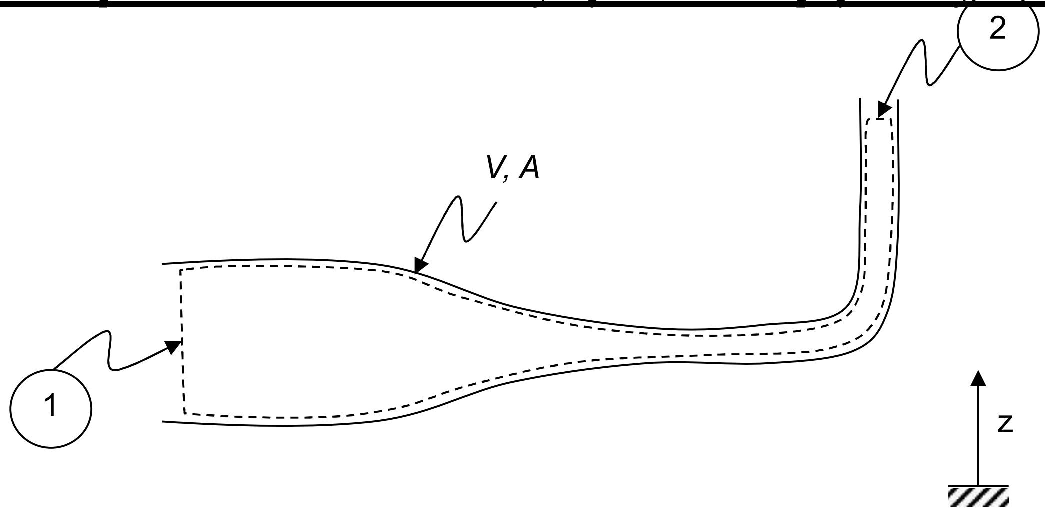
# Φυσικές Διεργασίες ΙΙ
# Σωληνώσεις

Διαδικτυακό μάθημα

Δίκτυα Σωληνώσεων

# ΣΩΛΗΝΩΣΕΙΣ

## Εφαρμογή του μακροσκοπικού ισοζυγίου ενέργειας σε σωληνώσεις




- **Υποθέσεις**

Μόνιμη ροή, Ομοιόμορφες u και ρ στις διατομές 1 και 2

$$\left(\frac{p_1}{\rho}+\frac{1}{2}\alpha_1 < v_1 >^2 + g z_1\right)=\left(\frac{p_2}{\rho}+\frac{1}{2}\alpha_2 < v_2 >^2 + g z_2\right)+h_{o\lambda}$$

$h_{o\lambda} \equiv (u_2 - u_1) - \frac{\dot{Q}}{\dot{m}}$ **= ολική απώλεια υδροστατικής κεφαλής (total head loss) [=](L/t)$^2$, m$^2$/s$^2$**

$u_2 - u_1$ **= αύξηση της εσωτερικής ενέργειας του ρευστού (δηλ. θέρμανση του ρευστού, εν γένει ανεπιθύμητη)**

$\frac{\dot{Q}}{\dot{m}}$ **= απώλεια θερμικής ενέργειας στο περιβάλλον**

# Σωληνώσεις

- **Υπολογισμός της ολικής απώλειας υδροστατικής κεφαλής $h_{ολ}$**

$$h_{ολ} = h_{\mu} + h_{\varepsilon}$$

**Η $h_{\mu}$ οφείλεται σε ιξώδεις τριβές μέσα σε πλήρως ανεπτυγμένη ροή. Η $h_{\varepsilon}$ οφείλεται σε αλλαγή διατομής, γωνίες, βαλβίδες κλπ.**

