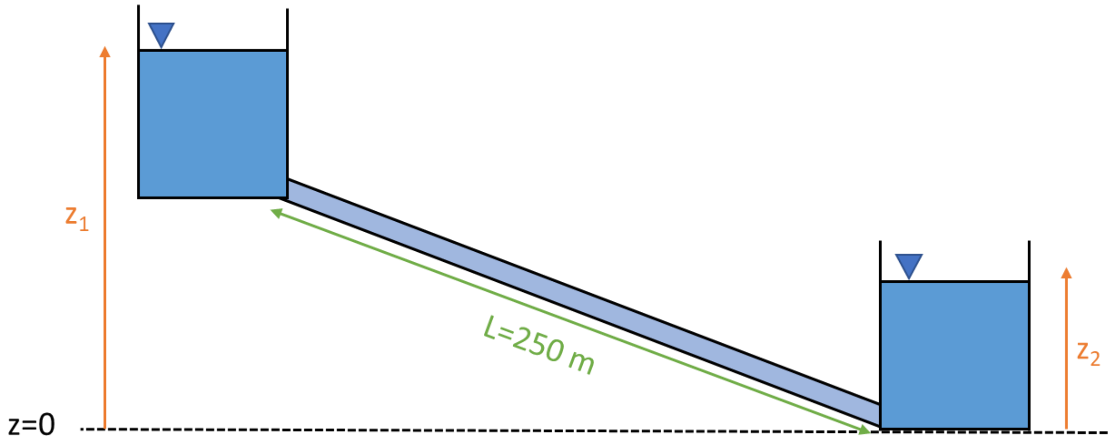
Φυσικές Διεργασίες ΙΙ: Φροντιστήριο 2. (24/03/2021)

ΣΩΛΗΝΩΣΕΙΣ

Άσκηση 1.

Νερό πρόκειται να ρεύσει λόγο βαρύτητας από μια δεξαμενή σε μια άλλη σε χαμηλότερο ύψος μέσω ενός ευθύγραμμου σωλήνα, ο οποίος θεωρείται λείος. Η ογκομετρική παροχή είναι 0.007 m^3/s, διάμετρος του σωλήνα είναι 50 mm και το μήκος του σωλήνα είναι 250 m. Κάθε δεξαμενή είναι ανοιχτή στην ατμόσφαιρα. Αμελώντας τις ελάσσονες απώλειες, υπολογίστε τη διαφορά ύψους που απαιτείται για να διατηρηθεί η παροχή.



ΛΥΣΗ

Α) Παραδοχές

1. Ο σωλήνας θεωρείται λείος άρα ο συντελεστής τριβής εξαρτάται μόνο από τον αριθμό Reynolds.
2. Οι δεξαμενές είναι ανοιχτές στην ατμόσφαιρα άρα οι πιέσεις στα σημεία 1 και 2 είναι
$$P_1 = P_2 = P_{atm}$$
3. Το εμβαδόν διατομής των δεξαμενών είναι πολύ μεγαλύτερο από αυτό της σωλήνωσης και άρα θεωρώ ότι οι ταχύτητες είναι πολύ μικρότερες στις επιφάνειες των δεξαμενών σε σχέση με αυτή του σωλήνα. Επομένως μπορώ να θεωρήσω ότι οι ταχύτητες στις επιφάνειες των δεξαμενών είναι πρακτικά μηδέν: $< v_1 > \cong 0 \;\kappa\alpha\iota < v_2 > \cong 0$
4. Νερό στους 20 °C $\Longrightarrow \rho = 1000 \frac{kg}{m^3} \quad \kappa\alpha\iota \;\; \mu = 1\, cp = 10^{-3}\, Pa\, s$
5. Αμελητέες ελάσσονες απώλειες: $h_\varepsilon = 0$

Β) Ισοζύγιο ενέργειας από την δεξαμενή 1 στην δεξαμενή 2

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{1}{2}\alpha_1 < v_1 >^2 + g z_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{1}{2}\alpha_2 < v_2 >^2 + g z_2 + h_{O\Lambda} \Longrightarrow$$

(Εφαρμόζοντας τις παραδοχές καταλήγω ότι)

$$g(z_1 - z_2) = h_{O\Lambda} = h_\mu = f(Re)\frac{l}{D}\frac{< v >^2}{2} \quad (1)$$

Υπολογισμός της ταχύτητας μέσα στη σωλήνωση:

$$Q = A < v > \Longrightarrow < v > = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 * 0.007 \left(\frac{m^3}{s}\right)}{\pi * (0.05)^2 (m^2)} \Longrightarrow \boldsymbol{< v > = 3.57\, m/s}$$

