



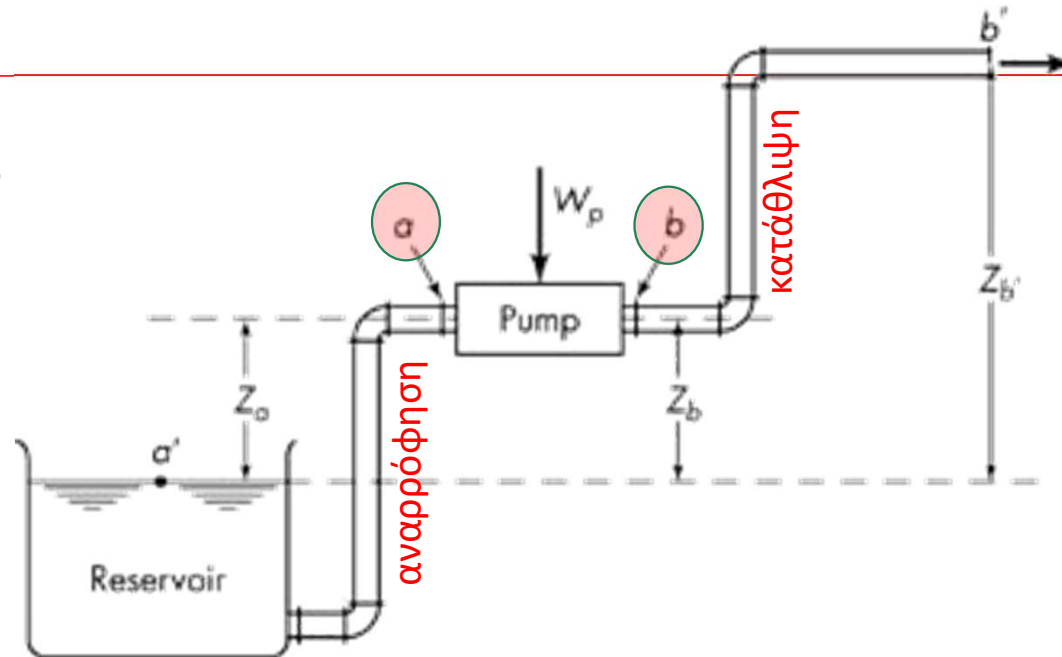
# Αντλίες- Φροντιστήριο

---

4ο διαδικτυακό μάθημα

8/4/2020

# Αντλίες



Ισοζύγιο δεξιά  
και αριστερά της  
αντλίας, **a** και **b**

$$\frac{p_a}{\rho} + gZ_a + \frac{\alpha_a \bar{V}_a^2}{2} + \eta \cdot W_p = \frac{p_b}{\rho} + gZ_b + \frac{\alpha_b \bar{V}_b^2}{2} + h_{ολ} \Rightarrow \quad h_f=0, \text{ μόνο εδώ!}$$

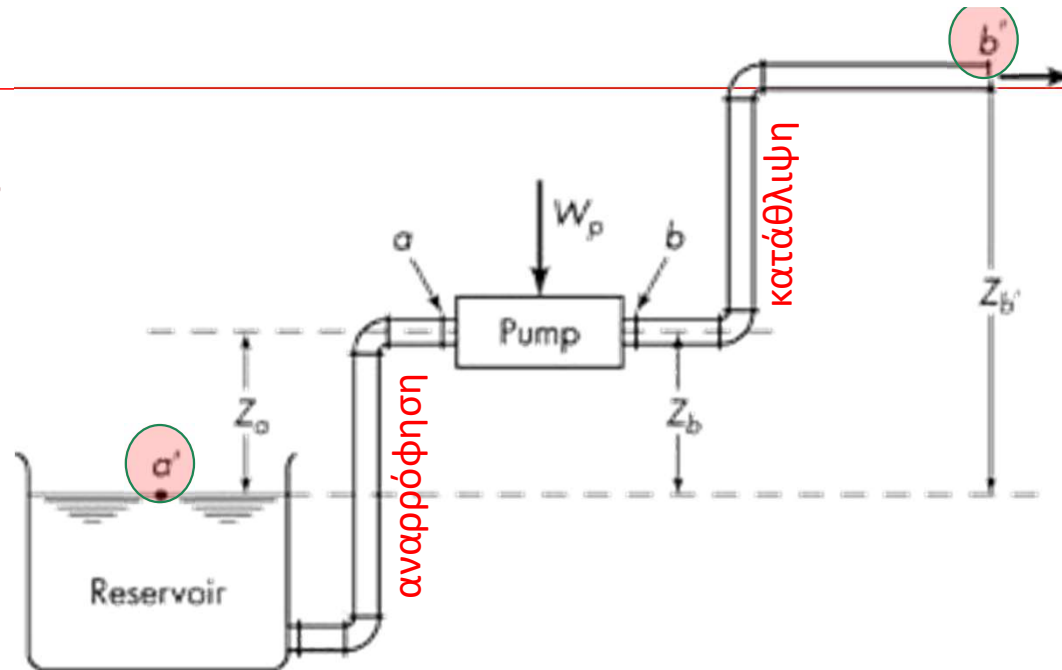
$$\eta \cdot W_p = \left( \frac{p_b}{\rho} + gZ_b + \frac{\alpha_b \bar{V}_b^2}{2} \right) - \left( \frac{p_a}{\rho} + gZ_a + \frac{\alpha_a \bar{V}_a^2}{2} \right) = W_{\text{πραγματ.}}$$

Οι ποσότητες  $\frac{p}{\rho} + gZ + \frac{\alpha \bar{V}^2}{2}$  ονομάζονται **ολικές κεφαλές** (αναρρόφησης ή κατάθλιψης αντίστοιχα), μονάδες  $\left[ \frac{m^2}{s^2} \right]$

$$\frac{p_a}{\rho} + gZ_a + \frac{\alpha_a \bar{V}_a^2}{2} + gH = \frac{p_b}{\rho} + gZ_b + \frac{\alpha_b \bar{V}_b^2}{2}, \quad H \text{ σε μέτρα, } gH = \eta W_p \quad [=] m^2/s^2$$

# Αντλίες

Ισοζύγιο από την επιφάνεια του νερού στην αριστερή δεξαμενή και στην έξοδο από το σύστημα,  $a'$  και  $b'$



$$\frac{p_{a'}}{\rho} + gZ_{a'} + \frac{\alpha_{a'} \bar{V}_{a'}^2}{2} + \eta \cdot W_p = \frac{p_{b'}}{\rho} + gZ_{b'} + \frac{\alpha_{b'} \bar{V}_{b'}^2}{2} + h_{ολ} \quad h_{ολ} \neq 0!$$

$$\eta \cdot W_p = \left( \frac{p_{b'}}{\rho} + gZ_{b'} + \frac{\alpha_{b'} \bar{V}_{b'}^2}{2} \right) - \left( \frac{p_{a'}}{\rho} + gZ_{a'} + \frac{\alpha_{a'} \bar{V}_{a'}^2}{2} \right) + h_{ολ}$$

$$\frac{p_{a'}}{\rho} + gZ_{a'} + \frac{\alpha_{a'} \bar{V}_{a'}^2}{2} + gH = \frac{p_{b'}}{\rho} + gZ_{b'} + \frac{\alpha_{b'} \bar{V}_{b'}^2}{2} + h_{ολ}, \quad H \text{ σε μέτρα, } gH = W_p [=] \text{m}^2/\text{s}^2$$

$$gH = \left( \frac{p_{b'}}{\rho} + gZ_{b'} + \frac{\alpha_{b'} \bar{V}_{b'}^2}{2} \right) - \left( \frac{p_{a'}}{\rho} + gZ_{a'} + \frac{\alpha_{a'} \bar{V}_{a'}^2}{2} \right) + h_{ολ}$$

# Αντλίες

- Η ισχύς αντλίας:

$$\dot{W} = \dot{m} (gH) = (\rho Q)(gH) = (\rho g Q)H \quad (\text{Ισχύς της αντλίας που αποδίδεται στο ρευστό}) \quad [100] \quad H = \frac{\dot{W}}{\dot{m} g} = \frac{\dot{W}}{(\rho g Q)} \quad \Delta P = \rho g H$$

Η ισχύς που παρέχεται στην αντλία από εξωτερική πηγή είναι:  
(ονομαστική τιμή στην αγορά)

$$\dot{W}_{αν} = \dot{m} \frac{(gH)}{\eta} = \frac{(\rho Q)(gH)}{\eta} = \frac{(\rho g Q)H}{\eta} = \frac{\dot{W}}{\eta} \quad [200] \quad H = \left( \frac{\dot{W}}{\dot{m} g} \right) \frac{1}{\eta} = \frac{\dot{W}}{(\rho g Q)} \frac{1}{\eta}$$

- Και προφανώς:  $\eta = \frac{\dot{W}}{\dot{W}_{αν}} \quad (0 < \eta < 1), \quad \eta: \text{απόδοση αντλίας}$

