rho_r[1 - \beta(T - T_r)]$$



$$z - z_r = z_r\beta(T - T_r)$$

(Εισροή) – (Εκροή) = (Συσσώρευση)

$$h\ A\ (\theta - T) = m\ c\ \frac{dT}{dt}$$

συντελεστής μεταφοράς θερμότητας (h), επιφάνεια (A), μάζα του Hg (m), ειδική θερμότητα του Hg (c)

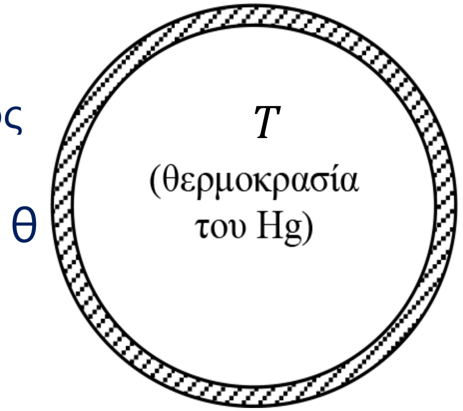
$$u = \theta - \theta_r$$

$$x = T - T_r \quad \rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{hA}{mc}(u - x)$$

$$y = z - z_r \quad \rightarrow \; y = z_r\beta x$$

Παράδειγμα συστήματος 1ης τάξης: Θερμόμετρο Υδραργύρου

Θερμοκρασία περιβάλλοντος

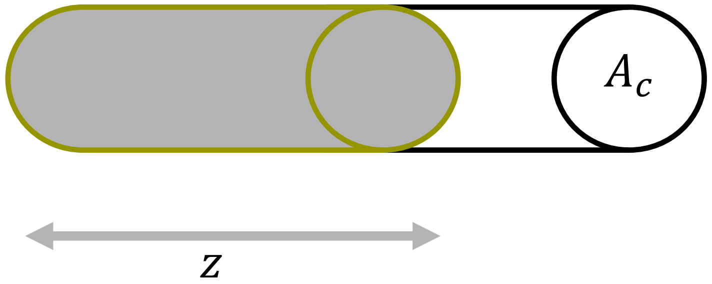


(Εισροή) – (Εκροή) = (Συσσώρευση)

$$\text{h A}\left(\theta - T\right) = \text{m c}\frac{dT}{dt}$$

συντελεστής μεταφοράς θερμότητας — επιφάνεια — μάζα του Hg — ειδική θερμότητα του Hg

$$\rho(T) = \rho_r\left[1 - \beta(T - T_r)\right]$$



$$z - z_r = z_r\beta(T - T_r)$$

Άλλος τρόπος κατασκευής του μοντέλου:

$$\frac{dz_r\beta(T - T_r)}{dt} = z_r\beta\frac{hA}{mc}(\theta - \theta_r) - \frac{hA}{mc}z_r\beta(T - T_r)$$

$$\left.\begin{array}{l} u = \theta - \theta_r \\ y = z - z_r \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = z_r\beta\frac{hA}{mc}u - \frac{hA}{mc}y$$

Παράδειγμα συστήματος 1ης τάξης: Θερμόμετρο Υδραργύρου

Θερμοκρασία περιβάλλοντος

θ

(Εισροή) – (Εκροή) = (Συσσώρευση)

$$h\ A\ (\theta - T) = m\ c\ \frac{dT}{dt}$$

συντελεστής μεταφοράς θερμότητας — επιφάνεια — μάζα του Hg — ειδική θερμότητα του Hg