Υπολογισμός του αριθμού Reynolds:

$$Re = \frac{\rho < v > D}{\mu} = \frac{1000 \left(\frac{kg}{m^3}\right) * 3.57 \left(\frac{m}{s}\right) * 0.05\,(m)}{10^{-3} (\frac{kg}{s\, m})} \Longrightarrow Re = 178500 \Longrightarrow \boldsymbol{Re = 1.79 * 10^5}$$

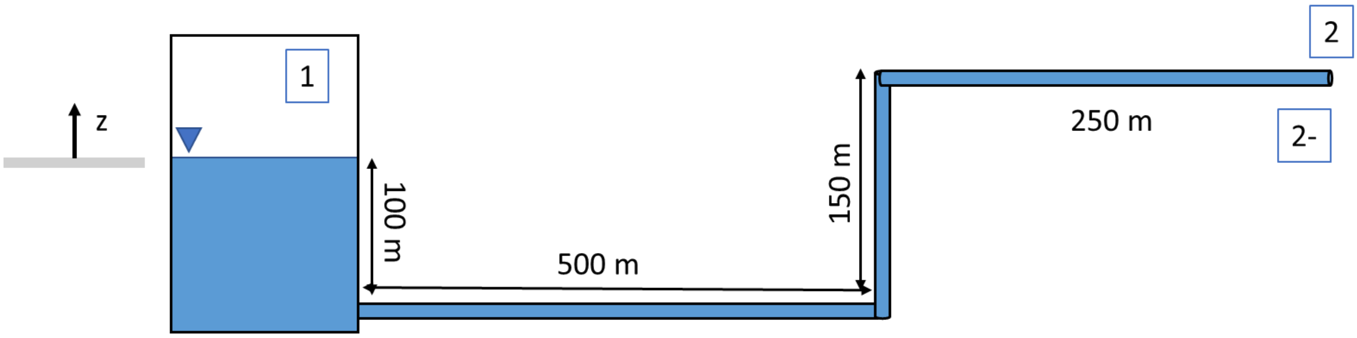
Υπολογίζω τον συντελεστή τριβής για λείο σωλήνα από διάγραμμα Moody: $\boldsymbol{f = 0.016}$

$$(1) \Longrightarrow z_1 - z_2 = \frac{f}{g}\frac{l}{D}\frac{< v >^2}{2} = \frac{0.016}{9.81\ \left(\frac{m}{s}\right)}\frac{250\ (m)}{0.05\ (m)}\ \frac{(3.57)^2 \left(\frac{m^2}{s^2}\right)}{2}$$

$$\boldsymbol{z_1 - z_2 = 51.96\ m}$$

Άσκηση 2.

Νερό ρέει από μια μεγάλη δεξαμενή όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο σωλήνας είναι κατασκευασμένος από χυτοσίδηρο με εσωτερική διάμετρο 0.2 m. Η ογκομετρική παροχή είναι 0.14 m^3/s και η έξοδος βρίσκεται σε ατμοσφαιρική πίεση. Η μέση θερμοκρασία είναι 10 C. Το σύστημα είναι απομονωμένο. Υπολογίστε την πίεση που απαιτείται για τη συγκεκριμένη ογκομετρική παροχή. Υπολογίστε επίσης την αύξηση της θερμοκρασίας μεταξύ της επιφάνειας του υγρού στην δεξαμενή και στην έξοδο.



ΛΥΣΗ

Α) Παραδοχές

1. Το εμβαδόν διατομής της δεξαμενής είναι πολύ μεγαλύτερο από το εμβαδόν διατομής του σωλήνα άρα για της ταχύτητες ισχύει ότι : $< v_1 > \ll < v_2 >$
2. Θεωρώ ότι $z_1 = 0$
3. Για τις πιέσεις ισχύει ότι : $P_{2^-} = P_{atm} \quad \kappa\alpha\iota\, P_{atm} \ll P_1 \Longrightarrow P_1 - P_{atm} \approx P_1$
4. $< v_{2^-} > = < v_2 >$
5. Θεωρώ τυρβώδη ροή α=1
6. Νερό στους 10 °C $\Longrightarrow \rho = 1000 \frac{kg}{m^3} \quad \kappa\alpha\iota \;\; \mu = 1.3\; 10^{-3}\; Pa\, s$

Β) Ισοζύγιο Ενέργειας από το σημείο 1 στο σημείο 2.