Για πλήρως ανεπτυγμένη ροή μέσα σε σωλήνα σταθερής διατομής, έχουμε:
$h_{\varepsilon}= 0$, $\alpha_1=\alpha_2=0$,

$$\left(\frac{p_1}{\rho}+\cancel{\frac{1}{2}\alpha_1 < v_1 >^2} +gz_1\right) = \left(\frac{p_2}{\rho}+\cancel{\frac{1}{2}\alpha_2 < v_2 >^2} +gz_2\right) + h_{ολ}$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} + g(z_1 - z_2) = h_{\mu} \qquad P = p + \rho g z \qquad \boxed{\frac{(P_1 - P_2)}{\rho} = h_{\mu}} \qquad Re=\frac{\rho < v > D}{\mu}$$

$$\frac{-\Delta P}{\ell} = \frac{128\mu Q}{\pi D^4} = \frac{128\mu < v > \left(\frac{\pi}{4}D^2\right)}{\pi D^4} = 32\frac{1}{D}\frac{\mu < v >}{D}$$

$$\boxed{h_{\mu} = 32\frac{\ell}{D}\frac{\mu < v >}{\rho D} = \frac{64}{ReD}\frac{\ell}{}\frac{< v >^2}{2}}$$

# Σωληνώσεις

- **Τυρβώδης Ροή**

$$\Delta P = \Delta P(D, l, e, < v >, \rho, \mu)$$

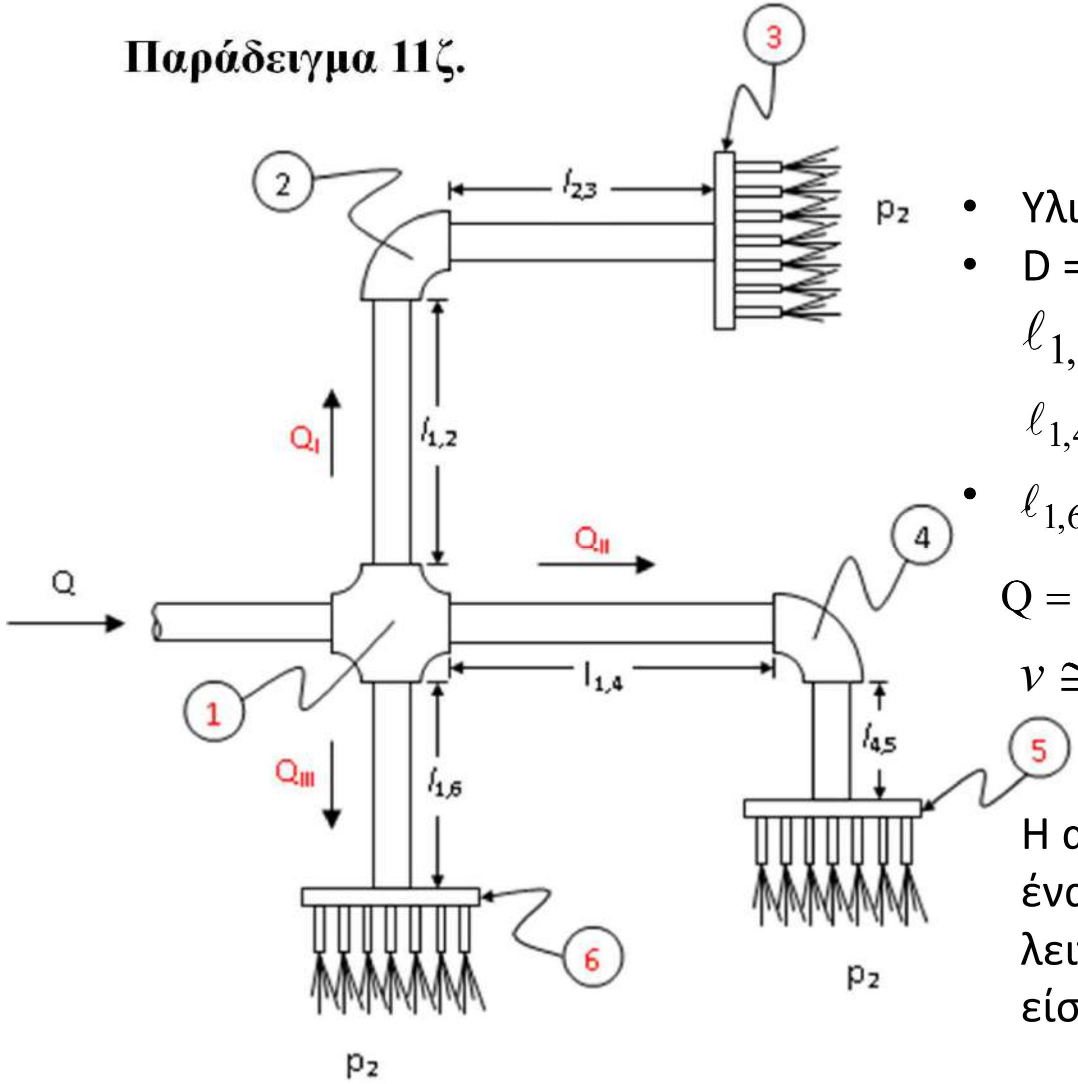
$$\frac{(P_1 - P_2)}{\rho} = h_\mu$$

$$\boxed{h_\mu = f\left(\mathrm{Re}, \frac{e}{D}\right)\frac{\ell}{D}\frac{< v >^2}{2}}$$

Το f είναι γνωστό ως ο συντελεστής τριβής του Fanning (κυρίως ΗΠΑ). Στην Αγγλία χρησιμοποιείται συχνά ο συντελεστής τριβής του Moody,

