Δυναμική & Ρύθμιση Διεργασιών

Διάλεξη 7:

Ανάλυση Δυναμικών Συστημάτων

Περιγραφή στο Χώρο Κατάστασης

Βήματα της Ρύθμισης Διεργασιών, μέρος Α

1. **Καθορίστε τη διεργασία που εξετάζεται**
   a. Διατύπωση υποθέσεων
   b. Ταξινόμηση μεταβλητών (χειριζόμενες, διαταραχές, εσωτερικές, ελεγχόμενες, μετρούμενες)
   c. Διατύπωση μοντέλου διεργασίας
   d. Προσδιορισμός του επιθυμητού σημείου λειτουργίας
   e. Διατύπωση περιγραφής χώρου κατάστασης
   f. Διατύπωση περιγραφής συναρτήσεων μεταφοράς
   g. Αναγνώριση διεργασιών (αν χρειάζεται)

2. **Ανάλυση Διεργασίας**
   a. **Ανάλυση παρατηρησιμότητας**
   b. **Ανάλυση ελεγξιμότητας / ρυθμισιμότητας**
   c. Ανάλυση ευστάθειας
   d. Ανάλυση δυναμικής συμπεριφοράς
      a. Απόκριση σε παλμική αλλαγή
      b. Απόκριση σε ημιτονική αλλαγή

Δυναμικό σύστημα στο χώρο κατάστασης

Δυναμικό Σύστημα:

$$\frac{du}{dt} = g_c(u, u_c)$$

- Δυναμική ενεργοποιητή

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, d)$$

- Δυναμική διεργασίας

$$\frac{dy_m}{dt} = h_m(y_m, x, u, d)$$

- Δυναμική αισθητήρα

$$y_c = h_c(x, u, d)$$

- Αν και το μη γραμμικό ODE μπορεί να χρησιμοποιηθεί απευθείας, αυτό είναι προχωρημένο θέμα
- Για να αναλύσουμε και να ρυθμίσουμε τη διεργασία θα γραμμικοποιήσουμε το δυναμικό σύστημα
- Το σημείο γραμμικοποίησης πρέπει να επιλεγεί προσεκτικά
- Σ’αυτό το εισαγωγικό μάθημα θα επικεντρωθούμε στις εξείς απλοποιήσεις
  - Μία χειριζόμενη μεταβλητή
  - Μία διαταραχή
  - Μία μετρούμενη μεταβλητή
  - Μία ρυθμιζόμενη μεταβλητή. **Αρχικά θα υποθέτουμε ρυθμιζόμενη ≡ Μετρούμενη**

University of Patras
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Παραγωγή περιγραφής χώρου κατάστασης

Χρησιμοποιούμε ανάπτυγμα Taylor για να παράγουμε το μοντέλο.

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,d)$$
$$y_c = h_c(x,u,d)$$

- Δυναμική ενεργοποιητή
- Δυναμική διεργασίας
- Δυναμική αισθητήρα

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + Wd$$
$$y = Cx + Du + Ed$$

- Από βελτιστοποίηση έχουμε το επιθυμητό σημείο λειτουργίας $y_c = y_s$
- Με βάση το σημείο αυτό βρίσκουμε το σημείο αναφοράς των μεταβλητών κατάστασης
- Συνήθως ένα σημείο ισορροπίας των μεταβλητών κατάστασης ($dx/dt = 0$)
- Χρησιμοποιούμε το ανάπτυγμα Taylor του μη γραμμικό συστήματος στο σημείο αναφοράς
- Σημείωση: Για τώρα μας ενδιαφέρει **μόνο** η διεργασία και όχι η δυναμική **διεργασία+ΣΑΕ**.

Στην ρύθμιση θα μας ενδιαφέρει δυναμική **διεργασία+ΣΑΕ**

Βήμα 1ο (πιθανό)

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad y_c = y_s \quad \Rightarrow \quad 0 = f(x,u,d) \quad y_s = h_c(x,u,d) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= x - x_s \\ u &= u - u_s \\ d &= d - d_s \\ y &= y - y_s \end{aligned}$$

University of Patras
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Παραγωγή περιγραφής χώρου κατάστασης

Χρησιμοποιούμε ανάπτυγμα Taylor για να παράγουμε το μοντέλο.

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,d)$$
$$y_c = h_c(x,u,d)$$

- Δυναμική ενεργοποιητή
- Δυναμική διεργασίας
- Δυναμική αισθητήρα

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + Wd$$
$$y = Cx + Du + Ed$$

- Από βελτιστοποίηση έχουμε το επιθυμητό σημείο λειτουργίας $y_c = y_s$
- Με βάση το σημείο αυτό βρίσκουμε το σημείο αναφοράς των μεταβλητών κατάστασης
- Συνήθως ένα σημείο ισορροπίας των μεταβλητών κατάστασης (*dx/dt = 0*)
- Χρησιμοποιούμε το ανάπτυγμα Taylor του μη γραμμικό συστήματος στο σημείο αναφοράς
- Σημείωση: Για τώρα μας ενδιαφέρει **μόνο** η διεργασία και όχι η δυναμική **διεργασία+ΣΑΕ**.

  Στην ρύθμιση θα μας ενδιαφέρει δυναμική **διεργασία+ΣΑΕ**

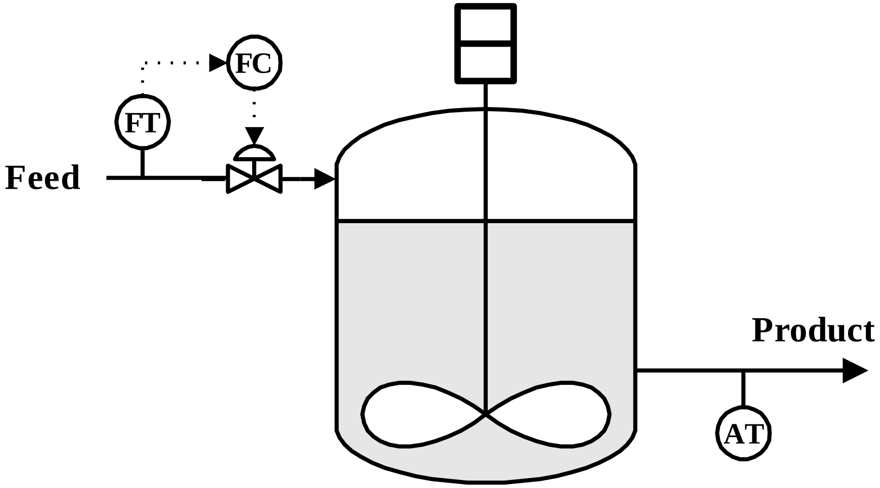
Βήμα 2ο

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,d)$$
$$y_c = h_c(x,u,d)$$

$$x = x - x_s$$
$$u = u - u_s$$
$$\Longrightarrow$$
$$d = d - d_s$$
$$y = y - y_s$$

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + Wd$$
$$y = Cx + Du + Ed$$

Παράδειγμα: ισοθερμοκρασιακός ΑΣΑ



$$A \xrightarrow{r_1} B \xrightarrow{r_2} C$$

$$r_1 = k_1 C_A^2 \qquad r_2 = k_2 C_B$$

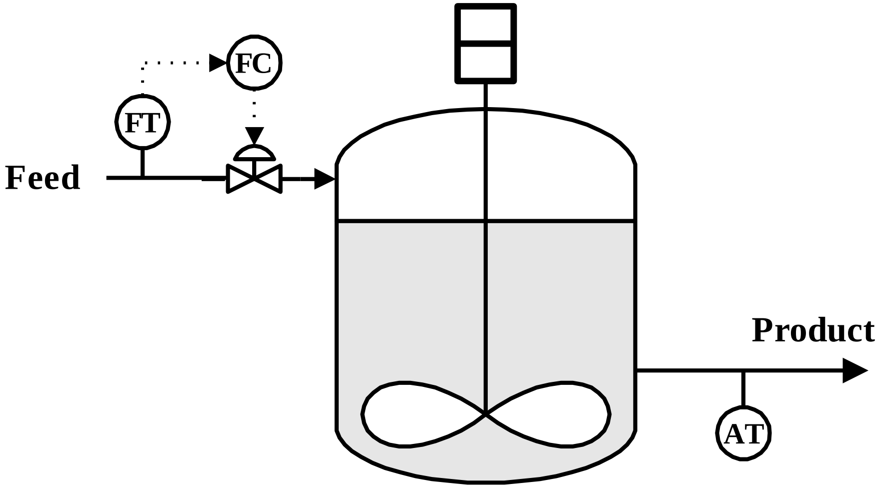
- Θέλουμε να παράγουμε οικονομικά συστατικό Β
- Έχουμε δοθεί την T από βελτιστοποίηση
- Έχουμε δοθεί την βέλτιστη C_B
- Γνωρίζουμε τον μηχανισμό των αντιδράσεων
- Η συγκέντρωση στο ρεύμα εισόδου ταλαντώνεται
- Γνωρίζουμε τον εξοπλισμό

$$V = 100 \text{ L}, k_1 = 0.2 \text{ [min/moL min]}, k_2 = 3\text{[1/ min]}$$

- Μετά την βελτιστοποίηση μας δίδεται

$$C_{B,s} = 0.11\text{[moL/L]}, C_{A0,s} = 2\text{[moL/L]}$$

Εύρεση σημείου αναφοράς



$$A \xrightarrow{r_1} B \xrightarrow{r_2} C$$

$$r_1 = k_1 C_A^2 \quad r_2 = k_2 C_B$$

$$C_{B,s} = 0.11[\mathrm{moL/L}], C_{A0,s} = 2[\mathrm{moL/L}]$$

- Δυναμικό μοντέλο διεργασίας (ισοζύγια μάζας)

