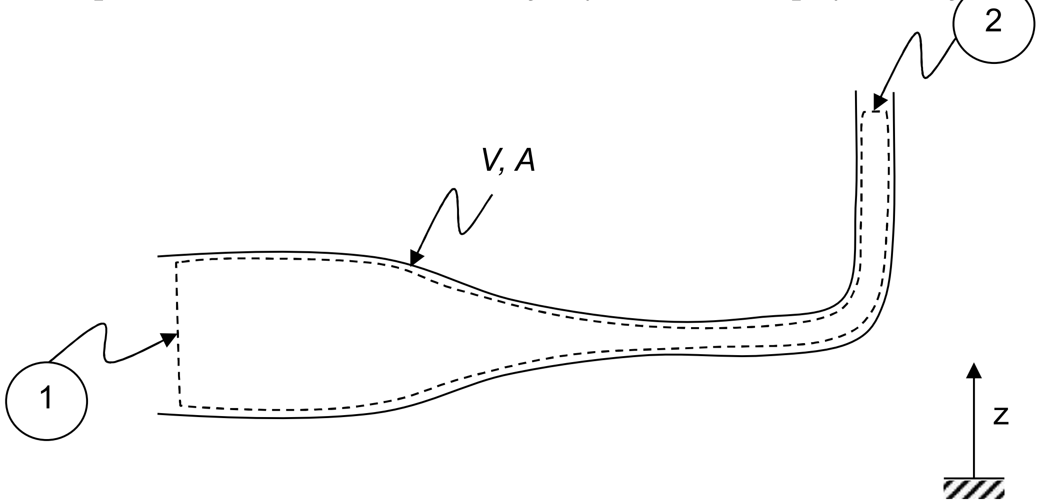
Φυσικές Διεργασίες ΙΙ
Σωληνώσεις

Διαδικτυακό μάθημα

Δίκτυα Σωληνώσεων

ΣΩΛΗΝΩΣΕΙΣ

<u>Εφαρμογή του μακροσκοπικού ισοζυγίου ενέργειας σε σωληνώσεις</u>



- **Υποθέσεις**

Μόνιμη ροή, Ομοιόμορφες u και ρ στις διατομές 1 και 2

$$\left(\frac{p_1}{\rho}+\frac{1}{2}\alpha_1<v_1>^2+gz_1\right)=\left(\frac{p_2}{\rho}+\frac{1}{2}\alpha_2<v_2>^2+gz_2\right)+h_{o\lambda}$$

$h_{o\lambda} \equiv (u_2-u_1)-\dfrac{\dot{Q}}{\dot{m}}$ **= ολική απώλεια υδροστατικής κεφαλής (total head loss) [=](L/t)^2, m^2/s^2**

u_2-u_1 **= αύξηση της εσωτερικής ενέργειας του ρευστού (δηλ. θέρμανση του ρευστού, εν γένει ανεπιθύμητη)**

$\dfrac{\dot{Q}}{\dot{m}}$ **= απώλεια θερμικής ενέργειας στο περιβάλλον**

Σωληνώσεις

- **Υπολογισμός της ολικής απώλειας υδροστατικής κεφαλής $h_{ολ}$**

$$h_{ολ} = h_{\mu} + h_{\varepsilon}$$

Η h_{μ} οφείλεται σε ιξώδεις τριβές μέσα σε πλήρως ανεπτυγμένη ροή. Η h_{ε} οφείλεται σε αλλαγή διατομής, γωνίες, βαλβίδες κλπ.

Για πλήρως ανεπτυγμένη ροή μέσα σε σωλήνα σταθερής διατομής, έχουμε:
$h_{\varepsilon}= 0$, $\alpha_1=\alpha_2=0$,

$$\left(\frac{p_1}{\rho}+\cancel{\frac{1}{2}\alpha_1 < v_1 >^2} + gz_1\right) = \left(\frac{p_2}{\rho}+\cancel{\frac{1}{2}\alpha_2 < v_2 >^2} + gz_2\right) + h_{ολ}$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} + g(z_1 - z_2) = h_{\mu} \qquad P = p + \rho g z \qquad \boxed{\frac{(P_1 - P_2)}{\rho} = h_{\mu}} \qquad Re = \frac{\rho < v > D}{\mu}$$

$$\frac{-\Delta P}{\ell} = \frac{128 \mu Q}{\pi D^4} = \frac{128 \mu < v > \left(\frac{\pi}{4} D^2\right)}{\pi D^4} = 32 \frac{1}{D} \frac{\mu < v >}{D}$$

$$\boxed{h_{\mu} = 32 \frac{\ell}{D} \frac{\mu < v >}{\rho D} = \frac{64}{Re D} \frac{\ell}{} \frac{< v >^2}{2}}$$