Θερμοκρασία περιβάλλοντος → **θερμόμετρο** → Ένδειξη

θ → y

$$\frac{dy}{dt} = z_r \beta \frac{hA}{mc} u - \frac{hA}{mc} y$$

$$\frac{mc}{hA}\frac{dy}{dt} + y = z_r \beta u$$

$K = z_r \beta$ στατική ενίσχυση

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = Ku$$

$\tau = \dfrac{mc}{hA}$ σταθερά χρόνου

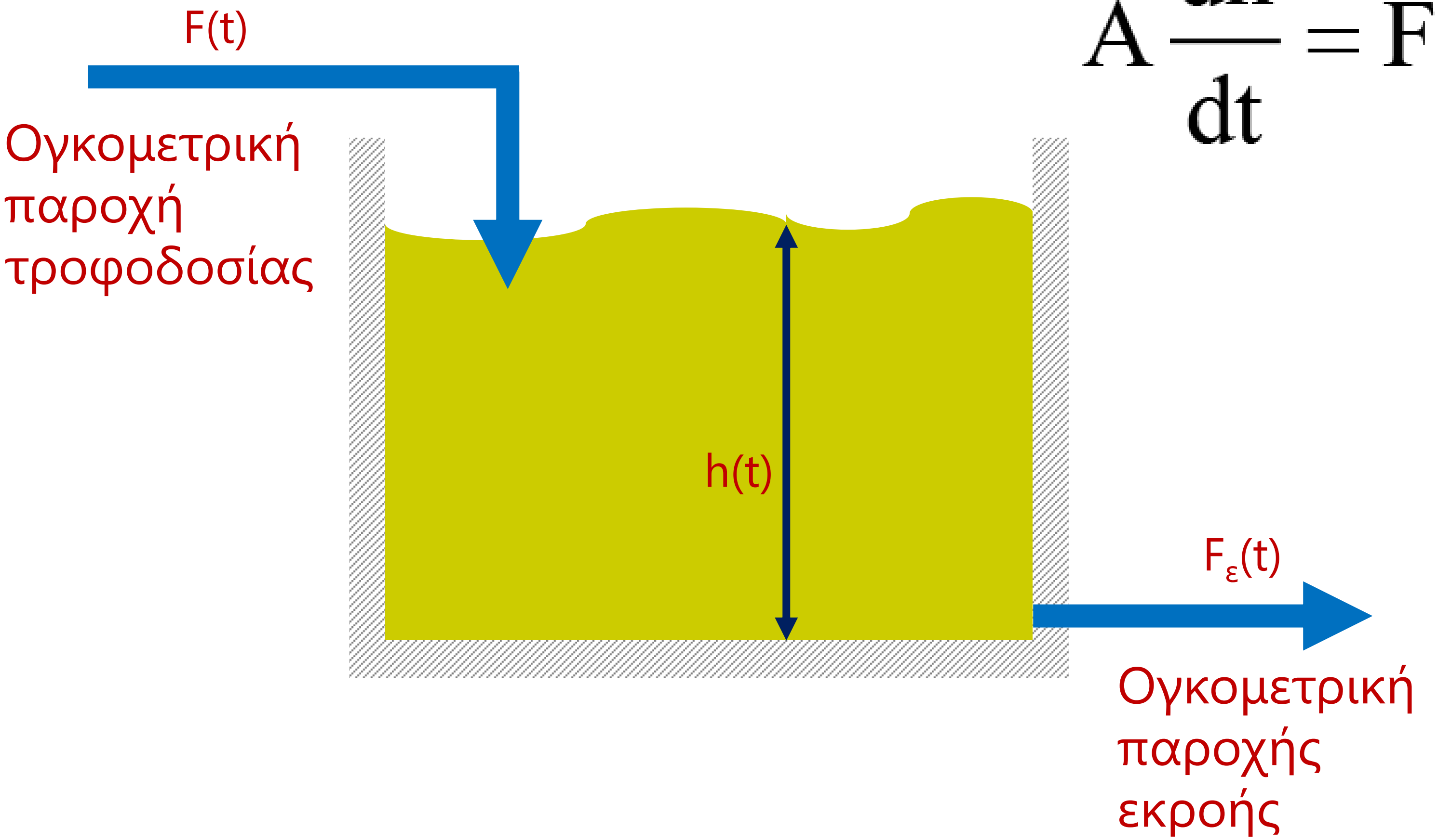
Γενική μορφή συστήματος 1ης τάξης

$$\boxed{\tau \frac{dy}{dt} + y = k\,u}$$

Σε μόνιμη κατάσταση $\frac{dy}{dt} = 0$: $\quad y_s = k u_s$

Παράδειγμα: Δεξαμενή Υγρού

$$A\frac{dh}{dt} = F - F_{\varepsilon}$$



UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Παράδειγμα: Δεξαμενή Υγρού

Η εκροή του ρευστού γίνεται υπό την επίδραση της βαρύτητας, αλλά η ροή στον σωλήνα εκροής είναι τυρβώδης $F_\varepsilon = C\sqrt{h}$

$$\boxed{A\frac{dh}{dt} = -C\sqrt{h} + F(t)}$$

$$x = \bar{h}(t)$$
$$u = \bar{F}(t)$$
$$y = \bar{F}_\epsilon = \frac{\bar{h}(t)}{R}$$

$$\tau = AR$$
$$k = 1$$

Γραμμικοποίηση κοντά σε μόνιμη κατάσταση αναφοράς $\left(h_{s,ref}\,,\; F_{s,ref}\right)$

$$\sqrt{h} \approx \sqrt{h_{s,ref}} + \frac{1}{2\sqrt{h_{s,ref}}}\left(h - h_{s,ref}\right)$$

$$A\frac{dh}{dt} \approx -C\sqrt{h_{s,ref}} - \frac{C}{2\sqrt{h_{s,ref}}}\left(h - h_{s,ref}\right) + F(t)$$

$$C\sqrt{h_{s,ref}} = F_{s,ref}$$

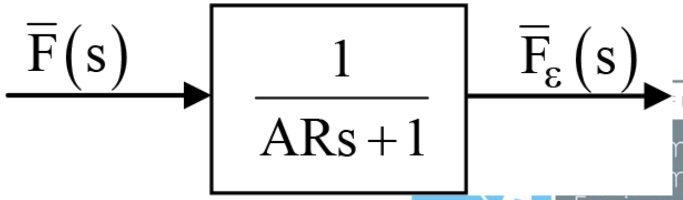
$$A\frac{d\left(h - h_{s,ref}\right)}{dt} \approx -\frac{C}{2\sqrt{h_{s,ref}}}\left(h - h_{s,ref}\right) + \left(F(t) - F_{s,ref}\right)$$

