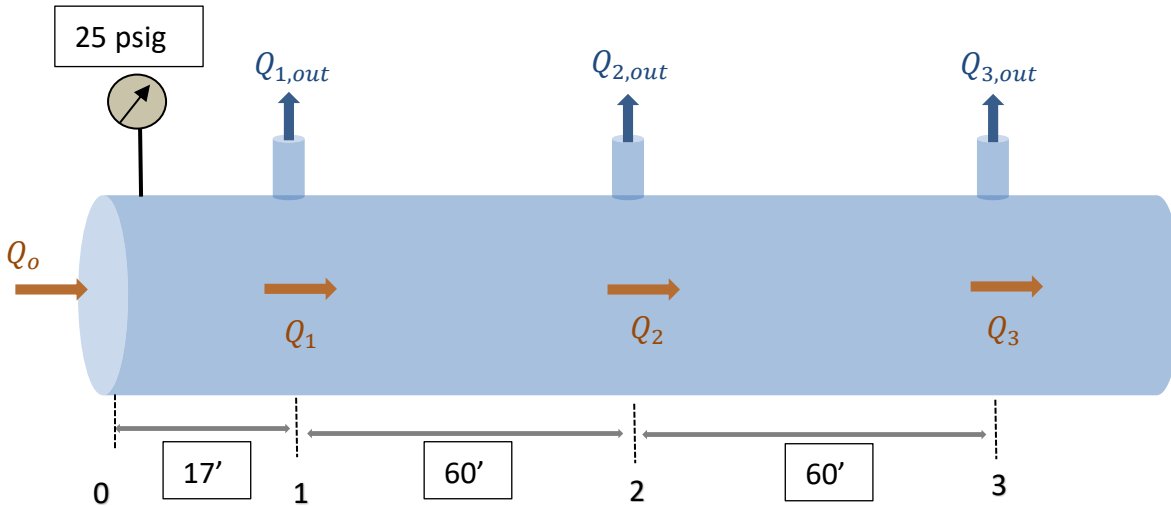


# Φυσικές Διεργασίες II: Φροντιστήριο 1. (17/03/2021)

## ΣΩΛΗΝΩΣΕΙΣ

### Άσκηση 1. (Άσκηση 11.1 σελ. 344 Βιβλίο Α.Χ. Παγιατάκης)

Ένα σύστημα ψεκασμού έχει τη μορφή του σχήματος. Για τον ψεκασμό χρησιμοποιούμε νερό θερμοκρασίας 20 °C. Η επιφάνεια της διατομής κάθε στομίου εξόδου είναι 0.25 in<sup>2</sup>, ενώ ο σωλήνας έχει εσωτερική διάμετρο 1 in και είναι κατασκευασμένος από γαλβανισμένο σίδηρο. Θέλουμε να υπολογίσουμε την ογκομετρική παροχή σε κάθε στόμιο.



## ΛΥΣΗ

### A) Μετατροπές Μονάδων

$$1 \text{ in} = 0.0254 \text{ m}$$

$$1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ psig} = 6894.7 \text{ Pa}$$

- Η ονομαστική διάμετρος της εσωτερικής σωλήνας είναι 1 in. Σύμφωνα με το Schedule 40 (βλέπε Πίνακας 11.4 σελ. 336, Χ.Α. Παγιατάκης), η πραγματική διάμετρος του σωλήνα είναι:

$$D = 1.049 \text{ in} = 1.049 * 0.0254 \text{ (m)} \Rightarrow D = 0.0267 \text{ m}$$

- Εμβαδόν διατομής του σωλήνα:

$$A_{in} = \frac{\pi D^2}{4} \Rightarrow A_{in} = 5.59 * 10^{-4} \text{ m}^2$$

- Εμβαδόν διατομής των στομίων:

$$A_{out} = A_1 = A_2 = A_3 = 0.25 \text{ in}^2 = 0.25 * (0.0254)^2 \text{ (m}^2) \Rightarrow A_{out} = 1.61 * 10^{-4} \text{ m}^2$$

- Η διάμετρος των στομίων εξόδου είναι:

$$A_{out} = \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4A_{out}}{\pi}} \Rightarrow d = 0.014 \text{ m}$$

- $P_o = 25 \text{ psig} = 25 * 6894.4 \text{ Pa} \Rightarrow P_o = 172367 \text{ Pa}$

$$P_{\varepsilon\xi\omega\tau\epsilon\rho\iota\kappa\eta} = 1 \text{ atm} \Rightarrow P_{\varepsilon\xi} = 101325 \text{ Pa}$$

$$\triangleright l_{0,1} = 17'' \Rightarrow l_{0,1} = 0.4317 \text{ m}$$

$$l_{1,2} = l_{2,3} = 60'' \Rightarrow l_{1,2} = l_{2,3} = 0.4317 \text{ m}$$

$$\triangleright \text{Νερό στους } 20^\circ\text{C} \Rightarrow \mu = 1 \text{ cp} \Rightarrow \mu = 10^{-3} \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2}$$

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$\triangleright$  Σωλήνας από γαλβανισμένο σίδηρο για  $D = 1 \text{ in}$  (Σχήμα 11.5 σελ. 312, Χ.Α. Παγιατάκης):

$$\frac{e}{D} = 0.006$$

## Β) Παραδοχές

- $\langle v_i \rangle \cong \langle v_{i+1} \rangle$  για  $i = 0, 1, 2$
- Παρατηρώ ότι  $A_{in} > A_{out}$  και ότι  $D > d \Rightarrow \langle v_{i,out} \rangle > \langle v_i \rangle \Rightarrow \langle v_{i,out} \rangle^2 \gg \langle v_i \rangle^2$  για  $i > 0$
- Δεν υπάρχουν υψομετρικές διαφορές
- Θεωρώ τυρβώδη ροή άρα  $\alpha_i = 1$
- Εφόσον το μήκος των στομίων είναι πολύ μικρό θεωρώ ότι δεν υπάρχουν μείζων απώλειες στα στόμια:  $h_{\mu,out} = 0$
- Θεωρώ ότι οι ελάχιστες απώλειες λόγω των στομίων εξόδου είναι αμελητέες:  $h_\varepsilon = 0$
- Οι πιέσεις στα στόμια είναι μεγαλύτερες από την ατμοσφαιρική:  $P_i \gg P_{atm} \Rightarrow P_i - P_{atm} \approx P_i$