Σωληνώσεις

- **Τυρβώδης Ροή**

$$\Delta P = \Delta P(D, l, e, <v>, \rho, \mu)$$

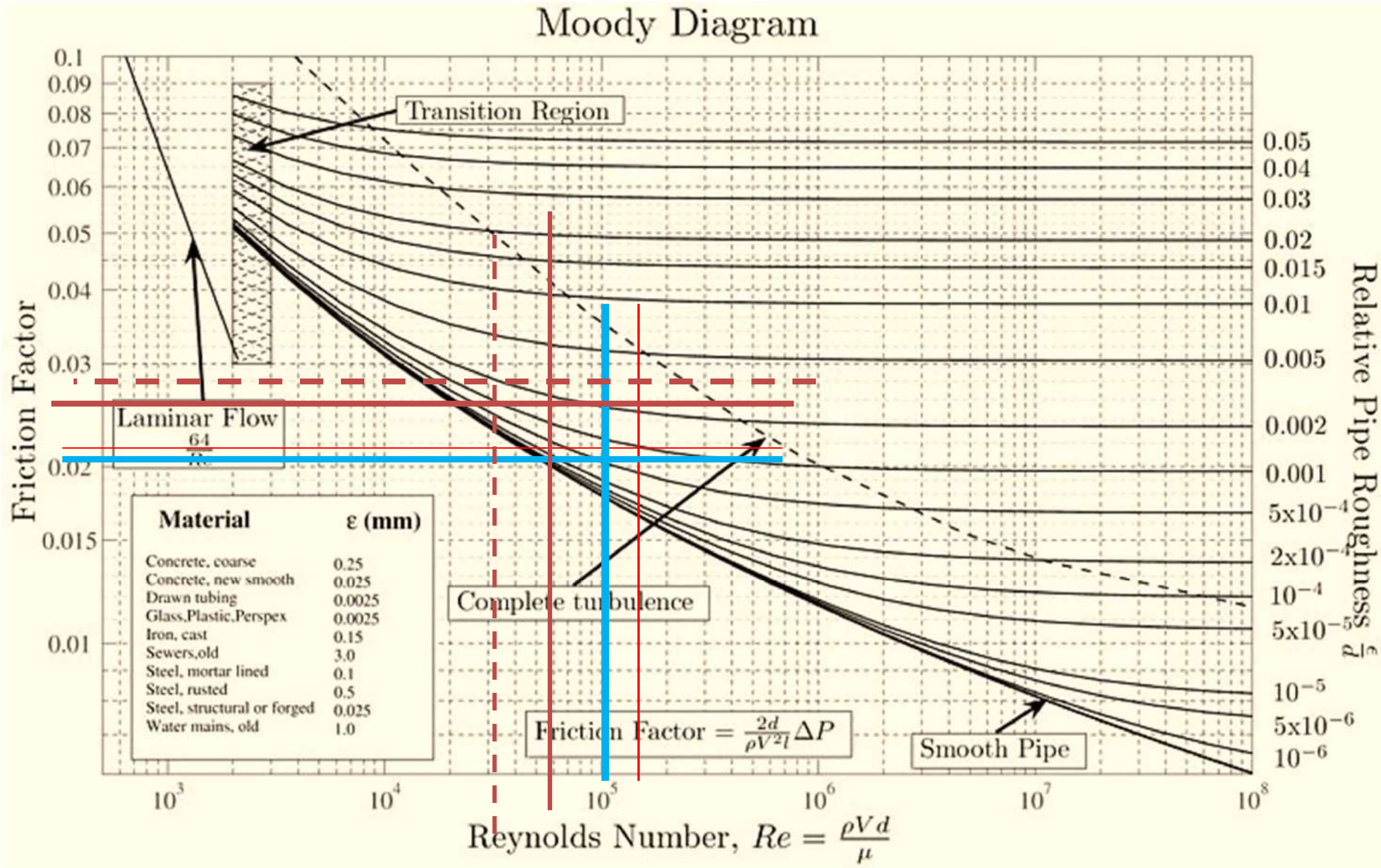
$$\frac{(P_1 - P_2)}{\rho} = h_\mu$$

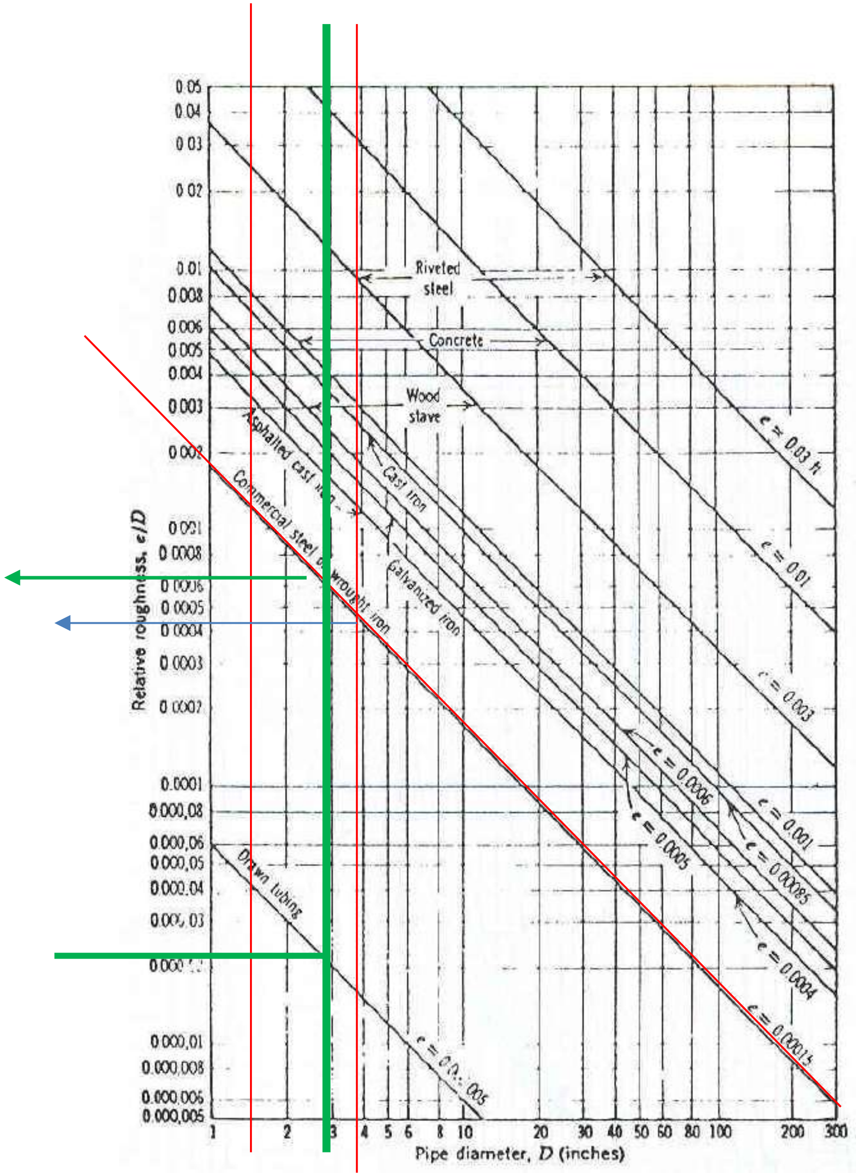
$$\boxed{h_\mu = f\left(\mathrm{Re}, \frac{e}{D}\right)\frac{\ell}{D}\frac{<v>^2}{2}}$$