$A\dfrac{d\bar{h}}{dt} \approx -\dfrac{C}{2\sqrt{h_{s,ref}}}\bar{h} + \bar{F}(t)$	Γραμμική προσέγγιση

$$R = \frac{2\sqrt{h_{s,ref}}}{C}.$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\tau}x + \frac{k}{\tau}u$$
$$y = x$$

$$Y(s) = G_u(s)U(s)$$
$$G_u(s) = \frac{1}{ARs + 1}$$



Γενική μορφή συστήματος 1ης τάξης

ΠΧΚ: $$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\tau}x + \frac{k}{\tau}u, x(0) = x_0$$
$$y = x$$

ΠΕΕ: $$\tau\frac{dy}{dt} + y = Ku$$
$$y = y_0$$

Εφαρμογή μετασχηματισμού Laplace

$$\tau\left(sY(s) - y(0)\right) + Y(s) = kU(s)$$

ΠΣΜ: $$Y(s) = \frac{\tau}{\tau s+1}y(0) + \frac{k}{\tau s+1}U(s)$$

Εφαρμογή αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace

$$\boxed{y(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}y(0) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{k}{\tau s+1}U(s)\right)}$$

UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Σύστημα 1ης τάξης: Επίδραση εισόδου υπό μηδενική αρχική συνθήκη

Αρχικά: Η μόνιμη κατάσταση αναφοράς: $\left(u_{s,ref}, y_{s,ref}\right)$

$$\tau \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = Ku$$

$$y = y_0, u(0) = u_0$$

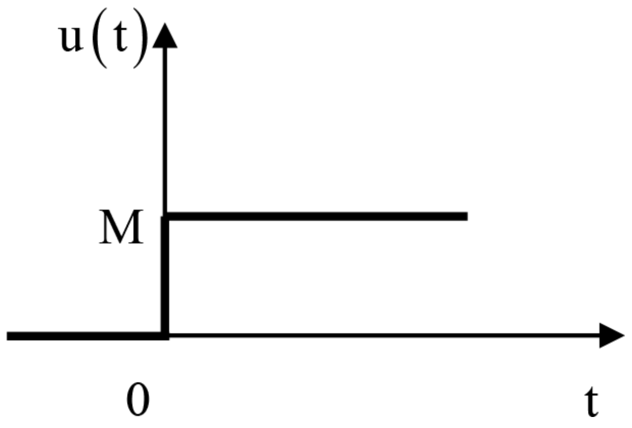
$$Y(s) = \frac{k}{\tau s + 1} U(s)$$

$$U(s) \longrightarrow \boxed{\frac{k}{\tau s+1}} \longrightarrow Y(s)$$

Συνάρτηση μεταφοράς $G(s) = \dfrac{k}{\tau s + 1}$

UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

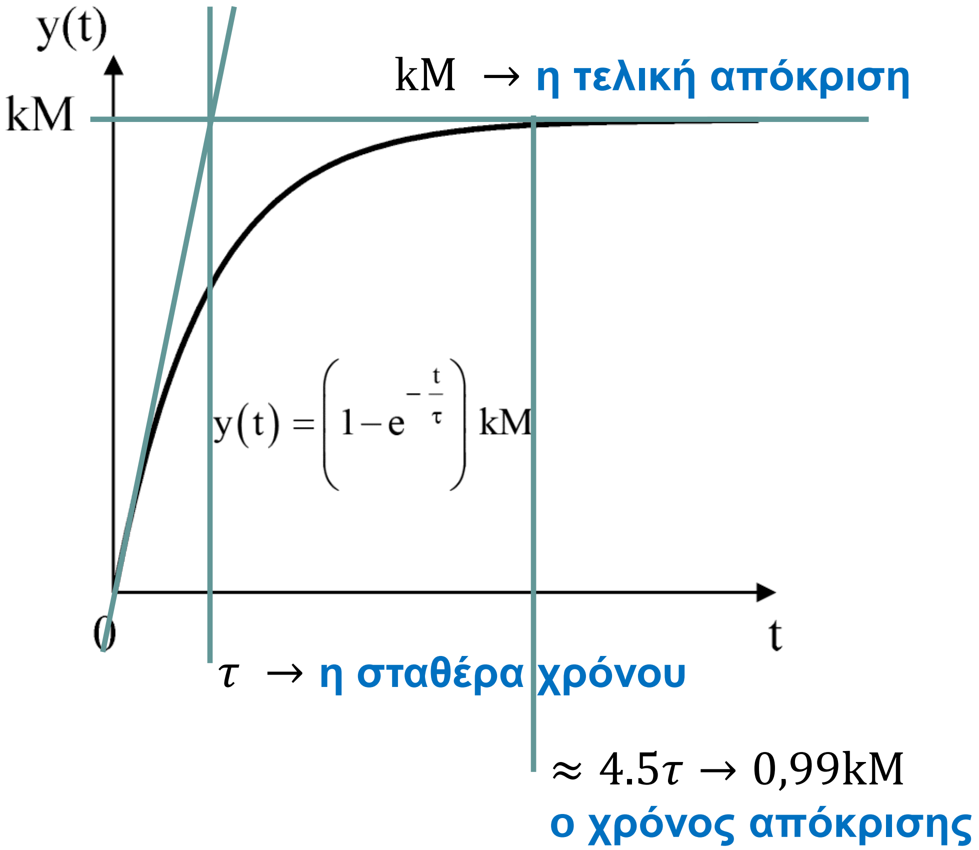
Απόκριση συστήματος 1ης τάξης σε βηματική μεταβολή της εισόδου



