Δυναμική & Ρύθμιση Διεργασιών

Διάλεξη 4:

Περιγραφή Δυναμικών Συστημάτων στον χώρο κατάστασης

Βήματα της Ρύθμισης Διεργασιών, μέρος Α

1. **Καθορισμός της διεργασίας που εξετάζεται**
    a. Διατύπωση υποθέσεων
    b. Ταξινόμηση μεταβλητών (χειριζόμενες, διαταραχές, εσωτερικές, ελεγχόμενες, μετρούμενες)
    c. Διατύπωση μοντέλου διεργασίας
    d. **Προσδιορισμός του επιθυμητού σημείου λειτουργίας**
    e. **Διατύπωση περιγραφής χώρου κατάστασης**
    f. Διατύπωση περιγραφής συναρτήσεων μεταφοράς
    g. Αναγνώριση διεργασιών (αν χρειάζεται)

2. **Ανάλυση Διεργασίας**
    a. Ανάλυση παρατηρησιμότητας
    b. Ανάλυση ελεγξιμότητας / ρυθμισιμότητας
    c. Ανάλυση ευστάθειας
    d. Ανάλυση δυναμικής συμπεριφοράς
        a. Απόκριση σε παλμική αλλαγή
        b. Απόκριση σε ημιτονική αλλαγή

ChemEngUP
UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering

Δημιουργία δυναμικού συστήματος

Περιγραφή του μοντέλου ως συνεπτυγμένο σύστημα εξισώσεων

- Μεταβλητές και συναρτήσεις ορίζονται ως διανύσματα
- Κομψή περιγραφή αλλά χρειάζεται προσοχή για να αποφευχθούν λάθη
- Βασίζεται σε τυπική σημειογραφία
- Οι μαθηματικές πράξεις γράφονται ως βήματα αλγορίθμου

- Διαταραχή (d)
- Χειριζόμενη μετ. (u)
- Ρυθμιζόμενη μετ. (y_c)
- Μετρούμενη μετ. (y_m)
- Μετ. Κατάστασης (x)

- Μεταβλητές:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_M \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_K \end{bmatrix} \quad y_m = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_L \end{bmatrix}$$

- Συναρτήσεις:

$$f(x,u,d) = \begin{bmatrix} f_1(x,u,d) \\ f_2(x,u,d) \\ \vdots \\ f_N(x,u,d) \end{bmatrix} g_c(u,c) = \begin{bmatrix} g_1(u,c) \\ g_2(u,c) \\ \vdots \\ g_M(u,c) \end{bmatrix} \quad h_m(x,u,d) = \begin{bmatrix} h_1(x,u,d) \\ h_2(x,u,d) \\ \vdots \\ h_L(x,u,d) \end{bmatrix}$$

University of Patras
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Δυναμικό σύστημα στο χώρο κατάστασης

Δυναμικό Σύστημα:

$$\frac{du}{dt} = g_c(u, u_c)$$

- Δυναμική ενεργοποιητή

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, d)$$

- Δυναμική διεργασίας

$$\frac{dy_m}{dt} = h_m(y_m, x, u, d)$$

- Δυναμική αισθητήρα

$$y_c = h_c(x, u, d)$$

- Αν και το μη γραμμικό ODE μπορεί να χρησιμοποιηθεί απευθείας, αυτό είναι προχωρημένο θέμα
- Για να αναλύσουμε και να ρυθμίσουμε τη διεργασία θα γραμμικοποιήσουμε το δυναμικό σύστημα
- **Το σημείο γραμμικοποίησης πρέπει να επιλεγεί προσεκτικά**
- Σ'αυτό το εισαγωγικό μάθημα θα επικεντρωθούμε στις εξής **απλοποιήσεις**
  - Μία χειριζόμενη μεταβλητή
  - Μία διαταραχή
  - Μία μετρούμενη μεταβλητή
  - Μία ρυθμιζόμενη μεταβλητή. **Αρχικά ρυθμιζόμενη ≡ Μετρούμενη**

ChemEngUP
UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering

Δυναμικό σύστημα στο χώρο κατάστασης

Δυναμικό σύστημα (κοιτάμε μόνο την διεργασία εδώ):

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, d)$$

$$y_c = h_c(x, u, d)$$

- Το μη γραμμικό σύστημα δεν θα χρησιμοποιηθεί απ’ευθείας
- Γραμμικοποιούμε το δυναμικό σύστημα
- **Το σημείο γραμμικοποίησης πρέπει να επιλεγεί προσεκτικά!**
  - **Συνήθως είναι το σημείο λειτουργίας**
  - **Συνήθως είναι σημείο ισορροπίας (από τον σχεδιασμό)**

Περιγραφή στον χώρο κατάστασης

- Η περιγραφή χώρου κατάστασης είναι σύστημα γραμμικών ΣΔΕ που προσεγγίζουν το σύστημα μη γραμμικών ΣΔΕ σε ένα σημείο λειτουργίας.
- Συνήθως παρέχεται στον χειριστή μια συνθήκη λειτουργίας γύρω από την οποία θα εκτελέσει την ανάλυση και το σχεδιασμό του ρυθμιστή.
- Η πλήρης εύρεση του σημείου λειτουργίας είναι το πρώτο βήμα.

Παραγωγή συστήματος χώρου κατάστασης

Χρησιμοποιούμε ανάπτυγμα Taylor για να παράγουμε το μοντέλο.

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,d) \qquad \overset{\text{Στόχος μας}}{\Longrightarrow} \qquad \frac{dx}{dt} = Ax + Bu + Wd$$

$$y_c = h_c(x,u,d) \qquad\qquad\qquad y_c = Cx + Du + Ed$$

- Από τη βελτιστοποίηση έχουμε το επιθυμητό σημείο λειτουργίας $y_c = y_s$.
- Από τη μελέτη έχουμε την συνηθισμένη τιμή των διαταραχών $d = d_s$
- Με βάση το σημείο αυτό πρέπει να βρούμε το **σημείο αναφοράς**
  - των μεταβλητών κατάστασης, $x = x_0$
  - των χειριζόμενων μεταβλητών, $u = u_0$
- Συνήθως είναι σημείο ισορροπίας των μεταβλητών κατάστασης και ορίζεται ως $dx/dt = 0$

  Τότε $x_0 \equiv x_s$ και $u_0 \equiv u_s$
- Χρησιμοποιούμε το **μη γραμμικό σύστημα** για να βρούμε το σημείο ισορροπίας

ChemEngUP
UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering

Παραγωγή συστήματος χώρου κατάστασης

Χρησιμοποιούμε ανάπτυγμα Taylor για να παράγουμε το μοντέλο.