# Ανάλυση φυγοκεντρικών και άλλων στροβιλοαντλίων

- Στροβιλομηχανές είναι μηχανές που συνεργάζονται με κινούμενα ρευστά κατευθύνοντας τη ροή με πτερύγια που είναι προσαρτημένα πάνω σε ένα περιστρεφόμενο στέλεχος (πτερωτή). Οι στροβιλομηχανές διακρίνονται σε
  - (i) **στροβιλοκινητήρες (turbines)**, οι οποίοι λαμβάνουν μηχανική ενέργεια από το ρευστό,
  - (ii) **στροβιλοαντλίες**, οι οποίες δίνουν μηχανική ενέργεια στο ρευστό. Στην περίπτωση στροβιλοαντλίων, η πτερωτή καλείται και παρακινητής (impeller), αφού αυτή περιστρεφόμενη παρακινεί το ρευστό.
- Σε αντίθεση με ό,τι συμβαίνει μέσα σε μηχανές θετικής εκτοπίσεως, το ρευστό σε μία στροβιλομηχανή δεν είναι ποτέ περιορισμένο σε έναν κλειστό θύλακα. **Όλες οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ ρευστού και πτερωτής οφείλονται στη δυναμική δράση του ρευστού επί της πτερωτής ή αντιστρόφως.**
- **Οι στροβιλοαντλίες**, με τη σειρά τους μπορούν να διακριθούν στους ακόλουθους τύπους:
  - (i) στροβιλοαντλίες ακτινικής ροής, ή **φυγοκεντρικές αντλίες**
  - (ii) στροβιλοαντλίες αξονικής ροής
  - (iii) στροβιλοαντλίες μικτής (ακτινικής και αξονικής) ροής

# Ανάλυση φυγοκεντρικών και άλλων στροβιλοαντλίων

$$\left. \frac{dN}{dt} \right)_{\text{συστ}} = \frac{d}{dt} \iiint_{\nabla} \eta \rho dV + \iint_A \eta \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA$$

$$N = \mathbf{M} \text{ (μάζα)}, \eta = 1 \text{ (M/m)}, dM/dt = 0$$

$$N = \mathbf{J} \text{ (ορμή, } \mathbf{m}\mathbf{V}), \eta = \mathbf{V}, d\mathbf{J}/dt]_{\text{συστ}} = \mathbf{F}_T = \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_S$$

$$N = E \text{ (ενέργεια)}, \eta = e \text{ (} u, \frac{1}{2} \langle v \rangle^2, gh)$$

$$dN/dt = (Q' - W'), \text{ 1ος θερμοδ. νόμος}$$

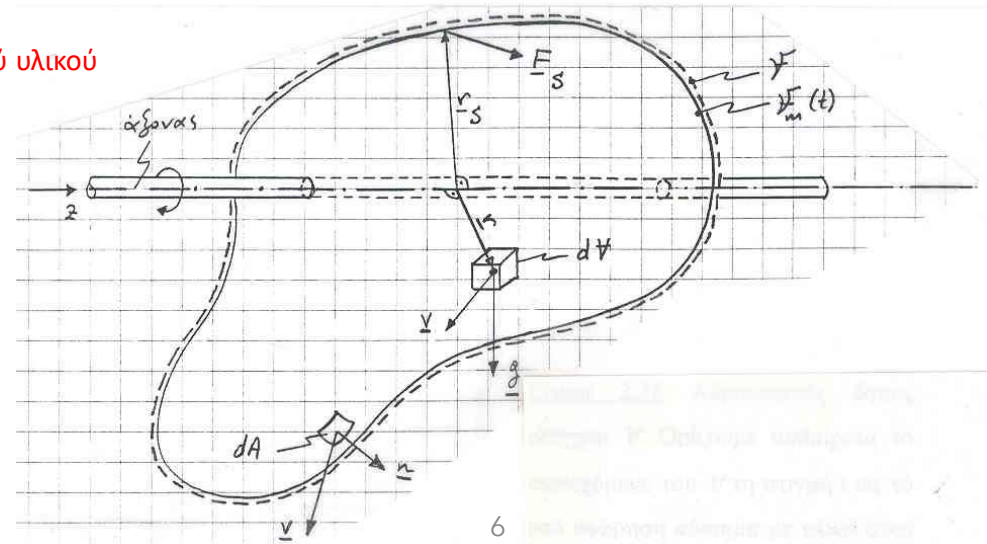
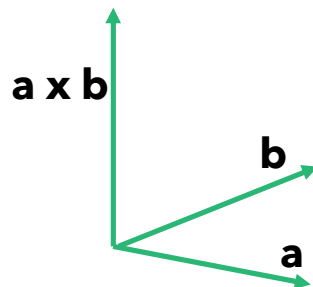
$$N = \mathbf{H} \text{ (στροφορμή, } \mathbf{m}^*(\mathbf{r} \times \mathbf{v})), \eta = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

$$\mathbf{T} \text{ (ροπή)} = d\mathbf{H}/dt]_{\text{συστ}} = T_{\text{shaft}} + \mathbf{T}_B + \mathbf{T}_S$$

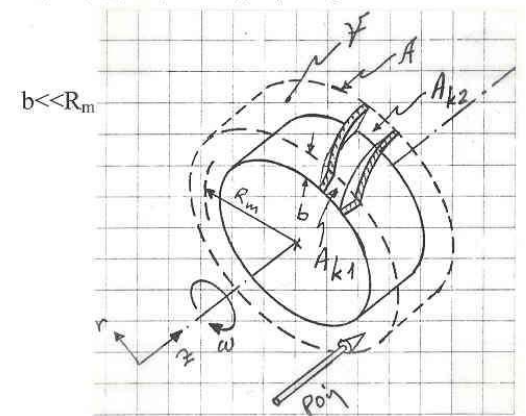
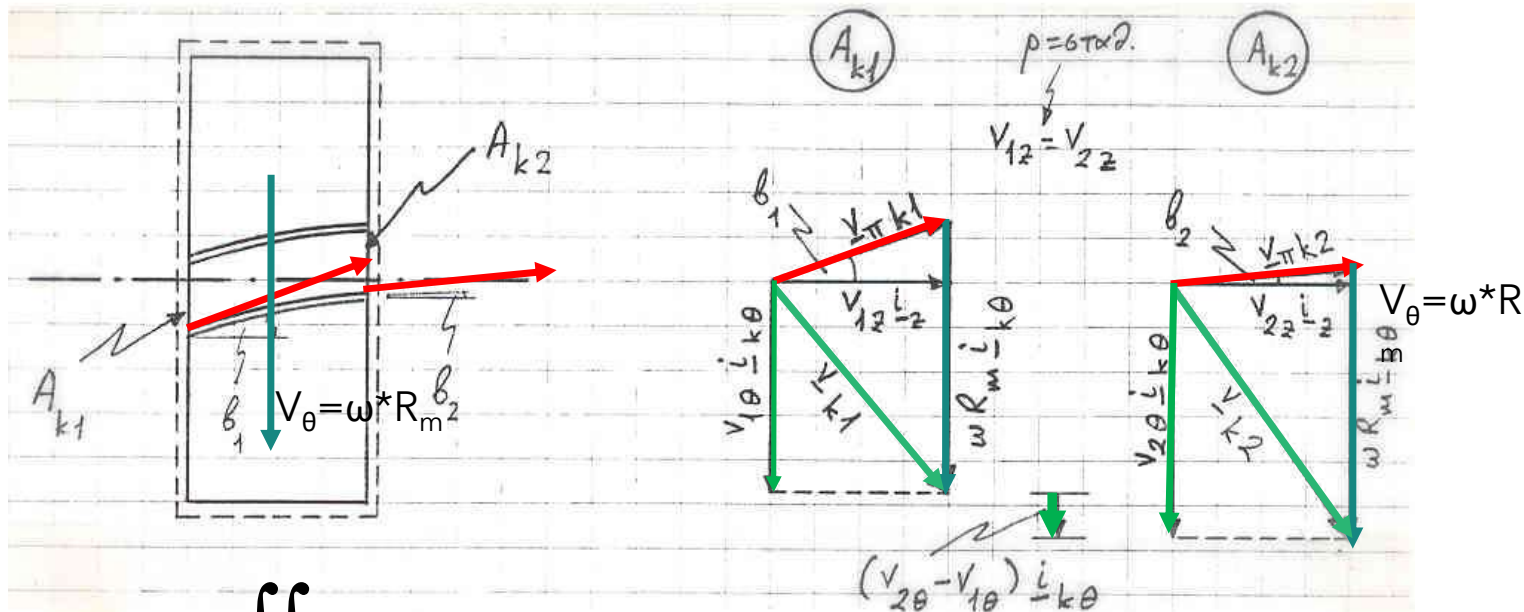
- Ας θεωρήσουμε τώρα έναν αδρανειακό όγκο ελέγχου  $\nabla$ , Σχ. 12.16 (βιβλίο ΑΧΠ).
- Ορίζουμε, αυθαίρετα, ως το υπό θεώρηση σύστημα το ρευστό που περιέχεται στον  $\nabla$  την αυθαίρετη στιγμή  $t$ . Θεωρώντας στροφορμές ως προς ένα αυθαίρετο άξονα  $z$  έχουμε,
- $\mathbf{r}$  = χωρικό άνυσμα θέσεως
- $\mathbf{v}$  = ταχύτητα ως προς  $\nabla$
- $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$  = στροφορμή ανά μονάδα μάζας (= γωνιακή ταχύτητα)
- $(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \rho dV =$  στροφορμή του διαφορικού υλικού στοιχείου όγκου  $dV$

Ισοζύγιο  
Στροφορμής  
και Ροπή,

$$T_{\text{shaft}} = \dot{W}_{αν} / \omega$$



# Στροβιλοαντλίες αξονικής ροής



$$\mathbf{T}_{\text{shaft}} = \iint_A (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA$$

$$\mathbf{T}_{\text{shaft}} = \rho \frac{Q^2}{2\pi b} (\tan \beta_1 - \tan \beta_2) \quad , \quad \dot{W}_{\text{av.}} = T_{\text{shaft}} \omega = \rho \frac{\omega Q^2}{2\pi b} (\tan \beta_1 - \tan \beta_2)$$