$$\phi = f / 4$$

## Παράδειγμα 11ζ.




- Υλικό σωλήνα: αλουμίνιο
- D = 3.068 in (3 in, ονομαστικό) ≅ $7.793\times10^{-2}$m

$\ell_{1,2} = 35\,\mathrm{m}$ $\ell_{2,3} = 35\,\mathrm{m}$

$\ell_{1,4} = 70\,\mathrm{m}$ $\ell_{4,5} = 20\,\mathrm{m}$

- $\ell_{1,6} = 30\,\mathrm{m}$ $\dfrac{e}{D} = 0.00002$

$Q = 5.64\,\mathrm{m^3/min}$ $\rho = 1000\,\mathrm{Kg/m^3}$

$\nu \cong 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$ **$p_2 = p_{atm}$**

Η απώλεια υδροστατικής κεφαλής σε ένα ψεκαστήρα υπό συνθήκες ομαλής λειτουργίας είναι p≥1.5atü στην είσοδο του ψεκαστήρα.

(i) Προσδιορίστε τις τιμές των τριών παροχών, $Q_I$, $Q_{II}$, $Q_{III}$.
(ii) Προσδιορίστε την πίεση στο σημείο ①, $p_1$.
(iii) Προσδιορίστε τις πιέσεις στις εισόδους των τριών ψεκαστήρων.

ΛΥΣΗ

Για το απλό του υπολογισμού θα αμελήσουμε τις απώλειες υδροστατικής κεφαλής στην είσοδο κάθε κλάδου (δηλαδή στην περιοχή ①).

Ισοζύγιο μάζας

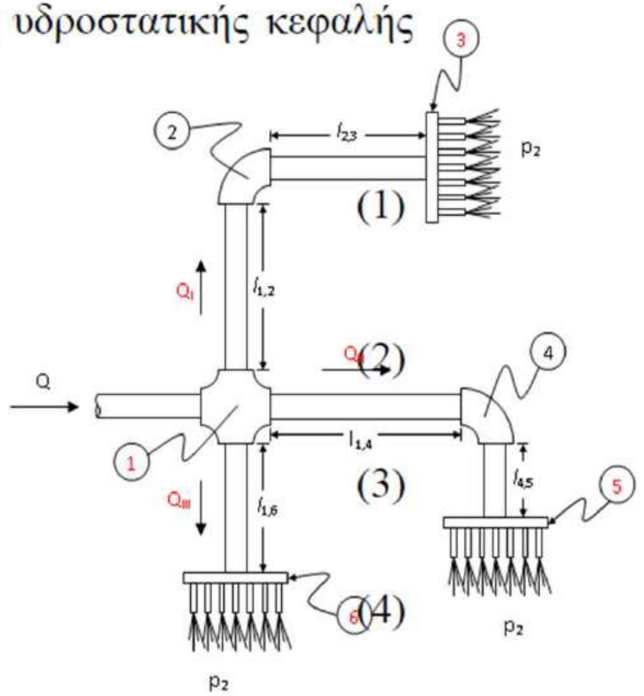
$$\boxed{Q_I + Q_{II} + Q_{III} = Q} \quad (\text{κόμβος ①})$$