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,d) \qquad \qquad \frac{dx}{dt} = Ax + Bu + Wd$$
$$y_c = h_c(x,u,d) \quad \overset{\text{Στόχος μας}}{\Longrightarrow} \quad y_c = Cx + Du + Ed$$

- Από τη βελτιστοποίηση έχουμε το επιθυμητό σημείο λειτουργίας $y_c=y_s$.
- Από τη μελέτη έχουμε την συνηθισμένη τιμή των διαταραχών $d = d_s$
- Με βάση το σημείο αυτό πρέπει να βρούμε το **σημείο αναφοράς**
  - των μεταβλητών κατάστασης, $x = x_0$
  - των χειριζόμενων μεταβλητών, $u = u_0$
- Συνήθως είναι σημείο ισορροπίας των μεταβλητών κατάστασης και ορίζεται ως $dx/dt = 0$

$$\frac{dx}{dt} = 0 \qquad \qquad 0 = f(x_s,u_s,d_s)$$
$$y_c = y_s \quad \Longrightarrow \quad y_s = h_c(x_s,u_s,d_s)$$

Εύρεση σημείου αναφοράς

- Από βελτιστοποίηση έχουμε το επιθυμητό σημείο λειτουργίας $y_c=y_s$.
- Από το σημείο λειτουργίας βρίσκουμε το σημείο αναφοράς των
  - μεταβλητών κατάστασης
  - χειριζόμενων μεταβλητών
- Είναι ένα σημείο ισορροπίας των μεταβλητών κατάστασης ($dx/dt = 0$)
- Χρησιμοποιούμε το μη γραμμικό σύστημα για να βρούμε τα σημεία ισορροπίας

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 0 \\ y_c &= y_s \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 0 &= f(x_s, u_s, d_s) \\ y_s &= h_c(x_s, u_s, d_s) \end{aligned}$$

- Τι κάνουμε με τις διαταραχές; Σε όλες τις διεργασίες γνωρίζουμε τη συνηθισμένη τιμή των διαταραχών κατά την λειτουργία. Είναι η ονομαστική τιμή $d=d_s$
- **Χρησιμοποιούμε μη γραμμικούς επιλυτές για να βρεθούν τα *x* & *u* που συμβολίζονται x_s & u_s**

- ***Σημείωση:*** *Τι κάνουμε αν δίνεται το u_s αντί του y_s;* *Βρίσκουμε το x_s, y_s*

  Αν δίνονται τα u_s, y_s; *Βρίσκουμε το x_s.*

ChemEngUP
UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering

Εύρεση σημείου αναφοράς: Σημειώσεις

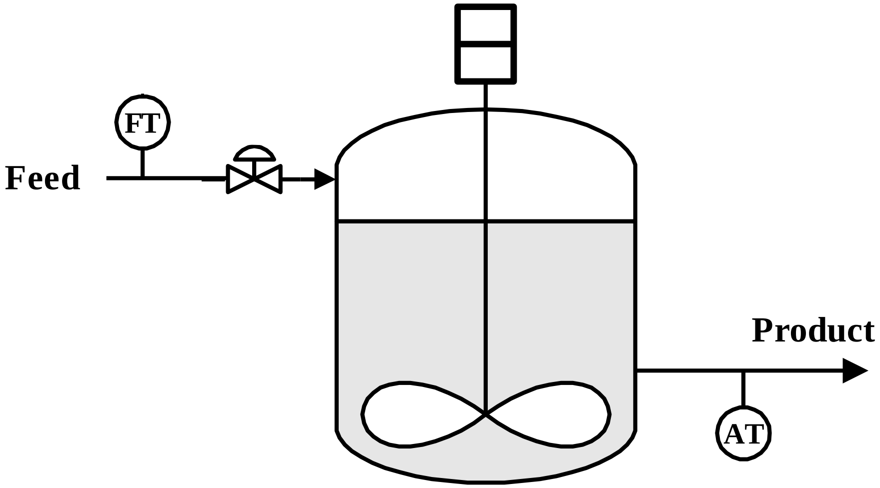
- Έχουμε το **επιθυμητό σημείο** λειτουργίας $y_c = y_s$.
- Είναι **σημείο ισορροπίας** των μεταβλητών κατάστασης ($dx/dt = 0$)
- Χρησιμοποιούμε τη **ονομαστική τιμή** $d = d_s$
- Χρησιμοποιούμε το **μη γραμμικό σύστημα και επιλυτές** για να βρούμε τα x_s & u_s

$$\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = 0 \\ y_c = y_s \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 0 = f(x_s, u_s, d_s) \\ y_s = h_c(x_s, u_s, d_s) \end{array}$$

- *Αφού το σύστημα είναι μη γραμμικό:*

1. *Μια λύση=> Ένα σημείο ισορροπίας.* Προχωρούμε το επόμενο βήμα.
2. *Πολλαπλές λύσεις =>* κάνουμε μια δευτερεύουσα ανάλυση για να βρούμε ποιο σημείο λειτουργίας είναι πιο ωφέλιμο για την εταιρεία!
3. *Καμία λύση =>* Εξηγούμε στην διοίκηση ότι αυτό που ζητείται είναι ανέφικτο!

Παράδειγμα: ισοθερμοκρασιακός ΑΣΑ



$$A \xrightarrow{r_1} B \xrightarrow{r_2} C$$

$$r_1 = k_1 C_A^2 \quad r_2 = k_2 C_B$$

- Θέλουμε να παράγουμε οικονομικά συστατικό B
- Έχει δοθεί η *T* από βελτιστοποίηση
- Έχει δοθεί η βέλτιστη παραγωγή C_B
- Γνωρίζουμε τον μηχανισμό των αντιδράσεων
- Η συγκέντρωση στο ρεύμα εισόδου ταλαντώνεται
- Γνωρίζουμε τον εξοπλισμό