Εξ. 100

$$H \equiv \frac{\dot{W}}{\dot{m} g} \stackrel{\rho = \sigma \alpha \theta}{=} \frac{\dot{W}_{\text{av.}} \eta}{\rho g Q}$$

$$H = \frac{\eta \omega Q}{2 \pi b g} (\tan \beta_1 - \tan \beta_2)$$

$$\Delta p = H \rho g = \rho \frac{\eta \omega Q}{2 \pi b} (\tan \beta_1 - \tan \beta_2)$$

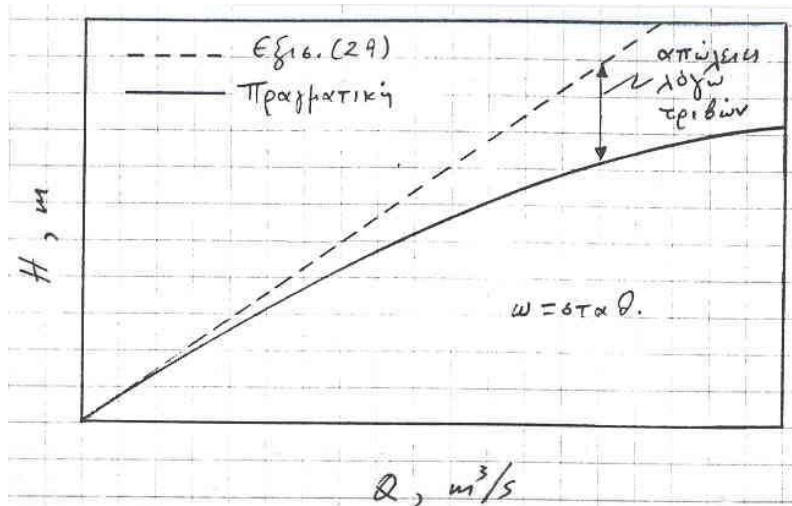
# Στροβιλοαντλίες αξονικής ροής

$$H \equiv \frac{\dot{W}}{\dot{m} g} \stackrel{\rho=\text{σταθ.}}{\downarrow} \frac{\dot{W}_{\text{αν.}\eta}}{\rho g Q}$$

$$H = \frac{\eta \omega Q}{2 \pi b g} (\tan \beta_1 - \tan \beta_2)$$

Η αύξηση πίεσως μεταξύ εισόδου και εξόδου,  $\Delta p$ , δίνεται από την σχέση

$$\Delta p = H \rho g = \rho \frac{\eta \omega Q}{2 \pi b} (\tan \beta_1 - \tan \beta_2)$$

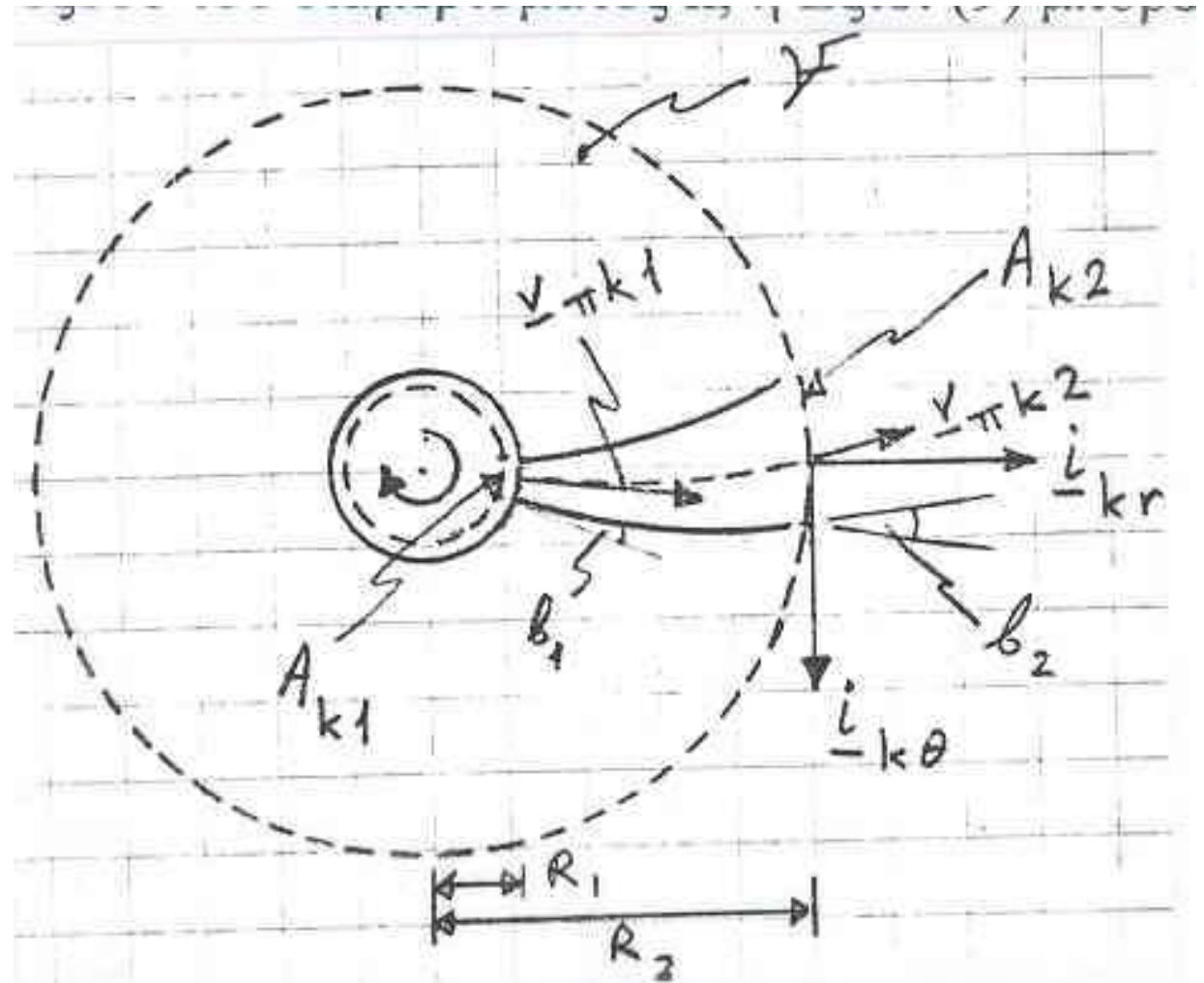


Σχήμα 12.20 Χαρακτηριστική καμπύλη στροβιλοαντλίας αξονικής ροής



## Στροβιλοαντλίες ακτινικής ροής

- Παρακινητής (φτερωτή) στροβιλοαντλίας ακτινικής ροής. Απεικονίζονται μόνο τα δύο γειτονικά πτερύγια που περικλείουν το διαμέρισμα  $k$ . Ο παρακινητής έχει  $K$  διαμερίσματα πανομοιότυπα με το απεικονιζόμενο. Ο άξονας  $z$  είναι κάθετος στη σελίδα και με κατεύθυνση προς αυτή. Μήκος παρακινητή κατά  $z = b$ .



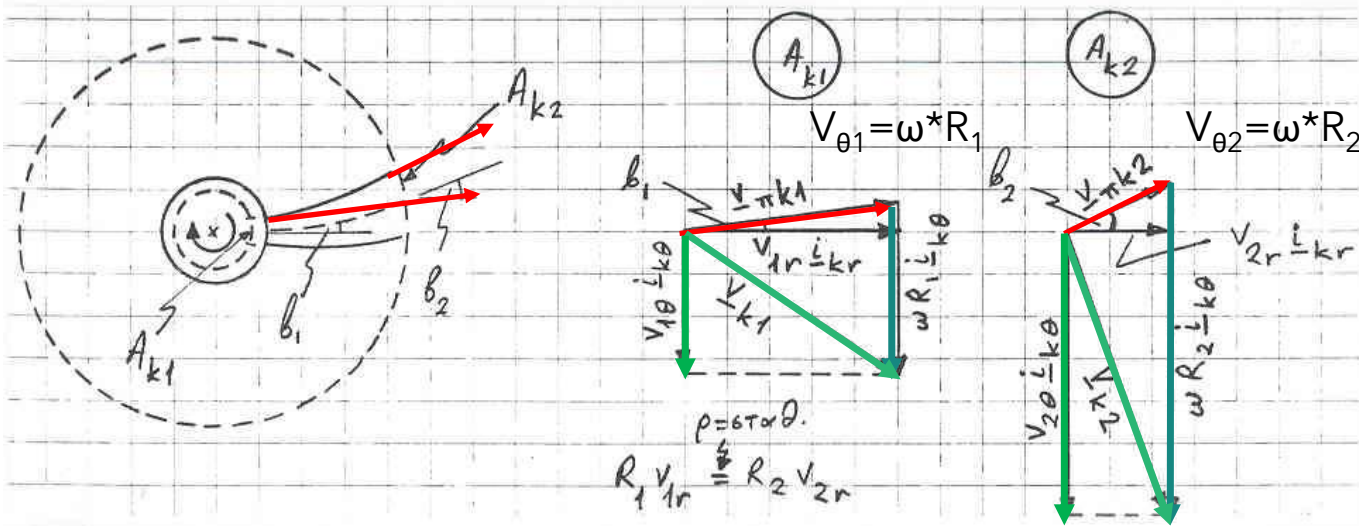
# Στροβιλοαντλίες ακτινικής ροής

$$\mathbf{T}_{\text{shaft}} = \sum_{k=1}^K \mathbf{T}_k$$

$$\mathbf{T}_k = \iint_{A_{k1}} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \rho \mathbf{v}_\pi \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA + \iint_{A_{k2}} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \rho \mathbf{v}_\pi \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA$$