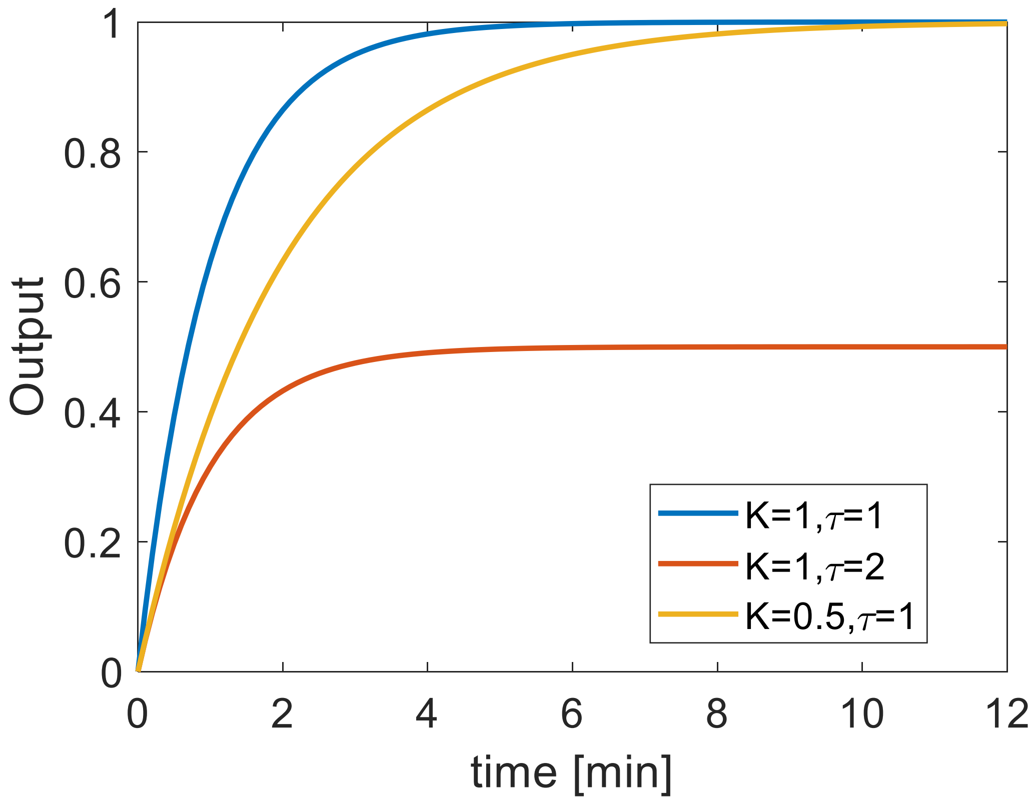
$$u(t) = \begin{cases} 0 & , \ t<0 \\ M & , \ t\geq 0 \end{cases}$$

$$U(s) = \frac{M}{s}$$

$$Y(s) = \frac{k}{\tau s+1}\cdot\frac{M}{s} = \frac{k\dfrac{M}{\tau}}{\left(s+\dfrac{1}{\tau}\right)s} = \frac{kM}{s} - \frac{kM}{s+\dfrac{1}{\tau}} \Rightarrow y(t) = \left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)kM$$

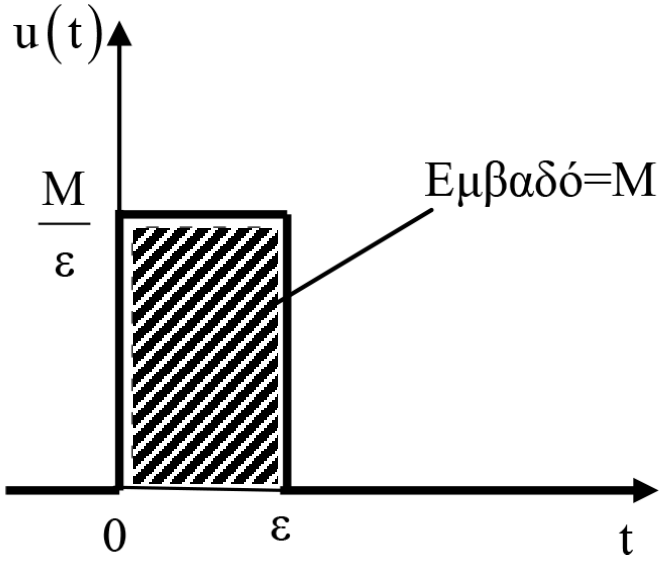


t	y(t) / kM
0	0
τ	0,632
2τ	0,865
3τ	0,950
4τ	0,982
5τ	0,993



Output
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
2
4
6
8
10
12
time [min]
K=1,τ=1
K=1,τ=2
K=0.5,τ=1