## Γ) Ισοζύγιο Ενέργειας

Το ισοζύγιο ενέργειας για το ευθύγραμμο τμήμα των σωληνώσεων είναι:

$$\frac{P_i}{\rho} + a_i \frac{\langle v_i \rangle^2}{2} + gz_i = \frac{P_{i+1}}{\rho} + a_{i+1} \frac{\langle v_{i+1} \rangle^2}{2} + gz_{i+1} + h_{oL} \Rightarrow$$

(Απλοποιώ την εξίσωση χρησιμοποιώντας τις παραδοχές (1),(3))

$$\Rightarrow \frac{P_i}{\rho} + a_i \frac{\langle v_i \rangle^2}{2} + gz_i = \frac{P_{i+1}}{\rho} + a_{i+1} \frac{\langle v_{i+1} \rangle^2}{2} + gz_{i+1} + h_{oL} \Rightarrow$$

$$h_{oL} = \frac{P_i - P_{i+1}}{\rho} \quad (1)$$

Επίσης για τις ολικές απώλειες υδροστατικής κεφαλής ισχύει ότι:

$$h_{oL} = h_\mu + h_\varepsilon \Rightarrow h_{oL} = f \left( \text{Re}, \frac{e}{D} \right) \frac{l_{i,i+1} \langle v_{i+1} \rangle^2}{2D} \quad (2)$$

Το ισοζύγιο ενέργειας για το στόμιο είναι:

$$\frac{P_{i+1}}{\rho} + a_i \frac{\langle v_i \rangle^2}{2} + gz_i = \frac{P_{i,out}}{\rho} + a_{i,out} \frac{\langle v_{i,out} \rangle^2}{2} + gz_{i,out} + h_{oL} \Rightarrow$$

(Απλοποιώ την εξίσωση χρησιμοποιώντας τις παραδοχές (3),(2))

(Επίσης από τις παραδοχές (5), (6)  $h_{oL} = h_\varepsilon + h_{\mu,out} = 0$ )

$$\frac{P_{i+1}}{\rho} + a_i \frac{\langle v_i \rangle^2}{2} + gz_i = \frac{P_{i,out}}{\rho} + a_{i,out} \frac{\langle v_{i,out} \rangle^2}{2} + gz_{i,out} + h_{oL}$$

$$\frac{\langle v_{i,out} \rangle^2}{2} = \frac{P_i - P_{atm}}{\rho} \approx \frac{P_i}{\rho} \Rightarrow$$

$$\frac{\langle v_{i,out} \rangle^2}{2} = \frac{P_i}{\rho} \Rightarrow \langle v_{i,out} \rangle = \sqrt{\frac{2P_i}{\rho}} \quad (4)$$

### Δ) Ισοζύγια Μάζας

Το ισοζύγιο Μάζας για τη συνολική διάταξη μας δίνει:

$$Q_o = Q_{1,out} + Q_{2,out} + Q_{3,out} \quad (5)$$

Ενώ το ισοζύγιο μάζας για την ροή μέσα στη σωλήνωση μας δίνει:

$$Q_i = Q_{i+1} + Q_{i,out} \quad (6)$$

### Ε) Επίλυση προβλήματος με δοκιμή και σφάλμα

Από τις εξισώσεις (1)-(6) παρατηρώ ότι έχω άγνωστη την παροχή εισόδου στο σύστημα ψεκασμού  $Q_o$  αλλά και τις ταχύτητες. Επομένως, πρέπει να ξεκινήσω μια επαναληπτική μέθοδο δοκιμής και σφάλματος έτσι ώστε να βρω τις ζητούμενες παροχές εξόδου από τα στόμια. Η πιο ασφαλής μέθοδος είναι να υποθέσω την παροχή εισόδου.

1<sup>η</sup> Υπόθεση:  $Q_o = 100 \text{ gal/min}$

$$1 \text{ gal} = 3.786 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$1 \text{ min} = 60 \text{ s}$$

$$Q_o = 100 \frac{\text{gal}}{\text{min}} = 100 \frac{\text{gal}}{\text{min}} \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \frac{3.786 \cdot 10^{-3}}{1 \text{ gal}} \Rightarrow Q_o = 0.00631 \text{ m}^3/\text{s}$$

Για  $i=0$  η εξίσωση (6) γίνεται:

$$(6) \Rightarrow Q_o = Q_1 + Q_{o,out} = Q_1 \Rightarrow Q_1 = 6.31 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

Εύρεση της ταχύτητας  $\langle v_1 \rangle$ :

$$Q_1 = A_{in} \langle v_1 \rangle \Rightarrow \langle v_1 \rangle = \frac{6.31 \cdot 10^{-3} \left( \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right)}{5.55 \cdot 10^{-4} (\text{m}^2)} \Rightarrow \langle v_1 \rangle = 11.37 \text{ m/s}$$

Υπολογισμός του αριθμού Reynolds (επιβεβαιώνουμε ότι η ροή είναι όντως τυρβώδης):

$$Re_1 = \frac{\rho \langle v_1 \rangle D}{\mu} = \frac{1000 \left( \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) 11.37 \left( \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) 0.0267 (\text{m})}{10^{-3} \left( \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \text{s}} \right)} \Rightarrow Re_1 = 303579 \text{ (τυρβώδης ροή)}$$

Υπολογισμός του συντελεστή τριβής  $f$  από το διάγραμμα Moody:

$$f \left( Re_1, \frac{e}{D} \right) = f(303579, 0.006) = 0.032 \Rightarrow f_1 = 0.032$$

Υπολογισμός των απωλειών στο ευθύγραμμο τμήμα του σωλήνα 0 → 1:

$$(2) \Rightarrow h_{0\Lambda,1} = f_1 \frac{l_{0,1} \langle v_1 \rangle^2}{D} = 0.032 \frac{0.4318(m) (11.37)^2 \left(\frac{m^2}{s^2}\right)}{0.0267(m)} \Rightarrow h_{0\Lambda,1} = 33.45 m^2/s^2$$

Υπολογισμός της πίεσης στο σημείο (1):

$$(1) \Rightarrow h_{0\Lambda,1} = \frac{P_o - P_1}{\rho} \Rightarrow P_1 = P_o - h_{0\Lambda,1}\rho = 172367 (Pa) - 33.45 \left(\frac{m^2}{s^2}\right) * 1000 \left(\frac{kg}{m^3}\right) \Rightarrow$$

$$P_1 = 138917 Pa$$

Υπολογισμός της ταχύτητας εξόδου  $\langle v_{1,out} \rangle$ , ταχύτητα στο στόμιο:

$$\langle v_{1,out} \rangle = \sqrt{\frac{2P_1}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 * 138917 \left(\frac{kg}{ms^2}\right)}{1000 \left(\frac{kg}{m^3}\right)}} \Rightarrow \langle v_{1,out} \rangle = 16.67 m/s$$