Εκτός των υποθέσεων 1, 2 και 3 που έχουν ενσωματωθεί στην Εξ. (12.9) θα κάνουμε τις ακόλουθες υποθέσεις

- $\mathbf{v}_{k1} = \text{σταθ. επάνω στην } A_{k1}$ ,  $\mathbf{v}_{k2} = \text{σταθ. επάνω στην } A_{k2}$
- $\mathbf{v}_{\pi k} // \text{ επιφάνεια που χωρίζει το διαμέρισμα } k \text{ στη μέση, Σχ. 12.21}$



# Στροβιλοαντλίες ακτινικής ροής

$$\mathbf{T}_{\text{shaft}} = T_{\text{shaft}} \hat{\mathbf{e}}_z \quad \mathbf{T}_{\text{shaft}} = \dot{m} (R_2 v_{2\theta} - R_1 v_{1\theta})$$

$$R_1 v_{1r} = R_2 v_{2r} = \frac{\dot{m}}{2\pi b \rho} = \frac{Q}{2\pi b}$$

$$R_2 v_{2\theta} - R_1 v_{1\theta} = \omega (R_2^2 - R_1^2) - R_2 v_{2r} \tan \beta_2 + R_1 v_{1r} \tan \beta_1$$

Eξ. (12.42)

$$\downarrow$$

$$= \omega (R_2^2 - R_1^2) - \frac{Q}{2\pi b} (\tan \beta_2 - \tan \beta_1)$$

$$T_{\text{shaft}} = \rho Q \omega (R_2^2 - R_1^2) - \rho \frac{Q^2}{2\pi b} (\tan \beta_2 - \tan \beta_1)$$

$$\dot{W}_{\pi\rho} = T_{\text{shaft}} \omega = \rho Q \omega^2 (R_2^2 - R_1^2) - \rho \frac{Q^2 \omega}{2\pi b} (\tan \beta_2 - \tan \beta_1)$$

Eξ. 100

$$H = \frac{\dot{W}}{\dot{m}g} = \frac{\eta \omega^2}{g} (R_2^2 - R_1^2) - \frac{\eta Q \omega}{2\pi b g} (\tan \beta_2 - \tan \beta_1)$$

Όταν  $Q$  αυξάνει,  $H$  μειώνεται

$$\Delta p = \rho g H = \eta \rho \left[ \omega^2 (R_2^2 - R_1^2) - \frac{Q \omega}{2\pi b} (\tan \beta_2 - \tan \beta_1) \right]$$

# Στροβιλοαντλίες ακτινικής ροή

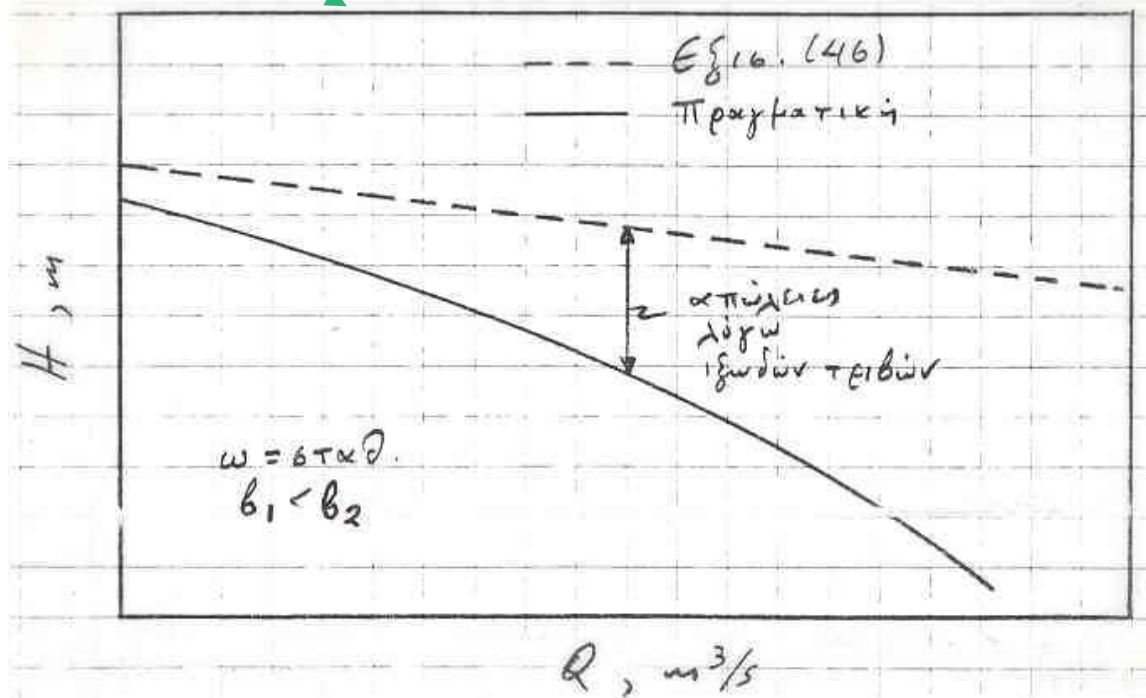
Απλούστερες μορφές των ανωτέρω εξισώσεων λαμβάνονται για  $R_1^2 \ll R_2^2$  και  $\beta_1=0$ , όπως συμβαίνει συνήθως στην πράξη.

$$T_{\text{shaft}} = \rho \left( Q\omega R_2^2 - \frac{Q^2}{2\pi b} \tan\beta_2 \right)$$

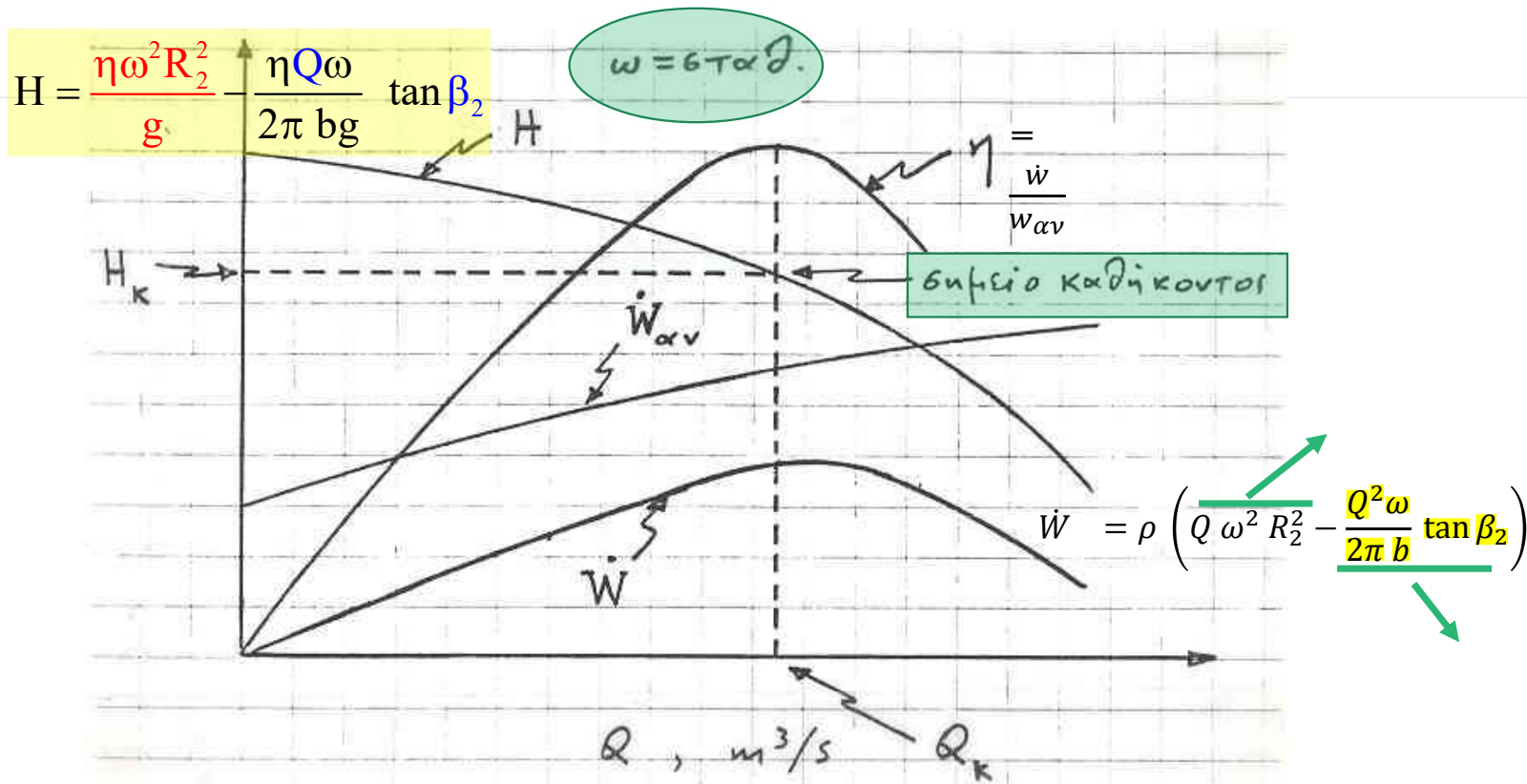
$$\dot{W} = \rho \left( Q\omega^2 R_2^2 - \frac{Q^2\omega}{2\pi b} \tan\beta_2 \right) = f(Q)$$