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{1}{2}\alpha_1 < v_1 >^2 + g z_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{1}{2}\alpha_2 < v_2 >^2 + g z_2 + h_{O\Lambda} \Longrightarrow$$

(Εφαρμόζοντας τις παραδοχές καταλήγω ότι)

$$\frac{P_1 - P_{atm}}{\rho} = \frac{1}{2} < v_2 >^2 + g z_2 + h_{O\Lambda} \Longrightarrow$$

$$P_1 = \frac{1}{2}\rho < v_2 >^2 + g\rho z_2 + \rho h_{O\Lambda} \quad (1)$$

Εύρεση της ταχύτητας στην έξοδο της σωλήνας:

$$Q = A < v_2 > \Longrightarrow < v_2 > = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 * 0.14 \left(\frac{m^3}{s}\right)}{\pi * (0.2)^2 (m^2)} \Longrightarrow < \boldsymbol{v} > = \mathbf{4.46}\; \boldsymbol{m/s}$$

Οι απώλειες της υδροστατικής κεφαλής δίνονται:

$$h_{O\Lambda} = h_\mu + h_\varepsilon \quad (2)$$

(i) Υπολογισμός μείζων απωλειών:

$$h_\mu = f\left(Re, \frac{e}{D}\right)\frac{l}{D}\frac{< v >^2}{2} \quad (3)$$

Υπολογισμός του αριθμού Reynolds:

$$Re = \frac{\rho < v > D}{\mu} = \frac{1000 \left(\frac{kg}{m^3}\right) * 4.46 \left(\frac{m}{s}\right) * 0.2\ (m)}{10^{-3} (\frac{kg}{s\ m})} \Longrightarrow Re = 686153 \Longrightarrow Re = 6.86 * 10^5$$

Υπολογισμός σχετικής τραχύτητας:

$$D = 0.2\ m = 0.2\ (m) * \frac{1\ (in)}{0.0254 (m)} = 7.87\ in$$

Για τον χυτοσίδηρο (Σχήμα 11.5) $\frac{e}{D} = 0.0013$

Υπολογισμός συντελεστή τριβής από το διάγραμμα Moody:

$$f\left(Re, \frac{e}{D}\right) = f(6.86 * 10^5, 0.0013) = 0.021$$

$$(3) \Longrightarrow h_\mu = 0.021 * \frac{850 (m)}{0.2 (m)} * \frac{(4.46)^2 \left(\frac{m^2}{s^2}\right)}{2} \Longrightarrow h_\mu = 887.66\ m^2/s^2$$

(ii) Υπολογισμός ελάσσων απωλειών:

Για την απότομη είσοδο :

$$h_{\varepsilon,\varepsilon\iota\sigma\acute{o}\delta o\upsilon} = K \frac{< v >^2}{2} = 0.34 * \frac{(4.46)^2 \left(\frac{m^2}{s^2}\right)}{2} \Longrightarrow h_{\varepsilon,\varepsilon\iota\sigma\acute{o}\delta o\upsilon} = 6.76\ m^2/s^2$$

Για τις 2 καμπές έχω:

$$h_{\varepsilon,\kappa\alpha\mu\pi\acute{\varepsilon}\varsigma} = 2 * f\left(Re, \frac{e}{D}\right) \frac{\lambda}{D} \frac{< v >^2}{2} = f\left(Re, \frac{e}{D}\right) \frac{\lambda}{D} < v >^2$$

Δεν γνωρίζω την ακτίνα καμπυλότητας, άρα θα χρησιμοποιήσω το ελάχιστο $\frac{\lambda}{D} = 12$

$$h_{\varepsilon,\kappa\alpha\mu\pi\acute{\varepsilon}\varsigma} = 0.021 * 12 * (4.46)^2 \Longrightarrow h_{\varepsilon,\kappa\alpha\mu\pi\acute{\varepsilon}\varsigma} = 5.012\ m^2/s^2$$

$$(2) \Longrightarrow h_{O\Lambda} = 899.44\ m^2/s^2$$

$$(1) \Longrightarrow P_1 = \frac{1}{2} * 1000 * (4.46)^2 + 9.81 * 1000 * 50 + 1000 * 899.44 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow P_1 = 1399885\ Pa \Longrightarrow \boldsymbol{P_1 = 1.4\ MPa}$$

Υπολογισμός της διαφοράς θερμοκρασίας:

Εξ 'ορισμού έχουμε $h_{O\Lambda} \equiv \left[(u_2 - u_1) + \frac{\dot{Q}}{\dot{m}}\right]$ (4)