Ισοζύγια ενέργειας

Κλάδος I
$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}\alpha_I < v_I >^2 = \frac{p_a}{\rho} + h_{\text{ολ},I}$$

Κλάδος II
$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}\alpha_{II} < v_{II} >^2 = \frac{p_a}{\rho} + h_{\text{ολ},II}$$

Κλάδος III
$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}\alpha_{III} < v_{III} >^2 = \frac{p_a}{\rho} + h_{\text{ολ},III}$$




Γνωστά

$\alpha_I$, $\alpha_{II}$ ,$\alpha_{III}$, $z_I = z_{II} = z_{III}$, Μήκη, διατομές, τραχύτητα, πυκνότητα, ιξώδες, $p_a = p_{atm}$

ΑΓΝΩΣΤΑ

$p_1$, $Q_I$, $Q_{II}$, $Q_{II}$, ($V_I$, $V_{II}$, $V_{III}$) και τα $h\lambda_{,I,}$ $h\lambda_{,II}$, $hol_{,III}$ που περιέχουν τους όρους $V_I$, $V_{II}$, $V_{III}$

V=Q/A = Q/(π D^2 /4)

$$\frac{(p_1 - p_\alpha)}{\rho} + \frac{8}{\pi^2 D^4} Q_I^2 = h_{o\lambda,I} \tag{5}$$

$$\frac{(p_1 - p_\alpha)}{\rho} + \frac{8}{\pi^2 D^4} Q_{II}^2 = h_{o\lambda,II} \tag{6}$$

$$\frac{(p_1 - p_\alpha)}{\rho} + \frac{8}{\pi^2 D^4} Q_{III}^2 = h_{o\lambda,III} \tag{7}$$

$$h_{o\lambda,I} = \left[ f_I \frac{(\ell_{1,2} + \ell_{2,3})}{D} + f_I \frac{\lambda_2}{D} + K_\psi \right] \frac{< v_I >^2}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad h_{o\lambda,I} = \frac{8}{\pi^2 D^4} \left[ f_I \frac{1}{D} (\ell_{1,2} + \lambda_2 + \ell_{2,3}) + K_\psi \right] Q_I^2 \tag{8}$$

Ομοίως,

$$h_{o\lambda,II} = \frac{8}{\pi^2 D^4} \left[ f_{II} \frac{1}{D} (\ell_{1,4} + \lambda_4 + \ell_{4,5}) + K_\psi \right] Q_{II}^2 \tag{9}$$

$$h_{o\lambda,III} = \frac{8}{\pi^2 D^4} \left[ f_{III} \frac{1}{D} \ell_{1,6} + K_\psi \right] Q_{III}^2 \tag{10}$$

Αντικαθιστώ τις [8], [9] και [10] στις [5], [6] και [7] αντίστοιχα, οπότε λαμβάνουμε τις κάτωθι εξισώσεις:

$$\boxed{\frac{8}{\pi^2 D^4}\left[f_{I}\frac{1}{D}(\ell_{1,2}+\lambda_2+\ell_{2,3})+K_{\psi}-1\right]Q_{I}^2=\frac{(p_1-p_a)}{\rho}} \qquad (11)$$

$$\boxed{\frac{8}{\pi^2 D^4}\left[f_{II}\frac{1}{D}(\ell_{1,4}+\lambda_4+\ell_{4,5})+K_{\psi}-1\right]Q_{II}^2=\frac{(p_1-p_a)}{\rho}} \qquad (12)$$

$$\boxed{\frac{8}{\pi^2 D^4}\left[f_{III}\frac{1}{D}\ell_{1,6}+K_{\psi}-1\right]Q_{III}^2=\frac{(p_1-p_a)}{\rho}} \qquad (13)$$

Οι Εξ. (1), (11), (12) και (13) είναι ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους: $Q_I$, $Q_{II}$, $Q_{III}$ και $p_1$. Το σύστημα αυτό μπορεί να λυθεί με πολλές μεθόδους. Κατωτέρω χρησιμοποιούμε μια απλή μέθοδο επαναληπτικής φύσεως.