$$H = \frac{\eta\omega^2 R_2^2}{g} - \frac{\eta Q\omega}{2\pi b g} \tan\beta_2$$

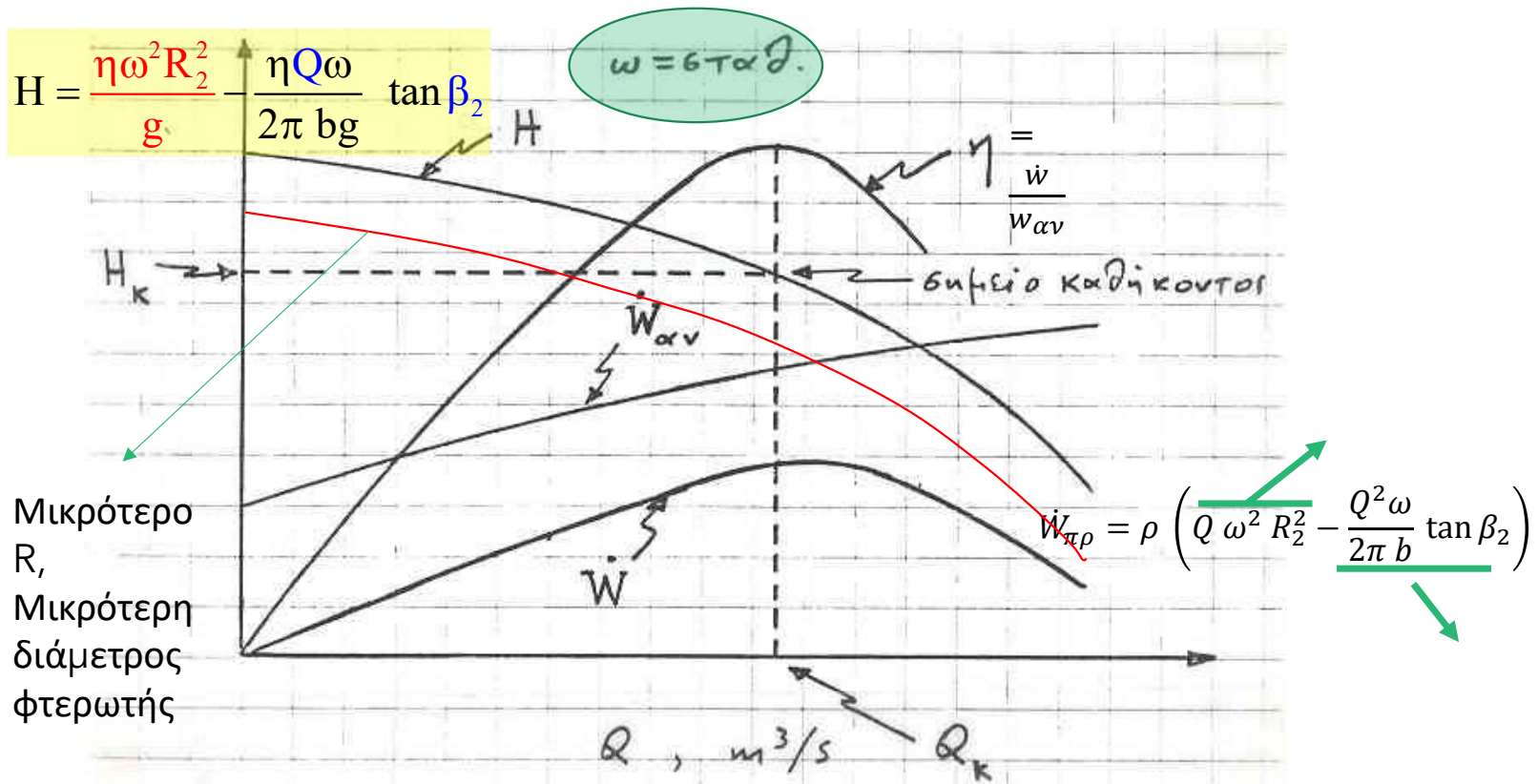
$$\Delta p = \eta\rho \left( \omega^2 R_2^2 - \frac{Q\omega}{2\pi b} \tan\beta_2 \right)$$



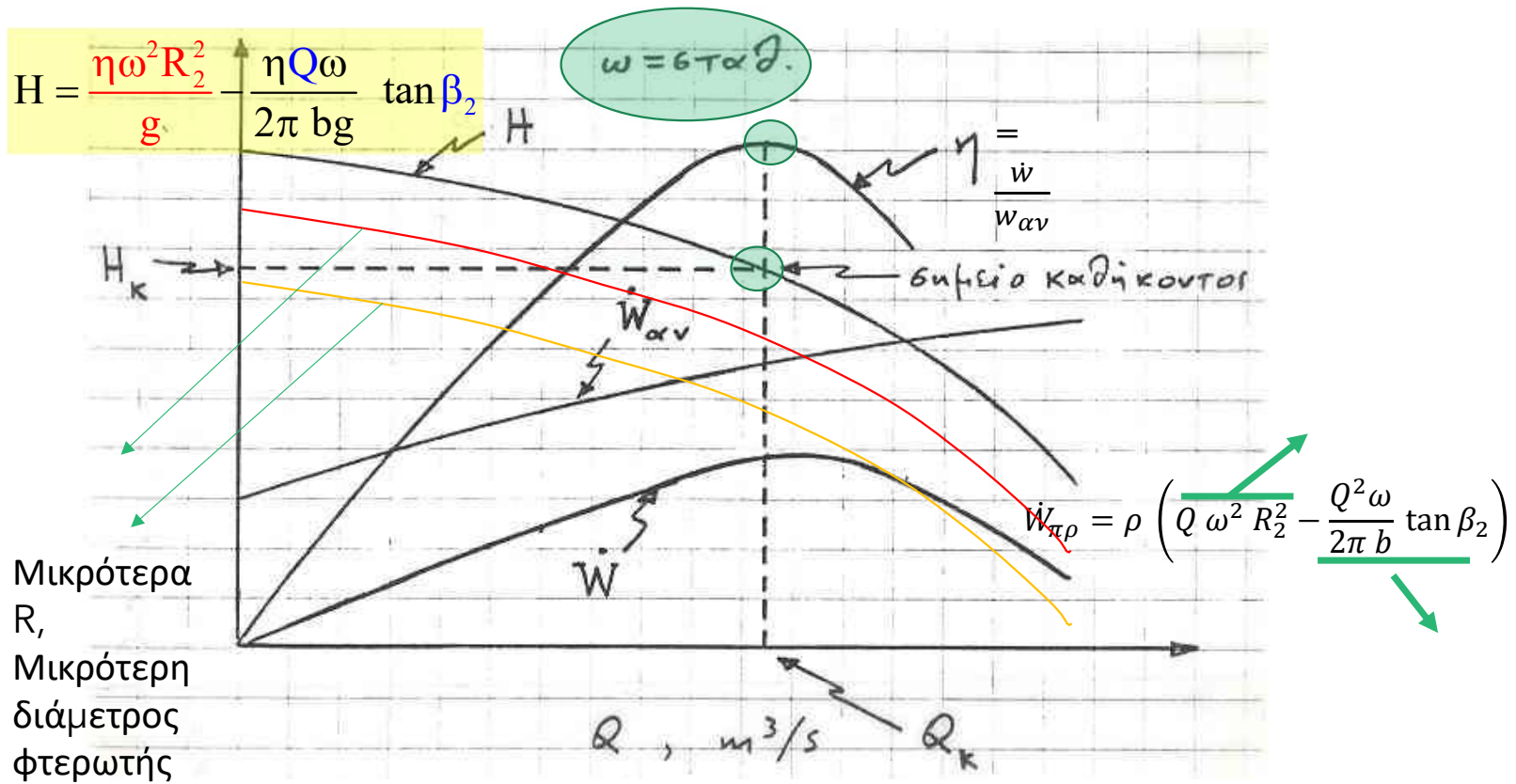
# Χαρακτηριστικές καμπύλες φυγοκεντρικών αντλιών