Υπολογισμός της παροχής εξόδου από το στόμιο (1):

$$Q_{1,out} = A_1 \langle v_{1,out} \rangle = 1.61 * 10^{-4} (m^2) 16.67 \left(\frac{m}{s}\right) \Rightarrow Q_{1,out} = 2.68 * 10^{-3} m^3/s$$

Για  $i=1$  η εξίσωση (6) γίνεται:

$$(6) \Rightarrow Q_1 = Q_2 + Q_{1,out} \Rightarrow Q_2 = Q_1 - Q_{1,out} = (6.31 - 2.68) * 10^{-3} \left(\frac{m^3}{s}\right) \Rightarrow Q_2 = 3.63 * 10^{-3} m^3/s$$

Εύρεση της ταχύτητας  $\langle v_2 \rangle$ :

$$Q_2 = A_{in} \langle v_2 \rangle \Rightarrow \langle v_2 \rangle = \frac{3.63 * 10^{-3} \left(\frac{m^3}{s}\right)}{5.55 * 10^{-4} (m^2)} \Rightarrow \langle v_2 \rangle = 6.53 m/s$$

Υπολογισμός του αριθμού Reynolds (επιβεβαιώνουμε ότι η ροή είναι όντως τυρβώδης):

$$Re_2 = \frac{\rho \langle v_2 \rangle D}{\mu} = \frac{1000 \left(\frac{kg}{m^3}\right) 6.53 \left(\frac{m}{s}\right) 0.0267 (m)}{10^{-3} \left(\frac{kg}{m^3s}\right)} \Rightarrow Re_2 = 174351 \text{ (τυρβώδης ροή)}$$

Υπολογισμός του συντελεστή τριβής  $f$  από το διάγραμμα Moody:

$$f \left( Re_2, \frac{e}{D} \right) = f(174351, 0.006) = 0.032 \Rightarrow f_2 = 0.032$$

Υπολογισμός των απωλειών στο ευθύγραμμο τμήμα του σωλήνα 1 → 2:

$$(2) \Rightarrow h_{0\Lambda,2} = f_2 \frac{l_{1,2} \langle v_2 \rangle^2}{D} = 0.032 \frac{1.524(m) (6.53)^2 \left(\frac{m^2}{s^2}\right)}{0.0267(m)} \Rightarrow h_{0\Lambda,2} = 38.94 m^2/s^2$$

Υπολογισμός της πίεσης στο σημείο (2):

$$(1) \Rightarrow h_{0\Lambda,2} = \frac{P_1 - P_2}{\rho} \Rightarrow P_2 = P_1 - h_{0\Lambda,2}\rho = 138917 (Pa) - 38.94 \left(\frac{m^2}{s^2}\right) * 1000 \left(\frac{kg}{m^3}\right) \Rightarrow$$

$$P_2 = 99974 Pa$$

Υπολογισμός της ταχύτητας εξόδου  $\langle v_{2,out} \rangle$ , ταχύτητα στο στόμιο:

$$\langle v_{2,out} \rangle = \sqrt{\frac{2P_2}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 * 99974 \left(\frac{kg}{m^2 s^2}\right)}{1000 \left(\frac{kg}{m^3}\right)}} \Rightarrow \langle v_{2,out} \rangle = 14.14 \text{ m/s}$$

Υπολογισμός της παροχής εξόδου από το στόμιο (2):

$$Q_{2,out} = A_2 \langle v_{2,out} \rangle = 1.61 * 10^{-4} (m^2) 14.14 \left(\frac{m}{s}\right) \Rightarrow Q_{2,out} = 2.28 * 10^{-3} m^3/s$$

Για  $i=2$  η εξίσωση (6) γίνεται:

$$(6) \Rightarrow Q_2 = Q_3 + Q_{2,out} \Rightarrow Q_3 = Q_2 - Q_{2,out} = (3.63 - 2.28) * 10^{-3} \left(\frac{m^3}{s}\right) \Rightarrow$$

$$Q_3 = 1.35 * 10^{-3} m^3/s$$

Εύρεση της ταχύτητας  $\langle v_3 \rangle$ :

$$Q_3 = A_{in} \langle v_3 \rangle \Rightarrow \langle v_3 \rangle = \frac{1.35 * 10^{-3} \left(\frac{m^3}{s}\right)}{5.55 * 10^{-4} (m^2)} \Rightarrow \langle v_3 \rangle = 2.54 \text{ m/s}$$

Υπολογισμός του αριθμού Reynolds (επιβεβαιώνουμε ότι η ροή είναι όντως τυρβώδης):

$$Re_3 = \frac{\rho \langle v_3 \rangle D}{\mu} = \frac{1000 \left(\frac{kg}{m^3}\right) 2.54 \left(\frac{m}{s}\right) 0.0267 (m)}{10^{-3} \left(\frac{kg}{m^3 s}\right)} \Rightarrow Re_3 = 62000 \text{ (τυρβώδης ροή)}$$

Υπολογισμός του συντελεστή τριβής  $f$  από το διάγραμμα Moody:

$$f \left( Re_3, \frac{e}{D} \right) = f(62000, 0.006) = 0.034 \Rightarrow f_3 = 0.034$$

Υπολογισμός των απωλειών στο ευθύγραμμο τμήμα του σωλήνα 1 → 2:

$$(2) \Rightarrow h_{0L,3} = f_3 \frac{l_{2,3} \langle v_3 \rangle^2}{D} = 0.034 \frac{1.524(m) (2.54)^2 \left(\frac{m^2}{s^2}\right)}{0.0267(m)} \Rightarrow h_{0L,3} = 5.74 \text{ m}^2/s^2$$