Απόκριση συστήματος 1ης τάξης σε παλμική μεταβολή της εισόδου



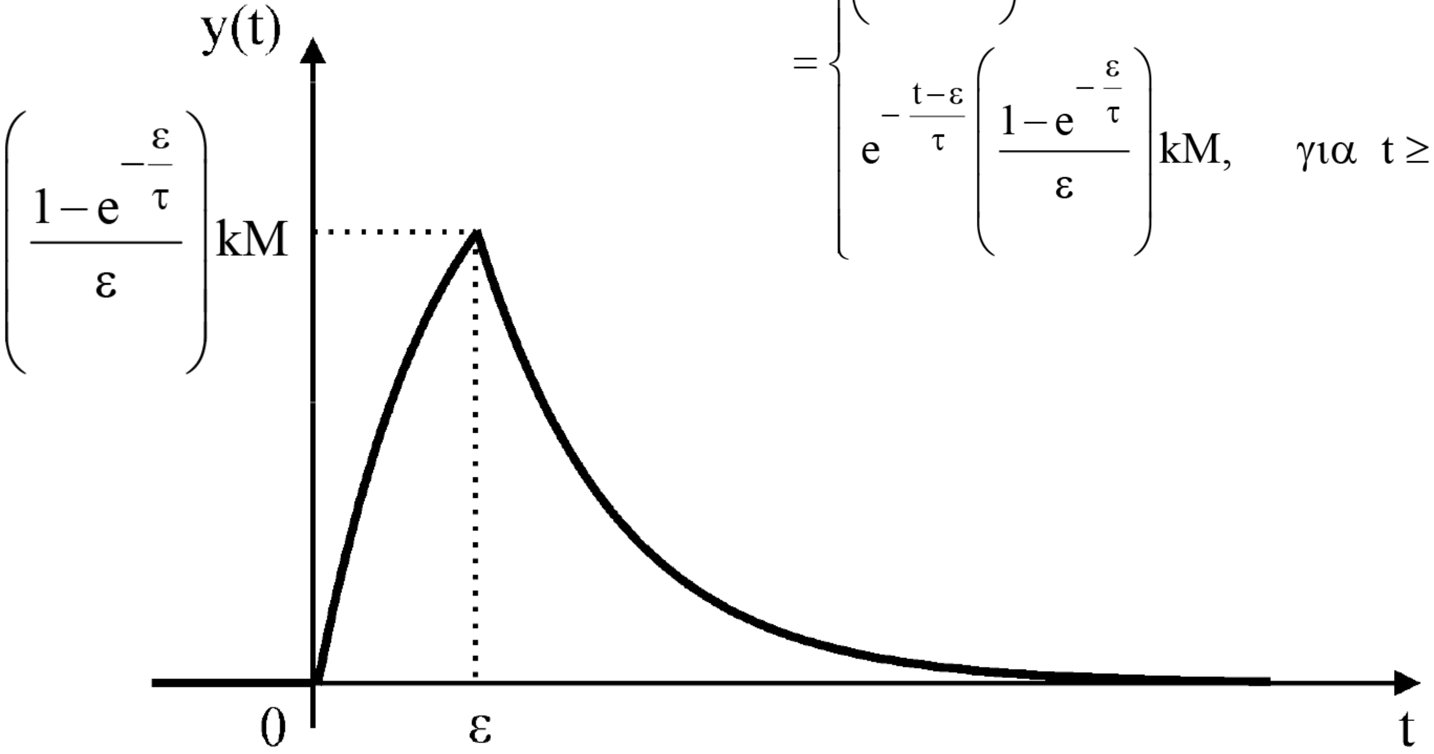
$$u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{M}{\varepsilon}, & 0\le t<\varepsilon\\ 0, & t\ge\varepsilon\end{cases}$$

$$U(s)=M\frac{1-e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s}$$

$$Y(s)=\frac{kM\left(1-e^{-\varepsilon s}\right)}{(\tau s+1)\varepsilon s}=\frac{k\dfrac{M}{\varepsilon}}{(\tau s+1)\,s}-e^{-\varepsilon s}\frac{k\dfrac{M}{\varepsilon}}{(\tau s+1)\,s}$$

$$y(t)=\begin{cases}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\dfrac{kM}{\varepsilon}, & \gamma\iota\alpha\ \ 0\le t\le\varepsilon\\ \left[\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)-\left(1-e^{-\frac{t-\varepsilon}{\tau}}\right)\right]\dfrac{kM}{\varepsilon}, & \gamma\iota\alpha\ \ t\ge\varepsilon\end{cases}$$