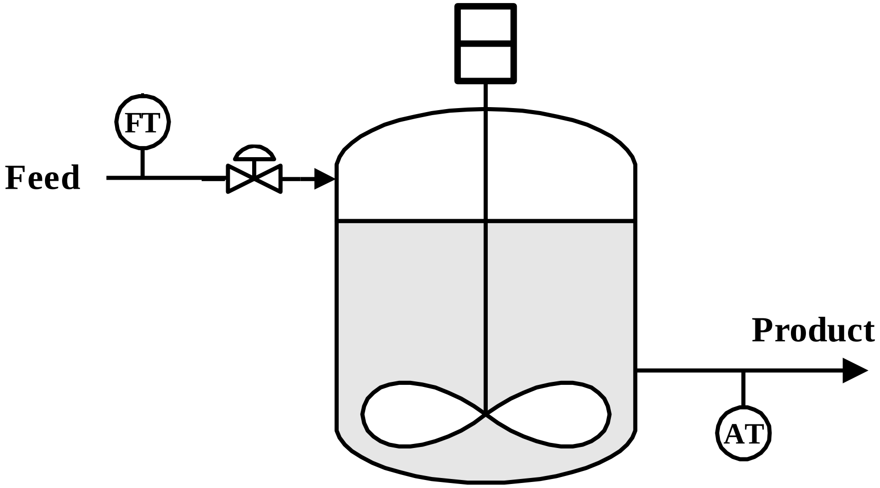
$$V = 100 \text{ L}, k_1 = 0.2 \text{ L/moL min} \quad , k_2 = 3[1/\text{min}]$$

- Μετά την βελτιστοποίηση μας δίδεται

$$C_{B,s} = 0.11[\text{moL/L}], C_{A0,s} = 2[\text{moL/L}]$$

UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Εύρεση σημείου αναφοράς



$$A \xrightarrow{r_1} B \xrightarrow{r_2} C$$

$$r_1 = k_1 C_A^2 \qquad r_2 = k_2 C_B$$

$$C_{B,s} = 0.11[\mathrm{moL/L}], C_{A0,s} = 2[\mathrm{moL/L}]$$

- Δυναμικό μοντέλο διεργασίας (ισοζύγια μάζας)

$$V_r \frac{dC_A}{dt} = \frac{F}{\rho}[C_{A0} - C_A] - V_r k_1 C_A^2$$

$$V_r \frac{dC_B}{dt} = -\frac{FC_B}{\rho} + V_r k_1 C_A^2 - V_r k_2 C_B$$

- Μοντέλο διεργασίας σε σταθερή κατάσταση

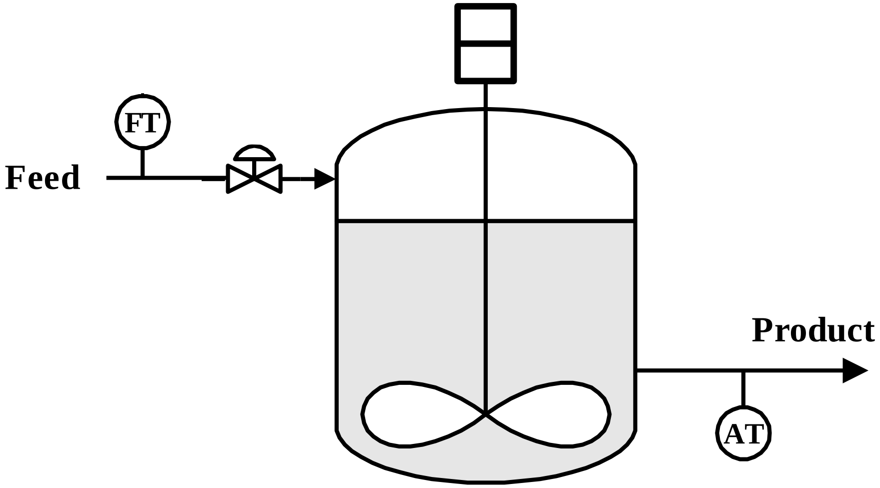
$$0 = \frac{F}{\rho V_r}[C_{A0} - C_A] - k_1 C_A^2$$

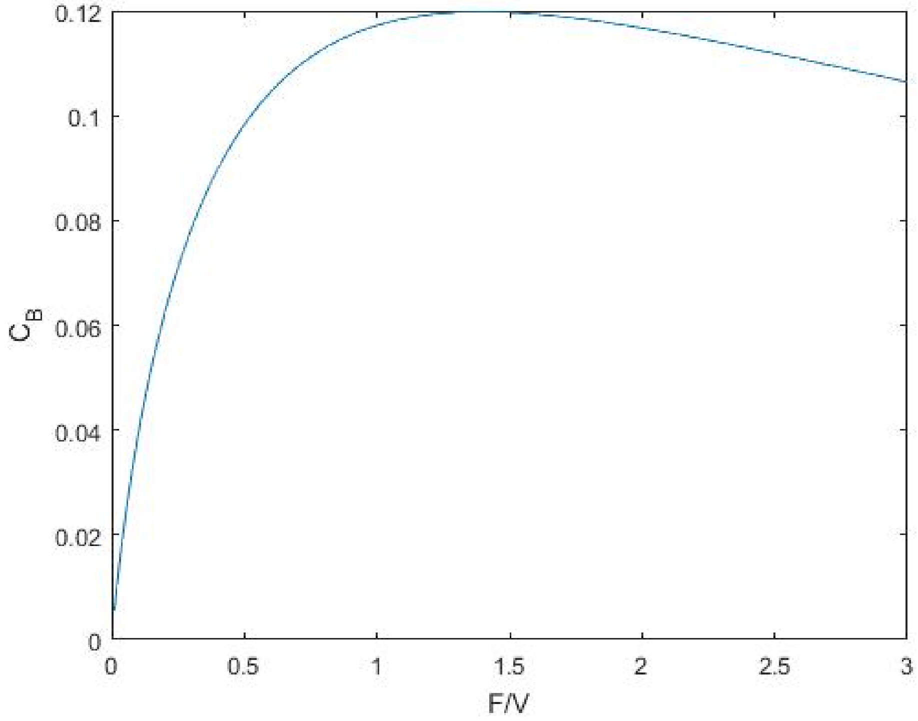
$$0 = -\frac{F}{\rho V_r} C_B + k_1 C_A^2 - k_2 C_B$$