Υπολογισμός της πίεσης στο σημείο (3):

$$(1) \Rightarrow h_{0L,3} = \frac{P_2 - P_3}{\rho} \Rightarrow P_3 = P_2 - h_{0L,3} \rho = 138917 (Pa) - 5.74 \left(\frac{m^2}{s^2}\right) * 1000 \left(\frac{kg}{m^3}\right) \Rightarrow$$

$$P_3 = 94238 \text{ Pa}$$

Υπολογισμός της ταχύτητας εξόδου  $\langle v_{3,out} \rangle$ , ταχύτητα στο στόμιο:

$$\langle v_{3,out} \rangle = \sqrt{\frac{2P_3}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 * 94238 \left(\frac{kg}{m^2 s^2}\right)}{1000 \left(\frac{kg}{m^3}\right)}} \Rightarrow \langle v_{3,out} \rangle = 13.73 \text{ m/s}$$

Υπολογισμός της παροχής εξόδου από το στόμιο (3):

$$Q_{3,out} = A_3 \langle v_{3,out} \rangle = 1.61 * 10^{-4} (m^2) 13.73 \left(\frac{m}{s}\right) \Rightarrow Q_{3,out} = 2.21 * 10^{-3} m^3/s$$

Έλεγχος της υπόθεσης με την εξίσωση (5):

$$\sum_{i>0} Q_{i,out} = 7.17 * 10^{-3} \frac{m^3}{s} \gg Q_o = 6.31 * 10^{-3} \frac{m^3}{s}$$

Παρατηρώ ότι η παροχή που υπολογίζω από την εξίσωση (5) είναι μεγαλύτερη από την 1<sup>η</sup> υπόθεση μου, επομένως θα πρέπει να επαναλάβω τους υπολογισμούς. Στην δεύτερη υπόθεση θα επιλέξω μια παροχή μεγαλύτερη από την αρχική μου υπόθεση.

2<sup>η</sup> Υπόθεση:  $Q_o' = 110 \text{ gal/min}$

$$1 \text{ gal} = 3.786 * 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$1 \text{ min} = 60 \text{ s}$$

$$Q_o' = 110 \frac{\text{gal}}{\text{min}} = 110 \frac{\text{gal}}{\text{min}} \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \frac{3.786 * 10^{-3}}{1 \text{ gal}} \Rightarrow Q_o' = 0.00694 \text{ m}^3/\text{s}$$

Για  $i=0$  η εξίσωση (6) γίνεται:

$$(6) \Rightarrow Q_o' = Q_1' + Q_{o,out}' = Q_1 \Rightarrow Q_1 = 6.94 * 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

Εύρεση της ταχύτητας  $\langle v_1 \rangle'$ :

$$Q_1' = A_{in} \langle v_1 \rangle' \Rightarrow \langle v_1 \rangle' = \frac{6.94 * 10^{-3} \left(\frac{m^3}{s}\right)}{5.55 * 10^{-4} (m^2)} \Rightarrow \langle v_1 \rangle' = 12.51 \text{ m/s}$$

Υπολογισμός του αριθμού Reynolds (επιβεβαιώνουμε ότι η ροή είναι όντως τυρβώδης):

$$Re_1' = \frac{\rho \langle v_1 \rangle' D}{\mu} = \frac{1000 \left(\frac{kg}{m^3}\right) 12.51 \left(\frac{m}{s}\right) 0.0267 (m)}{10^{-3} \left(\frac{kg}{m^3 s}\right)} \Rightarrow Re_1' = 334017 \text{ (τυρβώδης ροή)}$$

Υπολογισμός του συντελεστή τριβής  $f$  από το διάγραμμα Moody:

$$f \left( Re_1', \frac{e}{D} \right) = f(334017, 0.006) = 0.032 \Rightarrow f_1' = 0.032$$

Υπολογισμός των απωλειών στο ευθύγραμμο τμήμα του σωλήνα  $0 \rightarrow 1$ :

$$(2) \Rightarrow h'_{o\Lambda,1} = f_1' \frac{l_{0,1} \langle v_1 \rangle'^2}{D} = 0.032 \frac{0.4318(m) (12.51)^2 \left(\frac{m^2}{s^2}\right)}{0.0267(m)} \Rightarrow h'_{o\Lambda,1} = 40.49 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

Υπολογισμός της πίεσης στο σημείο (1):

$$(1) \Rightarrow h'_{o\Lambda,1} = \frac{P_o - P_1'}{\rho} \Rightarrow P_1' = P_o - h'_{o\Lambda,1} \rho = 172367 (Pa) - 40.49 \left(\frac{m^2}{s^2}\right) * 1000 \left(\frac{kg}{m^3}\right) \Rightarrow$$

$$P_1' = 131877 \text{ Pa}$$

Υπολογισμός της ταχύτητας εξόδου  $\langle v_{1,out} \rangle'$ , ταχύτητα στο στόμιο:

$$\langle v_{1,out} \rangle' = \sqrt{\frac{2P_1'}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 * 131877 \left(\frac{kg}{ms^2}\right)}{1000 \left(\frac{kg}{m^3}\right)}} \Rightarrow \langle v_{1,out} \rangle' = 16.24 \text{ m/s}$$

Υπολογισμός της παροχής εξόδου από το στόμιο (1):

$$Q_{1,out}' = A_1 < v_{1,out} >' = 1.61 * 10^{-4} (m^2) 16.24 \left( \frac{m}{s} \right) \Rightarrow Q_{1,out} = 2.61 * 10^{-3} m^3/s$$

Για i=1 η εξίσωση (6) γίνεται:

$$(6) \Rightarrow Q_1' = Q_2' + Q_{1,out}' \Rightarrow Q_2' = Q_1' - Q_{1,out}' = (6.94 - 2.61) * 10^{-3} \left( \frac{m^3}{s} \right) \Rightarrow$$

$$Q_2' = 4.33 * 10^{-3} m^3/s$$

Εύρεση της ταχύτητας <v<sub>2</sub>>':

$$Q_2' = A_{in} < v_2 >' \Rightarrow < v_2 >' = \frac{4.33 * 10^{-3} \left( \frac{m^3}{s} \right)}{5.55 * 10^{-4} (m^2)} \Rightarrow < v_2 >' = 7.79 m/s$$

Υπολογισμός του αριθμού Reynolds (επιβεβαιώνουμε ότι η ροή είναι όντως τυρβώδης):

$$Re_2' = \frac{\rho < v_2 >' D}{\mu} = \frac{1000 \left( \frac{kg}{m^3} \right) 7.79 \left( \frac{m}{s} \right) 0.0267 (m)}{10^{-3} \left( \frac{kg}{m^3 s} \right)} \Rightarrow Re_2' = 207993 \text{ (τυρβώδης ροή)}$$