$$Q_I^{(0)}=Q_{II}^{(0)}=Q_{III}^{(0)}\overset{(1)}{=}\frac{1}{3}Q=1.88\ \mathrm{m^3/min}=\underline{3.133\times10^{-2}\ \mathrm{m^3/s}}$$

$$Re_I^{(0)}=Re_{II}^{(0)}=Re_{III}^{(0)}=\frac{4Q_I^{(0)}}{\pi\ \nu\ D}=\frac{4\times3.133\times10^{-2}}{\pi\times10^{-6}\times7.793\times10^{-2}}=\underline{5.12\times10^5}$$

$$f_I^{(0)}=f_{II}^{(0)}=f_{III}^{(0)}=f(5.12\times10^5,0.00002)\overset{\text{Moody}}{\overset{\downarrow}{=}}\underline{0.013}$$

$$\begin{cases} \dfrac{8}{\pi^2 \times (7.793\times 10^{-2})^4}\left[\dfrac{0.013(35+2.34+35)}{(7.793\times 10^{-2})}+9.5-1\right] Q_{I}^{(1)^2} = \dfrac{(p_1-p_a)}{\rho} \\ \\ \dfrac{8}{\pi^2 \times (7.793\times 10^{-2})^4}\left[\dfrac{0.013(70+2.34+20)}{(7.793\times 10^{-2})}+9.5-1\right] Q_{II}^{(1)^2} = \dfrac{(p_1-p_a)}{\rho} \\ \\ \dfrac{8}{\pi^2 \times (7.793\times 10^{-2})^4}\left[\dfrac{0.013\times 30}{(7.793\times 10^{-2})}+9.5-1\right] Q_{III}^{(1)^2} = \dfrac{(p_1-p_a)}{\rho} \end{cases}$$

ή

$$\begin{cases} 4.520\times 10^5\, Q_{I}^{(1)^2} = \dfrac{(p_1-p_a)}{\rho} \\ \\ 5.253\times 10^5\, Q_{II}^{(1)^2} = \dfrac{(p_1-p_a)}{\rho} \qquad \text{(μονάδες S.I.)} \\ \\ 2.968\times 10^5\, Q_{III}^{(1)^2} = \dfrac{(p_1-p_a)}{\rho} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 672.3\,Q_{I}^{(1)} = \sqrt{\dfrac{(p_1 - p_a)}{\rho}} \\[2ex] 724.8\,Q_{II}^{(1)} = \sqrt{\dfrac{(p_1 - p_a)}{\rho}} \\[2ex] 544.8\,Q_{III}^{(1)} = \sqrt{\dfrac{(p_1 - p_a)}{\rho}} \end{cases} \qquad \text{(μονάδες S.I.)}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις τελευταίες τρεις εξισώσεις παίρνουμε

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{Q_{II}^{(1)}}{Q_{I}^{(1)}} = 0.928 \\[3ex] \dfrac{Q_{III}^{(1)}}{Q_{I}^{(1)}} = 1.234 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{Q_{I}^{(1)} + Q_{II}^{(1)} + Q_{III}^{(1)}}{Q_{I}^{(1)}} = 1 + 0.928 + 1.234 = 3.162$$

$$\begin{cases} 672.3\,Q_{I}^{(1)} = \sqrt{\dfrac{(p_1 - p_a)}{\rho}} \\ \\ 724.8\,Q_{II}^{(1)} = \sqrt{\dfrac{(p_1 - p_a)}{\rho}} \\ \\ 544.8\,Q_{III}^{(1)} = \sqrt{\dfrac{(p_1 - p_a)}{\rho}} \end{cases} \qquad \text{(μονάδες S.I.)}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις τελευταίες τρεις εξισώσεις παίρνουμε

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{Q_{II}^{(1)}}{Q_{I}^{(1)}} = 0.928 \\ \\ \dfrac{Q_{III}^{(1)}}{Q_{I}^{(1)}} = 1.234 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{Q_{I}^{(1)} + Q_{II}^{(1)} + Q_{III}^{(1)}}{Q_{I}^{(1)}} = 1 + 0.928 + 1.234 = 3.162$$