Εύρεση σημείου αναφοράς

$$0 = \frac{F}{\rho V_r}[C_{A0} - C_A] - k_1 C_A^2$$

$$0 = -\frac{F}{\rho V_r} C_B + k_1 C_A^2 - k_2 C_B$$





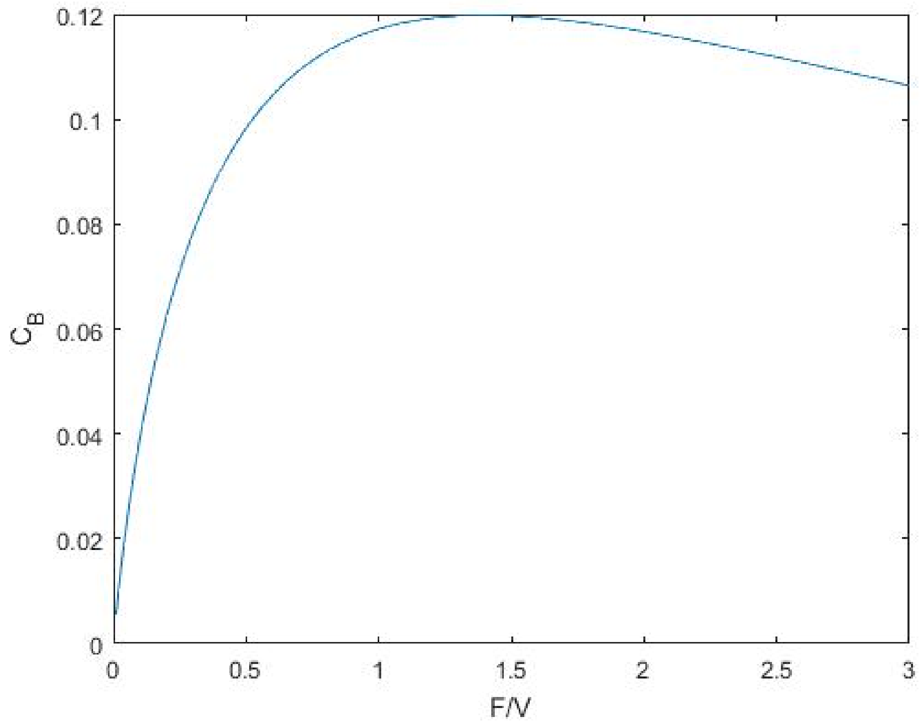
$$A \xrightarrow{r_1} B \xrightarrow{r_2} C$$

$$r_1 = k_1 C_A^2 \quad r_2 = k_2 C_B$$

$$C_{B,s} = 0.11[\mathrm{moL/L}], C_{A0,s} = 2[\mathrm{moL/L}]$$

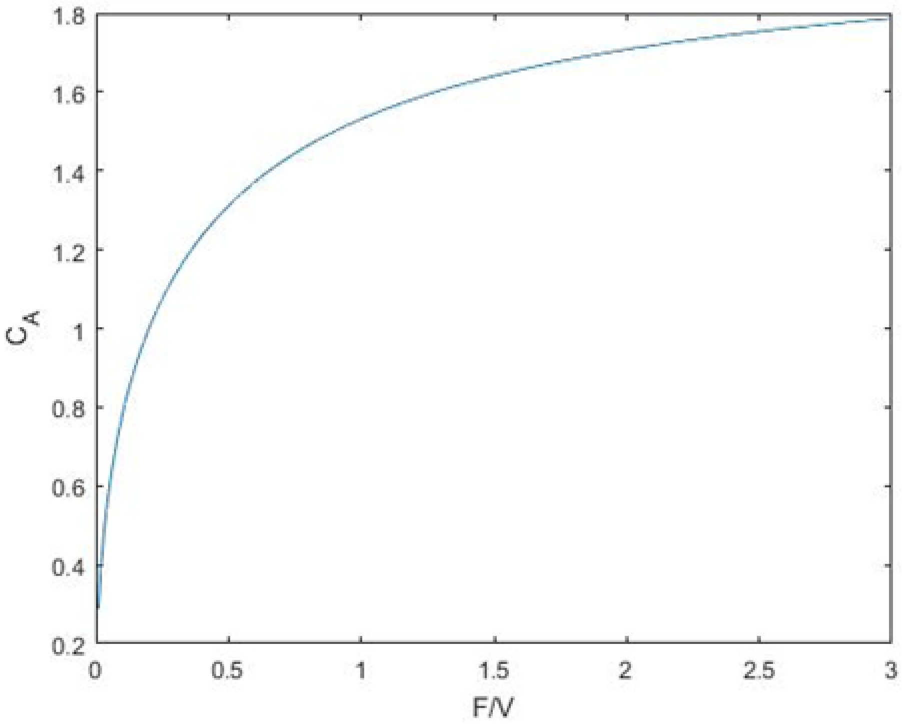
UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Εύρεση σημείου αναφοράς



$$0 = \frac{F}{\rho V_r}[C_{A0} - C_A] - k_1 C_A^2$$

$$0 = -\frac{F}{\rho V_r} C_B + k_1 C_A^2 - k_2 C_B$$

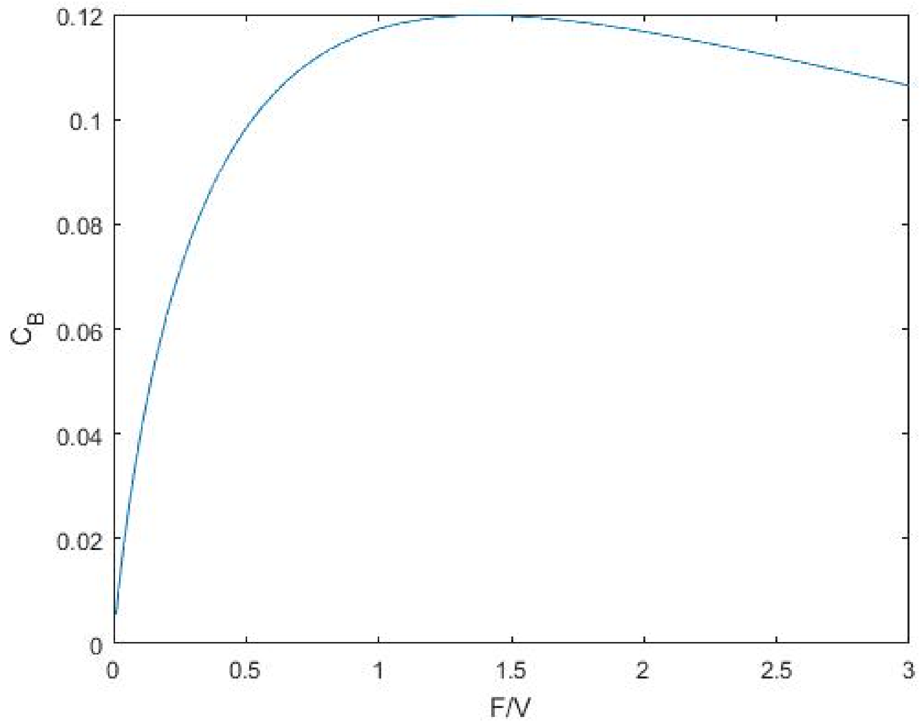


$$A \xrightarrow{r_1} B \xrightarrow{r_2} C$$

$$r_1 = k_1 C_A^2 \quad r_2 = k_2 C_B$$

$$C_{B,s} = 0.11[\mathrm{moL/L}], C_{A0,s} = 2[\mathrm{moL/L}]$$

Εύρεση σημείου αναφοράς



$$0 = \frac{F}{\rho V_r}[C_{A0} - C_A] - k_1 C_A^2$$

$$0 = -\frac{F}{\rho V_r} C_B + k_1 C_A^2 - k_2 C_B$$

$$F/\rho V = 0.717[1/\min]$$
$$C_{B,s} = 0.1100[\mathrm{moL/L}]$$
$$C_{A,s} = 1.4298[\mathrm{moL/L}]$$