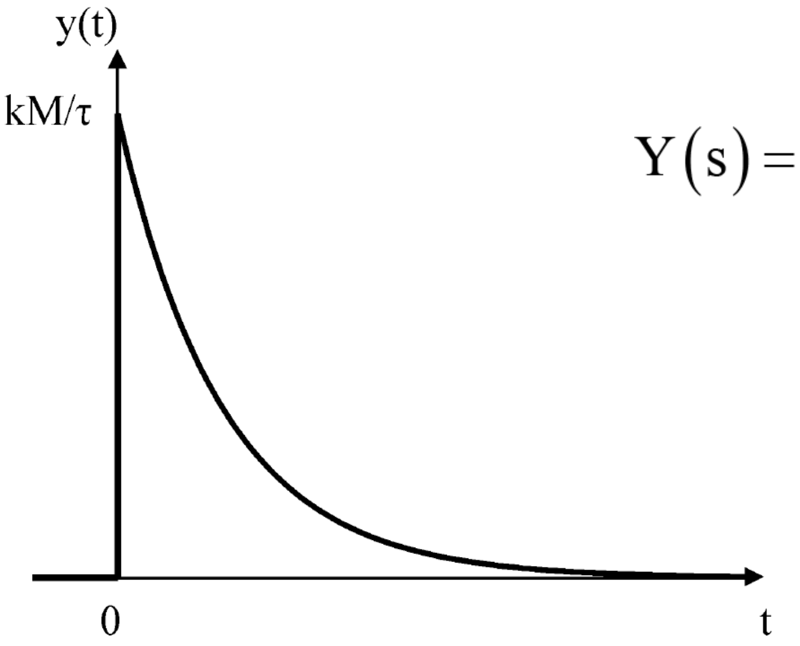
$$=\begin{cases}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\dfrac{kM}{\varepsilon}, & \gamma\iota\alpha\ \ 0\le t\le\varepsilon\\ e^{-\frac{t-\varepsilon}{\tau}}\left(\dfrac{1-e^{-\frac{\varepsilon}{\tau}}}{\varepsilon}\right)kM, & \gamma\iota\alpha\ \ t\ge\varepsilon\end{cases}$$



Απόκριση συστήματος 1ης τάξης σε κρουστική παλμική μεταβολή της εισόδου

Στο όριο $\varepsilon \to 0$,

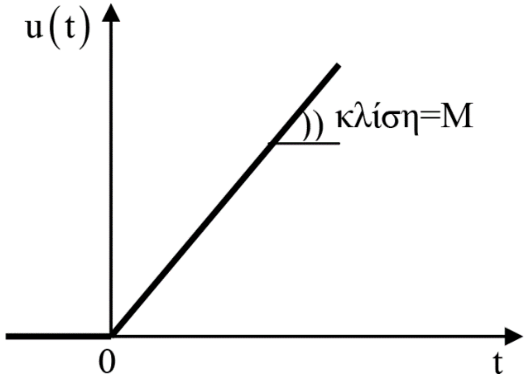
$$u(t) = M\delta(t) \qquad U(s) = M$$



$$Y(s) = \frac{k}{\tau s + 1} \cdot M \quad \Rightarrow \quad y(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{kM}{\tau}$$

UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Απόκριση συστήματος 1ης τάξης σε γραμμική μεταβολή της εισόδου



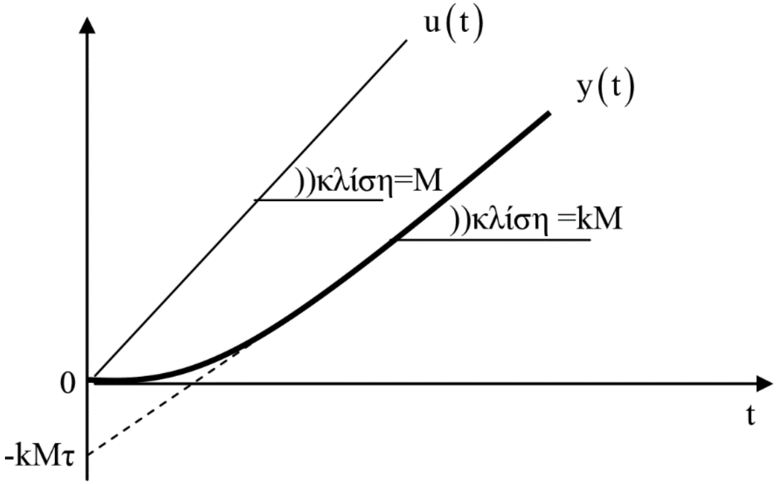
$$u(t)=\begin{cases}0\ , & t<0\\ Mt, & t\geq 0\end{cases}$$

$$U(s)=\frac{M}{s^2}$$

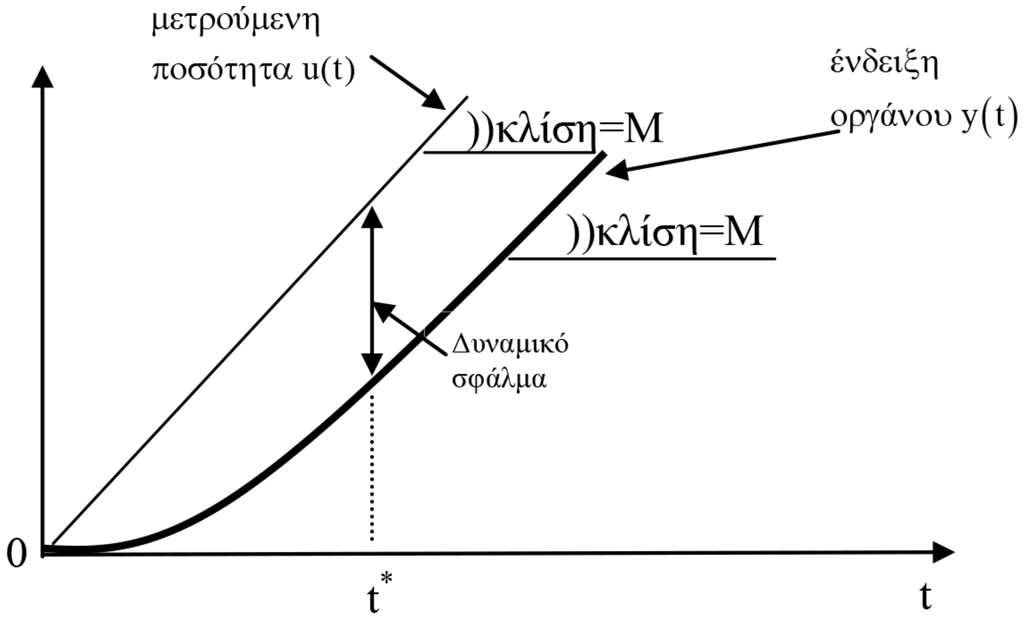
$$Y(s)=\frac{k}{\tau s+1}\frac{M}{s^2}$$