$$V_r \frac{dC_A}{dt} = \frac{F}{\rho}[C_{A0} - C_A] - V_r k_1 C_A^2$$

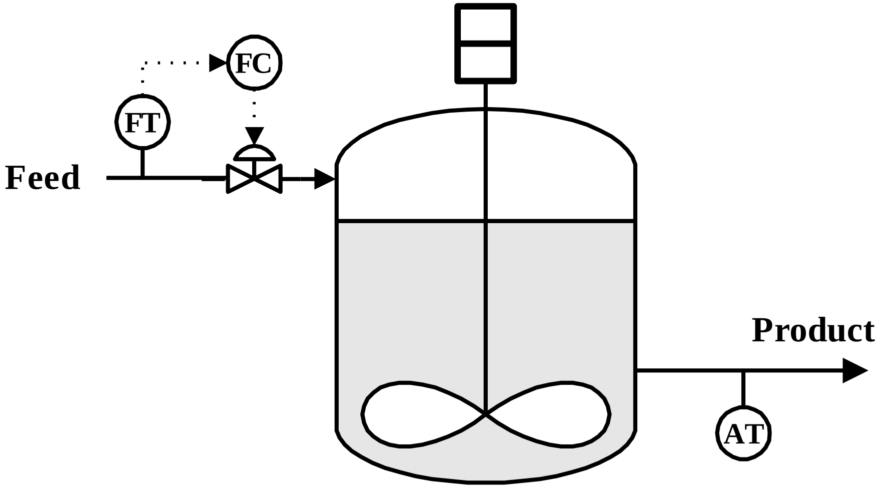
$$V_r \frac{dC_B}{dt} = -\frac{FC_B}{\rho} + V_r k_1 C_A^2 - V_r k_2 C_B$$

- Μοντέλο διεργασίας σε σταθερή κατάσταση

$$0 = \frac{F}{\rho V_r}[C_{A0} - C_A] - k_1 C_A^2$$

$$0 = -\frac{F}{\rho V_r} C_B + k_1 C_A^2 - k_2 C_B$$

Εύρεση σημείου αναφοράς



- Δυναμικό μοντέλο διεργασίας (ισοζύγια μάζας)

$$V_r \frac{dC_A}{dt} = \frac{F}{\rho}\left[C_{A0} - C_A\right] - V_r k_1 C_A^2$$

$$V_r \frac{dC_B}{dt} = -\frac{FC_B}{\rho} + V_r k_1 C_A^2 - V_r k_2 C_B$$

- Εύρεση των σημείων ισορροπίας

$$A \xrightarrow{r_1} B \xrightarrow{r_2} C$$

$$r_1 = k_1 C_A^2 \qquad r_2 = k_2 C_B$$

$$C_{B,s} = 0.11[\mathrm{moL/L}], C_{A0,s} = 2[\mathrm{moL/L}]$$

$$\boxed{\begin{aligned} F/\rho V &= 0.717[1/\min] \\ C_{B,s} &= 0.1100[\mathrm{moL/L}] \\ C_{A,s} &= 1.4298[\mathrm{moL/L}] \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} F/\rho V &= 2.670[1/\min] \\ C_{B,s} &= 0.1100[\mathrm{moL/L}] \\ C_{A,s} &= 1.7663[\mathrm{moL/L}] \end{aligned}$$

Ανάπτυγμα Taylor

$$f(u,x,d)=\begin{bmatrix} f_1(x,u,d)\\ f_2(x,u,d)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -k_1x_1^2+\dfrac{(d-x_1)u}{V_r\rho}\\ k_1x_1^2-k_2x_2-\dfrac{x_2u}{V_r\rho}\end{bmatrix}$$

$$x=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C_A\\ C_B\end{bmatrix}, u=F, d=C_{A0}$$

$$(x_0,u_0,d_0)$$

$$f(x,u,d)\cong f(x_0,u_0,d_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,u_0,d_0)}(x-x_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_0,u_0,d_0)}(u-u_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial d}\right|_{(x_0,u_0,d_0)}(d-d_0)$$

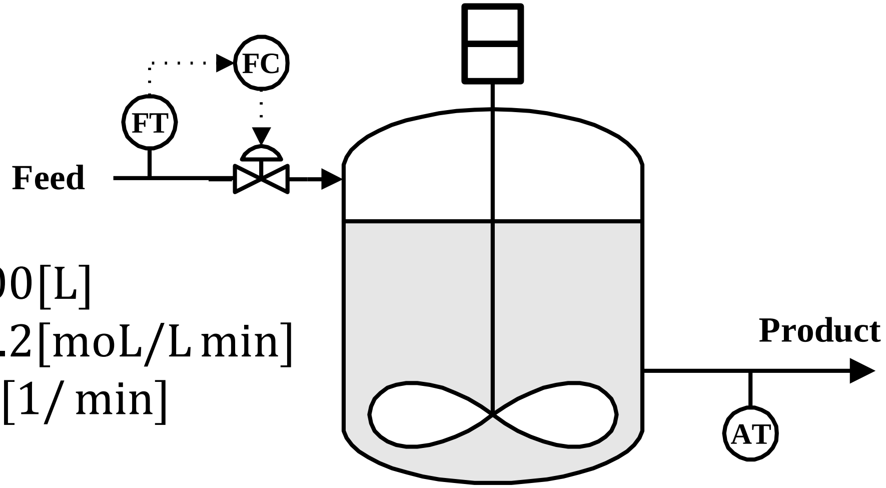
$$f(x,u,d)\cong\begin{bmatrix} -k_1x_{1,0}^2+\dfrac{(d_0-x_{1,0})u_0}{V_r\rho}\\ k_1x_{1,0}^2-k_2x_{2,0}-\dfrac{x_{2,0}u_0}{V_r\rho}\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix} -2k_1x_{1,0}-\dfrac{u_0}{V_r\rho} & 0\\ 2k_1x_{1,0} & -k_2-\dfrac{u_0}{V_r\rho}\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} x_1-x_{1,0}\\ x_2-x_{2,0}\end{bmatrix}$$

$$+\underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{d_0-x_{1,0}}{V_r\rho}\\ -\dfrac{x_{2,0}}{V_r\rho}\end{bmatrix}}_{B}(u-u_0)+\underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{u_0}{V_r\rho}\\ 0\end{bmatrix}}_{W}(d-d_0)$$

UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Γραμμικοποίηση δυναμικού συστήματος

$$F/\rho = 71.7[\text{L/min}]$$
$$C_{B,s} = 0.1100[\text{moL/L}]$$
$$C_{A0,s} = 2.00[\text{moL/L}]$$
$$C_{A,s} = 1.4298[\text{moL/L}]$$



$$V = 100[\text{L}]$$
$$k_1 = 0.2[\text{moL/L min}]$$
$$k_2 = 3[1/\text{min}]$$

$$V_r \frac{dC_A}{dt} = \frac{F}{\rho}[C_{A0} - C_A] - V_r k_1 C_A^2$$

$$V_r \frac{dC_B}{dt} = -\frac{F}{\rho} C_B + V_r k_1 C_A^2 - V_r k_2 C_B$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} \cong \begin{bmatrix} -1.2889 & 0 \\ 0.5719 & -2.717 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_A - 1.4298 \\ C_B - 0.1100 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0057 \\ -0.0011 \end{bmatrix}(F - 71.7) + \begin{bmatrix} 0.717 \\ 0 \end{bmatrix}(C_{A0} - 2)}$$

Περιγραφή στο χώρο κατάστασης

$F/\rho = 71.7[L/\min]$

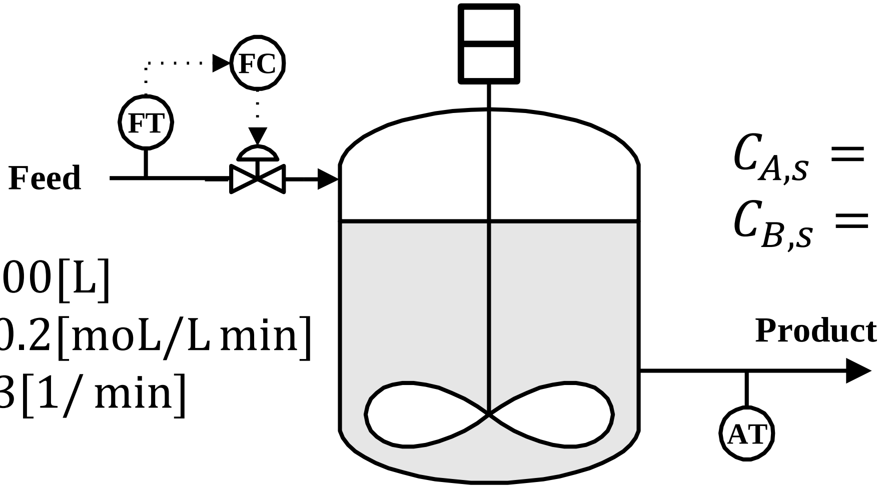
$\boxed{u = (F/\rho - 71.7)}$

$C_{A0,s} = 2.00[moL/L]$

$\boxed{d = (C_{A0} - 2)}$

$C_{A,s} = 1.4298[moL/L]$
$C_{B,s} = 0.1100[moL/L]$

$\boxed{x = \begin{bmatrix} C_A - 1.4298 \\ C_B - 0.1100 \end{bmatrix}}$



$V = 100[\mathrm{L}]$
$k_1 = 0.2[\mathrm{moL/L\,min}]$
$k_2 = 3[1/\min]$

$$\frac{dx}{dt} \cong \begin{bmatrix} -1.2889 & 0 \\ 0.5719 & -2.717 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.0057 \\ -0.0011 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0.717 \\ 0 \end{bmatrix} d$$

$$y = [0 \quad 1] x$$

UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Περιγραφή στο χώρο κατάστασης

- Η περιγραφή στο Χώρο Κατάστασης (ΠΧΚ) επιτρέπει

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + Wd, x(0) = x_0$$
$$y = Cx + Du + Ed$$

- να γράψουμε συμπτυγμένα την λύση των μεταβλητών κατάστασης για κάθε γνωστή είσοδο του συστήματος

$$x(t) = \mathrm{e}^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Wd(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

- να βρούμε την απόκριση των εξόδων του συστήματος μέσω των καταστάσεων

$$y(t) = C\mathrm{e}^{At}x(0) + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,\mathrm{d}\tau + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Wd(\tau)\,\mathrm{d}\tau + Du(t) + Ed(t)$$

  - Απαιτεί γνώση γραμμικής άλγεβρας!

Περιγραφή στο χώρο κατάστασης

- Η περιγραφή στο Χώρο Κατάστασης (ΠΧΚ)

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + Wd, x(0) = x_0$$
$$y = Cx + Du + Ed$$

  - Μας διευκολύνει για να γράψουμε συμπτυγμένα την λύση των μεταβλητών κατάστασης για κάθε γνωστή είσοδο του συστήματος

$$x(t) = \mathrm{e}^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Wd(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Μερική λύση Συμπληρωματική λύση Συμπληρωματική λύση

  - **Ορισμός:** Μεταβατικός πίνακας, Φ, είναι η γενική λύση μιας ΠΧΚ για κάθε αρχική τιμή. Είναι γενικά άγνωστος! Για τα γραμμικά συστήματα είναι γνωστός

$$\frac{d\Phi}{dt} = \Phi, \Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I} \qquad \Phi(t; t_0) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)}$$

UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Περιγραφή στο χώρο κατάστασης

- Η περιγραφή στο Χώρο Κατάστασης (ΠΧΚ)

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + Wd, x(0) = x_0$$
$$y = Cx + Du + Ed$$

  - Μας διευκολύνει για να γράψουμε συμπτυγμένα την λύση των μεταβλητών κατάστασης για κάθε γνωστή είσοδο του συστήματος

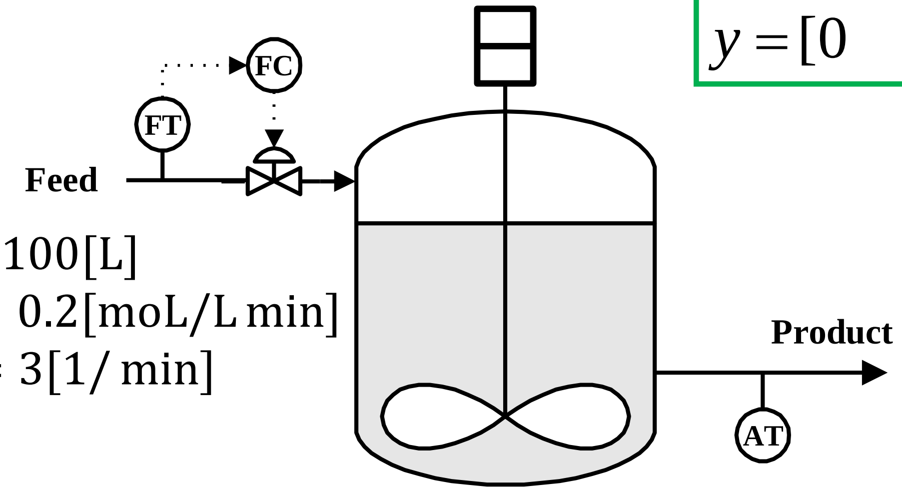
$$x(t) = \Phi(t,0)x(0) + \int_0^t \Phi(t,0)Bu(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t \Phi(t,0)Wd(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

    - Η συμπληρωματική λύση είναι μια συνέλιξη!

$$x(t) = \Phi(t,0)x(0) + \Phi(t,0) * Bu(t) + \Phi(t,0) * Wd(t)$$

Παράδειγμα: ισοθερμοκρασιακός ΑΣΑ

$F/\rho = 71.7[\mathrm{L/\min}]$
$C_{A0,s} = 2.00[\mathrm{moL/L}]$
$C_{A,s} = 1.4298[\mathrm{moL/L}]$
$C_{B,s} = 0.1100[\mathrm{moL/L}]$



$V = 100[\mathrm{L}]$
$k_1 = 0.2[\mathrm{moL/L\,min}]$
$k_2 = 3[1/\min]$

- περιγραφή στο Χώρο Κατάστασης (ΠΧΚ)

$$\frac{dx}{dt} \cong \begin{bmatrix} -1.2889 & 0 \\ 0.5719 & -2.717 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.0057 \\ -0.0011 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0.717 \\ 0 \end{bmatrix} d$$
$$y = [0 \quad 1] x$$

- Ποια είναι η εξέλιξη της κατάστασης για
  - $C_{A0} = 2, F = 71.7, C_A(0) = 1, C_B(0) = 0.05$

- Βρίσκω τα $x(0), u(t), d(t)$

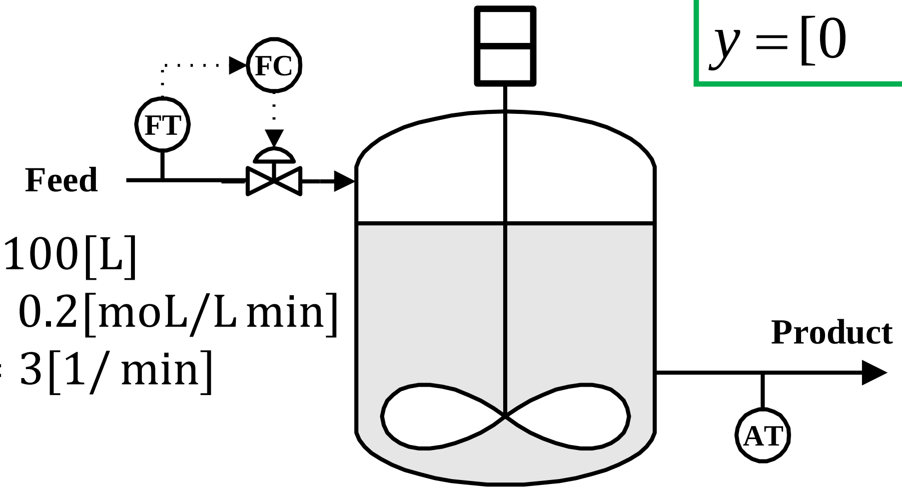
$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 - 1.4289 \\ 0.05 - 0.11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4289 \\ -0.06 \end{bmatrix},$$
$$u(t) = 0, d(t) = 0$$

- Βρίσκω το Φ

$$\Phi = \mathrm{e}^{\mathrm{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-1.2889t} & 0 \\ 0.4e^{-1.2889t} - 0.4e^{-2.717t} & e^{-2.717t} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα: ισοθερμοκρασιακός ΑΣΑ

$F/\rho = 71.7[\mathrm{L/\,min}]$
$C_{A0,s} = 2.00[\mathrm{moL/L}]$
$C_{A,s} = 1.4298[\mathrm{moL/L}]$
$C_{B,s} = 0.1100[\mathrm{moL/L}]$



$V = 100[\mathrm{L}]$
$k_1 = 0.2[\mathrm{moL/L\,min}]$
$k_2 = 3[1/\,\mathrm{min}]$

- περιγραφή στο Χώρο Κατάστασης (ΠΧΚ)

$$\frac{dx}{dt} \cong \begin{bmatrix} -1.2889 & 0 \\ 0.5719 & -2.717 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.0057 \\ -0.0011 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0.717 \\ 0 \end{bmatrix} d$$
$$y = [0 \quad 1]x$$

- Ποια είναι η εξέλιξη της κατάστασης για
  - $C_{A0} = 2, F = 71.7, C_A(0) = 1, C_B(0) = 0.05$

- Βρίσκω το Φ

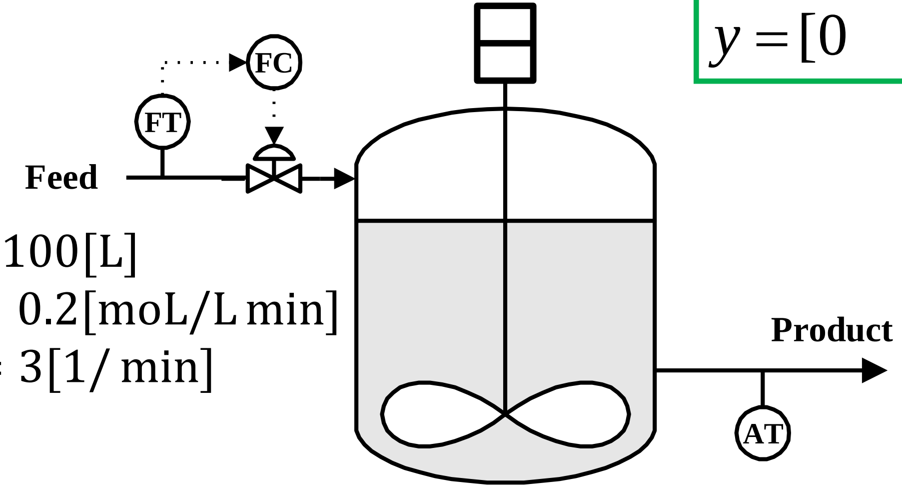
$$\Phi = \mathrm{e}^{\mathrm{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-1.2889t} & 0 \\ 0.4e^{-1.2889t} - 0.4e^{-2.717t} & e^{-2.717t} \end{bmatrix}$$

- Η κατάσταση είναι

$$x(t) = e^{At}x(0) \quad x(t) = \begin{bmatrix} e^{-1.2889t} & 0 \\ 0.4e^{-1.2889t} - 0.4e^{-2.717t} & e^{-2.717t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.4289 \\ -0.06 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα: ισοθερμοκρασιακός ΑΣΑ

$F/\rho = 71.7[\mathrm{L/\min}]$
$C_{A0,s} = 2.00[\mathrm{moL/L}]$
$C_{A,s} = 1.4298[\mathrm{moL/L}]$
$C_{B,s} = 0.1100[\mathrm{moL/L}]$



$V = 100[\mathrm{L}]$
$k_1 = 0.2[\mathrm{moL/L\,min}]$
$k_2 = 3[1/\min]$

- περιγραφή στο Χώρο Κατάστασης (ΠΧΚ)

$$\frac{dx}{dt} \cong \begin{bmatrix} -1.2889 & 0 \\ 0.5719 & -2.717 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.0057 \\ -0.0011 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0.717 \\ 0 \end{bmatrix} d$$
$$y = [0 \quad 1]x$$

- Ποια είναι η εξέλιξη της κατάστασης για
  - $C_{A0} = 2, F = 71.7, C_A(0) = 1, C_B(0) = 0.05$

- Βρίσκω το Φ

$$\Phi = e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-1.2889t} & 0 \\ 0.4e^{-1.2889t} - 0.4e^{-2.717t} & e^{-2.717t} \end{bmatrix}$$

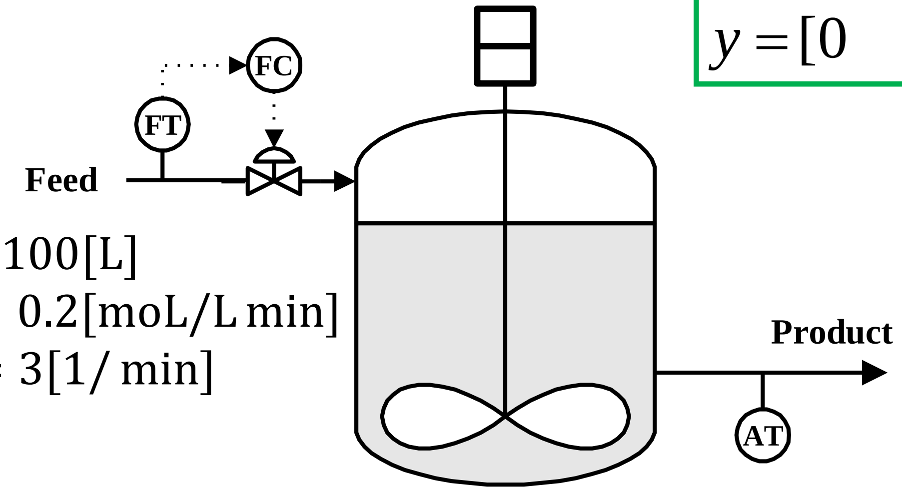
- Η κατάσταση είναι

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} -0.4289e^{-1.2889t} \\ -0.1716e^{-1.2889t} + 0.1116e^{-2.717t} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα: ισοθερμοκρασιακός ΑΣΑ

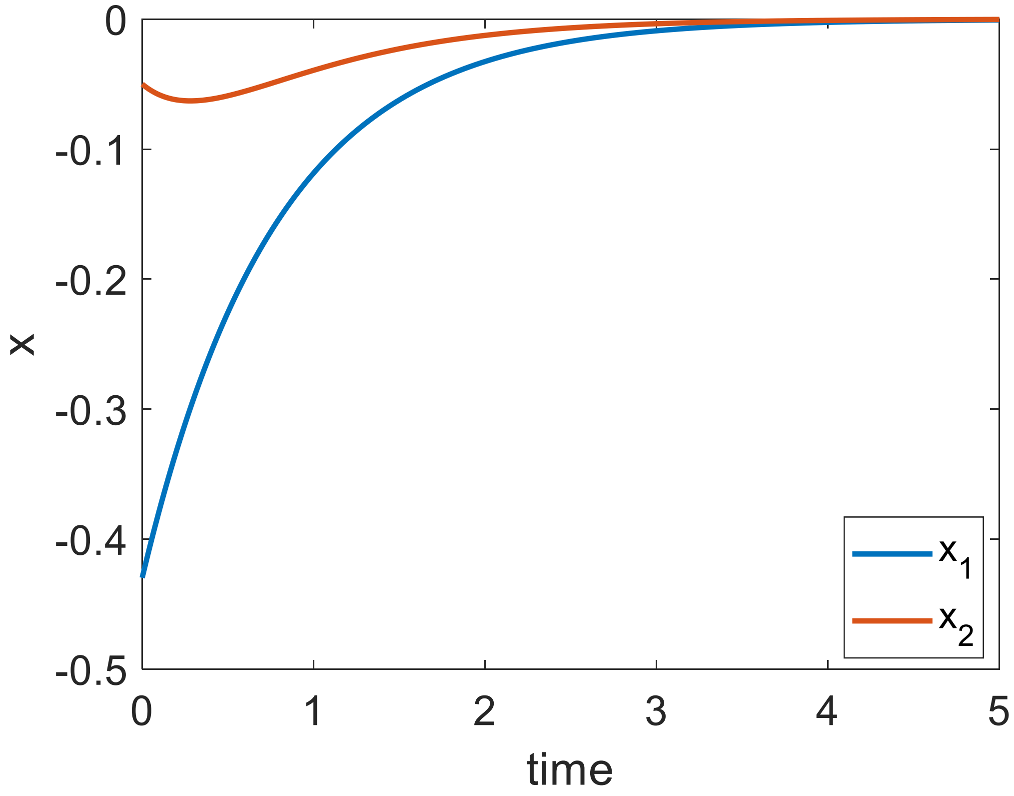
$$F/\rho = 71.7[\mathrm{L/\min}]$$
$$C_{A0,s} = 2.00[\mathrm{moL/L}]$$
$$C_{A,s} = 1.4298[\mathrm{moL/L}]$$
$$C_{B,s} = 0.1100[\mathrm{moL/L}]$$



$$V = 100[\mathrm{L}]$$
$$k_1 = 0.2[\mathrm{moL/L\,min}]$$
$$k_2 = 3[\mathrm{1/\min}]$$

- περιγραφή στο Χώρο Κατάστασης (ΠΧΚ)

$$\frac{dx}{dt} \cong \begin{bmatrix} -1.2889 & 0 \\ 0.5719 & -2.717 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.0057 \\ -0.0011 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0.717 \\ 0 \end{bmatrix} d$$
$$y = [0 \quad 1] x$$



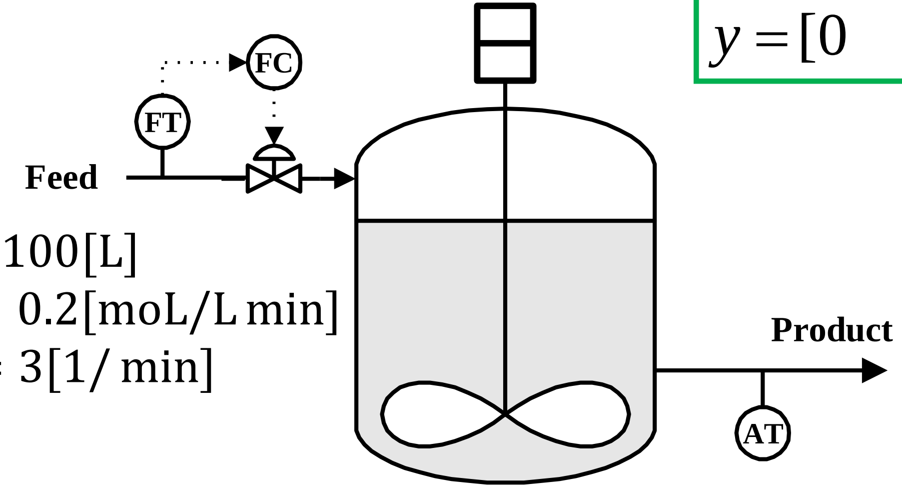
- Βρίσκω το Φ
- Η κατάσταση είναι

$$x(t) = e^{At} x(0)$$

UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Παράδειγμα: ισοθερμοκρασιακός ΑΣΑ

$F/\rho = 71.7[\mathrm{L/\min}]$
$C_{A0,s} = 2.00[\mathrm{moL/L}]$
$C_{A,s} = 1.4298[\mathrm{moL/L}]$
$C_{B,s} = 0.1100[\mathrm{moL/L}]$



$V = 100[\mathrm{L}]$
$k_1 = 0.2[\mathrm{moL/L\,min}]$
$k_2 = 3[1/\min]$

- περιγραφή στο Χώρο Κατάστασης (ΠΧΚ)

$$\frac{dx}{dt} \cong \begin{bmatrix} -1.2889 & 0 \\ 0.5719 & -2.717 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.0057 \\ -0.0011 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0.717 \\ 0 \end{bmatrix} d$$

$$y = [0 \quad 1] x$$

- Ποια είναι η εξέλιξη της κατάστασης για
  - $C_{A0} = 2, F = 71.7, C_A(0) = 1, C_B(0) = 0.05$

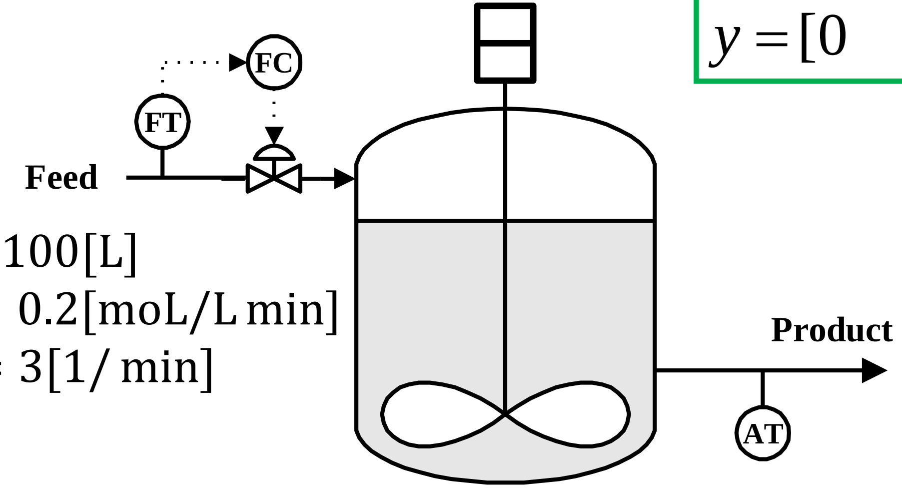
- Λύση: $\begin{bmatrix} C_A \\ C_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4298 \\ 0.11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-1.2889t} & 0 \\ 0.4e^{-1.2889t} - 0.4e^{-2.717t} & e^{-2.717t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.4289 \\ -0.06 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} C_A \\ C_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4298 - 0.4289e^{-1.2889t} \\ 0.11 - 0.1716e^{-1.2889t} + 0.1116e^{-2.717t} \end{bmatrix}$$

University of Patras
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Παράδειγμα: ισοθερμοκρασιακός ΑΣΑ

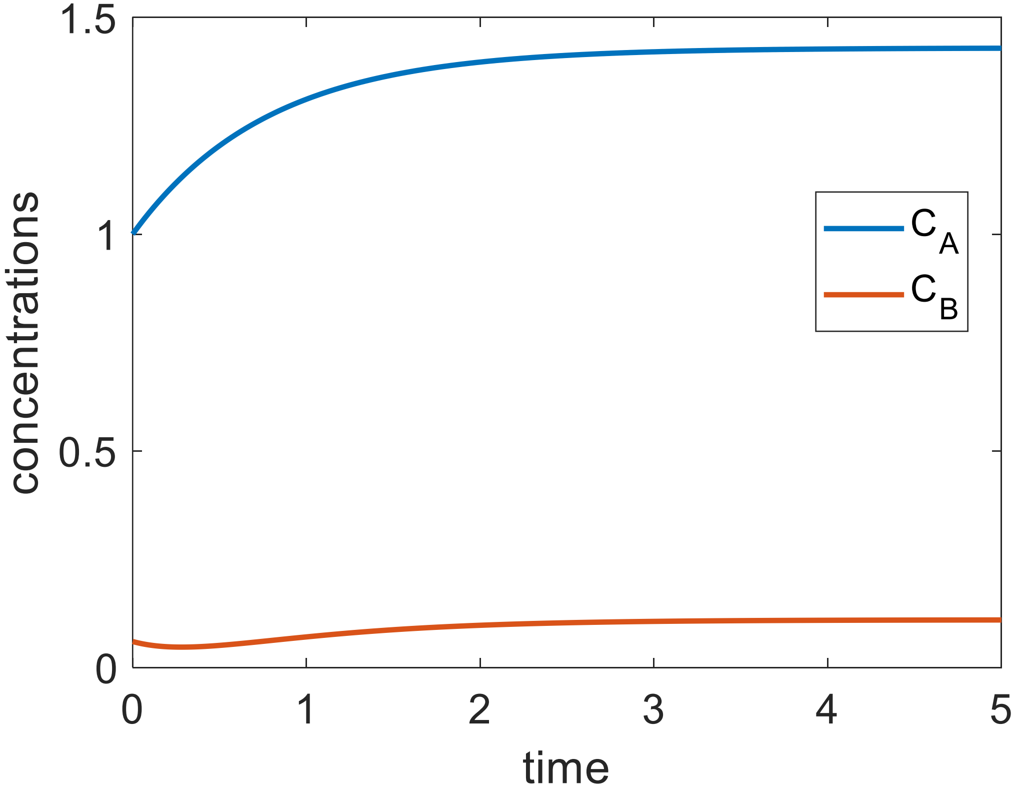
$F/\rho = 71.7[\mathrm{L/\min}]$
$C_{A0,s} = 2.00[\mathrm{moL/L}]$
$C_{A,s} = 1.4298[\mathrm{moL/L}]$
$C_{B,s} = 0.1100[\mathrm{moL/L}]$



$V = 100[\mathrm{L}]$
$k_1 = 0.2[\mathrm{moL/L\,min}]$
$k_2 = 3[1/\min]$

- περιγραφή στο Χώρο Κατάστασης (ΠΧΚ)

$$\frac{dx}{dt} \cong \begin{bmatrix} -1.2889 & 0 \\ 0.5719 & -2.717 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.0057 \\ -0.0011 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0.717 \\ 0 \end{bmatrix} d$$
$$y = [0 \quad 1] x$$



- Λύση:

Περιγραφή στο χώρο κατάστασης

- Η περιγραφή στο Χώρο Κατάστασης (ΠΧΚ) επιτρέπει να εξερευνήσουμε

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + Wd, x(0) = x_0$$
$$y = Cx + Du + Ed$$

  - αν το σημείο λειτουργίας της διεργασίας είναι ευσταθές
  - αν οι χειριζόμενες μεταβλητές είναι ικανές να ελέγξουν τη διεργασία
  - αν οι μετρούμενες μεταβλητές επαρκούν να παρατηρούμε την διεργασία
  - την επίδραση των διαταραχών στην διεργασία
  - την επίδραση των μεταβλητών κατάστασης στις ρυθμιζόμενες μεταβλητές
    - την επίδραση των εισόδων στις ρυθμιζόμενες μεταβλητές
- Αυτές οι πληροφορίες μπορούν να βρεθούν **αλγεβρικά**!!
  - Βασίζονται στις ιδιότητες των πινάκων A, B, W, C, D, E και την λύση γραμμικών συστημάτων

Περιγραφή στο χώρο κατάστασης

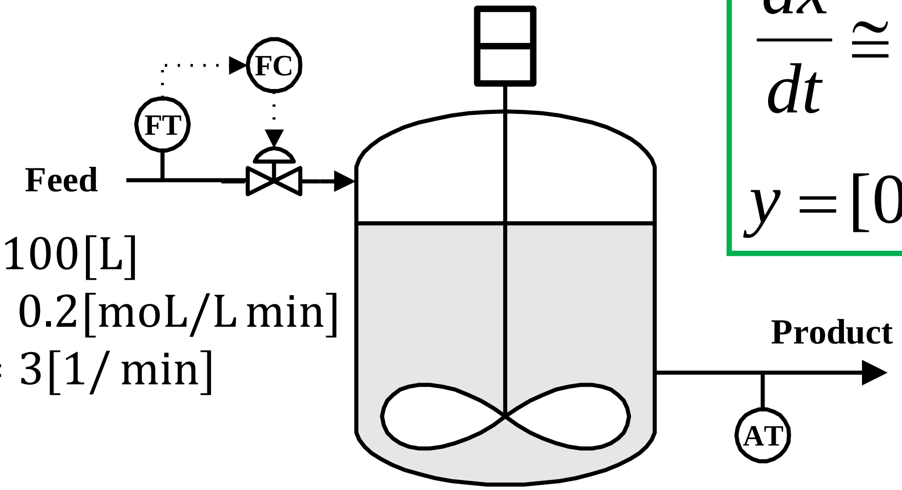
- Η περιγραφή στο Χώρο Κατάστασης (ΠΧΚ) επιτρέπει να εξερευνήσουμε

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + Wd, x(0) = x_0$$
$$y = Cx + Du + Ed$$

  - αν το σημείο λειτουργίας της διεργασίας είναι ευσταθές
    - Ανάλυση ευστάθειας $x \to x_0$
  - αν οι χειριζόμενες μεταβλητές είναι ικανές να ελέγξουν τη διεργασία
    - Ανάλυση ελεγξιμότητας $u \to x$
    - Ανάλυση ρυθμισιμότητας $u \to y$
  - αν οι μετρούμενες μεταβλητές επαρκούν να παρατηρούμε την διεργασία
    - Ανάλυση παρατηρισιμότητας $x \to y$
  - την επίδραση των διαταραχών στην διεργασία
    - Ανάλυση δυναμικής συμπεριφοράς $d \to x$

Παράδειγμα: ισοθερμοκρασιακός ΑΣΑ

$F/\rho = 71.7[\mathrm{L/min}]$
$C_{A0,s} = 2.00[\mathrm{moL/L}]$
$C_{A,s} = 1.4298[\mathrm{moL/L}]$
$C_{B,s} = 0.1100[\mathrm{moL/L}]$



$V = 100[\mathrm{L}]$
$k_1 = 0.2[\mathrm{moL/L\,min}]$
$k_2 = 3[1/\mathrm{min}]$

- περιγραφή στο Χώρο Κατάστασης (ΠΧΚ)

$$\frac{dx}{dt} \cong \begin{bmatrix} -1.2889 & 0 \\ 0.5719 & -2.717 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.0057 \\ -0.0011 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0.717 \\ 0 \end{bmatrix} d$$
$$y = [0 \quad 1] x$$

- Είναι το σύστημα ελέγξιμο;
- Είναι το σύστημα παρατηρήσιμο;
- Είναι το σύστημα ρυθμίσιμο;

Περιγραφή στο χώρο κατάστασης

- Η περιγραφή στο Χώρο Κατάστασης (ΠΧΚ) επιτρέπει

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + Wd, x(0) = x_0$$
$$y = Cx + Du + Ed$$

  - Είναι οι χειριζόμενες μεταβλητές ικανές να ελέγξουν τη διεργασία;

Τι σημαίνει αυτό;

Ορισμός: Για κάθε αρχική τιμή της μεταβλητής κατάστασης $x(0)$ μπορεί να βρεθεί ένα προφίλ στο χρόνο της χειριζόμενης μεταβλητής $u(t)$ έτσι ώστε σε **πεπερασμένο** χρόνο t_c να λάβει η μεταβλητή κατάστασης την επιθυμητή τιμή $x(t_c)=x_s$

$$x(t_c) = \mathrm{e}^{At_c}x(0) + \int_0^{t_c} e^{A(t_c-\tau)}Bu(\tau)\,\mathrm{d}\tau = x_s$$

Το σύστημα καλείται ελέγξιμο σύστημα.

Περιγραφή στο χώρο κατάστασης

- Η περιγραφή στο Χώρο Κατάστασης (ΠΧΚ) επιτρέπει

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + Wd, x(0) = x_0$$
$$y = Cx + Du + Ed$$

  - να βρούμε αν οι χειριζόμενες μεταβλητές είναι ικανές να ελέγξουν τη διεργασία

Πως;

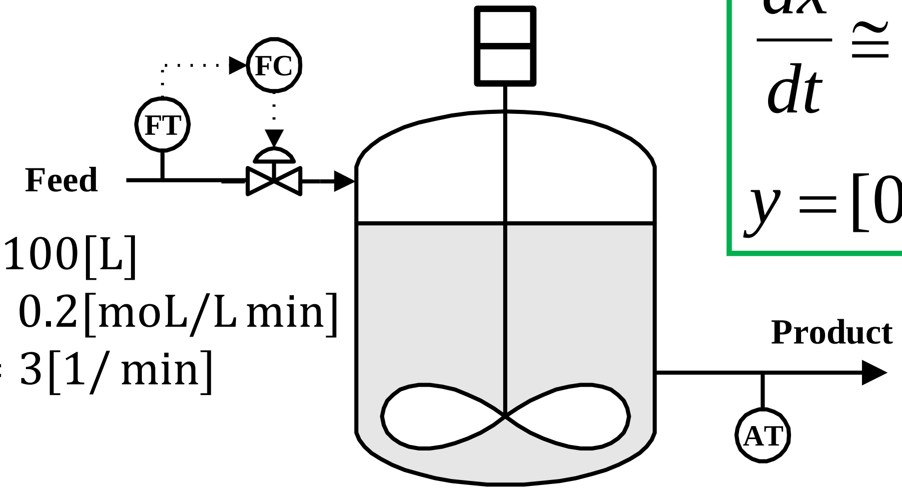
- Αλγεβρικά!
  - Ορίζω τον πίνακα με διάσταση $(n, n \times m)$:

$$Q_c = [B\ AB\ \ \ldots A^{n-1}B]$$

  - Βρίσκω και το βαθμό (rank) του πίνακα:
  - Αν είναι =*n* τότε μπορώ: Το σύστημα είναι ελέγξιμο.
  - Αν είναι <*n τότε δεν* μπορώ: Το σύστημα είναι μη ελέγξιμο

Παράδειγμα: ισοθερμοκρασιακός ΑΣΑ

$F/\rho = 71.7[\text{L/min}]$
$C_{A0,s} = 2.00[\text{moL/L}]$
$C_{A,s} = 1.4298[\text{moL/L}]$
$C_{B,s} = 0.1100[\text{moL/L}]$



$V = 100[\text{L}]$
$k_1 = 0.2[\text{moL/L min}]$
$k_2 = 3[1/\text{min}]$

- περιγραφή στο Χώρο Κατάστασης (ΠΧΚ)

$$\frac{dx}{dt} \cong \begin{bmatrix} -1.2889 & 0 \\ 0.5719 & -2.717 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.0057 \\ -0.0011 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0.717 \\ 0 \end{bmatrix} d$$
$$y = [0 \quad 1] x$$

- Είναι το σύστημα ελέγξιμο;

- Ορίζω: $Q_c = [B\ AB] = \begin{bmatrix} 0.0057 & -0.0073 \\ -0.0011 & 0.0062 \end{bmatrix}$
- Υπολογίζω: rank(Q_c)=2
- **Πόρισμα**: Το σύστημα είναι ελέγξιμο.

Περιγραφή στο χώρο κατάστασης

- Η περιγραφή στο Χώρο Κατάστασης (ΠΧΚ) επιτρέπει

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + Wd, x(0) = x_0$$
$$y = Cx + Du + Ed$$

  - Επαρκούν οι μετρούμενες μεταβλητές να παρατηρούμε την διεργασία;

Τι σημαίνει αυτό;

Ορισμός: Για κάθε **άγνωστη** αρχική τιμή της μεταβλητής κατάστασης $x(0)$ επαρκεί να μετρηθεί για **πεπερασμένο** χρόνο t_c το προφίλ της μετρούμενης μεταβλητής $y(t)$ έτσι ώστε στο τέλος της περιόδου να μπορεί να βρεθεί το $x(0)$.

Το σύστημα καλείται παρατηρήσιμο σύστημα.

Περιγραφή στο χώρο κατάστασης

- Η περιγραφή στο Χώρο Κατάστασης (ΠΧΚ) επιτρέπει

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + Wd, x(0) = x_0$$
$$y = Cx + Du + Ed$$

  - Αν οι μετρούμενες μεταβλητές επαρκούν να παρατηρούμε την διεργασία

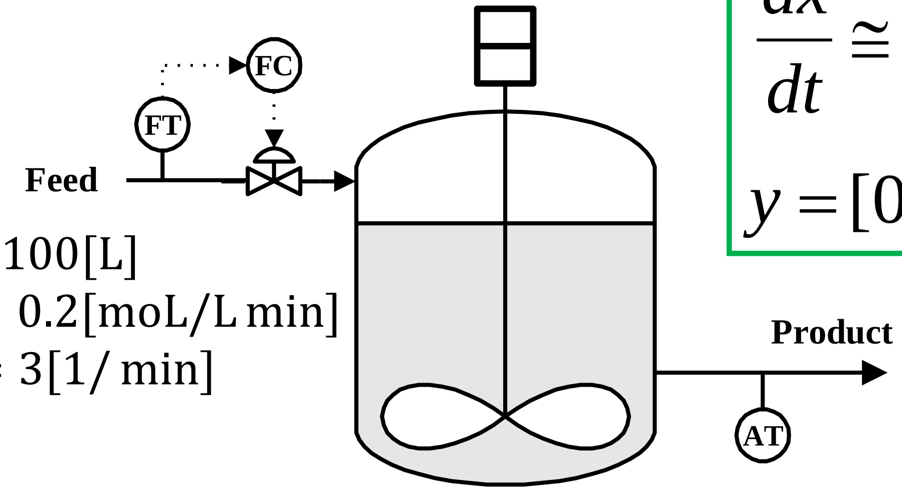
Πως;

  - Αλγεβρικά!
    - Ορίζω τον πίνακα με διάσταση $(l \times n, n)$: $Q_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$
    - Βρίσκω το βαθμό του πίνακα:
    - Αν είναι =*n* τότε μπορώ: Το σύστημα είναι παρατηρήσιμο.
    - Αν είναι <*n τότε δεν* μπορώ: Το σύστημα είναι μη παρατηρήσιμο.

UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Παράδειγμα: ισοθερμοκρασιακός ΑΣΑ

$F/\rho = 71.7[\mathrm{L/min}]$
$C_{A0,s} = 2.00[\mathrm{moL/L}]$
$C_{A,s} = 1.4298[\mathrm{moL/L}]$
$C_{B,s} = 0.1100[\mathrm{moL/L}]$



$V = 100[\mathrm{L}]$
$k_1 = 0.2[\mathrm{moL/L\,min}]$
$k_2 = 3[1/\mathrm{min}]$

- περιγραφή στο Χώρο Κατάστασης (ΠΧΚ)

$$\frac{dx}{dt} \cong \begin{bmatrix} -1.2889 & 0 \\ 0.5719 & -2.717 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.0057 \\ -0.0011 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0.717 \\ 0 \end{bmatrix} d$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

- Είναι το σύστημα παρατηρήσιμο;

- Ορίζω:

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5719 & -2.717 \end{bmatrix}$$

- Υπολογίζω: rank(Q_O)=2
- **Πόρισμα**: Το σύστημα είναι παρατηρήσιμο.

Περιγραφή στο χώρο κατάστασης

- Η περιγραφή στο Χώρο Κατάστασης (ΠΧΚ) επιτρέπει

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + Wd, x(0) = x_0$$
$$y = Cx + Du + Ed$$

- Σκεπτόμενοι την ρυθμιζόμενη μεταβλητή
  - μπορούμε να μάθουμε την επίδραση των μεταβλητών κατάστασης

Πως;

  - Βλέπουμε αν το σύστημα είναι παρατηρήσιμο από την ρυθμιζόμενη μεταβλητή!
    - Μην ξεχνάτε για τώρα ότι η ρυθμιζόμενη και η μετρούμενη είναι η ίδια
    - Στο μέλλον όμως μπορεί να είναι διαφορετικές!

Περιγραφή στο χώρο κατάστασης

- Η περιγραφή στο Χώρο Κατάστασης (ΠΧΚ) επιτρέπει

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + Wd, x(0) = x_0$$
$$y = Cx + Du + Ed$$

  - Να μάθουμε την επίδραση της χειριζόμενης μεταβλητής στην ρυθμιζόμενη μεταβλητή

Τι σημαίνει αυτό;

Ορισμός: Για κάθε αρχική τιμή της ρυθμιζόμενης μεταβλητής $y(0)$ μπορεί να βρεθεί ένα προφίλ στο χρόνο της χειριζόμενης μεταβλητής $u(t)$ έτσι ώστε σε **πεπερασμένο** χρόνο t_c να λάβει η ρυθμιζόμενη μεταβλητή την επιθυμητή τιμή $y(t_c)$=y_s

$$y(t_c) = C\mathrm{e}^{At_c}x(0) + C\int_0^{t_c} e^{A(t_c-\tau)}Bu(\tau)\,\mathrm{d}\tau + Du(t_c) = y_s$$

Το σύστημα καλείται ρυθμίσιμο σύστημα.

Περιγραφή στο χώρο κατάστασης

- Η περιγραφή στο Χώρο Κατάστασης (ΠΧΚ) επιτρέπει

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + Wd, x(0) = x_0$$
$$y = Cx + Du + Ed$$

  - Να μάθουμε την επίδραση της χειριζόμενης μεταβλητής στην **ρυθμιζόμενη** μεταβλητή

Πως;

  - Αλγεβρικά!
    - Ορίζω με διάσταση $(l, n \times m)$: $Q_{oc} = [CB\ CAB\ \ldots CA^{n-1}B]$
    - Βρίσκω το βαθμό του πίνακα:
    - Αν είναι =*l* τότε μπορώ: Το σύστημα είναι ρυθμίσιμο.
    - Αν είναι <*l τότε δεν* μπορώ: Το σύστημα είναι μη ρυθμίσιμο.

UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Περιγραφή στο χώρο κατάστασης

- Η περιγραφή στο Χώρο Κατάστασης (ΠΧΚ) επιτρέπει

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + Wd, x(0) = x_0$$
$$y = Cx + Du + Ed$$

  - Να μάθουμε την επίδραση της χειριζόμενης μεταβλητής στην **ρυθμιζόμενη** μεταβλητή

Πως;

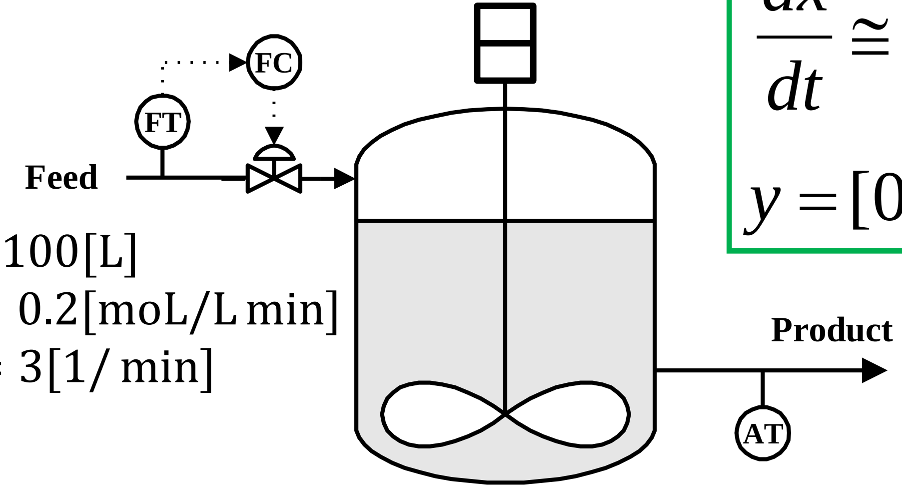
  - Σημαντική σημείωση!
    - Αν το σύστημα είναι παρατηρίσιμο και ελέγξιμο τότε είναι και ρυθμίσιμο!

$$rank(Q_O) = n \,\&\, rank(Q_c) = n \Rightarrow rank(Q_{OC}) = l$$

    - Το ανάποδο δεν ισχύει.

Παράδειγμα: ισοθερμοκρασιακός ΑΣΑ

$F/\rho = 71.7[\mathrm{L/\min}]$
$C_{A0,s} = 2.00[\mathrm{moL/L}]$
$C_{A,s} = 1.4298[\mathrm{moL/L}]$
$C_{B,s} = 0.1100[\mathrm{moL/L}]$



$V = 100[\mathrm{L}]$
$k_1 = 0.2[\mathrm{moL/L\,min}]$
$k_2 = 3[1/\min]$

- περιγραφή στο Χώρο Κατάστασης (ΠΧΚ)

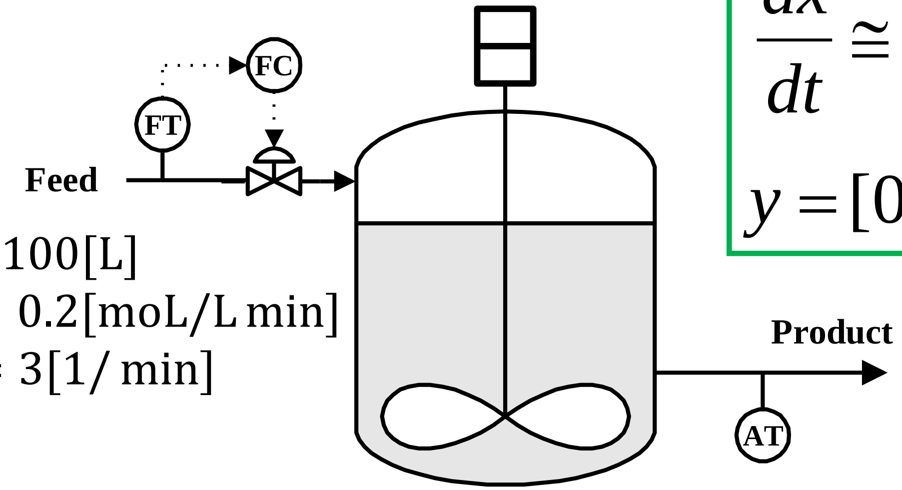
$$\frac{dx}{dt} \cong \begin{bmatrix} -1.2889 & 0 \\ 0.5719 & -2.717 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.0057 \\ -0.0011 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0.717 \\ 0 \end{bmatrix} d$$
$$y = [0 \quad 1] x$$

- Είναι το σύστημα ρυθμίσιμο;

- Ορίζω: $Q_{oc} = [CB\ CAB] = [-0.0011\ 0.0062]$
- Υπολογίζω: rank(Q_{oc})=1
- **Πόρισμα:** Το σύστημα είναι ρυθμίσιμο.

Παράδειγμα: ισοθερμοκρασιακός ΑΣΑ

$F/\rho = 71.7[\mathrm{L/\min}]$
$C_{A0,s} = 2.00[\mathrm{moL/L}]$
$C_{A,s} = 1.4298[\mathrm{moL/L}]$
$C_{B,s} = 0.1100[\mathrm{moL/L}]$



$V = 100[\mathrm{L}]$
$k_1 = 0.2[\mathrm{moL/L\,min}]$
$k_2 = 3[1/\min]$

- περιγραφή στο Χώρο Κατάστασης (ΠΧΚ)

$$\frac{dx}{dt} \cong \begin{bmatrix} -1.2889 & 0 \\ 0.5719 & -2.717 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.0057 \\ -0.0011 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0.717 \\ 0 \end{bmatrix} d$$

$$y = [0 \quad 1] x$$

- Είναι το σύστημα ρυθμίσιμο;

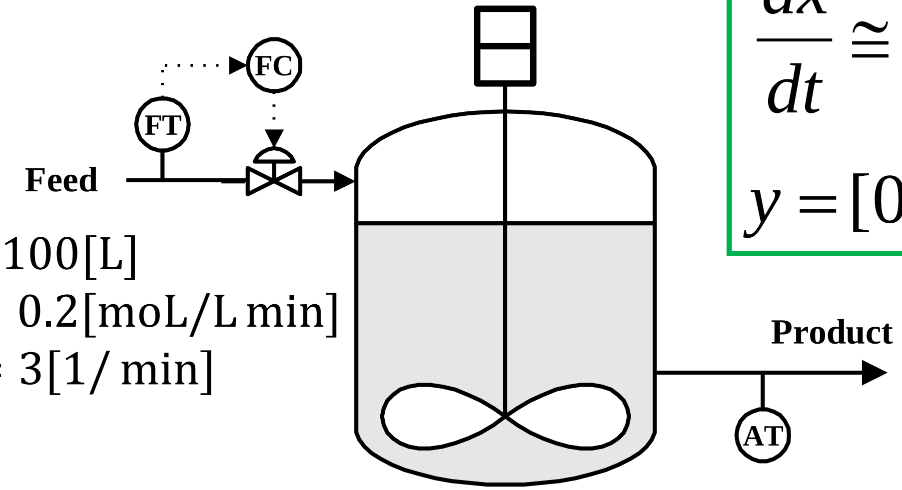
Άλλος τρόπος που καταλήγω στο πόρισμα

- Αφού το σύστημα είναι ελέγξιμο από την χειριζόμενη μεταβλητή
- Και το σύστημα είναι παρατηρήσιμο από την ρυθμιζόμενη μεταβλητή

$\Rightarrow$ Το σύστημα είναι ρυθμίσιμο.

Παράδειγμα: ισοθερμοκρασιακός ΑΣΑ

$F/\rho = 71.7[\mathrm{L/\,min}]$
$C_{A0,s} = 2.00[\mathrm{moL/L}]$
$C_{A,s} = 1.4298[\mathrm{moL/L}]$
$C_{B,s} = 0.1100[\mathrm{moL/L}]$



$V = 100[\mathrm{L}]$
$k_1 = 0.2[\mathrm{moL/L\,min}]$
$k_2 = 3[1/\,\mathrm{min}]$

- περιγραφή στο Χώρο Κατάστασης (ΠΧΚ)

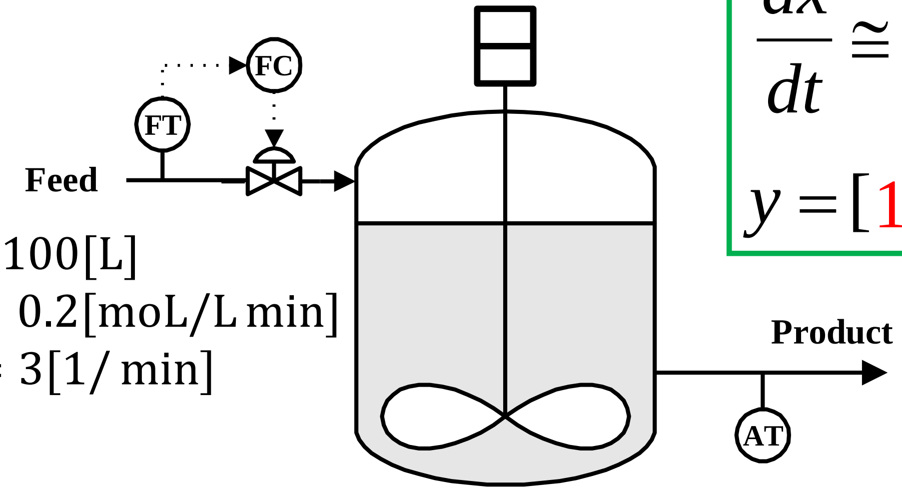
$$\frac{dx}{dt} \cong \begin{bmatrix} -1.2889 & 0 \\ 0.5719 & -2.717 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.0057 \\ -0.0011 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0.717 \\ 0 \end{bmatrix} d$$
$$y = [0 \quad 1]x$$

- Είναι το σύστημα ρυθμίσιμο;

- Θα μπορούσε το σύστημα να είναι ρυθμίσιμο αν δεν είναι ελέγξιμο;
- Θα μπορούσε το σύστημα να είναι ρυθμίσιμο αν δεν είναι παρατηρήσιμο;

Παράδειγμα: ισοθερμοκρασιακός ΑΣΑ

$F/\rho = 71.7[\mathrm{L/min}]$
$C_{A0,s} = 2.00[\mathrm{moL/L}]$
$C_{A,s} = 1.4298[\mathrm{moL/L}]$
$C_{B,s} = 0.1100[\mathrm{moL/L}]$



$V = 100[\mathrm{L}]$
$k_1 = 0.2[\mathrm{moL/L\,min}]$
$k_2 = 3[1/\mathrm{min}]$

- περιγραφή στο Χώρο Κατάστασης (ΠΧΚ)

$$\frac{dx}{dt} \cong \begin{bmatrix} -1.2889 & 0 \\ 0.5719 & -2.717 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.0057 \\ -0.0011 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0.717 \\ 0 \end{bmatrix} d$$

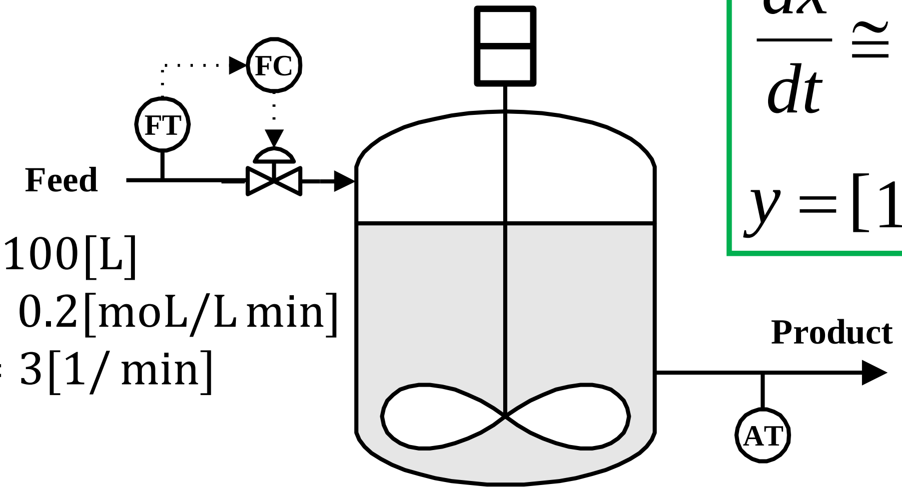
$$y = [1 \quad 0]x$$

- Είναι το σύστημα ελέγξιμο; **NAI**
- Είναι το σύστημα παρατηρήσιμο;

- Ορίζω: $Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1.2889 & 0 \end{bmatrix}$
- Υπολογίζω: rank(Q_o)=1
- **Πόρισμα**: Το σύστημα είναι μη παρατηρήσιμο!

Παράδειγμα: ισοθερμοκρασιακός ΑΣΑ

$F/\rho = 71.7[\mathrm{L/\min}]$
$C_{A0,s} = 2.00[\mathrm{moL/L}]$
$C_{A,s} = 1.4298[\mathrm{moL/L}]$
$C_{B,s} = 0.1100[\mathrm{moL/L}]$



$V = 100[\mathrm{L}]$
$k_1 = 0.2[\mathrm{moL/L\,min}]$
$k_2 = 3[1/\min]$

- περιγραφή στο Χώρο Κατάστασης (ΠΧΚ)

$$\frac{dx}{dt} \cong \begin{bmatrix} -1.2889 & 0 \\ 0.5719 & -2.717 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.0057 \\ -0.0011 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0.717 \\ 0 \end{bmatrix} d$$
$$y = [1 \quad 0] x$$

- Είναι το σύστημα ελέγξιμο; **ΝΑΙ**
- Είναι το σύστημα παρατηρήσιμο; **ΟΧΙ**
- Είναι το σύστημα ρυθμίσιμο;

- Ορίζω: $Q_{oc} = [CB\ CAB] = [0.0057 \ -0.0073]$
- Υπολογίζω: rank(Q_{oc})=1
- Πόρισμα: Το σύστημα είναι ρυθμίσιμο.

Περιγραφή στο χώρο κατάστασης

- Η περιγραφή στο Χώρο Κατάστασης (ΠΧΚ) επιτρέπει να εξερευνήσουμε

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + Wd, x(0) = x_0$$
$$y = Cx + Du + Ed$$

  - αν το σημείο λειτουργίας της διεργασίας είναι ευσταθές
  - αν οι χειριζόμενες μεταβλητές είναι ικανές να ελέγξουν τη διεργασία
  - αν οι μετρούμενες μεταβλητές επαρκούν να παρατηρούμε την διεργασία
  - την επίδραση των διαταραχών στην διεργασία
  - Την επίδραση των μεταβλητών κατάστασης στις ρυθμιζόμενες μεταβλητές
    - την επίδραση των εισόδων στις ρυθμιζόμενες μεταβλητές
- Αυτές οι πληροφορίες μπορούν να βρεθούν **αλγεβρικά**!!
  - Βασίζονται στις ιδιότητες των πινάκων A, B, W, C, D, E και την λύση γραμμικών συστημάτων

Περιγραφή στο χώρο κατάστασης

- Η περιγραφή στο Χώρο Κατάστασης (ΠΧΚ) επιτρέπει

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + Wd, x(0) = x_0$$
$$y = Cx + Du + Ed$$

  - να ανακαλύψουμε αν το σημείο λειτουργίας της διεργασίας είναι ευσταθές
  - να βρούμε αν οι χειριζόμενες μεταβλητές είναι ικανές να ελέγξουν τη διεργασία
  - να δούμε αν οι μετρούμενες μεταβλητές επαρκούν να παρατηρούμε την διεργασία
  - να προβλέψουμε την επίδραση των διαταραχών στην διεργασία
- Σκεπτόμενοι την ρυθμιζόμενη μεταβλητή
  - μπορούμε να μάθουμε την επίδραση των μεταβλητών κατάστασης
    - και κατ'επέκταση την επίδραση των εισόδων στην ρυθμιζόμενη μεταβλητή
  - **Υπάρχει απλούστερη περιγραφή όταν μας ενδιαφέρει μόνο η σχέση εισόδου – εξόδου της διεργασίας;**