$$A \xrightarrow{r_1} B \xrightarrow{r_2} C$$

$$r_1 = k_1 C_A^2 \quad r_2 = k_2 C_B$$

$$F/\rho V = 2.670[1/\min]$$
$$C_{B,s} = 0.1100[\mathrm{moL/L}]$$
$$C_{A,s} = 1.7663[\mathrm{moL/L}]$$

$$C_{B,s} = 0.11[\mathrm{moL/L}], C_{A0,s} = 2[\mathrm{moL/L}]$$

ChemEngUP
UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering

Δημιουργία δυναμικού συστήματος

Επιλέγουμε αυτό το σημείο λειτουργείας για σημείο αναφοράς

$$F/\rho V = 0.717[1/\min]$$
$$C_{B,s} = 0.1100[\mathrm{moL/L}]$$
$$C_{A,s} = 1.4298[\mathrm{moL/L}]$$

Πως κατασκευάζουμε το γραμμικό σύστημα;

α) Έχουμε το μη γραμμικό μοντέλο της διεργασίας

$$V_r \frac{dC_A}{dt} = \frac{F}{\rho}\left[C_{A0} - C_A\right] - V_r k_1 C_A^2$$

$$V_r \frac{dC_B}{dt} = -\frac{FC_B}{\rho} + V_r k_1 C_A^2 - V_r k_2 C_B$$

β) ας το γράψουμε σε standard μορφή

UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Δημιουργία δυναμικού συστήματος

Επιλέγουμε αυτό το σημείο λειτουργείας για σημείο αναφοράς

$$F/\rho V = 0.717[1/\min]$$
$$C_{B,s} = 0.1100[\mathrm{moL/L}]$$
$$C_{A,s} = 1.4298[\mathrm{moL/L}]$$

Πως κατασκευάζουμε το γραμμικό σύστημα;

α) Έχουμε το μη γραμμικό μοντέλο της διεργασίας

$$V_r \frac{dC_A}{dt} = \frac{F}{\rho}\left[C_{A0} - C_A\right] - V_r k_1 C_A^2$$

$$V_r \frac{dC_B}{dt} = -\frac{FC_B}{\rho} + V_r k_1 C_A^2 - V_r k_2 C_B$$

$$\Rightarrow$$

$$u = F$$
$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_A \\ C_B \end{bmatrix}$$
$$d = C_{A0}$$

β) ας το γράψουμε σε standard μη γραμμική μορφή

Δημιουργία δυναμικού συστήματος

Επιλέγουμε αυτό το σημείο λειτουργείας για σημείο αναφοράς

$$F/\rho V = 0.717[1/\min]$$
$$C_{B,s} = 0.1100[\text{moL/L}]$$
$$C_{A,s} = 1.4298[\text{moL/L}]$$

Πως κατασκευάζουμε το γραμμικό σύστημα;

α) Έχουμε το μη γραμμικό μοντέλο της διεργασίας

$$V_r \frac{dC_A}{dt} = \frac{F}{\rho}\left[C_{A0} - C_A\right] - V_r k_1 C_A^2$$

$$V_r \frac{dC_B}{dt} = -\frac{FC_B}{\rho} + V_r k_1 C_A^2 - V_r k_2 C_B$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -k_1 x_1^2 + \frac{(d - x_1)u}{V_r \rho}$$
$$\frac{dx_2}{dt} = k_1 x_1^2 - k_2 x_2 - \frac{x_2 u}{V_r \rho}$$

$$y_c = x_2$$

β) ας το γράψουμε σε standard μη γραμμική μορφή

UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Δημιουργία δυναμικού συστήματος

Επιλέγουμε αυτό το σημείο λειτουργείας για σημείο αναφοράς

$$F/\rho V = 0.717[1/\min]$$
$$C_{B,s} = 0.1100[\text{moL/L}]$$
$$C_{A,s} = 1.4298[\text{moL/L}]$$

Πως κατασκευάζουμε το γραμμικό σύστημα;

α) Έχουμε το μη γραμμικό μοντέλο της διεργασίας

$$V_r \frac{dC_A}{dt} = \frac{F}{\rho}\left[C_{A0} - C_A\right] - V_r k_1 C_A^2$$

$$V_r \frac{dC_B}{dt} = -\frac{FC_B}{\rho} + V_r k_1 C_A^2 - V_r k_2 C_B$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -k_1 x_1^2 + \frac{(d - x_1)u}{V_r \rho}$$
$$\frac{dx_2}{dt} = k_1 x_1^2 - k_2 x_2 - \frac{x_2 u}{V_r \rho}$$

$$y_c = x_2$$

β) ας το γράψουμε σε standard μη γραμμική μορφή

$$f(u,x,d) = \begin{bmatrix} f_1(x,u,d) \\ f_2(x,u,d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 x_1^2 + \frac{(d - x_1)u}{V_r \rho} \\ k_1 x_1^2 - k_2 x_2 - \frac{x_2 u}{V_r \rho} \end{bmatrix}$$

$$h_m = x_2$$

Δημιουργία δυναμικού συστήματος

Επιλέγουμε αυτό το σημείο λειτουργείας για σημείο αναφοράς

$$F/\rho V = 0.717[1/\min]$$
$$C_{B,s} = 0.1100[\mathrm{moL/L}]$$
$$C_{A,s} = 1.4298[\mathrm{moL/L}]$$

Πως κατασκευάζουμε το γραμμικό σύστημα;

α) Έχουμε το μη γραμμικό μοντέλο της διεργασίας

$$V_r \frac{dC_A}{dt} = \frac{F}{\rho}\left[C_{A0} - C_A\right] - V_r k_1 C_A^2$$

$$V_r \frac{dC_B}{dt} = -\frac{FC_B}{\rho} + V_r k_1 C_A^2 - V_r k_2 C_B$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,d)$$

$$y_c = h(x)$$

β) ας το γράψουμε σε standard μη γραμμική μορφή

$$f(u,x,d) = \begin{bmatrix} f_1(x,u,d) \\ f_2(x,u,d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 x_1^2 + \dfrac{(d - x_1)u}{V_r \rho} \\ k_1 x_1^2 - k_2 x_2 - \dfrac{x_2 u}{V_r \rho} \end{bmatrix}$$

$$h_m = x_2$$

Δημιουργία δυναμικού συστήματος

Επιλέγουμε αυτό το σημείο λειτουργείας για σημείο αναφοράς

$$F/\rho V = 0.717[1/\min]$$
$$C_{B,s} = 0.1100[\text{moL/L}]$$
$$C_{A,s} = 1.4298[\text{moL/L}]$$

Πως κατασκευάζουμε το γραμμικό σύστημα;

α) Έχουμε το μη γραμμικό μοντέλο της διεργασίας

$$V_r \frac{dC_A}{dt} = \frac{F}{\rho}\left[C_{A0} - C_A\right] - V_r k_1 C_A^2$$

$$V_r \frac{dC_B}{dt} = -\frac{FC_B}{\rho} + V_r k_1 C_A^2 - V_r k_2 C_B$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = f(x, u, d)$$

$$y_c = h(x)$$

β) ας το γράψουμε σε standard μη γραμμική μορφή

γ) ας το γραμμικοποιήσουμε στο σημείο αναφοράς

$$\boxed{\begin{aligned} u_0 &= 71.7\rho \\ x_0 &= \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{A,s} \\ C_{B.s} \end{bmatrix} \\ d_0 &= C_{A0,s} \end{aligned}}$$

UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Ανάπτυγμα Taylor

Το ανάπτυγμα Taylor είναι κομψό αλλά θέλει προσοχή στη σημειογραφία.

$$f(x,u,d) = \begin{bmatrix} f_1(x,u,d) \\ f_2(x,u,d) \\ \vdots \\ f_N(x,u,d) \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_M \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_K \end{bmatrix} \qquad (x_0, u_0, d_0)$$

$$f(x,u,d) \cong f(x_0,u_0,d_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} (x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} (u - u_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial d}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} (d - d_0)$$

Ανάπτυγμα Taylor

Το ανάπτυγμα Taylor είναι κομψό αλλά θέλει προσοχή στη σημειογραφία.

$$f(x,u,d) = \begin{bmatrix} f_1(x,u,d) \\ f_2(x,u,d) \\ \vdots \\ f_N(x,u,d) \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \qquad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_M \end{bmatrix} \qquad d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_K \end{bmatrix} \qquad (x_0, u_0, d_0)$$

$$f(x,u,d) \cong f(x_0,u_0,d_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} (x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} (u - u_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial d}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} (d - d_0)$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} & \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} & \cdots & \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_N}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} \\ \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} & \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} & \cdots & \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_N}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left.\frac{\partial f_N}{\partial x_1}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} & \left.\frac{\partial f_N}{\partial x_2}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} & \cdots & \left.\frac{\partial f_N}{\partial x_N}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} \end{bmatrix}$$

Ανάπτυγμα Taylor

$$f(u,x,d)=\begin{bmatrix} f_1(x,u,d) \\ f_2(x,u,d) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -k_1x_1^2+\dfrac{(d-x_1)u}{V_r\rho} \\ k_1x_1^2-k_2x_2-\dfrac{x_2u}{V_r\rho} \end{bmatrix}$$

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C_A \\ C_B \end{bmatrix}, u=F, d=C_{A0}$$

$$(x_0,u_0,d_0)$$

$$f(x,u,d)\cong f(x_0,u_0,d_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,u_0,d_0)}(x-x_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_0,u_0,d_0)}(u-u_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial d}\right|_{(x_0,u_0,d_0)}(d-d_0)$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,u_0,d_0)}=\begin{bmatrix} \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} & \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} & \cdots & \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x_N}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} \\ \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} & \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} & \cdots & \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x_N}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left.\dfrac{\partial f_N}{\partial x_1}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} & \left.\dfrac{\partial f_N}{\partial x_2}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} & \cdots & \left.\dfrac{\partial f_N}{\partial x_N}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} \end{bmatrix}$$

Ανάπτυγμα Taylor

$$f(u,x,d)=\begin{bmatrix} f_1(x,u,d)\\ f_2(x,u,d)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -k_1x_1^2+\dfrac{(d-x_1)u}{V_r\rho}\\ k_1x_1^2-k_2x_2-\dfrac{x_2u}{V_r\rho}\end{bmatrix}$$

$$x=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C_A\\ C_B\end{bmatrix}, u=F, d=C_{A0}$$

$$(x_0,u_0,d_0)$$

$$f(x,u,d)\cong f(x_0,u_0,d_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,u_0,d_0)}(x-x_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_0,u_0,d_0)}(u-u_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial d}\right|_{(x_0,u_0,d_0)}(d-d_0)$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,u_0,d_0)}=\begin{bmatrix} \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} & \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{(x_0,u_0,d_0)}\\ \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} & \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{(x_0,u_0,d_0)}\end{bmatrix}$$

Ανάπτυγμα Taylor

$$f(u,x,d) = \begin{bmatrix} f_1(x,u,d) \\ f_2(x,u,d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 x_1^2 + \dfrac{(d-x_1)u}{V_r\rho} \\ k_1 x_1^2 - k_2 x_2 - \dfrac{x_2 u}{V_r \rho} \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_A \\ C_B \end{bmatrix}, u = F, d = C_{A0}$$

$$(x_0, u_0, d_0)$$

$$f(x,u,d) \cong f(x_0,u_0,d_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,u_0,d_0)}(x-x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_0,u_0,d_0)}(u-u_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial d}\right|_{(x_0,u_0,d_0)}(d-d_0)$$

$$f(x_0,u_0,d_0) \cong f(x_0,u_0,d_0) + \begin{bmatrix} \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} & \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} \\ \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} & \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_{1,0} \\ x_2 - x_{2,0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial u}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} \\ \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial u}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} \end{bmatrix}(u-u_0)$$

$$+ \begin{bmatrix} \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial d}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} \\ \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial d}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} \end{bmatrix}(d-d_0)$$

Ανάπτυγμα Taylor

$$f(u,x,d) = \begin{bmatrix} f_1(x,u,d) \\ f_2(x,u,d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 x_1^2 + \dfrac{(d - x_1)u}{V_r \rho} \\ k_1 x_1^2 - k_2 x_2 - \dfrac{x_2 u}{V_r \rho} \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_A \\ C_B \end{bmatrix}, u = F, d = C_{A0}$$

$$(x_0, u_0, d_0)$$

$$f(x,u,d) \cong f(x_0,u_0,d_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} (x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} (u - u_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial d}\right|_{(x_0,u_0,d_0)} (d - d_0)$$

$$f(x,u,d) \cong \begin{bmatrix} -k_1 x_{1,0}^2 + \dfrac{(d_0 - x_{1,0})u_0}{V_r \rho} \\ k_1 x_{1,0}^2 - k_2 x_{2,0} - \dfrac{x_{2,0} u_0}{V_r \rho} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2k_1 x_{1,0} - \dfrac{u_0}{V_r \rho} & 0 \\ 2k_1 x_{1,0} & -k_2 - \dfrac{u_0}{V_r \rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_{1,0} \\ x_2 - x_{2,0} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \dfrac{d_0 - x_{1,0}}{V_r \rho} \\ -\dfrac{x_{2,0}}{V_r \rho} \end{bmatrix} (u - u_0) + \begin{bmatrix} \dfrac{u_0}{V_r \rho} \\ 0 \end{bmatrix} (d - d_0)$$

University of Patras
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Ανάπτυγμα Taylor

$$f(u,x,d)=\begin{bmatrix} f_1(x,u,d)\\ f_2(x,u,d)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -k_1x_1^2+\dfrac{(d-x_1)u}{V_r\rho}\\ k_1x_1^2-k_2x_2-\dfrac{x_2u}{V_r\rho}\end{bmatrix}$$

$$x=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C_A\\ C_B\end{bmatrix}, u=F, d=C_{A0}$$

$$(x_0,u_0,d_0)$$

$$f(x,u,d)\cong f(x_0,u_0,d_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,u_0,d_0)}(x-x_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_0,u_0,d_0)}(u-u_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial d}\right|_{(x_0,u_0,d_0)}(d-d_0)$$

$$f(x,u,d)\cong\begin{bmatrix} -k_1x_{1,0}^2+\dfrac{(d_0-x_{1,0})u_0}{V_r\rho}\\ k_1x_{1,0}^2-k_2x_{2,0}-\dfrac{x_{2,0}u_0}{V_r\rho}\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix} -2k_1x_{1,0}-\dfrac{u_0}{V_r\rho} & 0\\ 2k_1x_{1,0} & -k_2-\dfrac{u_0}{V_r\rho}\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} x_1-x_{1,0}\\ x_2-x_{2,0}\end{bmatrix}$$

$$+\underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{d_0-x_{1,0}}{V_r\rho}\\ -\dfrac{x_{2,0}}{V_r\rho}\end{bmatrix}}_{B}(u-u_0)+\underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{u_0}{V_r\rho}\\ 0\end{bmatrix}}_{W}(d-d_0)$$

Ανάπτυγμα Taylor

$$f(u,x,d) = \begin{bmatrix} f_1(x,u,d) \\ f_2(x,u,d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 x_1^2 + \dfrac{(d - x_1)u}{V_r \rho} \\ k_1 x_1^2 - k_2 x_2 - \dfrac{x_2 u}{V_r \rho} \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_A \\ C_B \end{bmatrix}, u = F, d = C_{A0}$$

$$(x_0, u_0, d_0)$$

$$f(x_0, u_0, d_0) = \begin{bmatrix} -k_1 x_{1,0}^2 + \dfrac{(d_0 - x_{1,0})u_0}{V_r \rho} \\ k_1 x_{1,0}^2 - k_2 x_{2,0} - \dfrac{x_{2,0} u_0}{V_r \rho} \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} -2k_1 x_{1,0} - \dfrac{u_0}{V_r \rho} & 0 \\ 2k_1 x_{1,0} & -k_2 - \dfrac{u_0}{V_r \rho} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \dfrac{d_0 - x_{1,0}}{V_r \rho} \\ -\dfrac{x_{2,0}}{V_r \rho} \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} \dfrac{u_0}{V_r \rho} \\ 0 \end{bmatrix},$$

Αντίστοιχα για το $\mathrm{h_c}(x,u,d)$ έχουμε $C = [0 \quad 1], D = 0, E = 0$

UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Δημιουργία δυναμικού συστήματος

Επιλέγουμε αυτό το σημείο λειτουργείας για σημείο αναφοράς

$$F/\rho V = 0.717[1/\min]$$
$$C_{B,s} = 0.1100[\mathrm{moL/L}]$$
$$C_{A,s} = 1.4298[\mathrm{moL/L}]$$

Πως κατασκευάζουμε το γραμμικό σύστημα;

α) Έχουμε το μη γραμμικό μοντέλο της διεργασίας

$$V_r \frac{dC_A}{dt} = \frac{F}{\rho}\left[C_{A0} - C_A\right] - V_r k_1 C_A^2$$

$$V_r \frac{dC_B}{dt} = -\frac{FC_B}{\rho} + V_r k_1 C_A^2 - V_r k_2 C_B$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{d(x - x_0)}{dt} = f(x_0, u_0, d_0) + \boldsymbol{A}(x - x_0) + \boldsymbol{B}(u - u_0) + \boldsymbol{W}(d - d_0)$$

$$y_c = h(x_0) + \boldsymbol{C}(x - x_0) + \boldsymbol{D}(u - u_0) + \boldsymbol{E}(d - d_0)$$

β) ας το γράψουμε σε standard μη γραμμική μορφή

γ) ας το γραμμικοποιήσουμε στο σημείο αναφοράς

δ) ας ορίσουμε της μεταβλητές απόκλισης από το σημείο αναφοράς

UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Ανάπτυγμα Taylor

$$f(u,x,d) = \begin{bmatrix} f_1(x,u,d) \\ f_2(x,u,d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 x_1^2 + \dfrac{(d - x_1)u}{V_r \rho} \\ k_1 x_1^2 - k_2 x_2 - \dfrac{x_2 u}{V_r \rho} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_A \\ C_B \end{bmatrix}, u = F, d = C_{A0}$$

$$(x_0, u_0, d_0)$$

$$x = x - x_0 = \begin{bmatrix} x_1 - x_{1,0} \\ x_2 - x_{2,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_A - C_{A,s} \\ C_B - C_{B,s} \end{bmatrix},$$

$$u = u - u_0 = u - 71.7\rho,$$

$$d = d - d_0 = d - C_{A0,s}$$

$$y_c = y_c - y_0 = y_c - C_{B,s}$$

Δημιουργία δυναμικού συστήματος

Επιλέγουμε αυτό το σημείο λειτουργείας για σημείο αναφοράς

$$F/\rho V = 0.717[1/\min]$$
$$C_{B,s} = 0.1100[\mathrm{moL/L}]$$
$$C_{A,s} = 1.4298[\mathrm{moL/L}]$$

Πως κατασκευάζουμε το γραμμικό σύστημα;

α) Έχουμε το μη γραμμικό μοντέλο της διεργασίας

$$V_r \frac{dC_A}{dt} = \frac{F}{\rho}\left[C_{A0} - C_A\right] - V_r k_1 C_A^2$$

$$\Rightarrow$$

$$V_r \frac{dC_B}{dt} = -\frac{FC_B}{\rho} + V_r k_1 C_A^2 - V_r k_2 C_B$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bu + Wd \\ y_c &= Cx + Du + Ed \end{aligned}}$$

β) ας το γράψουμε σε standard μη γραμμική μορφή

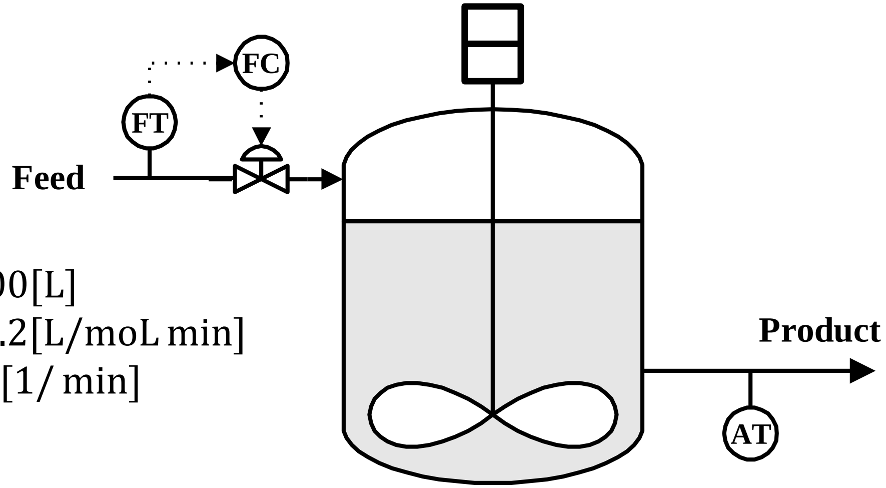
γ) ας το γραμμικοποιήσουμε στο σημείο αναφοράς

δ) ας ορίσουμε της μεταβλητές απόκλισης από το σημείο αναφοράς

ε) ας γράψουμε την περιγραφή χώρου κατάστασης

Γραμμικοποίηση δυναμικού συστήματος

$$F/\rho = 71.7[\mathrm{L/\,min}]$$
$$C_{B,s} = 0.1100[\mathrm{moL/L}]$$
$$C_{A0,s} = 2.00[\mathrm{moL/L}]$$
$$C_{A,s} = 1.4298[\mathrm{moL/L}]$$



$$V = 100[\mathrm{L}]$$
$$k_1 = 0.2[\mathrm{L/moL\,min}]$$
$$k_2 = 3[1/\,\mathrm{min}]$$

$$V_r \frac{dC_A}{dt} = F\left[C_{A0} - C_A\right] - V_r k_1 C_A^2$$

$$V_r \frac{dC_B}{dt} = -FC_B + V_r k_1 C_A^2 - V_r k_2 C_B$$

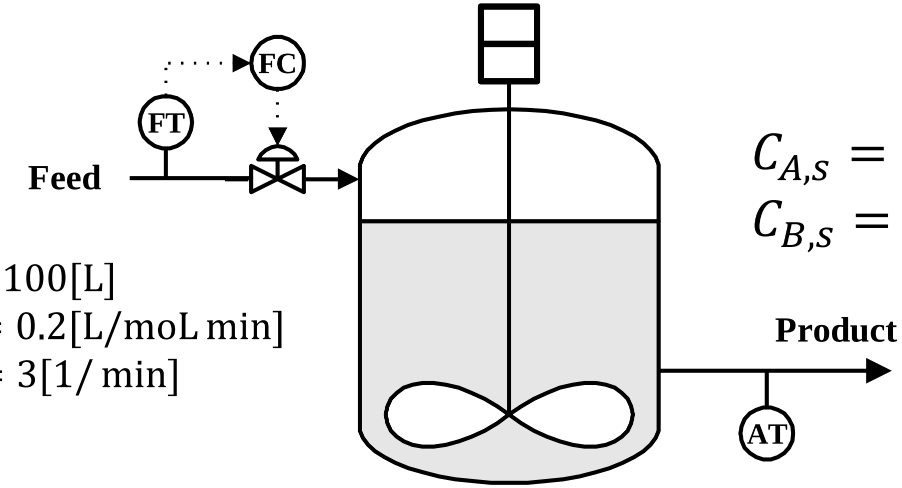
$$\boxed{\frac{dx}{dt} \cong \begin{bmatrix} -1.2889 & 0 \\ 0.5719 & -2.717 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_A - 1.4298 \\ C_B - 0.1100 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0057 \\ -0.0011 \end{bmatrix} (F - 71.7\rho) + \begin{bmatrix} 0.717 \\ 0 \end{bmatrix} (C_{A0} - 2)}$$

UNIVERSITY OF PATRAS
Department Of Chemical Engineering
ChemEngUP

Τελική περιγραφή σε χώρο κατάστασης

$$F/\rho = 71.7[\mathrm{L/min}] \qquad \boxed{u = (F - 71.7\rho)}$$

$$C_{A0,s} = 2.00[\mathrm{moL/L}] \qquad \boxed{d = (C_{A0} - 2)}$$



$V = 100[\mathrm{L}]$
$k_1 = 0.2[\mathrm{L/moL\,min}]$
$k_2 = 3[1/\mathrm{min}]$

$$C_{A,s} = 1.4298[\mathrm{moL/L}]$$
$$C_{B,s} = 0.1100[\mathrm{moL/L}]$$

$$\boxed{x = \begin{bmatrix} C_A - 1.4298 \\ C_B - 0.1100 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &\cong \begin{bmatrix} -1.2889 & 0 \\ 0.5719 & -2.717 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.0057 \\ -0.0011 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0.717 \\ 0 \end{bmatrix} d \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{aligned}}$$