$$=\frac{kM}{s^2}-\frac{kM\tau}{s}+\frac{kM\tau}{s+\frac{1}{\tau}}$$

$$y(t)=kM\left(t-\tau+\tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$



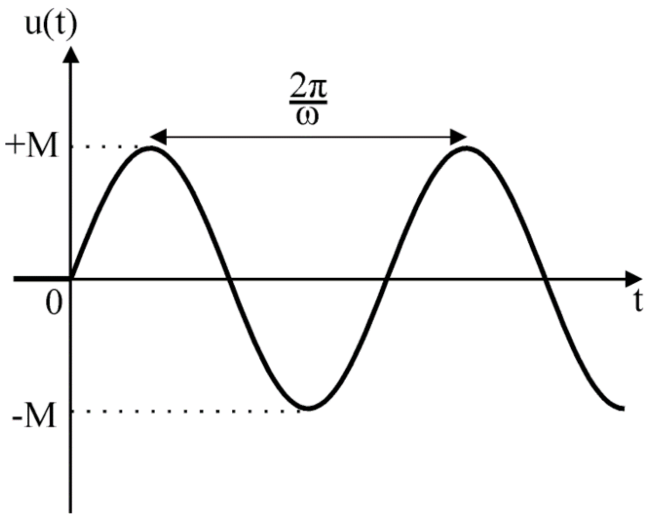
Δυναμικό σφάλμα οργάνου μέτρησης



$$u(t) - y(t) = Mt - M(t - \tau) = M\tau$$

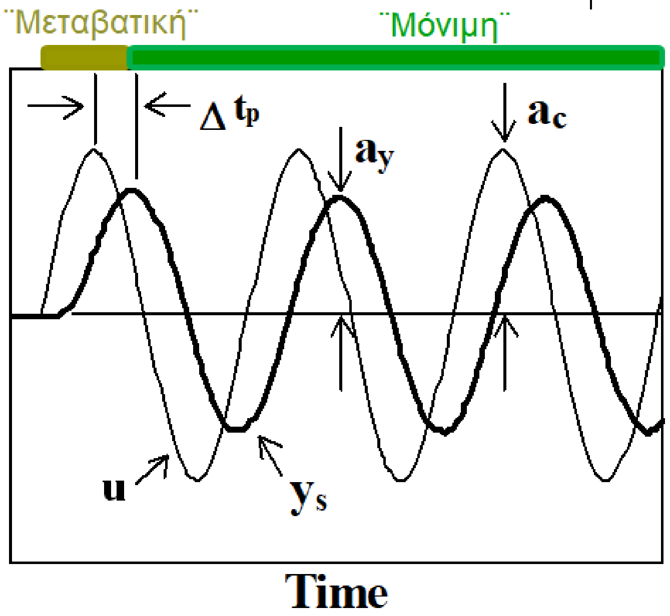
$$\left(\begin{array}{c} \text{Δυναμικό} \\ \text{σφάλμα} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Ρυθμός μεταβολής} \\ \text{μετρούμενης ποσότητας} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} \text{Σταθερά χρόνου} \\ \text{του οργάνου} \end{array} \right)$$

Απόκριση συστήματος 1ης τάξης σε ημιτονοειδή μεταβολή της εισόδου



$$u(t)=\begin{cases}0 & , \quad t<0\\ M\sin\omega t, & t\geq 0\end{cases}$$

$$U(s)=\frac{M\omega}{s^2+\omega^2}$$



$$Y(s)=\frac{k}{\tau s+1}\frac{M\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{kM\tau\omega}{1+\tau^2\omega^2}\cdot\frac{1}{s+\frac{1}{\tau}}-\frac{kM\tau\omega}{1+\tau^2\omega^2}\cdot\frac{s}{s^2+\omega^2}+\frac{kM}{1+\tau^2\omega^2}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$y(t)=\left[\boxed{\frac{\tau\omega}{1+\tau^2\omega^2}e^{-\frac{t}{\tau}}}\boxed{-\frac{\tau\omega}{1+\tau^2\omega^2}\cos\omega t+\frac{1}{1+\tau^2\omega^2}\sin\omega t}\right]kM$$