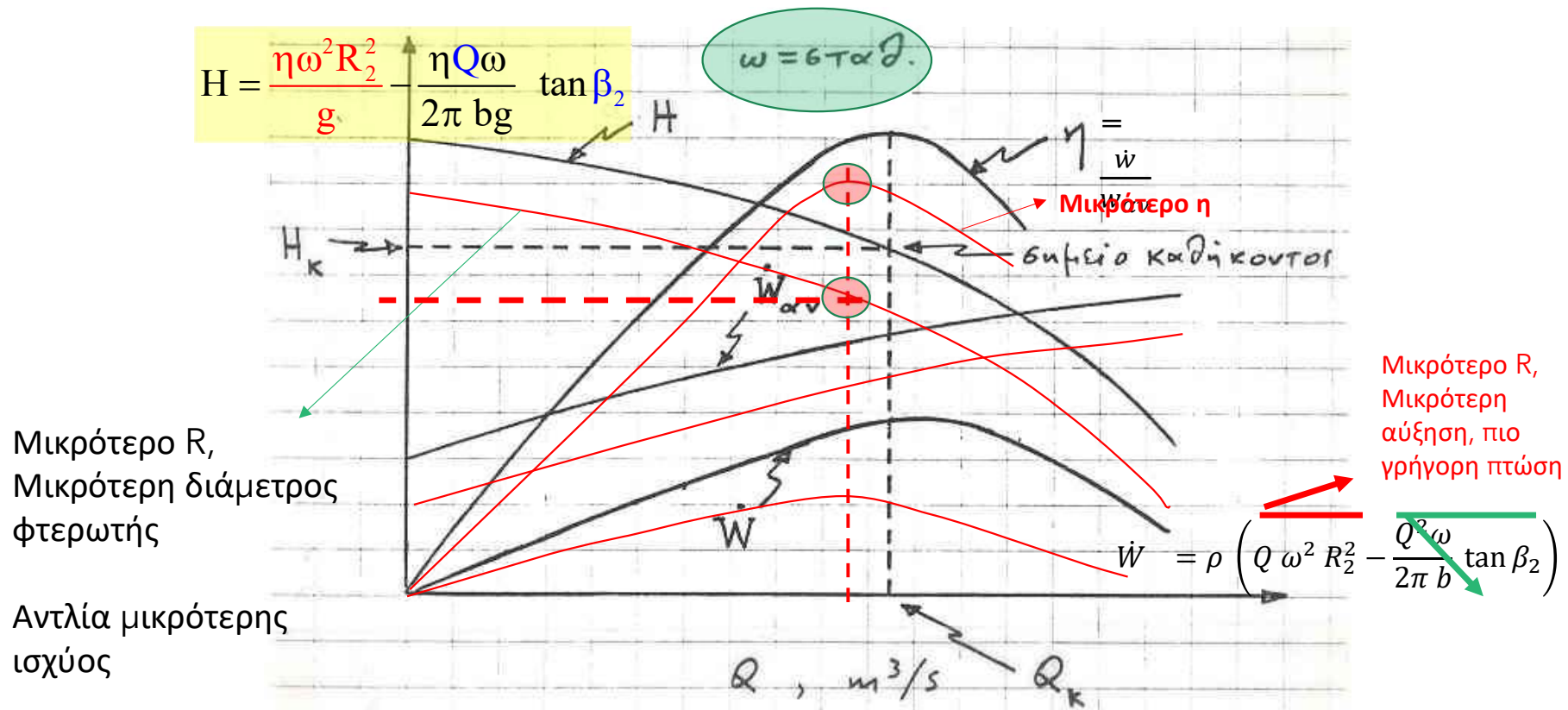
# Χαρακτηριστικές καμπύλες φυγοκεντρικών αντλιών