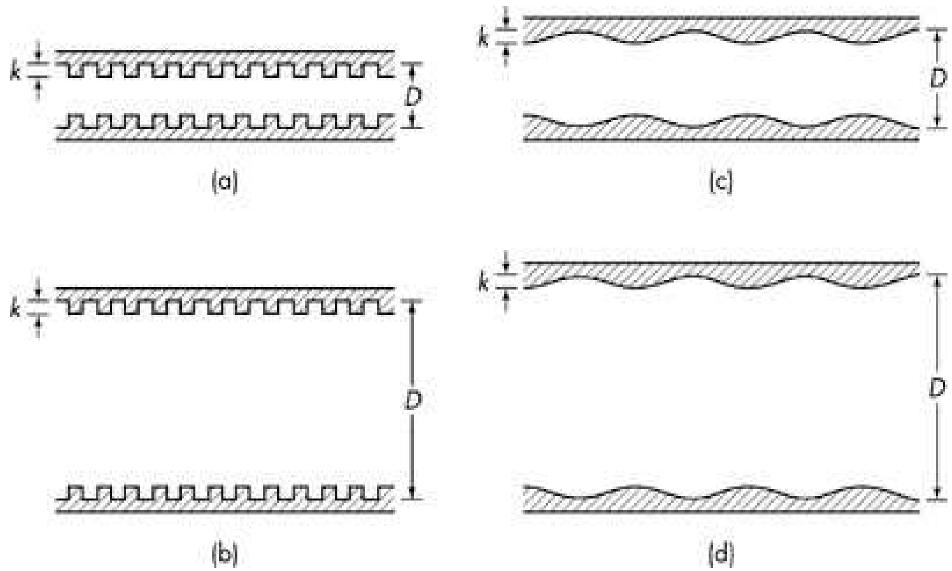
Το f είναι γνωστό ως ο συντελεστής τριβής του Fanning (κυρίως ΗΠΑ). Στην Αγγλία χρησιμοποιείται συχνά ο συντελεστής τριβής του Moody,