Υπολογισμός του συντελεστή τριβής f από το διάγραμμα Moody:

$$f \left( Re_2', \frac{e}{D} \right) = f(207993, 0.006) = 0.032 \Rightarrow f_2' = 0.032$$

Υπολογισμός των απωλειών στο ευθύγραμμο τμήμα του σωλήνα 1 → 2:

$$(2) \Rightarrow h'_{o\lambda,2} = f_2' \frac{l_{1,2} < v_2 >'^2}{D} = 0.032 \frac{1.524(m) (7.79)^2 \left( \frac{m^2}{s^2} \right)}{0.0267(m)} \Rightarrow h'_{o\lambda,2} = 55.49 m^2/s^2$$

Υπολογισμός της πίεσης στο σημείο (2):

$$(1) \Rightarrow h_{o\lambda,2}' = \frac{P_1' - P_2'}{\rho} \Rightarrow P_2' = P_1' - h_{o\lambda,2}' \rho = 131877 (Pa) - 55.49 \left( \frac{m^2}{s^2} \right) * 1000 \left( \frac{kg}{m^3} \right) \Rightarrow$$

$$P_2 = 76384 Pa$$

Υπολογισμός της ταχύτητας εξόδου <v<sub>2,out</sub>>', ταχύτητα στο στόμιο:

$$< v_{2,out} >' = \sqrt{\frac{2P_2'}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 * 76384 \left( \frac{kg}{ms^2} \right)}{1000 \left( \frac{kg}{m^3} \right)}} \Rightarrow < v_{2,out} >' = 12.36 m/s$$

Υπολογισμός της παροχής εξόδου από το στόμιο (2):

$$Q_{2,out}' = A_2 < v_{2,out} >' = 1.61 * 10^{-4} (m^2) 12.36 \left( \frac{m}{s} \right) \Rightarrow Q_{2,out} = 1.99 * 10^{-3} m^3/s$$

Για i=2 η εξίσωση (6) γίνεται:

$$(6) \Rightarrow Q_2' = Q_3' + Q_{2,out}' \Rightarrow Q_3' = Q_2' - Q_{2,out}' = (4.33 - 1.99) * 10^{-3} \left( \frac{m^3}{s} \right) \Rightarrow$$

$$Q_3' = 2.34 * 10^{-3} m^3/s$$

Εύρεση της ταχύτητας  $\langle v_3 \rangle'$ :

$$Q_3' = A_{in} \langle v_3 \rangle' \Rightarrow \langle v_3 \rangle' = \frac{2.34 * 10^{-3} \left(\frac{m^3}{s}\right)}{5.55 * 10^{-4} (m^2)} \Rightarrow \langle v_3 \rangle' = 3.59 m/s$$

Υπολογισμός του αριθμού Reynolds (επιβεβαιώνουμε ότι η ροή είναι όντως τυρβώδης):

$$Re_3' = \frac{\rho \langle v_3 \rangle' D}{\mu} = \frac{1000 \left(\frac{kg}{m^3}\right) 3.59 \left(\frac{m}{s}\right) 0.0267 (m)}{10^{-3} \left(\frac{kg}{m^3 s}\right)} \Rightarrow Re_3' = 95853 \text{ (τυρβώδης ροή)}$$

Υπολογισμός του συντελεστή τριβής  $f$  από το διάγραμμα Moody:

$$f \left( Re_3', \frac{e}{D} \right) = f(95853, 0.006) = 0.034 \Rightarrow f_3' = 0.034$$

Υπολογισμός των απωλειών στο ευθύγραμμο τμήμα του σωλήνα 1  $\rightarrow$  2:

$$(2) \Rightarrow h'_{o\lambda,3} = f_3' \frac{l_{2,3} \langle v_3 \rangle'^2}{D} = 0.034 \frac{1.524(m) (3.59)^2 \left(\frac{m^2}{s^2}\right)}{0.0267(m)} \Rightarrow h_{o\lambda,3} = 12.47 m^2/s^2$$

Υπολογισμός της πίεσης στο σημείο (3):

$$(1) \Rightarrow h_{o\lambda,3}' = \frac{P_2' - P_3'}{\rho} \Rightarrow P_3' = P_2' - h_{o\lambda,3}' \rho = 76384 (Pa) - 12.47 \left(\frac{m^2}{s^2}\right) * 1000 \left(\frac{kg}{m^3}\right) \Rightarrow$$

$$P_3' = 63909 Pa$$

Υπολογισμός της ταχύτητας εξόδου  $\langle v_{3,out} \rangle'$ , ταχύτητα στο στόμιο:

$$\langle v_{3,out} \rangle' = \sqrt{\frac{2P_3'}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 * 63909 \left(\frac{kg}{ms^2}\right)}{1000 \left(\frac{kg}{m^3}\right)}} \Rightarrow \langle v_{3,out} \rangle' = 11.31 m/s$$

Υπολογισμός της παροχής εξόδου από το στόμιο (3):

$$Q'_{3,out} = A_3 \langle v_{3,out} \rangle' = 1.61 * 10^{-4} (m^2) 11.31 \left(\frac{m}{s}\right) \Rightarrow Q'_{3,out} = 1.82 * 10^{-3} m^3/s$$

Έλεγχος της υπόθεσης με την εξίσωση (5):

$$\sum_i^{i>0} Q_{i,out} = 6.42 * 10^{-3} \frac{m^3}{s} \approx Q_o = 6.94 * 10^{-3} \frac{m^3}{s}$$

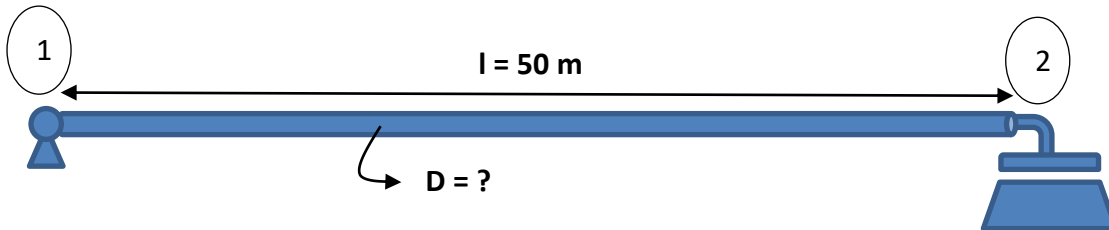
Η προσέγγιση είναι καλή!

Βλέπουμε ότι η υπόθεση μας μας οδήγησε τώρα σε μικρότερη  $Q_o$ , επομένως ίσως ακόμα πιο σωστή υπόθεση θα ήταν για  $Q_o = 105 gal/min$ .