Το σύστημα είναι μονωμένο: $\frac{\dot{Q}}{\dot{m}} = 0$

Επίσης ισχύει ότι

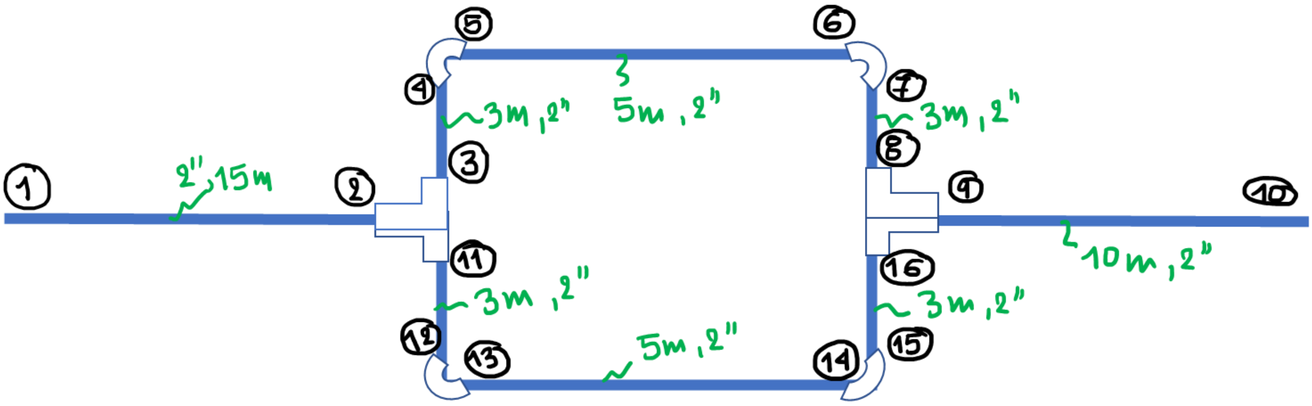
$$\Delta u = (u_2 - u_1) = C_v \Delta T \quad (5)$$

Για το νερό $C_v = 1 \frac{kcal}{kgK} = 10^3 \frac{cal}{kg\ K} = 4184 \frac{J}{kgK}$

$$(4) \Longrightarrow h_{O\Lambda} = C_v \Delta T \Longrightarrow \Delta T = \frac{h_{O\Lambda}}{C_v} \Longrightarrow \boldsymbol{\Delta T = 0.215\ K}$$

Άσκηση 3.

Θεωρήστε τη σωλήνωση του σχήματος
Το υλικό του σωλήνα είναι κοινός χάλυβας (e/D = 0.01).
(i) Πόση υδροστατική κεφαλή και πόση ισχύ χρειαζόμαστε για να κινήσουμε νερό θερμοκρασίας 20 °C μέσω της σωλήνωσης με παροχή Q=36.5 m³/hr;
(ii) Με την ίδια υδροστατική κεφαλή ποια θα είναι η τιμή της παροχής Q αν το τμήμα 3-5 αντικατασταθεί με σωλήνα διαμέτρου 1'';



ΛΥΣΗ (i)

Α) Παραδοχές και Μετατροπές μονάδων

1. Ονομαστική διάμετρος 2'' → Schedule 40 από Πίνακα 11.4
$$D = 2.067\ in * \frac{0.0254\ m}{1\ in} \Longrightarrow D = 0.053\ m$$
2. $l_1 = l_{1,2} = 15\ m$
$l_2 = l_{3,4} = l_{7,8} = l_{11,12} = l_{15,16} = 3\ m$
$l_3 = l_{5,6} = l_{13,14} = 5\ m$
$l_4 = l_{9,10} = 10\ m$
3. Νερό στους 20 °C $\Longrightarrow \rho = 1000\frac{kg}{m^3}\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \mu = 1\ cp = 10^{-3}\ Pa\ s$
4. $Q_I = 36.5\frac{m^3}{hr} = 36.5\frac{m^3}{hr} * \frac{1\ hr}{60\ min} * \frac{1min}{60s} \Longrightarrow Q_I = 0.0101\ m^3/s$
5. $Q_I = A_I < v_I > = \frac{\pi D^2}{4} < v_I > \Longrightarrow < v_I > = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4*0.0101\left(\frac{m^3}{s}\right)}{\pi\ (0.053)^2 (m^2)} \Longrightarrow < v_I > = 4.58\ m/s$
6. Αριθμός Reynolds για τα τμήματα (1)-(2) και (9)-(10):
$$Re = \frac{\rho < v_I > D}{\mu} = \frac{1000\left(\frac{kg}{m^3}\right) * 4.58\left(\frac{m}{s}\right) * 0.053\ (m)}{10^{-3}(\frac{kg}{s\ m})} \Longrightarrow Re = 242740 \Longrightarrow Re = 2.43 * 10^5$$
7. Συντελεστής τριβής από το διάγραμμα Moody:
$$f = \left(Re, \frac{e}{D}\right) = 0.038$$
Ο συντελεστής τριβής είναι σταθερός για όλη τη διάταξη.
8. Τυρβώδης ροή άρα α=1
9. Δεν υπάρχουν υψομετρικές διαφορές
10. Ισοδύναμα μήκη για τα εξαρτήματα:
$$\left(\frac{\lambda}{D}\right)_{\tau\alpha\upsilon} = 60 \quad \kappa\alpha\iota \quad \left(\frac{\lambda}{D}\right)_{\alpha\gamma\kappa\acute{\omega}\nu\varepsilon\varsigma} = 30$$