Χρησιμοποιώντας την (1) παίρνουμε

$$Q_{I}^{(1)} = \frac{Q}{3.162} = \frac{0.094}{3.162} = \underline{2.973 \times 10^{-2}\, m^{3}/s}$$

Έτσι,

$$Q_{II}^{(1)} = 0.928\ Q_{I}^{(1)} = 2.759 \times 10^{-2}\, m^{3}/s$$

$$Q_{III}^{(1)} = 1.234\ Q_{I}^{(1)} = 3.668 \times 10^{-2}\, m^{3}/s$$

Μπορούμε τώρα να επανακυκλώσουμε τον υπολογισμό

$$Re_{I}^{(1)} = \frac{4Q_{I}^{(1)}}{\pi \nu D} = \ldots = 4.86 \times 10^{5}$$

$$Re_{II}^{(1)} = \frac{4Q_{II}^{(1)}}{\pi \nu D} = \ldots = 4.51 \times 10^{5}$$

$$Re_{III}^{(1)} = \frac{4Q_{III}^{(1)}}{\pi \nu D} = \ldots = 5.99 \times 10^{5}$$

$$f_{I}^{(1)} = f\,(4.86 \times 10^{5}, 0.00002) \cong 0.0137$$

$$f_{II}^{(1)} = f\,(4.51 \times 10^{5}, 0.00002) \cong 0.0138$$

$$f_{III}^{(1)} = f\,(5.99 \times 10^{5}, 0.00002) \cong 0.0131$$

Με αυτές τις τιμές οι Εξ. (11)-(13) δίνουν

$$4.663\times10^5 {Q_{I}^{(2)}}^2 = \frac{(p_1-p_a)}{\rho} \tag{15}$$

$$5.461\times10^5 {Q_{II}^{(2)}}^2 = \frac{(p_1-p_a)}{\rho} \tag{16}$$

$$2.976\times10^5 {Q_{III}^{(2)}}^2 = \frac{(p_1-p_a)}{\rho} \tag{17}$$

ή

$$\begin{cases} 682.9\, Q_{I}^{(2)} = \sqrt{\dfrac{(p_1-p_a)}{\rho}} \\[2ex] 739.0\, Q_{II}^{(2)} = \sqrt{\dfrac{(p_1-p_a)}{\rho}} \\[2ex] 545.6\, Q_{III}^{(2)} = \sqrt{\dfrac{(p_1-p_a)}{\rho}} \end{cases}$$

Διαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\frac{Q_{II}^{(2)}}{Q_{I}^{(2)}} = 0.924 \qquad \frac{Q_{III}^{(2)}}{Q_{I}^{(2)}} = 1.252$$

Αρα,

$$\frac{Q_{I}^{(2)} + Q_{II}^{(2)} + Q_{III}^{(2)}}{Q_{I}^{(2)}} = 1+0.924+1.252 = 3.176$$

$$Q_{I}^{(2)} = \frac{Q}{3.176} = \underline{2.960 \times 10^{-2} m^3/s = 1.78 m^3/min}$$

και
$$Q_{II}^{(2)} = 0.924\ Q_{I}^{(2)} = \underline{2.735 \times 10^{-2} m^3/s = 1.64 m^3/min}$$

$$Q_{III}^{(2)} = 1.252\ Q_{I}^{(2)} = \underline{3.706 \times 10^{-2} m^3/s = 2.22 m^3/min}$$

Είναι φανερό ότι μια ακόμη ανακύκλωση δεν θα επιφέρει σημαντικές αλλαγές. Έτσι

$$\boxed{Q_{I} = 1.78\, m^3/min} \tag{18}$$

$$\boxed{Q_{II} = 1.64\, m^3/min} \tag{19}$$

$$\boxed{Q_{III} = 2.22\, m^3/min} \tag{20}$$

(ii) Η πίεση $p_1$ μπορεί να υπολογισθεί από οιαδήποτε των Εξ. (15)-(17) με τις τιμές των παροχών από τις Εξ. (18)-(20). Έτσι

$$\begin{cases} p_1 - p_a = 4.663 \times 10^5 \times 1000 \times (2.960 \times 10^{-2})^2 = 408.6\, kPa = 4.16\, atm \\ p_1 - p_a = 5.461 \times 10^5 \times 1000 \times (2.73 \times 10^{-2})^2 = 408.5\, kPa = 4.16\, atm \\ p_1 - p_a = 2.976 \times 10^5 \times 1000 \times (3.706 \times 10^{-2})^2 = 408.7\, kPa = 4.17\, atm \end{cases}$$

ή
$$\boxed{p_1 = 4.16\ \text{atü}} \tag{21}$$

Η ουσιαστική συμφωνία των τριών αποτελεσμάτων είναι ένδειξη ότι έχουμε σύγκλιση.