## 2<sup>η</sup> Άσκηση (Άσκηση 11.2 σελ. 344 Βιβλίο Α.Χ. Παγιατάκης)

Μια υδραυλική πρέσα παίρνει την ισχύ της από μια αντλία πίεσεως η οποία βρίσκεται σε απόσταση 50 m. Η αντλία παρέχει νερό με πίεση 3000 psig και ογκομετρική παροχή 30 l/min. Για την σύνδεση θα χρησιμοποιήσουμε χαλύβδινο σωλήνα. Ποια είναι η ελάχιστη διάμετρος που μπορεί να χρησιμοποιηθεί δεδομένου ότι η υδραυλική πρέσα απαιτεί πίεση 2800 psig και παροχή 30 l/min για να λειτουργήσει ικανοποιητικά;



### ΛΥΣΗ

#### A) Μετατροπές Μονάδων

$$1 \text{ in} = 0.0254 \text{ m}$$

$$1 \text{ lt} = 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$1 \text{ psig} = 6894.7 \text{ Pa}$$

- Παροχή :  $Q = 30 \frac{\text{l}}{\text{min}} * \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} * \frac{10^{-3} \text{ m}^3}{\text{l}} \Rightarrow Q = 5 * 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$
- $P_1 = 3000 \text{ psig} = 3000 * 6894.7 \text{ Pa} \Rightarrow P_1 = 20.6841 * 10^6 \text{ Pa}$   
 $P_2 = 2800 \text{ psig} = 2800 * 6894.7 \text{ Pa} \Rightarrow P_2 = 19.3052 * 10^6 \text{ Pa}$
- Νερό στους 20 C  $\Rightarrow \rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$   
 $\mu = 1 \text{ cp} = 10^{-3} \text{ Pa s}$   
 $\nu = \frac{\mu}{\rho} = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

#### B) Παραδοχές

1. Δεν υπάρχει υψομετρική διαφορά άρα  $z_1 = z_2$
2. Θεωρώ ευθύγραμμο τμήμα σωλήνωσης με πλήρως ανεπτυγμένη ροή άρα:

$$h_\varepsilon = 0$$

$$\langle v_1 \rangle = \langle v_2 \rangle$$

$$a_1 = a_2$$

#### Γ) Ισοζύγιο Ενέργειας

$$\frac{P_1}{\rho} + a_1 \frac{\langle v_1 \rangle^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\rho} + a_2 \frac{\langle v_2 \rangle^2}{2} + gz_2 + h_{oL} \Rightarrow$$

(Απλοποιώ την εξίσωση χρησιμοποιώντας τις παραδοχές )

$$\Rightarrow \frac{P_1}{\rho} + a_1 \frac{\langle v_1 \rangle^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\rho} + a_2 \frac{\langle v_2 \rangle^2}{2} + gz_2 + h_{oL} \Rightarrow$$

$$h_{o\lambda} = \frac{(-\Delta P)}{\rho} \quad (1)$$

Από τα δεδομένα γνωρίζω ότι για να λειτουργεί σωστά η πρέσα χρειάζεται η μέγιστη διαφορά πίεσης να είναι:

$$(-\Delta P)_{max} = P_2 - P_1 \Rightarrow (-\Delta P)_{max} = 13.79 * 10^5 Pa$$

Επομένως, οι μέγιστες επιτρεπόμενες ολικές απώλειες υδροστατικής κεφαλής μπορούν να είναι:

$$(1) \Rightarrow h_{o\lambda, max} = \frac{(-\Delta P)_{max}}{\rho} = \frac{13.79 * 10^5 (Pa)}{1000 \left( \frac{kg}{m^3} \right)} \Rightarrow h_{o\lambda, max} = 1378.44 \frac{m^2}{s^2}$$

Εξ ορισμού, για τις ολικές απώλειες σε ευθύγραμμες σωλήνες ισχύει ότι:

$$h_{o\lambda} = h_{\mu} = f \frac{l \langle v \rangle^2}{D} = f \frac{l}{D} \frac{1}{2} \left( \frac{4Q}{\pi D^2} \right)^2 \Rightarrow h_{o\lambda} = \frac{8flQ^2}{\pi^2 D^5} \quad (2)$$

Επίσης ο αριθμός Reynolds δίνεται από τη σχέση:

$$Re = \frac{D \langle v \rangle}{\nu} \Rightarrow Re = \frac{4Q}{\pi \nu D} \quad (3)$$

Παρατηρώ δεν μπορώ να χρησιμοποιήσω το διάγραμμα Moody για να βρω τον συντελεστή τριβής και να υπολογίσω την διάμετρο, ούτε έχω κάποια πληροφορία για τον αριθμό Reynolds. Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με επαναληπτική μέθοδο δοκιμής και σφάλματος. Σε αυτή την διαδικασία θα μου είναι χρήσιμο το Schedule 40 (Πίνακας 11.4 σελ. 336) δηλαδή οι τυποποιημένες διαστάσεις κατασκευής σωληνώσεων.

#### **Δ) Επίλυση του προβλήματος με δοκιμή και σφάλμα**

1<sup>η</sup> Υπόθεση: Σωλήνα με ονομαστική διάμετρο **1 in**. Από Πίνακα 11.4 η εσωτερική διάμετρος του σωλήνα είναι:  $D^0 = 1.049 \text{ in} = 1.049 * 0.0254 \text{ m} \Rightarrow D^0 = 0.0266 \text{ m}$

Για χαλύβδινο σωλήνα 1 in ο συντελεστής τριβής μπορεί να υπολογιστεί από το Διάγραμμα στο Σχήμα 11.5 (σελ.312).

$$\left( \frac{e}{D} \right)^0 = 0.0018$$

Υπολογισμός του αριθμού Reynolds:

$$(3) \Rightarrow Re = \frac{4Q}{\pi \nu D} = \frac{4 * 5 * 10^{-4} \left( \frac{m^3}{s} \right)}{\pi * 10^{-6} \left( \frac{m^2}{s} \right) * 0.0266 (m)} \Rightarrow Re = 23933$$

Υπολογισμός του συντελεστή τριβής από το διάγραμμα Moody (Σχήμα 11.4, σελ.311)

$$f^0 = \left( Re^0, \left( \frac{e}{D} \right)^0 \right) = (23933, 0.0018) \Rightarrow f^0 = 0.028$$