$$\phi = f / 4$$

Διάγραμμα Moody $f_D(\mathrm{Re}, \mathrm{k/D})$







Σχετική τραχύτητα για διάφορα είδη σωλήνων

Σωληνώσεις

Ελάσσονες απώλειες υδροστατικής κεφαλής

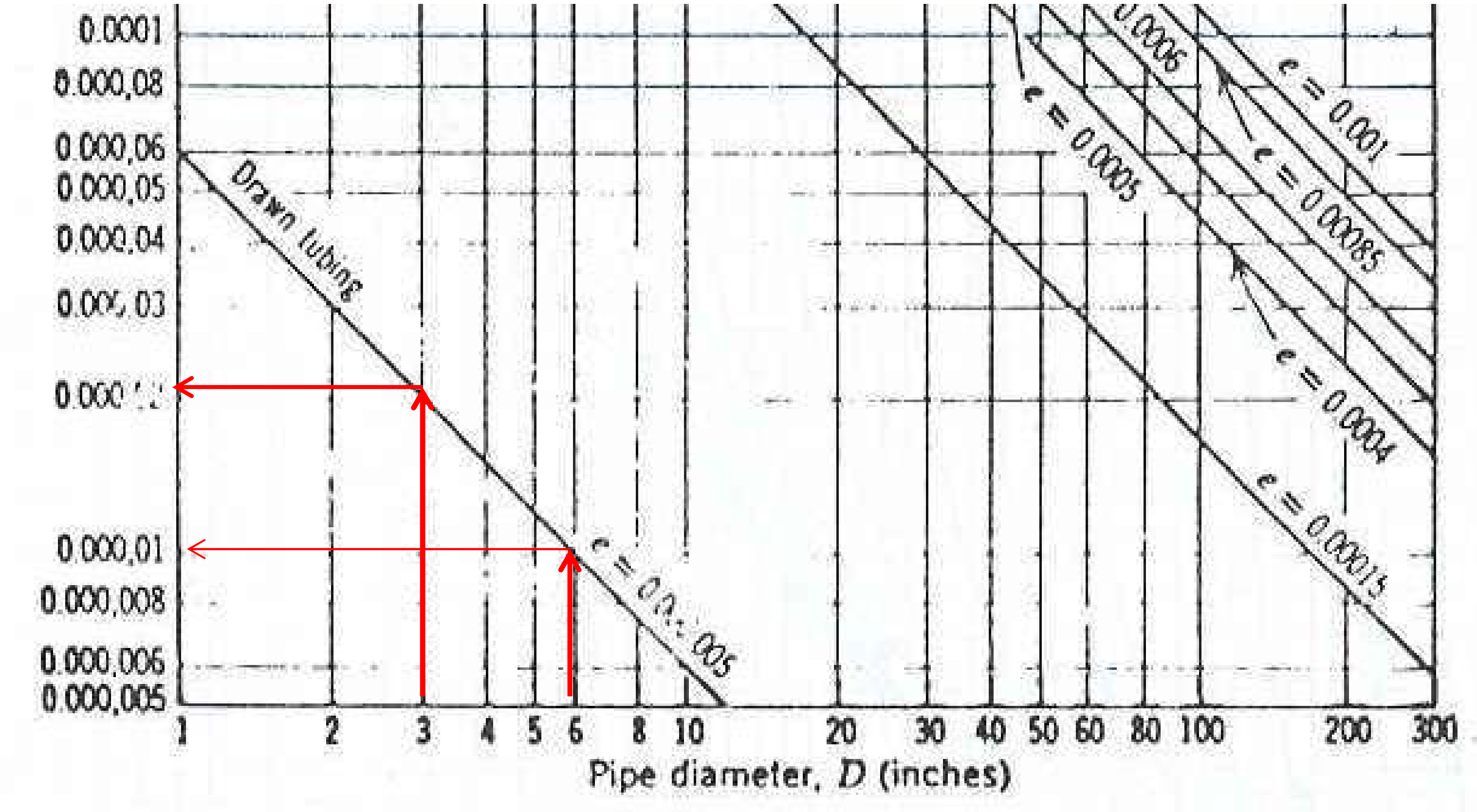
$$h_\varepsilon = K\frac{<v>^2}{2}$$

K = συντελεστής απώλειας [=] αδιάστατος

Ένας άλλος τρόπος έκφρασης της h_ε είναι να δοθεί η αντίσταση στην ροή από το εξάρτημα ως ισοδύναμο μήκος λ ευθύγραμμου σωλήνα της ίδιας ονομαστικής διαμέτρου, δηλ.

$$h_\varepsilon = f\frac{\lambda}{D}\frac{<v>^2}{2} \qquad K = f\frac{\lambda}{D} \qquad \lambda = K\frac{D}{f}$$

Προσοχή στους Πίνακες, συνήθως δίνεται το **λ/D**

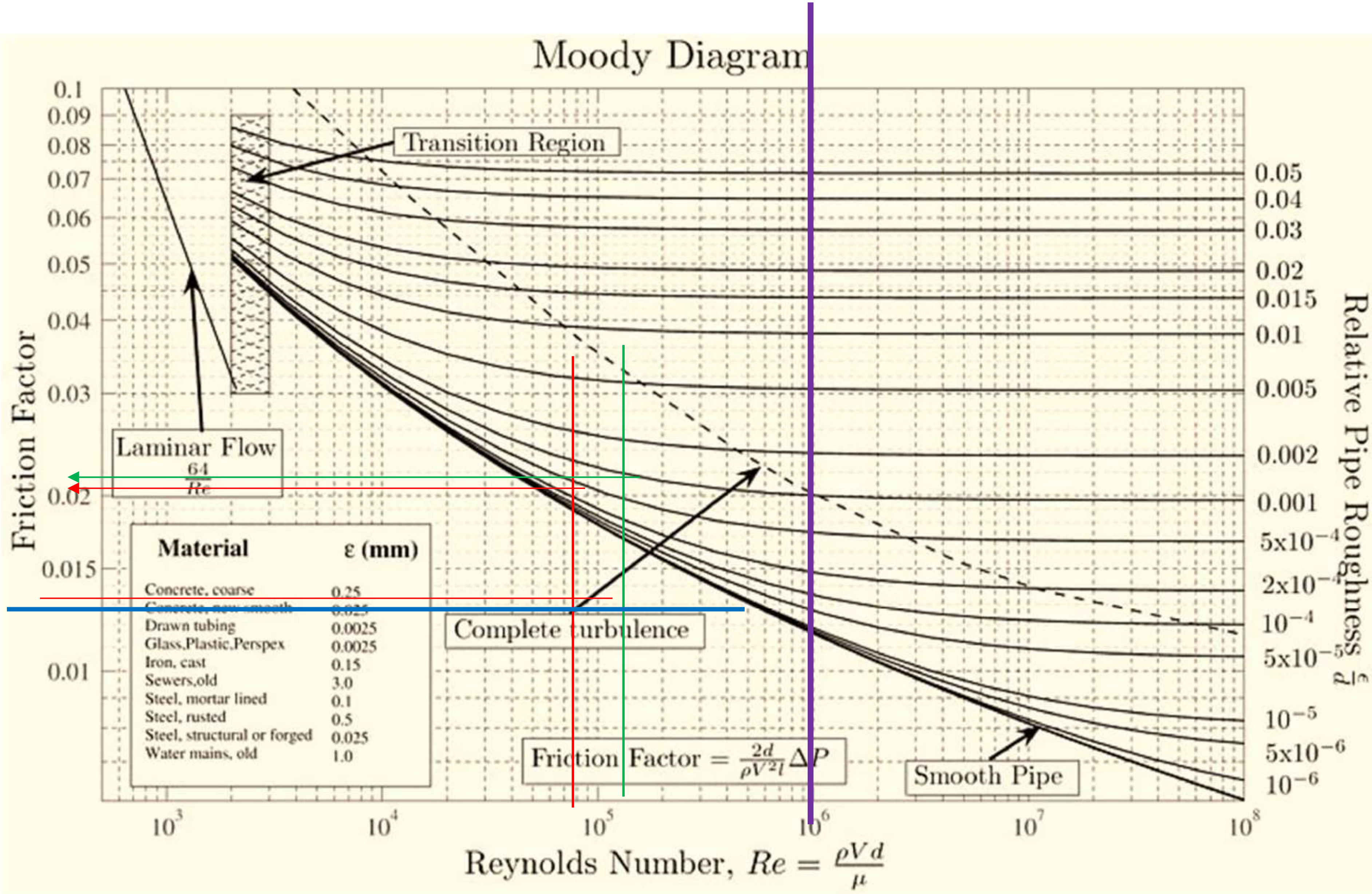


Παράδειγμα 11 στ: D=3.068 in, (e/D)=0.00002, D=6 in, (e/D)= 0.00001

Nominal Pipe Size (in)	Inside Diameter (in)
1/8	0.269
1/4	0.364
3/8	0.493
1/2	0.622
3/4	0.824
1	1.049
1 ½	1.610
2	2.067
2 ½	2469
3	3.068
3 ½	3.548
4	4.026
5	5.047
6	6.065
8	8.071
10	10.020
12	12.090

Πίνακας 11.4 (Πηγή: Fox & McDonald “Introduction to Fluid Mechanics”, 2nd ed.)