Β) Ισοζύγιο Μάζας

$$Q_I = Q_{II} + Q_{III} \Rightarrow < v_I > = < v_{II} > + < v_{III} > \quad (1)$$

Γ) Ισοζύγια Ενέργειας για i=1-15

$$\frac{P_i}{\rho} + \frac{1}{2}\alpha_i < v_i >^2 + gz_i = \frac{P_{i+1}}{\rho} + \frac{1}{2}\alpha_{i+1} < v_{i+1} >^2 + gz_{i+1} + h_{O\Lambda} \quad (2)$$

Οι ταχύτητες είναι ίδιες $< v_i > = < v_{i+1} >$, για όλα τα σημεία εκτός από τα ταυ που διαχωρίζονται οι ροές.

Για ευθύγραμμα τμήματα της διάταξης: $h_{O\Lambda} = h_\mu = f\,\frac{l}{D}\frac{<v>^2}{2} \quad (3)$

Για τους αγκώνες και τα ταυ: $h_{O\Lambda} = h_\varepsilon = f\,\frac{\lambda}{D}\,\frac{<v>^2}{2} \;\; (4)$

Με βάση τα παραπάνω γράφω τα Ισοζύγια Ενέργειας για κάθε τμήμα:

$$(1) \longrightarrow (2): \; h_{\mu_{1,2}} = \frac{P_1}{\rho} - \frac{P_2}{\rho} = f\,\frac{l_1}{D}\frac{< v_I >^2}{2} \quad (5)$$

$$(2) \longrightarrow (3): \; h_{\varepsilon_{2,3}} = \frac{P_2}{\rho} - \frac{P_3}{\rho} + \frac{1}{2} < v_I >^2 - \frac{1}{2} < v_{II} >^2 = f\left(\frac{\lambda}{D}\right)_{\tau\alpha\upsilon}\frac{< v_I >^2}{2} \quad (6)$$

$$(3) \longrightarrow (4): \; h_{\mu_{3,4}} = \frac{P_3}{\rho} - \frac{P_4}{\rho} = f\,\frac{l_2}{D}\frac{< v_{II} >^2}{2} \quad (7)$$

$$(4) \longrightarrow (5): \; h_{\varepsilon_{4,5}} = \frac{P_4}{\rho} - \frac{P_5}{\rho} = f\left(\frac{\lambda}{D}\right)_{\alpha\gamma\kappa}\frac{< v_{II} >^2}{2} \quad (8)$$

$$(5) \longrightarrow (6): \; h_{\mu_{5,6}} = \frac{P_5}{\rho} - \frac{P_6}{\rho} = f\,\frac{l_3}{D}\frac{< v_{II} >^2}{2} \quad (9)$$

$$(6) \longrightarrow (7): \; h_{\varepsilon_{6,7}} = \frac{P_6}{\rho} - \frac{P_7}{\rho} = f\left(\frac{\lambda}{D}\right)_{\alpha\gamma\kappa}\frac{< v_{II} >^2}{2} \quad (10)$$

$$(7) \longrightarrow (8): \; h_{\mu_{7,8}} = \frac{P_7}{\rho} - \frac{P_8}{\rho} = f\,\frac{l_2}{D}\frac{< v_{II} >^2}{2} \quad (11)$$

$$(8) \longrightarrow (9): \; h_{\varepsilon_{8,9}} = \frac{P_8}{\rho} - \frac{P_9}{\rho} + \frac{1}{2} < v_{II} >^2 - \frac{1}{2} < v_I >^2 = f\left(\frac{\lambda}{D}\right)_{\tau\alpha\upsilon}\frac{< v_I >^2}{2} \quad (12)$$

$$(9) \longrightarrow (10): \; h_{\mu_{9,10}} = \frac{P_9}{\rho} - \frac{P_{10}}{\rho} = f\,\frac{l_4}{D}\frac{< v_I >^2}{2} \quad (13)$$

$$(2) \longrightarrow (11): \; h_{\varepsilon_{2,11}} = \frac{P_2}{\rho} - \frac{P_{11}}{\rho} + \frac{1}{2} < v_I >^2 - \frac{1}{2} < v_{III} >^2 = f\left(\frac{\lambda}{D}\right)_{\tau\alpha\upsilon}\frac{< v_I >^2}{2} \quad (14)$$