δυναμική συμπεριφορά: ¨Μεταβατική¨ ¨Μόνιμη¨

$$p\cos\omega t + q\sin\omega t = \sqrt{p^2+q^2}\sin(\omega t+\phi) \text{ όπου } \phi = \tan^{-1}\left(\frac{p}{q}\right)$$

$$y(t) = \left(\frac{\tau\omega}{1+\tau^2\omega^2}e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}\sin(\omega t+\phi)\right)kM, \quad \text{όπου } \boxed{\phi = \tan^{-1}(-\tau\omega) = -\tan^{-1}(\tau\omega)}$$

$$\boxed{y(t) \approx \frac{\sin(\omega t+\phi)}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}kM,}$$

¨Μόνιμη¨ απόκριση

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ M\sin\boxed{\omega}t, & t\geq 0 \end{cases}$$

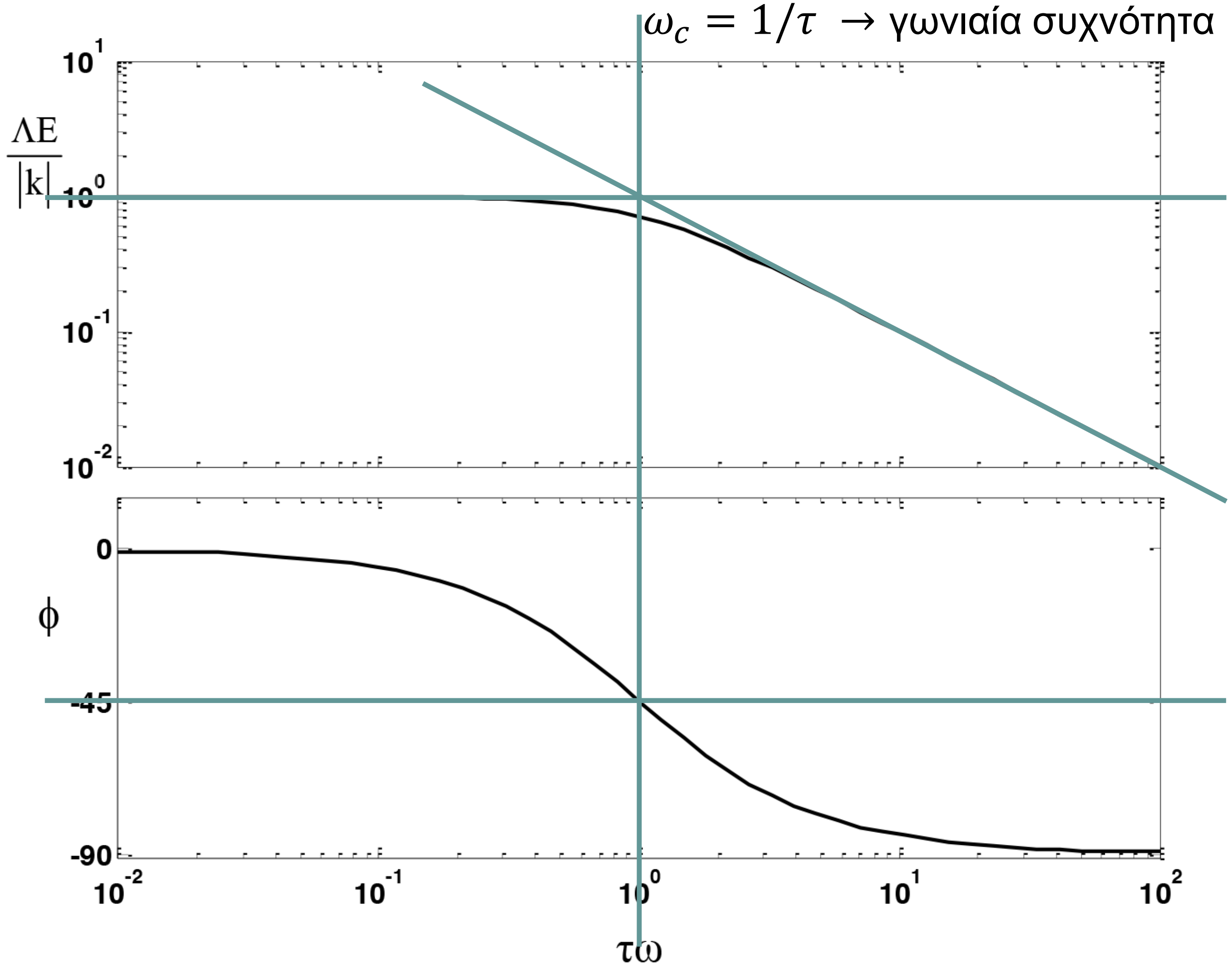
$$\boxed{\text{Λ.Ε.} = \frac{\text{Πλάτος Εξόδου}}{\text{Πλάτος Εισόδου}} = \frac{|k|}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}}$$

Συλλέγω αυτή τη πληροφορία

Διαγράμματα Bode

Συμπτύσσει την πληροφορία ποια θα είναι η μόνιμη απόκριση του συστήματος σε κάθε ημίτονο

$\omega_c = 1/\tau$ → γωνιαία συχνότητα



UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP