UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Δυναμική & Ρύθμιση Διεργασιών

Διάλεξη 5:

Ανασκόπηση μετασχηματισμού Laplace

Βήματα της Ρύθμισης Διεργασιών, μέρος Α

1. **Καθορίστε τη διεργασία που εξετάζεται**
   a. Διατύπωση υποθέσεων
   b. Ταξινόμηση μεταβλητών (χειριζόμενες, διαταραχές, εσωτερικές, ελεγχόμενες, μετρούμενες)
   c. Διατύπωση μοντέλου διεργασίας
   d. Προσδιορισμός του επιθυμητού σημείου λειτουργίας
   e. Διατύπωση περιγραφής χώρου κατάστασης
   f. **Διατύπωση περιγραφής συναρτήσεων μεταφοράς**
   g. Αναγνώριση διεργασιών (αν χρειάζεται)

2. **Ανάλυση Διεργασίας**
   a. Ανάλυση παρατηρησιμότητας
   b. Ανάλυση ελεγξιμότητας / ρυθμισιμότητας
   c. Ανάλυση ευστάθειας
   d. Ανάλυση δυναμικής συμπεριφοράς
      a. Απόκριση σε παλμική αλλαγή
      b. Απόκριση σε ημιτονική αλλαγή

University of Patras
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Μετασχηματισμός Laplace

t⟶s

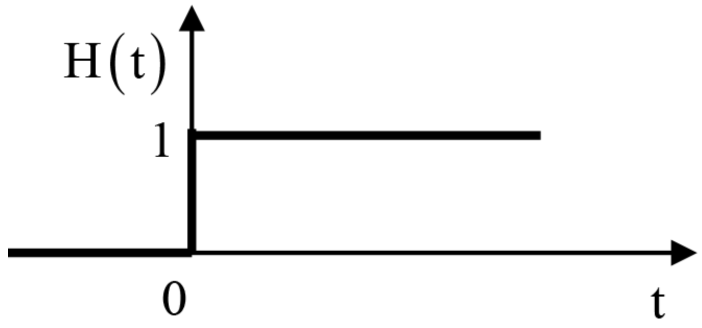
$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, f(t)\, dt$$

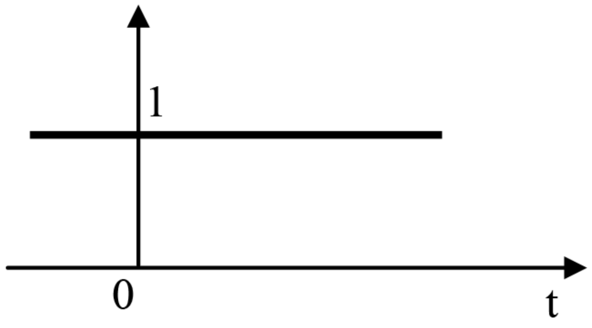
- $F(s)$ μιγαδική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής s.
- Ο μετασχηματισμός Laplace δεν εξαρτάται από τιμές $t<0$.
- Η $f(t)$ πρέπει να είναι κατά τμήματα συνεχής και να μην αυξάνει ταχύτερα από εκθετική συνάρτηση $e^{\alpha t}$.

UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Συναρτήσεις με ίδιο μετασχηματισμό Laplace

$$H(t)=\begin{cases}0 & ,\ \text{για}\ \ t<0\\ 1 & ,\ \text{για}\ \ t\geq 0\end{cases}$$





$$\text{f(t)}=\begin{cases}0 & an\ \mathrm{t}\ rhtoV\\ 1 & an\ \mathrm{t}\ arrhtoV\end{cases}$$

$$f(t)=e^{t^2}$$

Πίνακας μετασχηματισμών Laplace στοιχειωδών συναρτήσεων

	$f(t)$	$F(s)$
Βήμα	1 ή $H(t)$	$\frac{1}{s}$
Δύναμη	$t^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
Εκθετική	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
Ημίτονο	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
Συνημίτονο	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace (1/4)

Αν $\mathcal{L}\left[f(t)\right]=F(s)$, τότε ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

1. Γραμμικότητα:

$$\mathcal{L}\left[\lambda_1 f_1(t)+\lambda_2 f_2(t)\right]=\lambda_1 F_1(s)+\lambda_2 F_2(s) \text{ για κάθε } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

2. Αλλαγή χρονικής κλίμακας:

$$\mathcal{L}\left[f(\alpha t)\right]=\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{s}{\alpha}\right), \text{ όπου } \alpha>0.$$

3. Μετατόπιση μεταβλητής μετασχηματισμού:

$$\mathcal{L}\left[e^{-at}f(t)\right]=F(s+a)$$

4. Παραγώγιση μετασχηματισμού

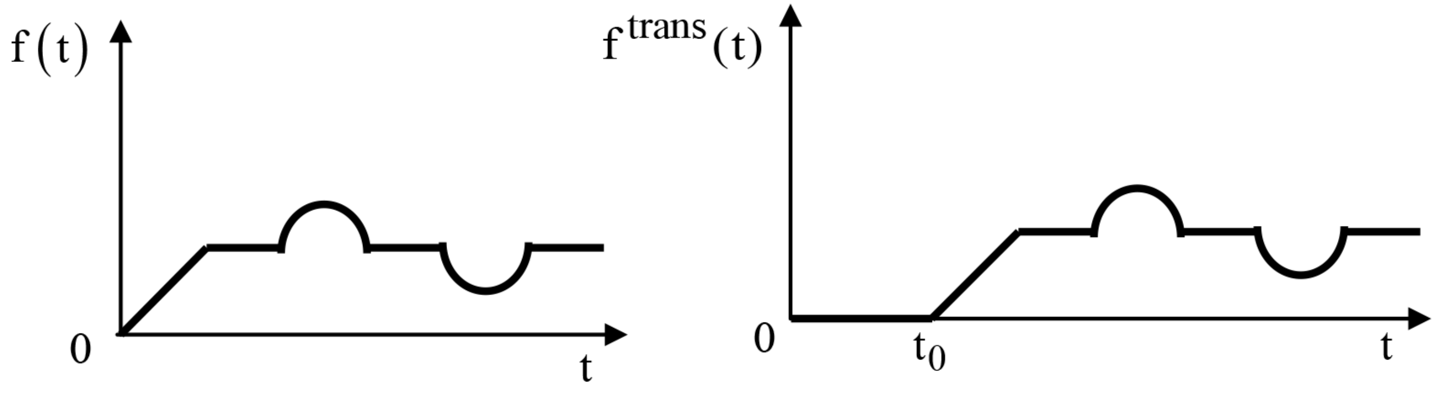
$$\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right]=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s)$$

Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace (2/4)

5. Μετατόπιση χρονικής μεταβλητής

Δοθείσης μιας συναρτήσεως $f(t)$, η μετατόπισή της κατά t_0 ορίζεται ως εξής:

$$f^{trans}(t) = \begin{cases} 0 & \text{για } t < t_0 \\ f(t - t_0) & \text{για } t \geq t_0 \end{cases}$$



και ισχύει

$$\mathcal{L}\left[f^{trans}(t)\right] = e^{-st_0}\, F(s)$$

Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace (3/4)

6. Παραγώγιση ως προς το χρόνο:

Αν η f(t) και οι παράγωγοί της μέχρι τάξεως (n -1) είναι συνεχείς συναρτήσεις του t, τότε μπορούν να υπολογισθούν οι μετασχηματισμοί Laplace των παραγώγων της f(t) μέχρι τάξεως n ως εξής:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}(t)\right]=sF(s)-f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}(t)\right]=s^2F(s)-sf(0)-\frac{df}{dt}(0)$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^nf}{dt^n}(t)\right]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}\frac{df}{dt}(0)-\ldots-s\frac{d^{n-2}f}{dt^{n-2}}(0)-\frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}}(0)$$

Πολυώνυμο n βαθμού ως προς s

Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace (4/4)

7. Ολοκλήρωση ως προς το χρόνο:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right]=\frac{1}{s}F(s)$$

8. Θεώρημα Συνελίξεως:

$$\mathcal{L}\left[(f_1 * f_2)(t)\right]=F_1(s)F_2(s)$$

όπου $(f_1 * f_2)(t)=\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau$

είναι η συνέλιξη των συναρτήσεων $f_1(t)$ και $f_2(t)$.

Σημειώσεις:

- Άρα: Όπου δούμε s έχουμε παραγώγιση και 1/s έχουμε ολοκλήρωση σήματος.
- Χρησιμοποιούμε το (8) για επίλυση συστημάτων με εξωτερικά σήματα. Είναι βασικό θεώρημα σε ότι κάνουμε: **Μας διευκολύνει τρομερά!**

UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace (4/4)

9. Θεώρημα Αρχικής Τιμής:

Αν η συνάρτηση $F(s)$ τείνει στο μηδέν για $|s| \to \infty$, τότε

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{|s| \to \infty} \left[s\,F(s) \right]$$

10. Θεώρημα Τελικής Τιμής:

a) Η συνάρτηση $f(t)$ έχει πεπερασμένο όριο $\lim_{t \to \infty} f(t)$ αν και μόνο αν η $sF(s)$ δεν απειρίζεται για κανένα $s \in \mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}\, s \geq 0$.

b) Εφ' όσον ικανοποιείται η ανωτέρω συνθήκη,

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} \left[s\,F(s) \right]$$

11. Θεώρημα Parseval:

$$\int_0^{\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(i\omega)|^2 \, d\omega$$

Σημειώσεις:

- Τα χρησιμοποιούμε για γρήγορη ανάλυση της απόκρισης συστημάτων χωρίς επίλυση
- Μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να μάθουμε ρυθμό απόκρισης στην αρχή και τέλος περιόδου. (Πως το κάνουμε;)

UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Παραδείγματα μετασχηματισμού Laplace

$f(t)$	$F(s)$
$e^{-at}\, t^{n}, \; n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
$t \sin \omega t$	$\dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t \cos \omega t$	$\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$

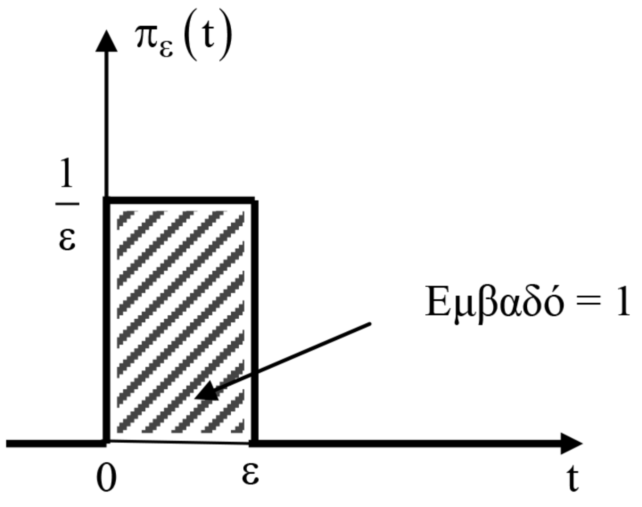
UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Μετασχηματισμός Laplace Παλμικής Συναρτήσεως

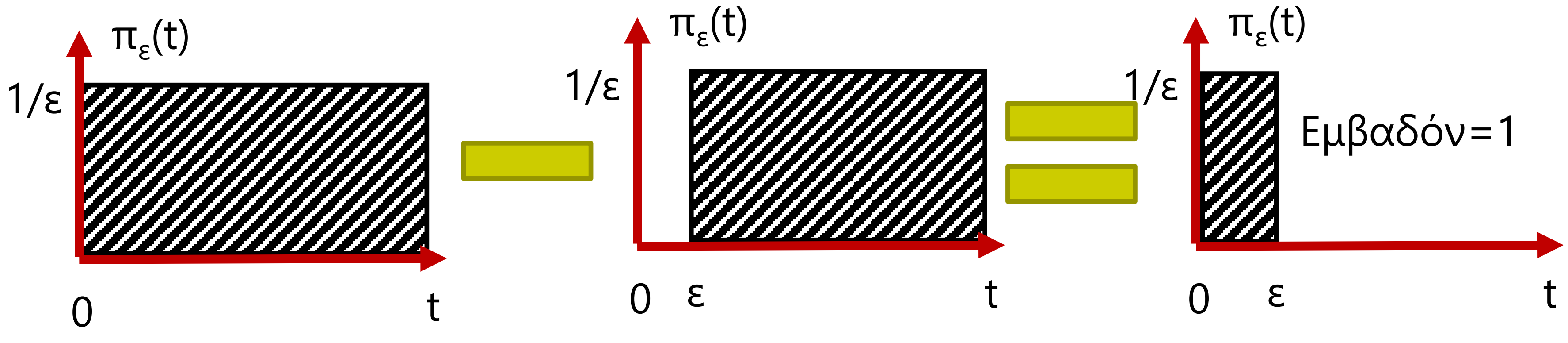
Μοναδιαίος Ορθογώνιας Παλμός

Ο ορθογώνιος παλμός χρονικής διάρκειας ε και μοναδιαίου μεγέθους ορίζεται ως εξής

$$\pi_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & \gamma\iota\alpha\ t < 0 \\ \dfrac{1}{\varepsilon}, & \gamma\iota\alpha\ 0 \le t < \varepsilon \\ 0, & \gamma\iota\alpha\ t \ge \varepsilon \end{cases}$$



Η συνάρτηση μπορεί να εκφρασθεί ως διαφορά συνάρτησης Heaviside μείον μετατοπισμένη συνάρτηση Heaviside, ως εξής:



$$\pi_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} H(t) - \frac{1}{\varepsilon} H(t-\varepsilon)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα μετατόπισης χρονικής μεταβλητής (Ιδιότητα Νο5), υπολογίζεται άμεσα ο μετασχηματισμός laplace του ορθογωνίου παλμού:

$$\mathcal{L}\left[\pi_\varepsilon(t)\right] = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{e^{-\varepsilon s}}{s} = \frac{1-e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s}$$

$$e \to 0, \quad p_e(t) \to d(t), \quad L[d(t)] = 1$$

UNIVERSITY OF PATRAS Department Of Chemical Engineering ChemEngUP

Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

s→t

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}\, F(s)\, ds$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι γενικά ιδιαίτερα δύσκολος διότι η ολοκλήρωση είναι πάνω σε καμπύλη. Συνεπώς, στην γενική περίπτωση δεν μπορούμε να επιστρέψουμε στο πραγματικό χρόνο.

UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}\, F(s)\, ds$$

$f(t)$	$F(s)$
$e^{-at}\, t^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$t \sin \omega t$	$\dfrac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$t \cos \omega t$	$\dfrac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$

University of Patras
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace Ρητών Συναρτήσεων

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \longrightarrow f(t) = ?$$

$P(s)$, $Q(s)$ πολυώνυμα με $\deg P(s) < \deg Q(s)$,

Οποιοδήποτε κλάσμα της παραπάνω μορφής, μπορεί να γραφεί ως άθροισμα απλών κλασμάτων.

Ανάλυση σε απλά κλάσματα

$$\frac{s+1}{s^2+5s+6}=\frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$$

- Παραγοντοποίηση του παρονομαστή.

$$\frac{s+1}{(s+2)(s+3)}=\frac{\mathrm{A}}{(s+2)}+\frac{\mathrm{B}}{(s+3)}$$

- Ανάλυση κλασμάτων: ένας όρος για κάθε παράγοντα του παρονομαστή.

$$\frac{s+1}{(s+2)(s+3)}=\frac{A(s+3)+B(s+2)}{(s+2)(s+3)}$$

- Εκτέλεση της πρόσθεσης στο δεξιό μέλος.

$$s+1=(A+B)s+(3A+2B)$$

- Καταλήγουμε σε μία ταυτότητα του s.

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 3A+2B=1 \end{cases}$$

- Λύνουμε το αλγεβρικό σύστημα που προκύπτει.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{s+1}{(s+2)(s+3)}=\frac{-1}{(s+2)}+\frac{2}{(s+3)}}$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα (μεθοδος Heaviside)

$$\frac{s+1}{s^2+5s+6} = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$$

- Παραγοντοποίηση του παρονομαστή.

$$\frac{s+1}{(s+2)(s+3)} = \frac{\mathrm{A}}{(s+2)} + \frac{\mathrm{B}}{(s+3)}$$

- Ανάλυση κλασμάτων: ένας όρος για κάθε παράγοντα του παρονομαστή.

$$\frac{(s+1)(s+2)}{(s+2)(s+3)} = \frac{\mathrm{A}(s+2)}{(s+2)} + \frac{\mathrm{B}(s+2)}{(s+3)}$$

- Εκτέλεση πολλαπλασιασμού με τον εκάστοτε παρανομαστή (εδώ του A)

$$\frac{s+1}{s+3} = A + \frac{\mathrm{B}(s+2)}{s+3}$$

- Θέτουμε s=-2 και υπολογίζουμε τον συντελεστή.
- Και επαναλαμβάνουμε...

$$\begin{cases} A+0=-1 \\ 0+B=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{s+1}{(s+2)(s+3)} = \frac{-1}{(s+2)} + \frac{2}{(s+3)}}$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace Ρητών Συναρτήσεων

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}$$

$$f(t)=?$$

Περίπτωση 1:
Οι ρίζες q_1, q_2, … του πολυωνύμου Q(s) είναι όλες απλές

$$F(s)=\sum_j \frac{c_j}{s-q_j} \quad \text{όπου} \quad c_j=\left[\left(s-q_j\right)F(s)\right]_{s=q_j}.$$

$$f(t)=\sum_j c_j e^{q_j t}$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace Ρητών Συναρτήσεων

Αν οι ρίζες είναι συζυγείς μιγαδικές:

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}$$

$$F(s)=\frac{\alpha+i\beta}{s-\rho-i\omega}+\frac{\alpha-i\beta}{s-\rho+i\omega}$$

$$f(t)=(\alpha+i\beta)e^{(\rho+i\omega)t}+(\alpha-i\beta)e^{(\rho-i\omega)t}$$

$$f(t)=?$$

Χρησιμοποιούμε τον τύπο του Euler:

$$e^{(\rho-i\omega)t}=e^{\rho t}\{\cos\omega t-i\sin\omega t\}$$
$$e^{(\rho+i\omega)t}=e^{\rho t}\{\cos\omega t+i\sin\omega t\}$$

$$f(t)=e^{\rho t}\left(2\alpha\cos\omega t-2\beta\sin\omega t\right)$$

UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace Ρητών Συναρτήσεων

Αν οι ρίζες είναι συζυγείς μιγαδικές:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

$$f(t) = ?$$

2ος τρόπος:

$$F(s) = \frac{\alpha + i\beta}{s - \rho - i\omega} + \frac{\alpha + i\beta}{s - \rho - i\omega} = \frac{2\alpha\,(s-\rho) - 2\beta\omega}{(s-\rho)^2 + \omega^2}$$

$$F(s) = 2\alpha \frac{(s-\rho)}{(s-\rho)^2 + \omega^2} - 2\beta \frac{\omega}{(s-\rho)^2 + \omega^2}$$

Χρησιμοποιούμε τους μετασχηματισμούς:
$\mathcal{L}[\sin\omega t]$ και $\mathcal{L}[\cos\omega t]$

$$f(t) = e^{\rho t}\left(2\alpha\cos\omega t - 2\beta\sin\omega t\right)$$

Περίπτωση 2: Η ρίζα q_1, έχει πολλαπλότητα π_1 , η ρίζα q_2, έχει πολλαπλότητα π_2 ….

$$F(s)=\sum_j\left(\frac{c_{j1}}{(s-q_j)^{\pi_j}}+\frac{c_{j2}}{(s-q_j)^{\pi_j-1}}+\ldots+\frac{c_{j\pi_j}}{s-q_j}\right)$$

$$\Rightarrow\quad f(t)=\sum_j\left(c_{j1}\frac{t^{\pi_j-1}}{(\pi_j-1)!}+c_{j2}\frac{t^{\pi_j-2}}{(\pi_j-2)!}+\ldots+c_{j\pi_j}\right)e^{q_j t}$$

όπου

$$c_{j1}=\left[(s-q_j)^{\pi_j}F(s)\right]_{s=q_j}$$

$$c_{j2}=\frac{1}{1!}\left[\frac{d}{ds}\left((s-q_j)^{\pi_j}F(s)\right)\right]_{s=q_j}$$

$$c_{j3}=\frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{ds^2}\left((s-q_j)^{\pi_j}F(s)\right)\right]_{s=q_j}$$

$$\vdots$$

$$c_{j\pi_j}=\frac{1}{(\pi_j-1)!}\left[\frac{d^{\pi_j-1}}{ds^{\pi_j-1}}\left((s-q_j)^{\pi_j}F(s)\right)\right]_{s=q_j}$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα

$$\frac{s+3}{s^3+4s^2+5s+2} = \frac{s+3}{(s+2)(s+1)^2}$$

$$\frac{s+3}{(s+2)(s+1)^2} = \frac{\mathrm{A}}{(s+2)} + \frac{\mathrm{B}}{(s+1)^2} + \frac{\Gamma}{(s+1)}$$

$$\frac{s+3}{(s+2)(s+1)^2} = \frac{A(s+1)^2 + B(s+1) + \Gamma(s+2)(s+1)}{(s+2)(s+1)^2}$$

$$s+3 = (A+\Gamma)s^2 + (2A+B+3\Gamma)s + (A+B+2\Gamma)$$

$$\begin{cases} \mathrm{A}+\Gamma = 0 \\ 2A+B+3\Gamma = 1 \\ \mathrm{A}+B+2\Gamma = 3 \end{cases}$$

$$\frac{s+3}{(s+2)(s+1)^2} = \frac{1}{(s+2)} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{-1}{(s+1)}$$

- Παραγοντοποίηση του παρονομαστή.
- Ανάλυση κλασμάτων: ένας όρος για κάθε παράγοντα του παρονομαστή.
- Εκτέλεση της πρόσθεσης στο δεξιό μέλος.
- Καταλήγουμε σε μία ταυτότητα του s.
- Λύνουμε το αλγεβρικό σύστημα που προκύπτει.

ChemEngUP
UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering

Ανάλυση σε απλά κλάσματα (μεθοδος Heaviside)

$$\frac{s+3}{s^3+4s^2+5s+2} = \frac{s+3}{(s+2)(s+1)^2}$$

$$\frac{s+3}{(s+2)(s+1)^2} = \frac{\mathrm{A}}{(s+2)} + \frac{\mathrm{B}}{(s+1)^2} + \frac{\Gamma}{(s+1)}$$

$$\frac{s+3}{(s+2)(s+1)^2} = \frac{1}{(s+2)} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{\Gamma}{(s+1)}$$

$$\frac{s+3}{s+2} = \frac{(s+1)^2}{(s+2)} + 2 + \Gamma(s+1)$$

$$\frac{1}{s+2} - \frac{s+3}{(s+2)^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{(s+1)^2}{(s+2)}\right) + \Gamma \;\Rightarrow \Gamma = -1$$

$$\frac{s+3}{(s+2)(s+1)^2} = \frac{1}{(s+2)} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{-1}{(s+1)}$$

- Παραγοντοποίηση του παρονομαστή.

Για το Α και Β

- Ανάλυση κλασμάτων: ένας όρος για κάθε παράγοντα του παρονομαστή.
- Α και Β υπολογίζονται με απλά βήματα

Για το Γ

- Παραγωγίζουμε το αριστερό μέρος και θέτουμε s=ρίζα (εδώ s=-1)
- Για πολλαπλότητα κ θέλει και κ-1 παραγωγίσεις για να βρούμε τους κ-1 συντελεστές

Χρήσεις μετασχηματισμού Laplace

Αναλυτική επίλυση γραμμικών απλών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές σε προβλήματα αρχικών τιμών, χρησιμοποιώντας άλγεβρα!

Συνέλιξη σήματος εισόδου με δυναμική συστήματος χωρίς να χρειαζόμαστε ολοκληρώσεις

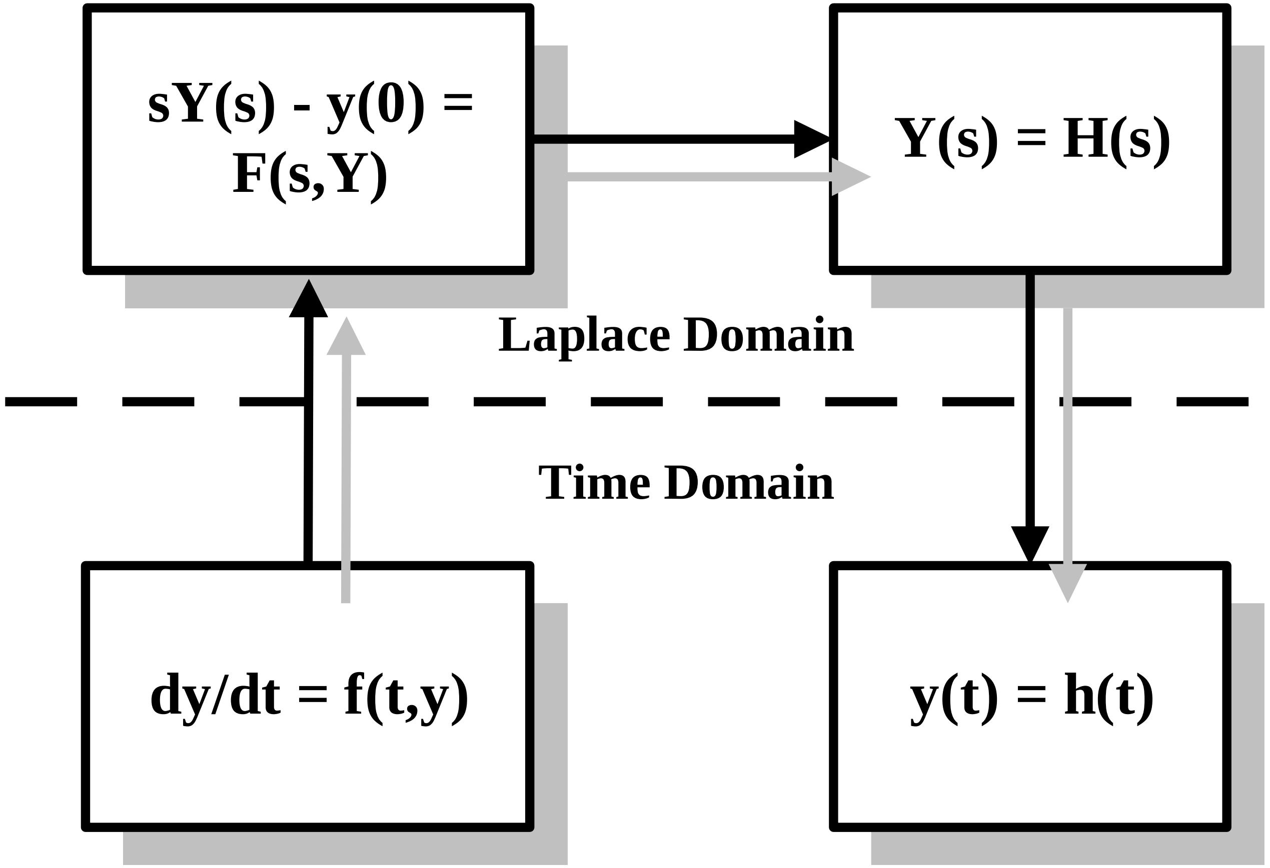
Εύκολη ανάλυση συστημάτων μέσω πολυωνύμων

UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων

Μεθοδολογία:

- Εφαρμογή μετασχηματισμού Laplace στη ΔΕ.
- Αλγεβρική επίλυση ως προς Y(s).
- Εφαρμογή αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace στην Y(s) για απευθείας εύρεση της y(t).



Παράδειγμα με απλές ρίζες

$$\begin{cases} \dfrac{d^3y}{dt^3} + 6\dfrac{d^2y}{dt^2} + 11\dfrac{dy}{dt} + 6y = 1 + 2e^{-4t} \\ y(0) = 1,\ \dfrac{dy}{dt}(0) = 0,\ \dfrac{d^2y}{dt^2}(0) = -1 \end{cases}$$

UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Επίλυση

$$\begin{cases} \dfrac{d^3y}{dt^3}+6\dfrac{d^2y}{dt^2}+11\dfrac{dy}{dt}+6y=1+2e^{-4t} \\ y(0)=1,\ \dfrac{dy}{dt}(0)=0,\ \dfrac{d^2y}{dt^2}(0)=-1 \end{cases}$$

$t \longrightarrow s$

$$\left(s^3Y(s)-s^2+1\right)+6\left(s^2Y(s)-s\right)+11\left(sY(s)-1\right)+6Y(s)=\frac{1}{s}+\frac{2}{s+4}$$

$$Y(s)=\frac{s^4+10s^3+34s^2+43s+4}{s(s+4)\left(s^3+11s^2+6s+6\right)}=\frac{\frac{1}{6}}{s}+\frac{\frac{7}{3}}{s+1}-\frac{\frac{5}{2}}{s+2}+\frac{\frac{4}{3}}{s+3}-\frac{\frac{1}{3}}{s+4}$$

$s \longrightarrow t$

$$y(t)=\frac{1}{6}+\frac{7}{3}e^{-t}-\frac{5}{2}e^{-2t}+\frac{4}{3}e^{-3t}-\frac{1}{3}e^{-4t}$$

UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Παράδειγμα με μιγαδικές ρίζες

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + 2y = 2 \\ y(0) = 0,\ \dfrac{dy}{dt}(0) = 0 \end{cases}$$

UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Επίλυση

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}+2y=2 \\ y(0)=0,\ \dfrac{dy}{dt}(0)=0 \end{cases}$$

$t \longrightarrow s$

$$s^2Y(s)+2sY(s)+2Y(s)=\frac{2}{s} \quad \Rightarrow \quad Y(s)=\frac{2}{s\left(s^2+2s+2\right)}$$

$$Y(s)=\frac{1}{s}+\frac{-1+i}{2}\frac{1}{s+1-i}+\frac{-1-i}{2}\frac{1}{s+1+i}$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{s+2}{(s+1)^2+1}$$

$$=\frac{1}{s}-\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+1}+\frac{1}{(s+1)^2+1}\right]$$

$$y(t)=1+\frac{-1+i}{2}e^{(-1+i)t}+\frac{-1-i}{2}e^{(-1-i)t},$$

$$\boxed{\begin{aligned} e^{(-1+i)t} &= e^{-t}(\cos t+i\sin t) \\ e^{(-1-i)t} &= e^{-t}(\cos t-i\sin t) \end{aligned}}$$

$s \longrightarrow t$

$$y(t)=1-e^{-t}\left(\cos t+\sin t\right)$$

UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Παράδειγμα με πολλαπλές ρίζες

$$\begin{cases} \dfrac{d^3y}{dt^3} + 3\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt} + y = 1 \\ y(0) = 0,\ \dfrac{dy}{dt}(0) = 0,\ \dfrac{d^2y}{dt^2}(0) = 0 \end{cases}$$

Επίλυση

$$\begin{cases} \dfrac{d^3y}{dt^3}+3\dfrac{d^2y}{dt^2}+3\dfrac{dy}{dt}+y=1 \\ y(0)=0,\ \dfrac{dy}{dt}(0)=0,\ \dfrac{d^2y}{dt^2}(0)=0 \end{cases}$$

t⟶s

$$s^3Y(s)+3s^2Y(s)+3sY(s)+Y(s)=\frac{1}{s}$$

$$Y(s)=\frac{1}{s\left(s^3+3s^2+3s+1\right)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{(s+1)^3}-\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{1}{s+1}$$

s⟶t

$$y(t)=1-\frac{t^2}{2}e^{-t}-te^{-t}-e^{-t}=1-\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right)e^{-t}$$

Παράδειγμα θεωρημάτων

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 8y = 2u \qquad Y = \frac{2}{(s+2)(s+4)}U$$

Ποια είναι η τελική τιμή της απόκρισης σε ένα βήμα μοναδιαίου μεγέθους; $u = \mathrm{Heaviside}(t) \rightarrow U = \frac{1}{s}$

Χρησιμοποίησα ήδη το θεώρημα συνέλιξης!

$$Y = \frac{2}{s(s+2)(s+4)} \qquad \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY = \lim_{s\to 0}\frac{2}{(s+2)(s+4)} = \frac{1}{4}$$

Ποια είναι η αρχική τιμή του ρυθμού της απόκρισης σε ένα βήμα μοναδιαίου μεγέθους;

$$\lim_{t\to 0}\frac{dy}{dt} = \lim_{s\to\infty} s(sY - y(0)) = \lim_{s\to 0}\frac{2s}{(s+2)(s+4)} = 0$$