$$(11) \longrightarrow (12): \; h_{\mu_{11,12}} = \frac{P_{11}}{\rho} - \frac{P_{12}}{\rho} = f\,\frac{l_2}{D}\frac{< v_{III} >^2}{2} \quad (15)$$

$$(12) \longrightarrow (13): \; h_{\varepsilon_{12,13}} = \frac{P_{12}}{\rho} - \frac{P_{13}}{\rho} = f\left(\frac{\lambda}{D}\right)_{\alpha\gamma\kappa} \frac{< v_{III} >^2}{2} \quad (16)$$

$$(13) \longrightarrow (14): \; h_{\mu_{13,14}} = \frac{P_{13}}{\rho} - \frac{P_{14}}{\rho} = f\frac{l_3}{D}\frac{< v_{III} >^2}{2} \quad (17)$$

$$(14) \longrightarrow (15): \; h_{\varepsilon_{14,15}} = \frac{P_{14}}{\rho} - \frac{P_{15}}{\rho} = f\left(\frac{\lambda}{D}\right)_{\alpha\gamma\kappa} \frac{< v_{III} >^2}{2} \quad (18)$$

$$(15) \longrightarrow (16): \; h_{\mu_{15,16}} = \frac{P_{15}}{\rho} - \frac{P_{16}}{\rho} = f\frac{l_2}{D}\frac{< v_{III} >^2}{2} \quad (19)$$

$$(16) \longrightarrow (9): \; h_{\varepsilon_{16,9}} = \frac{P_{16}}{\rho} - \frac{P_9}{\rho} + \frac{1}{2} < v_{III} >^2 - \frac{1}{2} < v_I >^2 = f\left(\frac{\lambda}{D}\right)_{\tau\alpha\upsilon} \frac{< v_I >^2}{2} \quad (20)$$

Αθροίζω κατά μέλη τις εξισώσεις (5) με (10):

$$\boxed{\begin{gathered} h_{O\Lambda} = \left(\frac{P_1}{\rho} - \frac{P_{10}}{\rho} + \frac{P_2}{\rho} - \frac{P_9}{\rho}\right) = \frac{f}{D}\left(\frac{l_1}{2} + 2\,\lambda_{\tau\alpha\upsilon} + \frac{l_4}{2}\right) < v_I >^2 + \\ + \frac{f}{D}\left(l_2 + \lambda_{\alpha\gamma\kappa} + \frac{l_3}{2}\right) < v_{II} >^2 + \frac{f}{D}\left(l_2 + \lambda_{\alpha\gamma\kappa} + \frac{l_3}{2}\right) < v_{III} >^2 \quad (21) \end{gathered}}$$

Η πτώση πίεσης ανάμεσα στα σημεία (2) και (9) θα είναι ίδια και ανεξάρτητη της διαδρομής που θα ακολουθήσει το νερό, άρα:

$$\begin{cases} P_2 - P_9 = h_{\mu_{3,4}} + h_{\varepsilon_{4,5}} + h_{\mu_{5,6}} + h_{\varepsilon_{6,7}} + h_{\mu_{7,8}} + h_{\varepsilon_{2,3}} + h_{\varepsilon_{8,9}} \\ P_2 - P_9 = h_{\mu_{11,12}} + h_{\varepsilon_{12,13}} + h_{\mu_{14,15}} + h_{\varepsilon_{6,7}} + h_{\mu_{15,16}} + h_{\varepsilon_{2,11}} + h_{\varepsilon_{16,9}} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\frac{f}{D}\left(l_2 + \lambda_{\alpha\gamma\kappa} + \frac{l_3}{2}\right) < v_{II} >^2 + \frac{f}{D}\lambda_{\tau\alpha\upsilon} < v_I >^2 = \frac{f}{D}\left(l_2 + \lambda_{\alpha\gamma\kappa} + \frac{l_3}{2}\right) < v_{III} >^2 + \frac{f}{D}\lambda_{\tau\alpha\upsilon} < v_I >^2 \Longrightarrow$$

$$< v_{II} > = < v_{III} > \quad (22)$$

Από τη σχέση (22) και (1):

$$< v_{II} > = \frac{< v_I >}{2} \Longrightarrow < v_{II} > = 2.29\; m/s$$

Υπολογισμός ολικών απωλειών από τη σχέση (21):

$$h_{O\Lambda} = \frac{0.038}{0.053} * \left(\frac{15}{2} + 2 * 60 * 0.053 + \frac{10}{2}\right) * (4.58)^2 + 2 * \frac{0.038}{0.053} * \left(3 + 30 * 0.053 + \frac{5}{2}\right) * (2.29)^2 \Longrightarrow$$

$$\boldsymbol{h_{O\Lambda} = 336.97\; m^2/s^2}$$

Υπολογισμός ισχύος:

$$\dot{W} = m\, h_{O\Lambda} = \rho\, Q\, h_{O\Lambda} = 1000 * 0.0101 * 336.97 \Longrightarrow \boldsymbol{\dot{W} = 3403.4\; W} \text{ ή } \boldsymbol{\dot{W} = 3.4\; kW}$$