Διάγραμμα Moody $f_D(\mathrm{Re}, k/D)$



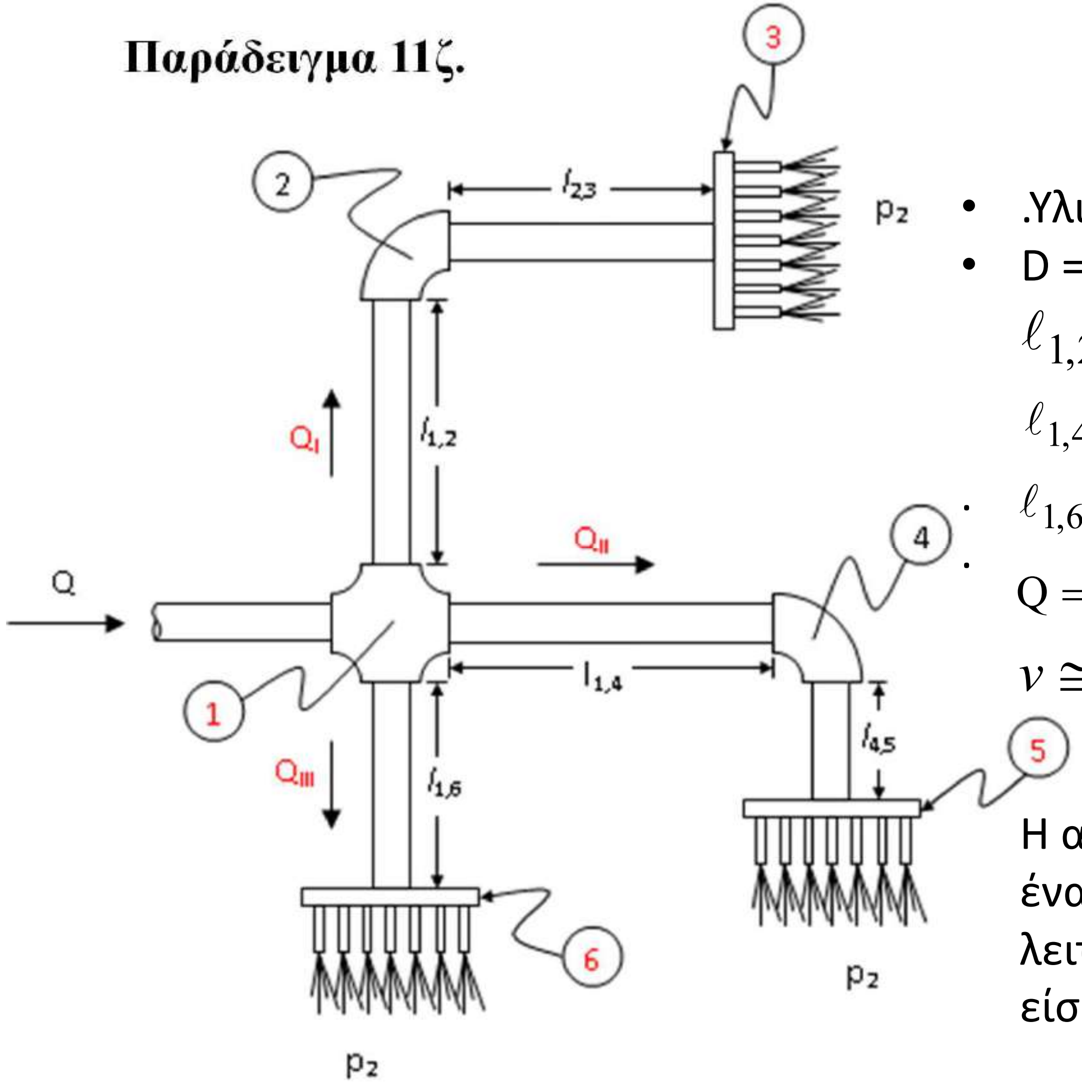
5. Βαλβίδες και Εξαρτήματα

Τυπικά ισοδύναμα μήκη (λ/D) για βαλβίδες και εξαρτήματα

Πίνακας 11.3

Εξάρτημα	**Περιγραφή**	**Ισοδύναμο μήκος λ/D**
Σφαιρική βαλβίδα (Globe valve)	Πλήρως ανοικτή	350
Βαλβίδα τύπου πύλης (Gate valve)	Πλήρως ανοικτή	13
	¾ ανοικτή	35
	½ ανοικτή	160
	¼ ανοικτή	900
Βαλβίδα ελέγχου (Check valve)		50-100
Αγκώνας κανονικός, 90 deg (Standard elbow)		**30**
Αγκώνας κανονικός, 45 deg		16
Αγκώνας 90 deg (Elbow)	Μακριάς ακτίνας (Long radius)	20
Δρομικός αγκώνας, 90 deg (Street elbow)		50
Δρομικός αγκώνας, 45 deg		26
Ταυ (tau)	Ευθύγραμμη ροή	**20**
	Κλαδική ροή	**60**
Επιστροφική καμπή (return bend)	Στροφή 180 deg (πιο “ανοικτή” από δύο κανονικούς αγκώνες)	50

Παράδειγμα 11ζ.



- .Υλικό σωλήνα: αλουμίνιο
- D = 3.068 in (3 in, ονομαστικό) ≅ 7.793×10^{-2}m

$\ell_{1,2} = 35\,\text{m}$ $\ell_{2,3} = 35\,\text{m}$

$\ell_{1,4} = 70\,\text{m}$ $\ell_{4,5} = 20\,\text{m}$

$\ell_{1,6} = 30\,\text{m}$ $\dfrac{e}{D} = 0.00002$

$Q = 5.64\,\text{m}^3/\text{min}$ $\rho = 1000\,\text{Kg}/\text{m}^3$

$\nu \cong 10^{-6}\,\text{m}^2/\text{s}$

Η απώλεια υδροστατικής κεφαλής σε ένα ψεκαστήρα υπό συνθήκες ομαλής λειτουργίας (δηλ. για p≥1.5atü στην είσοδο του ψεκαστήρα.

(i) Προσδιορίστε τις τιμές των τριών παροχών, Q_I, Q_{II}, Q_{III}.
(ii) Προσδιορίστε την πίεση στο σημείο ①, p_1.
(iii) Προσδιορίστε τις πιέσεις στις εισόδους των τριών ψεκαστήρων.

ΛΥΣΗ

Για το απλό του υπολογισμού θα αμελήσουμε τις απώλειες υδροστατικής κεφαλής στην είσοδο κάθε κλάδου (δηλαδή στην περιοχή ①).

Ισοζύγιο μάζας

$$\boxed{Q_I + Q_{II} + Q_{III} = Q} \quad (\text{κόμβος ①}) \tag{1}$$

Ισοζύγια ενέργειας

Κλάδος I
$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}\alpha_I < v_I >^2 = \frac{p_a}{\rho} + h_{o\lambda,I} \tag{2}$$

Κλάδος II
$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}\alpha_{II} < v_{II} >^2 = \frac{p_a}{\rho} + h_{o\lambda,II} \tag{3}$$

Κλάδος III
$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}\alpha_{III} < v_{III} >^2 = \frac{p_a}{\rho} + h_{o\lambda,III} \tag{4}$$

Γνωστά

α_I, α_{II} ,α_{III}, $z_I = z_{II} = z_{III}$, Μήκη, διατομές, τραχύτητα, πυκνότητα, ιξώδες, $p_a = p_{atm}$

ΑΓΝΩΣΤΑ

p_1, Q_I, Q_{II}, Q_{II}, (V_I, V_{II}, V_{III}) και τα $h_{o\lambda,I}$, $h_{o\lambda,II}$, $h_{ol,III}$ που περιέχουν τους όρους V_I, V_{II}, V_{III}

$$\frac{(p_1 - p_\alpha)}{\rho} + \frac{8}{\pi^2 D^4} Q_I^2 = h_{o\lambda,I} \tag{5}$$

$$\frac{(p_1 - p_\alpha)}{\rho} + \frac{8}{\pi^2 D^4} Q_{II}^2 = h_{o\lambda,II} \tag{6}$$

$$\frac{(p_1 - p_\alpha)}{\rho} + \frac{8}{\pi^2 D^4} Q_{III}^2 = h_{o\lambda,III} \tag{7}$$

$$h_{o\lambda,I} = \left[f_I \frac{(\ell_{1,2} + \ell_{2,3})}{D} + f_I \frac{\lambda_2}{D} + K_\psi \right] \frac{< v_I >^2}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad h_{o\lambda,I} = \frac{8}{\pi^2 D^4} \left[f_I \frac{1}{D} (\ell_{1,2} + \lambda_2 + \ell_{2,3}) + K_\psi \right] Q_I^2 \tag{8}$$

Ομοίως,

$$h_{o\lambda,II} = \frac{8}{\pi^2 D^4} \left[f_{II} \frac{1}{D} (\ell_{1,4} + \lambda_4 + \ell_{4,5}) + K_\psi \right] Q_{II}^2 \tag{9}$$

$$h_{o\lambda,III} = \frac{8}{\pi^2 D^4} \left[f_{III} \frac{1}{D} \ell_{1,6} + K_\psi \right] Q_{III}^2 \tag{10}$$

$$\boxed{\frac{8}{\pi^2 D^4}\left[f_{\mathrm{I}}\frac{1}{D}(\ell_{1,2}+\lambda_2+\ell_{2,3})+K_\psi-1\right]Q_{\mathrm{I}}^2=\frac{(p_1-p_a)}{\rho}} \qquad (11)$$

$$\boxed{\frac{8}{\pi^2 D^4}\left[f_{\mathrm{II}}\frac{1}{D}(\ell_{1,4}+\lambda_4+\ell_{4,5})+K_\psi-1\right]Q_{\mathrm{II}}^2=\frac{(p_1-p_a)}{\rho}} \qquad (12)$$

$$\boxed{\frac{8}{\pi^2 D^4}\left[f_{\mathrm{III}}\frac{1}{D}\ell_{1,6}+K_\psi-1\right]Q_{\mathrm{III}}^2=\frac{(p_1-p_a)}{\rho}} \qquad (13)$$

Οι Εξ. (1), (11), (12) και (13) είναι ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους: Q_{I}, Q_{II}, Q_{III} και p_1. Το σύστημα αυτό μπορεί να λυθεί με πολλές μεθόδους. Κατωτέρω χρησιμοποιούμε μια απλή μέθοδο επαναληπτικής φύσεως.