(iii) Η πίεση στην είσοδο του ψεκαστήρα ③, p3-, προσδιορίζεται εύκολα ως εξής. Από το ισοζύγιο ενέργειας έχουμε:

$$\frac{p_{3-}}{\rho}+\frac{1}{2}<v_I>^2=\frac{p_a}{\rho}+h_\psi=\frac{p_a}{\rho}+K_\psi\frac{1}{2}<v_I>^2 \tag{22}$$

$$p_{3-}-p_a=\rho\,(K_\psi-1)\frac{1}{2}<v_I>^2=(K_\psi-1)\frac{8\rho}{\pi^2D^4}Q_I^2 \tag{23}$$

Αρα,

$$p_{3-}-p_a=(9.5-1)\frac{8\times1000}{\pi^2(7.793\times10^{-2})^4}(2.960\times10^{-2})^2\,\text{Pa}$$

$$=163.7\text{ kPa}=1.67\text{ atm}\Rightarrow\boxed{p_{3-}=1.67\text{ atü}}$$

Ομοίως παίρνουμε

$$p_{5-}-p_a=(K_\psi-1)\frac{8\rho}{\pi^2D^4}Q_{II}^2=(9.5-1)\frac{8\times1000}{\pi^2(7.793\times10^{-2})^4}(2.735\times10^{-2})^2\text{ Pa}$$

$$=139.7\text{ kPa}=1.42\text{ atm}\Rightarrow\boxed{p_{5-}=1.42\text{ atü}}$$

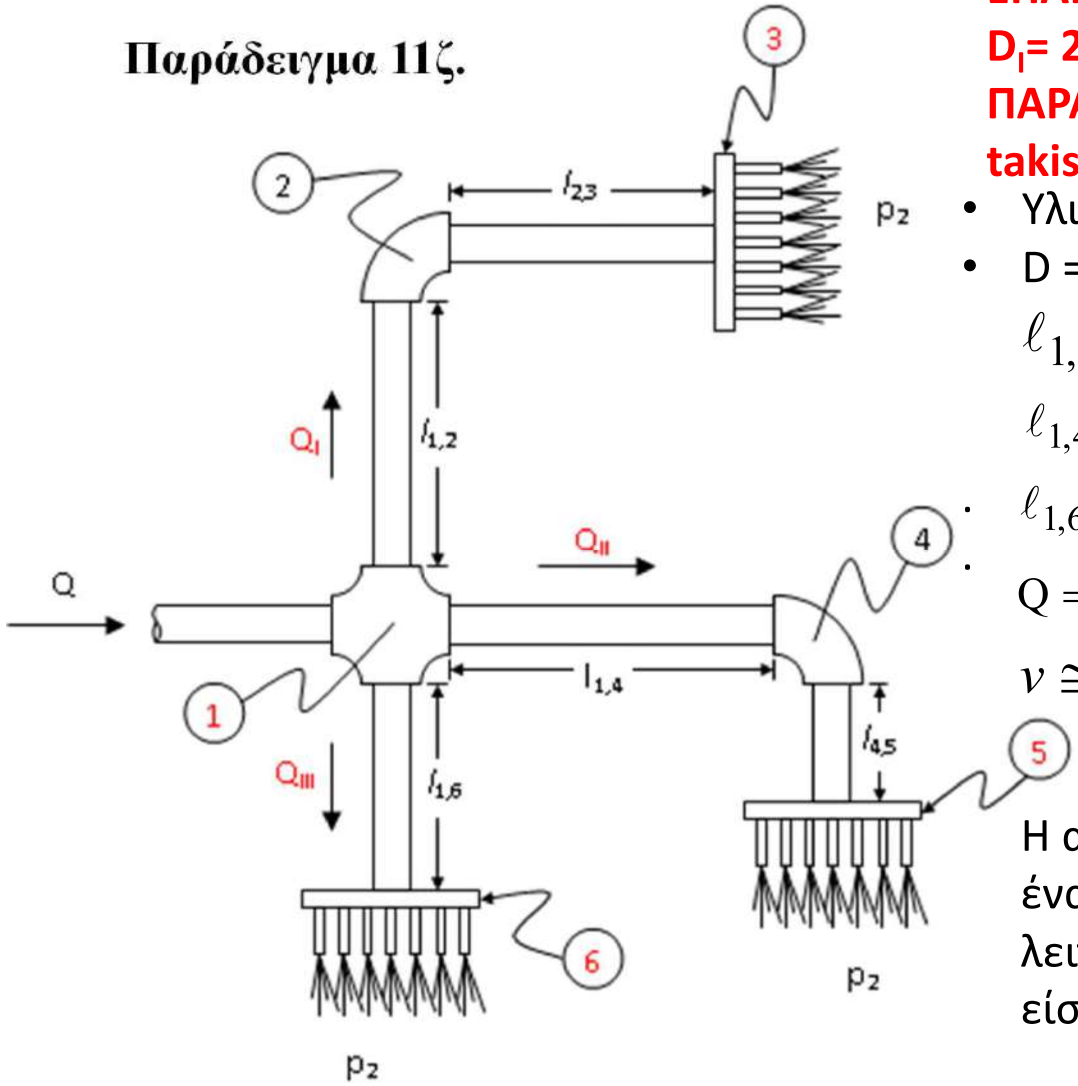
$$p_{6-}-p_a=(K_\psi-1)\frac{8\rho}{\pi^2D^4}Q_{III}^2=(9.5-1)\frac{8\times1000}{\pi^2(7.793\times10^{-2})^4}(3.706\times10^{-2})^2\text{ Pa}$$