ΛΥΣΗ (ii)

Αλλάζει η διάμετρος του τμήματος (3) με (5) και άρα πλέον η διάταξη δεν θα έχει συμμετρία άρα θα έχουμε 4 διαφορετικές ταχύτητες.

$$D_2 = \frac{D_1}{2} \quad (23)$$

Το ισοζύγιο Μάζας από για την διάταξη τώρα μας δίνει:

$$Q_I = Q_{II} + Q_{III} \Longrightarrow A_1 < v_1 > = A_2 < v_4 > + A_3 < v_3 > \Longrightarrow$$

$$\frac{\pi D_1^2}{4} < v_1 > = \frac{\pi D_2^2}{4} < v_4 > + \frac{\pi D_1^2}{4} < v_3 > \Longrightarrow < v_1 > = \frac{D_2^2}{D_1^2} < v_4 > + < v_3 > \Longrightarrow$$

$$< v_1 > = \frac{1}{4} < v_4 > + < v_3 > \quad (24)$$

Επίσης για τον επάνω κλάδο ισχύει:

$$\frac{\pi D_1^2}{4} < v_2 > = \frac{\pi D_2^2}{4} < v_4 > \Longrightarrow < v_2 > = \frac{1}{4} < v_4 > \quad (25)$$

Λόγω της αλλαγής διαμέτρου θα αλλάξουν και οι απώλειες από τα σημεία (3) έως (5):

$$(3) \longrightarrow (4): \; h_{\mu_{3,4}} = \frac{P_3}{\rho} - \frac{P_4}{\rho} = f_4 \frac{l_2}{D_2} \frac{< v_4 >^2}{2} = 16\, f_4 \frac{l_2}{D_1} < v_2 >^2 \quad (26)$$

$$(4) \longrightarrow (5): \; h_{\varepsilon_{4,5}} = \frac{P_4}{\rho} - \frac{P_5}{\rho} = f_4 \left(\frac{\lambda}{D}\right)_{\alpha\gamma\kappa} \frac{< v_4 >^2}{2} = 16\, f_4 \frac{\lambda_{\alpha\gamma\kappa}}{D_1} < v_2 >^2 \quad (27)$$

Από το ισοζύγια ενέργειας με τις νέες απώλειες, θα προκύψει ότι:

$$h_{O\Lambda} = \left(\frac{P_1}{\rho} - \frac{P_{10}}{\rho} + \frac{P_2}{\rho} - \frac{P_9}{\rho}\right) = \frac{f_1}{D_1}\left(\frac{l_1}{2} + 2\,\lambda_{\tau\alpha\upsilon} + \frac{l_4}{2}\right) < v_1 >^2 +$$

$$+ \frac{1}{D_1}\left(16\, f_4 l_2 + 16\, f_4 \lambda_{\alpha\gamma\kappa} + f_2 \frac{l_3}{2} + \frac{f_2 \lambda_{\alpha\gamma\kappa}}{2} + f_2 \frac{l_2}{2}\right) < v_2 >^2 + \frac{f_3}{D_2}\left(l_2 + \lambda_{\alpha\gamma\kappa} + \frac{l_3}{2}\right) < v_3 >^2 \Longrightarrow$$

$$h_{O\Lambda} = 355.85\, f_1 < v_1 >^2 + (1385.66\, f_4 + 90.47 f_2) < v_2 >^2 + 133.77 f_3 < v_3 >^2 \quad (28)$$

Πάλι, η πτώση πίεσης ανάμεσα στα σημεία (2) και (9) θα είναι η ίδια και ανεξάρτητη από την διαδρομή που θα ακολουθήσει το νερό άρα:

$$\frac{1}{D_1}\left(16\, f_4 l_2 + 16\, f_4 \lambda_{\alpha\gamma\kappa} + f_2 \frac{l_3}{2} + \frac{f_2 \lambda_{\alpha\gamma\kappa}}{2} + f_2 \frac{l_2}{2}\right) < v_2 >^2 = \frac{f_3}{D_2}\left(l_2 + \lambda_{\alpha\gamma\kappa} + \frac{l_3}{2}\right) < v_3 >^2 \Longrightarrow$$

$$(1385.66\, f_4 + 90.47 f_2) < v_2 >^2 = 133.77 f_3 < v_3 >^2 \quad (29)$$

Στο πρόβλημα έχω άγνωστες ταχύτητες και άγνωστους συντελεστές τριβής. Το πρόβλημα θα λυθεί με δοκιμή και σφάλμα με την βοήθεια του διαγράμματος Moody:

1η υπόθεση: $f_1^0 = f_2^0 = f_3^0 = f_4^0 = 0.038$

$$(29) \Longrightarrow (1385.66 f^0 + 90.47 f^0) < v_2^0 >^2 = f^0 133.77 < v_3^0 >^2 \Longrightarrow < v_3^0 >^2 = 11.035 < v_2^0 >^2 \Longrightarrow$$

$$< v_3^0 > = 3.32 < v_2^0 > \quad (30)$$

$$(24) \Longrightarrow < v_1^0 > = 4.32 < v_2^0 > \quad (31)$$

$$(28) \Longrightarrow h_{O\Lambda} = f_1^0 (6641.38 < v_2^0 >^2 + 1476.13 < v_2^0 >^2 + 1474.4 < v_2^0 >^2) \Longrightarrow$$

$$336.97 = 364.49 < v_2^0 >^2 \Longrightarrow < v_2^0 > = 0.96\, m/s$$

Έχοντας βρει την ταχύτητα 2 υπολογίζω και τις άλλες ταχύτητες:

$$< v_3^0 > = 3.19 \frac{m}{s} \quad < v_1^0 > = 4.15 \frac{m}{s} \quad < v_4^0 > = 3.84 \frac{m}{s}$$

Έχοντας βρει τις ταχύτητες, υπολογίζω τους αριθμούς Reynolds και τους αντίστοιχους συντελεστές τριβής για να δω πόσο κοντά είμαι στην αρχική μου υπόθεση.

$$\left.\begin{matrix} Re_1^0 = 2.19 * 10^5 \\ Re_2^0 = 5.1 * 10^4 \\ Re_3^0 = 1.69 * 10^5 \\ Re_4^0 = 9.8 * 10^4 \end{matrix}\right. \Rightarrow \begin{cases} f_1 = 0.038 \\ f_2 = 0.04 \\ f_3 = 0.038 \\ f_4 = 0.039 \end{cases}$$

Δεν έχω συγκλίνει σε όλους τους συντελεστές, θα κάνω μια 2η υπόθεση χρησιμοποιώντας τους συντελεστές που βρήκα.

2***η υπόθεση***: $f_1^1 = 0.038, f_2^1 = 0.04, f_3^1 = 0.038, f_4^1 = 0.039$

$$(29) \Rightarrow (1385.66 f_4^1 + 90.47 f_2^1) < v_2^1 >^2 = f_1^1 133.77 < v_3^1 >^2 \Rightarrow 5.084 < v_3^1 >^2 = 57.66 < v_2^1 >^2 \Rightarrow$$
$$< v_3^1 > = 3.37 < v_2^1 > \quad (30)$$

$$(24) \Rightarrow < v_1^1 > = 4.37 < v_2^1 > \qquad (31)$$

$$(28) \Rightarrow h_{OA} = (258.25 < v_2^0 >^2 + 57.66 < v_2^0 >^2 + 57.73 < v_2^0 >^2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow < v_2^1 > = 0.94\, m/s$$

Έχοντας βρει την ταχύτητα 2 υπολογίζω και τις άλλες ταχύτητες:

$$< v_3^1 > = 3.17 \frac{m}{s} \quad < v_1^0 > = 4.15 \frac{m}{s} \quad < v_4^0 > = 3.76 \frac{m}{s}$$

Έχοντας βρει τις ταχύτητες, υπολογίζω τους αριθμούς Reynolds και τους αντίστοιχους συντελεστές τριβής για να δω πόσο κοντά είμαι στην αρχική μου υπόθεση.

$$\left.\begin{matrix} Re_1^1 = 2.19 * 10^5 \\ Re_2^1 = 5.1 * 10^4 \\ Re_3^1 = 1.69 * 10^5 \\ Re_4^1 = 9.8 * 10^4 \end{matrix}\right. \Rightarrow \begin{cases} f_1 = 0.038 \\ f_2 = 0.04 \\ f_3 = 0.038 \\ f_4 = 0.039 \end{cases}$$

Έχουμε σύγκλιση άρα η παροχή είναι:

$$Q = A_1 < v_1 > \Rightarrow \boldsymbol{Q = 9.16 * 10^{-3} m/s}$$