$$Q_{\mathrm{I}}^{(0)}=Q_{\mathrm{II}}^{(0)}=Q_{\mathrm{III}}^{(0)}\overset{(1)}{=}\frac{1}{3}Q=1.88\ \mathrm{m^3/min}=\underline{3.133\times10^{-2}\,\mathrm{m^3/s}}$$

$$\mathrm{Re}_{\mathrm{I}}^{(0)}=\mathrm{Re}_{\mathrm{II}}^{(0)}=\mathrm{Re}_{\mathrm{III}}^{(0)}=\frac{4Q_{\mathrm{I}}^{(0)}}{\pi\,\nu\,D}=\frac{4\times3.133\times10^{-2}}{\pi\times10^{-6}\times7.793\times10^{-2}}=\underline{5.12\times10^{5}}$$

$$f_{\mathrm{I}}^{(0)}=f_{\mathrm{II}}^{(0)}=f_{\mathrm{III}}^{(0)}=f(5.12\times10^{5},0.00002)\overset{\substack{\text{Moody}\\ \downarrow}}{=}\underline{0.013}$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{8}{\pi^2\times(7.793\times10^{-2})^4}\left[\dfrac{0.013(35+2.34+35)}{(7.793\times10^{-2})}+9.5-1\right]Q_{\mathrm{I}}^{(1)^2}=\dfrac{(p_1-p_a)}{\rho} \\[2ex]
\dfrac{8}{\pi^2\times(7.793\times10^{-2})^4}\left[\dfrac{0.013(70+2.34+20)}{(7.793\times10^{-2})}+9.5-1\right]Q_{\mathrm{II}}^{(1)^2}=\dfrac{(p_1-p_a)}{\rho} \\[2ex]
\dfrac{8}{\pi^2\times(7.793\times10^{-2})^4}\left[\dfrac{0.013\times30}{(7.793\times10^{-2})}+9.5-1\right]Q_{\mathrm{III}}^{(1)^2}=\dfrac{(p_1-p_a)}{\rho}
\end{cases}
$$

ή

$$
\begin{cases}
4.520\times10^5\, Q_{\mathrm{I}}^{(1)^2}=\dfrac{(p_1-p_a)}{\rho} \\[2ex]
5.253\times10^5\, Q_{\mathrm{II}}^{(1)^2}=\dfrac{(p_1-p_a)}{\rho} \qquad \text{(μονάδες S.I.)} \\[2ex]
2.968\times10^5\, Q_{\mathrm{III}}^{(1)^2}=\dfrac{(p_1-p_a)}{\rho}
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} 672.3\, Q_{I}^{(1)} = \sqrt{\dfrac{(p_1 - p_a)}{\rho}} \\ \\ 724.8\, Q_{II}^{(1)} = \sqrt{\dfrac{(p_1 - p_a)}{\rho}} \\ \\ 544.8\, Q_{III}^{(1)} = \sqrt{\dfrac{(p_1 - p_a)}{\rho}} \end{cases} \qquad \text{(μονάδες S.I.)}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις τελευταίες τρεις εξισώσεις παίρνουμε

$$\left.\begin{aligned} \frac{Q_{II}^{(1)}}{Q_{I}^{(1)}} &= 0.928 \\ \\ \frac{Q_{III}^{(1)}}{Q_{I}^{(1)}} &= 1.234 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{Q_{I}^{(1)} + Q_{II}^{(1)} + Q_{III}^{(1)}}{Q_{I}^{(1)}} = 1 + 0.928 + 1.234 = 3.162$$

$$\begin{cases} 672.3\, Q_{I}^{(1)} = \sqrt{\dfrac{(p_1 - p_a)}{\rho}} \\ \\ 724.8\, Q_{II}^{(1)} = \sqrt{\dfrac{(p_1 - p_a)}{\rho}} \qquad\qquad (\text{μονάδες S.I.}) \\ \\ 544.8\, Q_{III}^{(1)} = \sqrt{\dfrac{(p_1 - p_a)}{\rho}} \end{cases}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις τελευταίες τρεις εξισώσεις παίρνουμε

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{Q_{II}^{(1)}}{Q_{I}^{(1)}} = 0.928 \\ \\ \dfrac{Q_{III}^{(1)}}{Q_{I}^{(1)}} = 1.234 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{Q_{I}^{(1)} + Q_{II}^{(1)} + Q_{III}^{(1)}}{Q_{I}^{(1)}} = 1 + 0.928 + 1.234 = 3.162$$

Χρησιμοποιώντας την (1) παίρνουμε

$$Q_{I}^{(1)} = \frac{Q}{3.162} = \frac{0.094}{3.162} = \underline{2.973 \times 10^{-2}\, m^3 / s}$$

Έτσι,

$$Q_{II}^{(1)} = 0.928\, Q_{I}^{(1)} = 2.759 \times 10^{-2}\, m^3 / s$$

$$Q_{III}^{(1)} = 1.234\, Q_{I}^{(1)} = 3.668 \times 10^{-2}\, m^3 / s$$

Μπορούμε τώρα να επανακυκλώσουμε τον υπολογισμό

$$Re_{I}^{(1)} = \frac{4Q_{I}^{(1)}}{\pi \nu D} = \ldots = 4.86 \times 10^5$$

$$Re_{II}^{(1)} = \frac{4Q_{II}^{(1)}}{\pi \nu D} = \ldots = 4.51 \times 10^5$$

$$Re_{III}^{(1)} = \frac{4Q_{III}^{(1)}}{\pi \nu D} = \ldots = 5.99 \times 10^5$$