# Χαρακτηριστικές καμπύλες φυγοκεντρικών αντλιών

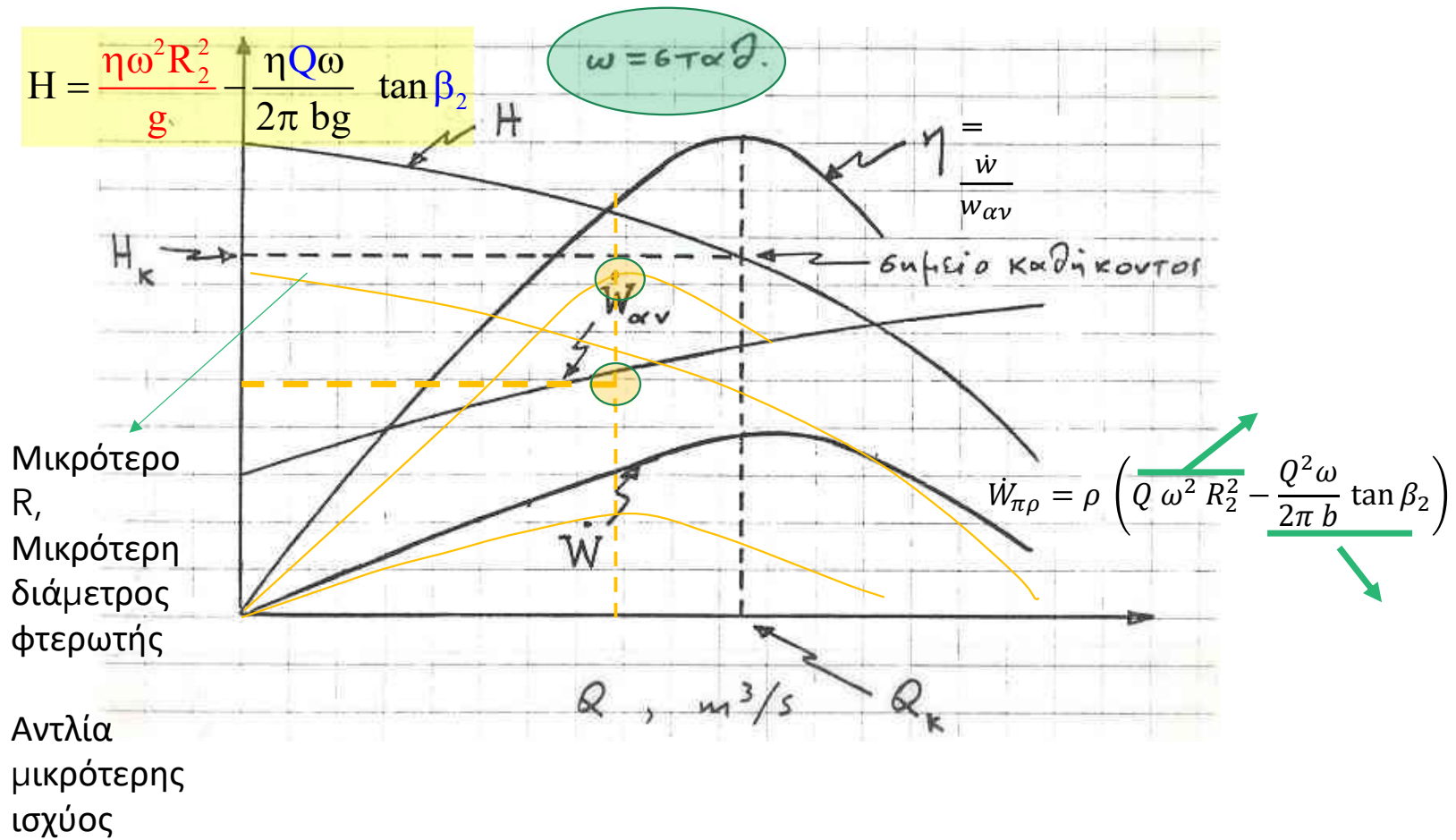


# Χαρακτηριστικές καμπύλες φυγοκεντρικών αντλιών

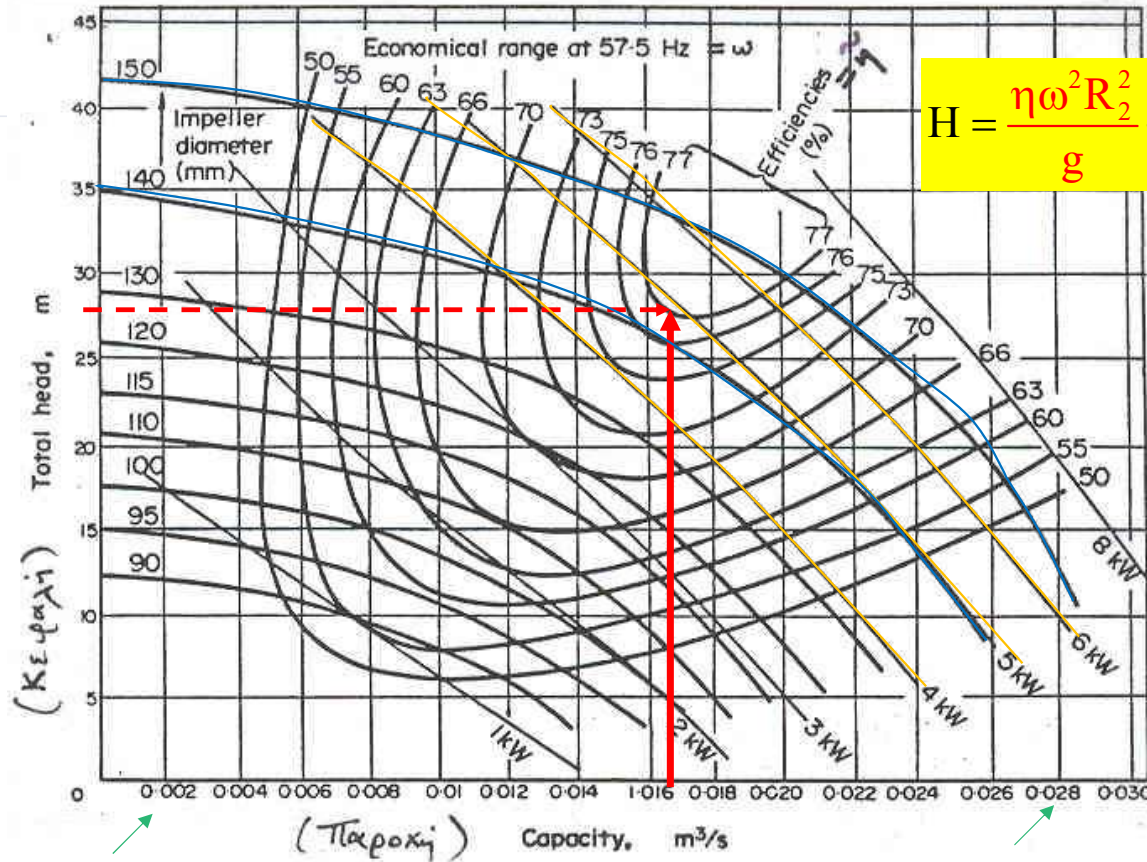




# Χαρακτηριστικές καμπύλες φυγοκεντρικών αντλιών



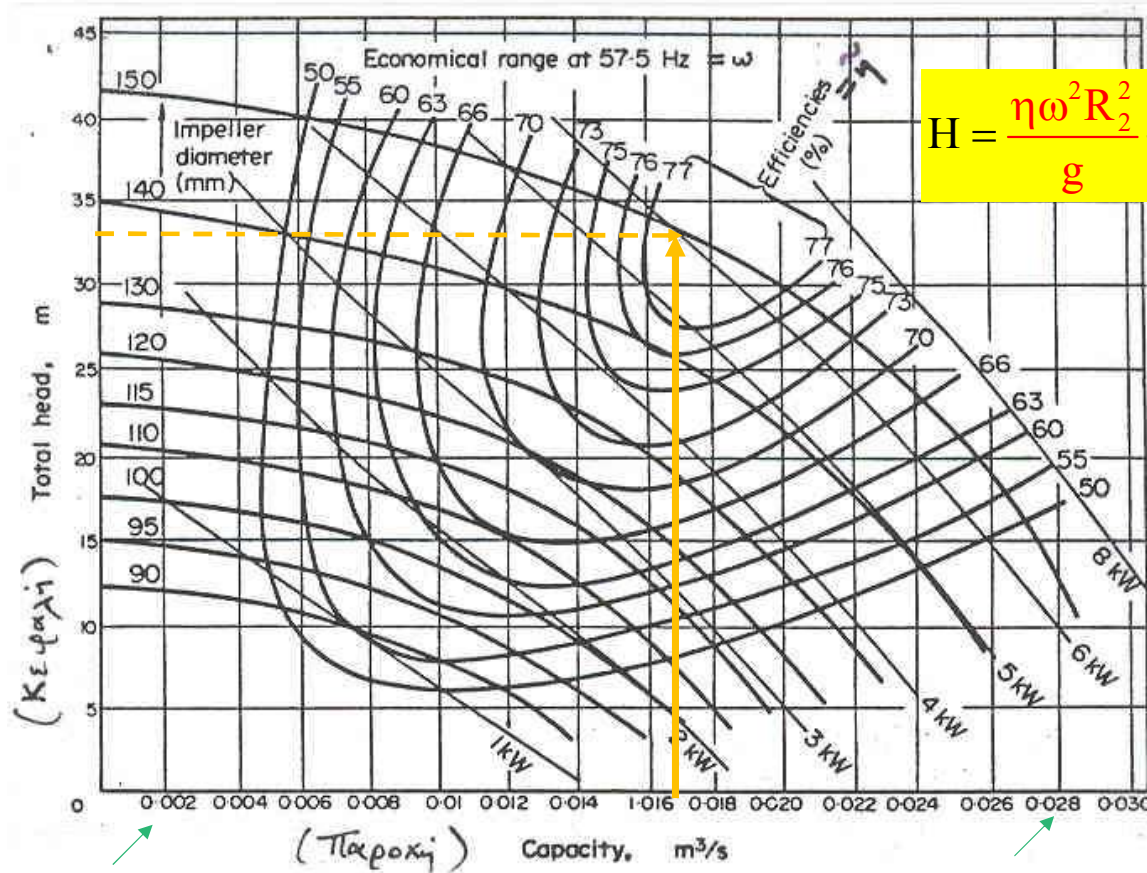
# Χαρακτηριστικές καμπύλες φυνοκεντρικών αντλιών



0,12  
m³/min=7,2m³/hr

1,68 m³/min=100,8  
m³/hr

# Χαρακτηριστικές καμπύλες φυγοκεντρικών αντλιών

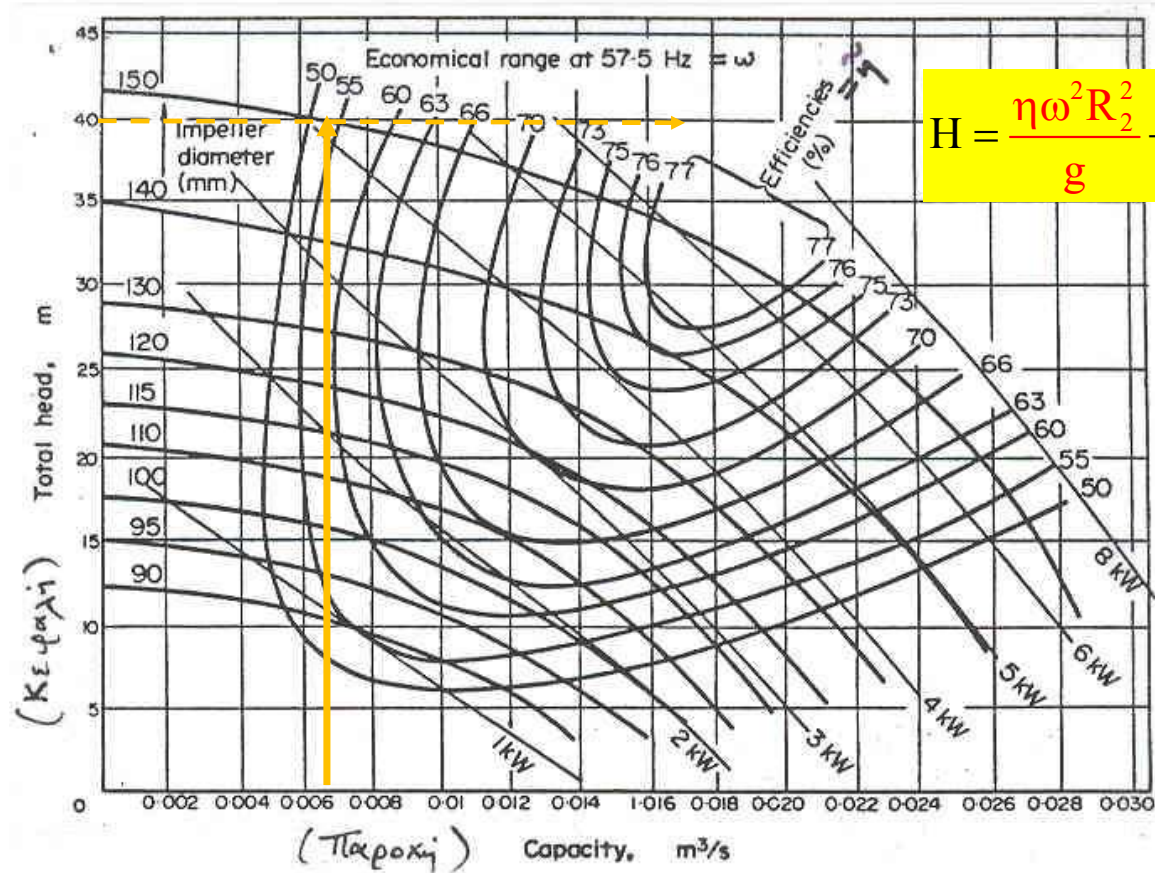


$$H = \frac{\eta \omega^2 R_2^2}{g} - \frac{\eta Q \omega}{2\pi b g} \tan \beta_2$$

0,12  
m³/min=7,2m³/hr

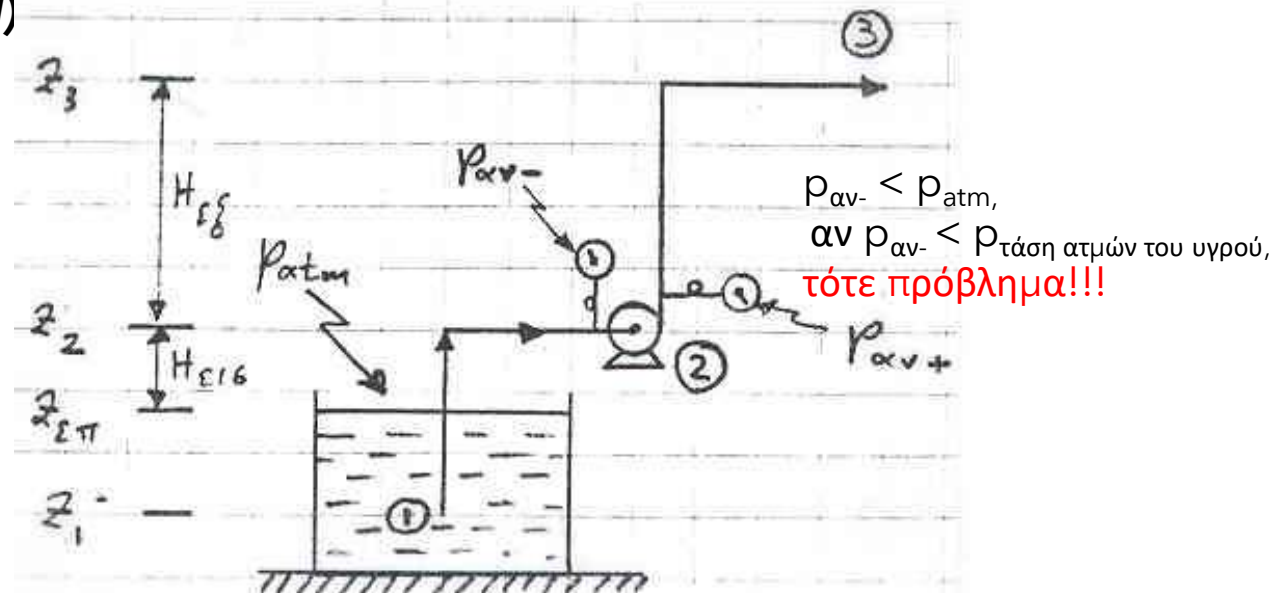
1,68 m³/min=100,8  
m³/hr

# Χαρακτηριστικές καμπύλες φυγοκεντρικών αντλιών



$$H = \frac{\eta \omega^2 R_2^2}{g} - \frac{\eta Q \omega}{2\pi b g} \tan \beta_2$$