Υπολογισμός των απωλειών υδροστατικής κεφαλής από τη σχέση (2):

$$h_{o\lambda} = \frac{8flQ^2}{\pi^2 D^5} = \frac{8 * 0.028 * 50 * (5 * 10^{-4})^2}{\pi^2 (0.0266)^5} \Rightarrow$$

$$h_{o\lambda}^0 = 21.325 \frac{m^2}{s^2}$$

Παρατηρώ ότι  $h_{o\lambda}^0 \ll h_{o\lambda,max}$ , επομένως η υπόθεση 1 in για την διάμετρο του σωλήνα είναι πολύ μεγάλη. Κάνουμε την επόμενη εκτίμηση ως εξής. Αφού το  $f$  είναι μια σχετικά αδύνατη συνάρτηση του αριθμού Reynolds και της σχετικής τραχύτητας για τυρβώδη ροή σε λείους σωλήνες, έχουμε  $f \sim D^{-n}$  όπου  $n=5$  (για  $Q$ =σταθ.). Έτσι,

$$\frac{h_{o\lambda,max}}{h_{o\lambda}^0} \cong \left( \frac{D^0}{D_{min}} \right)^5 \Rightarrow D_{min} \cong D^0 \left( \frac{h_{o\lambda}^0}{h_{o\lambda,max}} \right)^{\frac{1}{5}} \Rightarrow$$

$$D_{min} \cong 1.049 \text{ (in)} \left( \frac{21.325 \left( \frac{m^2}{s^2} \right)}{1378.94 \left( \frac{m^2}{s^2} \right)} \right)^{\frac{1}{5}} \Rightarrow$$

$$D_{min} \cong \mathbf{0.46 \text{ in}}$$

Η ελάχιστη διάμετρος δεν υπάρχει στον Πίνακα 11.4 (Schedule 40), άρα για την 2<sup>η</sup> υπόθεση μου θα επιλέξω την αμέσως μεγαλύτερη διαθέσιμη διάμετρο σωλήνα.

2<sup>η</sup> Υπόθεση: Σωλήνα με ονομαστική διάμετρο **3/8 in**. Από Πίνακα 11.4 η εσωτερική διάμετρος του σωλήνα είναι:  $D^1 = 0.493 \text{ in} = 0.493 * 0.0254 \text{ m} \Rightarrow D^1 = \mathbf{0.0125 \text{ m}}$

Για χαλύβδινο σωλήνα το χαρακτηριστικό μήκος τραχύτητας που δίνεται από το Διάγραμμα στο Σχήμα 11.5 (σελ.312) είναι  $e=\mathbf{0.00015}$ . Επομένως, για την επιλεγείσα διάμετρο έχουμε:

$$\left( \frac{e}{D} \right)^1 = \mathbf{0.012}$$

Υπολογισμός του αριθμού Reynolds:

$$(3) \Rightarrow Re = \frac{4Q}{\pi \nu D} = \frac{4 * 5 * 10^{-4} \left( \frac{m^3}{s} \right)}{\pi * 10^{-6} \left( \frac{m^2}{s} \right) * 0.0125 \text{ (m)}} \Rightarrow Re = \mathbf{50929}$$

Υπολογισμός του συντελεστή τριβής από το διάγραμμα Moody (Σχήμα 11.4, σελ.311)

$$f^1 = \left( Re^1, \left( \frac{e}{D} \right)^1 \right) = (50929, 0.012) \Rightarrow f^1 = \mathbf{0.041}$$

Υπολογισμός των απωλειών υδροστατικής κεφαλής από τη σχέση (2):

$$h_{o\lambda} = \frac{8fLQ^2}{\pi^2 D^5} = \frac{8 * 0.041 * 50 * (5 * 10^{-4})^2}{\pi^2 (0.0125)^5} \Rightarrow$$

$$h_{o\lambda}^1 = \mathbf{1362.62 \frac{m^2}{s^2}}$$

Η 2<sup>η</sup> υπόθεση είναι αρκετά καλή αφού  $h_{o\lambda,max} \approx h_{o\lambda}^1$ . Για να βεβαιωθώ ότι η διάμετρος που επέλεξα είναι η σωστή για την διάταξη, ελέγχω και ποια είναι η πίεση στο σημείο 2 και αν ικανοποιεί την συνθήκη λειτουργίας της υδραυλικής πρέσας:

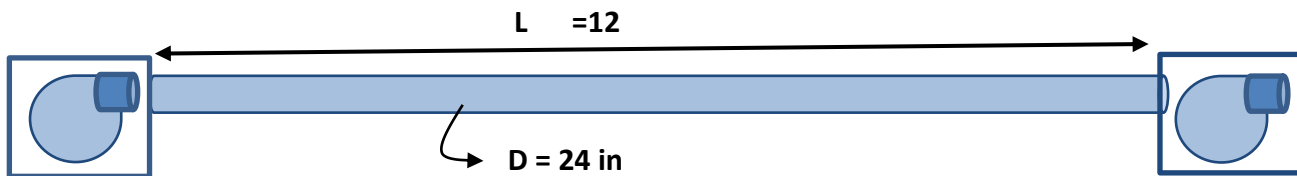
$$P_2^1 = P_1 - \rho h_{0A}^1 = 3000 \text{ (psig)} - 1000 \left( \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) 1362.62 \left( \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right) \frac{1 \text{ (psig)}}{6894.7 \text{ (Pa)}} \Rightarrow$$

$$P_2^1 = 3000 \text{ (psig)} - 197.63 \Rightarrow \mathbf{P_2^1 = 2802.4 \text{ psig} \approx P_2 = 2800 \text{ psig}}$$

Η ελάχιστη διάμετρος του σωλήνα που μπορεί να χρησιμοποιηθεί είναι άρα  $\mathbf{D = 0.493 \text{ in}}$

### 3<sup>η</sup> Άσκηση (Άσκηση 11.4 σελ.345 Βιβλίο Α.Χ. Παγιατάκης)

Πετρέλαιο ειδικού βάρους 0,855, θερμοκρασίας 15 °C και ιξώδους 9cp ρέει μέσα σε υπόγειο σωλήνα. Δύο σταθμοί αντλιών βρίσκονται σε απόσταση 12 km και έχουν σχεδόν το ίδιο υψόμετρο. Η πτώση πίεσης μεταξύ των δύο σταθμών είναι 15 atm. Ο σωλήνας έχει εσωτερική διάμετρο 24 in. Μολονότι ο σωλήνας είναι κατασκευασμένος από κοινό χάλυβα, γήρανση και διάβρωση έχουν αυξήσει την τραχύτητα του σε εκείνη περίπου του γαλβανισμένου σιδήρου. Ποια είναι η ογκομετρική παροχή σε m<sup>3</sup>/s; Ποια είναι η απαιτούμενη ισχύς σε kW;