$$f_{I}^{(1)} = f\,(4.86 \times 10^5, 0.00002) \cong 0.0137$$

$$f_{II}^{(1)} = f\,(4.51 \times 10^5, 0.00002) \cong 0.0138$$

$$f_{III}^{(1)} = f\,(5.99 \times 10^5, 0.00002) \cong 0.0131$$

Με αυτές τις τιμές οι Εξ. (11)-(13) δίνουν

$$4.663\times10^{5}{Q_{I}^{(2)}}^{2} = \frac{(p_1 - p_a)}{\rho} \tag{15}$$

$$5.461\times10^{5}{Q_{II}^{(2)}}^{2} = \frac{(p_1 - p_a)}{\rho} \tag{16}$$

$$2.976\times10^{5}{Q_{III}^{(2)}}^{2} = \frac{(p_1 - p_a)}{\rho} \tag{17}$$

ή

$$\begin{cases} 682.9\,Q_{I}^{(2)} = \sqrt{\dfrac{(p_1 - p_a)}{\rho}} \\ \\ 739.0\,Q_{II}^{(2)} = \sqrt{\dfrac{(p_1 - p_a)}{\rho}} \\ \\ 545.6\,Q_{III}^{(2)} = \sqrt{\dfrac{(p_1 - p_a)}{\rho}} \end{cases}$$

Διαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\frac{Q_{II}^{(2)}}{Q_{I}^{(2)}} = 0.924 \qquad \frac{Q_{III}^{(2)}}{Q_{I}^{(2)}} = 1.252$$

Αρα,

$$\frac{Q_{I}^{(2)} + Q_{II}^{(2)} + Q_{III}^{(2)}}{Q_{I}^{(2)}} = 1 + 0.924 + 1.252 = 3.176$$

$$Q_I^{(2)} = \frac{Q}{3.176} = \underline{2.960 \times 10^{-2}\, m^3/s = 1.78 m^3/min}$$

και

$$Q_{II}^{(2)} = 0.924\ Q_I^{(2)} = \underline{2.735 \times 10^{-2}\, m^3/s = 1.64 m^3/min}$$

$$Q_{III}^{(2)} = 1.252\ Q_I^{(2)} = \underline{3.706 \times 10^{-2}\, m^3/s = 2.22 m^3/min}$$

Είναι φανερό ότι μια ακόμη ανακύκλωση δεν θα επιφέρει σημαντικές αλλαγές. Έτσι

$$\boxed{Q_I = 1.78\, m^3/min} \tag{18}$$

$$\boxed{Q_{II} = 1.64\, m^3/min} \tag{19}$$

$$\boxed{Q_{III} = 2.22\, m^3/min} \tag{20}$$

(ii) Η πίεση p_1 μπορεί να υπολογισθεί από οιαδήποτε των Εξ. (15)-(17) με τις τιμές των παροχών από τις Εξ. (18)-(20). Έτσι

$$\begin{cases} p_1 - p_a = 4.663 \times 10^5 \times 1000 \times (2.960 \times 10^{-2})^2 = 408.6\,kPa = 4.16\,atm \\ p_1 - p_a = 5.461 \times 10^5 \times 1000 \times (2.73 \times 10^{-2})^2 = 408.5\,kPa = 4.16\,atm \\ p_1 - p_a = 2.976 \times 10^5 \times 1000 \times (3.706 \times 10^{-2})^2 = 408.7\,kPa = 4.17\,atm \end{cases}$$

ή

$$\boxed{p_1 = 4.16\ \text{atü}} \tag{21}$$

Η ουσιαστική συμφωνία των τριών αποτελεσμάτων είναι ένδειξη ότι έχουμε σύγκλιση.

(iii) Η πίεση στην είσοδο του ψεκαστήρα ③, p_{3-}, προσδιορίζεται εύκολα ως εξής. Από το ισοζύγιο ενέργειας έχουμε:

$$\frac{p_{3-}}{\rho}+\frac{1}{2}<v_I>^2=\frac{p_a}{\rho}+h_\psi=\frac{p_a}{\rho}+K_\psi\frac{1}{2}<v_I>^2 \quad (22)$$

$$p_{3-}-p_a=\rho\,(K_\psi-1)\frac{1}{2}<v_I>^2=(K_\psi-1)\frac{8\rho}{\pi^2 D^4}Q_I^2 \quad (23)$$

Αρα,

$$p_{3-}-p_a=(9.5-1)\frac{8\times 1000}{\pi^2(7.793\times 10^{-2})^4}(2.960\times 10^{-2})^2\,\text{Pa}$$

$$=163.7\text{ kPa}=1.67\text{ atm}\Rightarrow \boxed{p_{3-}=1.67\text{ atü}}$$

Ομοίως παίρνουμε

$$p_{5-}-p_a=(K_\psi-1)\frac{8\rho}{\pi^2 D^4}Q_{II}^2=(9.5-1)\frac{8\times 1000}{\pi^2(7.793\times 10^{-2})^4}(2.735\times 10^{-2})^2\text{ Pa}$$

$$=139.7\text{ kPa}=1.42\text{ atm}\Rightarrow \boxed{p_{5-}=1.42\text{ atü}}$$

$$p_{6-}-p_a=(K_\psi-1)\frac{8\rho}{\pi^2 D^4}Q_{III}^2=(9.5-1)\frac{8\times 1000}{\pi^2(7.793\times 10^{-2})^4}(3.706\times 10^{-2})^2\text{ Pa}$$

$$=256.6\text{ kPa}=2.62\text{ atm}\Rightarrow \boxed{p_{6-}=2.62\text{ atü}}$$

Παρατήρηση 2. Βλέπουμε ότι $p_{5-}=1.42\text{atü}<1.5\text{atü}$. Ενδέχεται λοιπόν ο ψεκαστήρας 5 να μην λειτουργεί ικανοποιητικά.

Αν υποτεθεί ότι αυτό πράγματι συμβαίνει, τότε πρέπει να κάνουμε κάποια τροποποίηση στο σύστημα.