$$=256.6\text{ kPa}=2.62\text{ atm}\Rightarrow\boxed{p_{6-}=2.62\text{ atü}}$$

**Παρατήρηση 2.** Βλέπουμε ότι $p_{5-}=1.42\text{atü}<1.5\text{atü}$. Ενδέχεται λοιπόν ο ψεκαστήρας 5 να μην λειτουργεί ικανοποιητικά.

Αν υποτεθεί ότι αυτό πράγματι συμβαίνει, τότε πρέπει να κάνουμε κάποια τροποποίηση στο σύστημα.

**Παράδειγμα 11ζ.**




**ΕΠΑΝΑΛΑΒΑΤΕ με**
**$D_I$= 2.5 in, $D_{II}$= 3 in, $D_{III}$= 2 in**
**ΠΑΡΑΔΟΣΗ 10/4/2020**
**takisp@chemeng.upatras.gr**

- Υλικό σωλήνα: αλουμίνιο
- D = 3.068 in (3 in, ονομαστικό) ≅ $7.793\times10^{-2}$m

$$\ell_{1,2} = 35\,\mathrm{m} \quad \ell_{2,3} = 35\,\mathrm{m}$$

$$\ell_{1,4} = 70\,\mathrm{m} \quad \ell_{4,5} = 20\,\mathrm{m}$$

$$\ell_{1,6} = 30\,\mathrm{m} \quad \frac{e}{D} = 0.00002$$

$$Q = 5.64\,\mathrm{m^3/min} \quad \rho = 1000\,\mathrm{Kg/m^3}$$

$$\nu \cong 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$$

Η απώλεια υδροστατικής κεφαλής σε ένα ψεκαστήρα υπό συνθήκες ομαλής λειτουργίας (δηλ. για p≥1.5atü στην είσοδο του ψεκαστήρα.

(i) Προσδιορίστε τις τιμές των τριών παροχών, $Q_I$, $Q_{II}$, $Q_{III}$.

(ii) Προσδιορίστε την πίεση στο σημείο ①, $p_1$.

(iii) Προσδιορίστε τις πιέσεις στις εισόδους των τριών ψεκαστήρων.