#### ΛΥΣΗ

##### A) Μετατροπές Μονάδων

$$1 \text{ in} = 0.0254 \text{ m}$$

$$1 \text{ atm} = 1.01325 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ cp} = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

- Ονομαστική διάμετρος σωλήνα 24 in, σύμφωνα με το Schedule 40 η εσωτερική διάμετρος ενός τέτοιου σωλήνα είναι  $D = 22.63 \text{ in} \Rightarrow D = 22.63 \cdot 0.0254 \text{ (m)} \Rightarrow D = 0.575 \text{ m}$
- Για γαλβανισμένο σίδηρο το χαρακτηριστικό μήκος τραχύτητας που δίνεται από το Σχήμα 11.5 είναι  $e = 0.0005$  άρα η σχετική τραχύτητα είναι:

$$\frac{e}{D} = 0.00025$$

- Η πτώση πίεσης μεταξύ των δύο σταθμών είναι:

$$(-\Delta P) = 15 \text{ atm} = 15 \cdot 1.0325 \cdot 10^5 \text{ Pa} \Rightarrow (-\Delta P) = 1.5 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

- Πετρέλαιο ειδικού βάρους  $\varepsilon = 0.855$  σε θερμοκρασία 15 °C

$$\varepsilon = \frac{\rho_{\text{πετρέλαιο}}}{\rho_{\text{νερό}}} \Rightarrow \rho_{\text{πετρέλαιο}} = \varepsilon \cdot \rho_{\text{νερό}} = 0.855 \cdot 1000 \left( \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \Rightarrow$$

$$\rho = 855 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu = 9 \text{ cp} \Rightarrow \mu = 9 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

- $l = 12 \text{ km} = 12 \cdot 10^3 \text{ m}$

##### B) Παραδοχές

1. Δεν υπάρχει υψομετρική διαφορά άρα  $z_1 = z_2$
2. Θεωρώ ευθύγραμμο τμήμα σωλήνωσης με πλήρως ανεπτυγμένη ροή άρα:

$$h_e = 0$$

$$\langle v_1 \rangle = \langle v_2 \rangle$$

$$a_1 = a_2$$

### Γ) Ισοζύγιο Ενέργειας

$$\frac{P_1}{\rho} + a_1 \frac{\langle v_1 \rangle^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\rho} + a_2 \frac{\langle v_2 \rangle^2}{2} + gz_2 + h_{o\lambda} \Rightarrow$$

(Απλοποιώ την εξίσωση χρησιμοποιώντας τις παραδοχές)

$$\Rightarrow \frac{P_1}{\rho} + a_1 \frac{\langle v_1 \rangle^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\rho} + a_2 \frac{\langle v_2 \rangle^2}{2} + gz_2 + h_{o\lambda} \Rightarrow$$

$$h_\mu = \frac{(-\Delta P)}{\rho} \quad (1)$$

Εξ ορισμού, για τις ολικές απώλειες σε ευθύγραμμες σωλήνες ισχύει ότι:

$$h_{o\lambda} = h_\mu = f \frac{l \langle v \rangle^2}{D} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \left( -\frac{\Delta P}{\rho} \right) = f \frac{l \langle v \rangle^2}{D} \Rightarrow$$

$$f = \frac{\left( -\frac{\Delta P}{l} \right) D}{\rho \frac{1}{2} \langle v \rangle^2} \quad (2)$$

Ο αριθμός Reynolds δίνεται από τη σχέση:

$$Re = \frac{\rho \langle v \rangle D}{\mu} \quad (3)$$

Ενώ για τον συντελεστή τριβής Moody φ ισχύει ότι:

$$\varphi = \frac{1}{8} f \quad (4)$$

Υπολογίζω την ποσότητα φRe<sup>2</sup>:

$$\varphi Re^2 = \frac{1}{8} f Re^2 \stackrel{(2),(3)}{\Rightarrow} \varphi Re^2 = \frac{1}{8} \frac{\left( -\frac{\Delta P}{l} \right) D}{\rho \frac{1}{2} \langle v \rangle^2} \left( \frac{\rho \langle v \rangle D}{\mu} \right)^2 = \frac{1}{4} \frac{(-\Delta P) \rho D^3}{4 \mu^2 l} \Rightarrow$$

$$\varphi Re^2 = \frac{1}{4} \frac{1.5 * 10^6 (Pa) 855 \left( \frac{kg}{m^3} \right) (0.575)^3 (m^3)}{(9 * 10^{-3})^2 (Pa^2 s^2) 12 * 10^3 (m)} \Rightarrow \varphi Re^2 = 6.27 * 10^3$$

Από το τροποποιημένο διάγραμμα Moody (σελ.313):

$$\varphi Re^2 = 6.27 * 10^3 \text{ και } \frac{e}{D} = 0.00025 \Rightarrow Re = 4 * 10^4$$

Υπολογισμός της ταχύτητας από τον αριθμό Reynolds:

$$\langle v \rangle = \frac{Re \mu}{\rho D} = \frac{4 * 10^4 * 9 * 10^{-3} (Pa s)}{855 \left( \frac{kg}{m^3} \right) 0.548 (m)} \Rightarrow \langle v \rangle = 0.77 \text{ m/s}$$

Υπολογισμός ογκομετρικής παροχής:

$$Q = A \langle v \rangle = \frac{\pi D^2}{4} \langle v \rangle \Rightarrow Q = 0.1812 \text{ m}^3/\text{s}$$

Η απαιτούμενη ισχύς υπολογίζεται:

$$W = \dot{m} h_{o\Lambda} = \rho Q h_{o\Lambda} \quad (5)$$

$$h_{\mu} = \frac{(-\Delta P)}{\rho} = \frac{1.5 * 10^6}{855} \Rightarrow h_{o\Lambda} = 1754,38 \frac{m^2}{s^2}$$

$$(5) \Rightarrow W = \rho Q h_{o\Lambda} = 855 * 0.1812 * 1754.38 \Rightarrow W = 271800 \text{ W} \text{ ή } \mathbf{W = 272 \text{ kW}}$$