## Καθαρή θετική κεφαλή ροπήσεως (ΚΘΚΡ) [Net positive suction head (NPSH)]



- Αν η πίεση στην είσοδο της αντλίας γίνει ίση με ή μικρότερη από την τάση ατμών του υγρού (στη θερμοκρασία της διεργασίας), τότε δημιουργούνται **φουσαλλίδες**, ή και **μεγάλες μάζες ατμών**.
- Το φαινόμενο αυτό συνοδεύεται από χαρακτηριστικό θόρυβο που δημιουργείται από τον αφανισμό (κατάρρευση) των φουσαλλίδων στην **περιοχή υψηλών πιέσεων μέσα στην αντλία**.
- Η δημιουργία φουσαλλίδων (**σπηλαιώση**) είναι φθοροποιό φαινόμενο και μπορεί να οδηγήσει σύντομα στην καταστροφή του παρακινητή και άλλων εξαρτημάτων της αντλίας. Η φθορά αυτή προξενείται από τα ισχυρότατα κρουστικά κύματα που συνοδεύουν τον αφανισμό των φουσαλλίδων, καθόσον η διαφορά πίεσεως μεταξύ του εσωτερικού και εξωτερικού μιας μικρής φουσαλλίδας **μπορεί να φθάσει εκατοντάδες ή χιλιάδες ατμόσφαιρες**.
- Σε ακραίες περιπτώσεις μπορεί να διακοπεί και η διακίνηση του υγρού και να χρειασθεί επαναγόμευση της αντλίας.

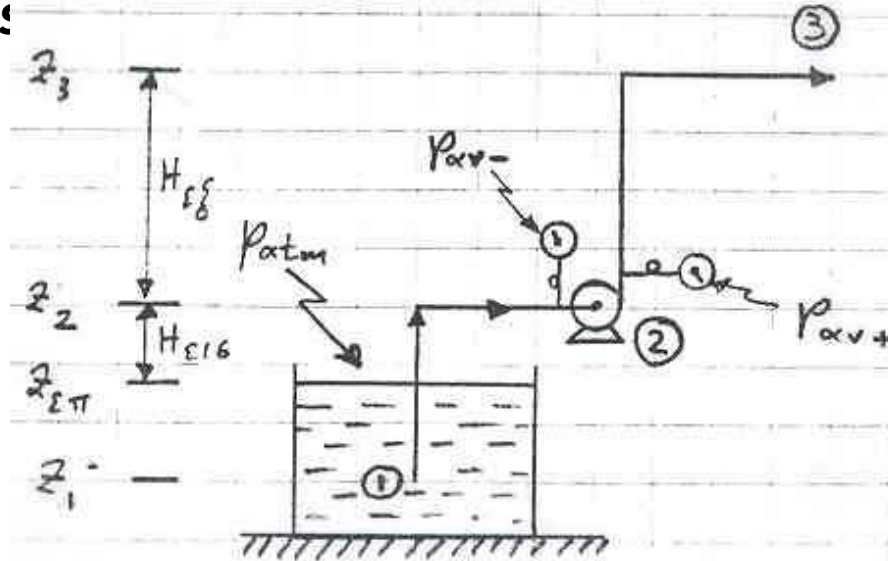
### **Καθαρή θετική κεφαλή ροφήσεως (ΚΘΚΡ) [Net positive suction head (NPSH)]**

- Για να αποφευχθεί η δημιουργία φυσαλίδων οι κατασκευαστές αντλιών προδιαγράφουν μία **ελάχιστη θετική διαφορά πίεσεως μεταξύ της πίεσεως εισόδου στην αντλία  $p_{αν-}$  και της τάσεως ατμών,  $p_v$ .**
- Η διαφορά αυτή εκφράζεται ως ύψος στήλης του υγρού και καλείται **καθαρή θετική κεφαλή ροφήσεως, ΚΘΚΡ** (ή NPSH). **Η ΚΘΚΡ εκφράζεται σε m.** Έτσι, για την ομαλή λειτουργία μιας αντλίας η πίεση στην είσοδο της,  $p_{αν-}$ , πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

$$p_{αν-} \geq p_v + (ΚΘΚΡ) \rho g$$

Η ανισότητα αυτή επιβάλλει περιορισμούς στη **θέση** στην οποία μπορεί να τοποθετηθεί η **αντλία**.

**Καθαρή θετική κεφαλή ροφής (ΚΘΚΡ) [Net positive suction head (NPSH)]**



Μια αντλία δεν μπορεί να ροφήσει υγρό από βάθος  $H_{\epsilon\iota\sigma}$  μεγαλύτερο του  $(p_{atm} - p_v) / \rho g$

$$\frac{p_{1-}}{\rho} + \frac{1}{2} \alpha_{1-} \langle v_{1-} \rangle^2 + gz_1 = \frac{p_{av-}}{\rho} + \frac{1}{2} \alpha_{2-} \langle v_{2-} \rangle^2 + gz_2 + (h_{ol})_{1-2-} \quad \text{διαδρομή } z_{1-} \rightarrow z_{2-}$$

$$\frac{p_{atm}}{\rho} + gz_{\epsilon\pi} = \frac{p_{1-}}{\rho} + \frac{1}{2} \alpha_{1-} \langle v_{1-} \rangle^2 + gz_{1-} \quad \text{ελάχιστες απώλειες στην διαδρομή } z_{\epsilon\pi} \rightarrow z_{1-}$$

Προσθέτοντας τις δύο παραπάνω εξισώσεις

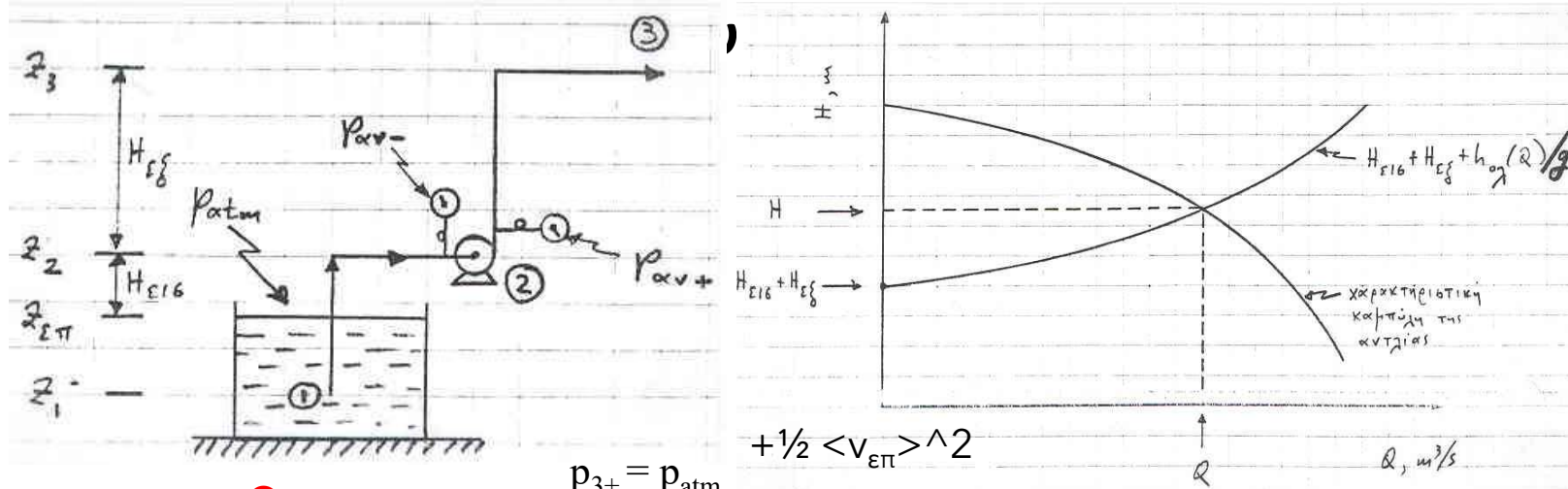
$$\frac{p_{atm}}{\rho} + gz_{\epsilon\pi} = \frac{p_{av-}}{\rho} + \frac{1}{2} \alpha_{2-} \langle v_{2-} \rangle^2 + gz_2 + (h_{ol})_{1-2-} \quad \left| \begin{array}{l} H_{\epsilon\iota\sigma} = z_2 - z_{\epsilon\pi} \\ \langle v_{av-} \rangle = \langle v_{2-} \rangle \\ h_{\epsilon\iota\sigma} = (h_{ol})_{1-2-} \end{array} \right.$$

$$\frac{p_{av-}}{\rho} = \frac{p_{atm}}{\rho} - gH_{\epsilon\iota\sigma} - \frac{1}{2} \langle v_{av-} \rangle^2 - h_{\epsilon\iota\sigma} \quad \left| \quad gH_{\epsilon\iota\sigma} + \frac{1}{2} \langle v_{av-} \rangle^2 + h_{\epsilon\iota\sigma} \leq \frac{(p_{atm} - p_v)}{\rho} - g(K\Theta K\beta) \right.$$

$$p_{av-} \geq p_v + (K\Theta K\beta) \rho g$$

Αν  $H_{\epsilon\iota\sigma}$  αυξηθεί τότε οι όροι  $(gH_{\epsilon\iota\sigma})$  και  $h_{\epsilon\iota\sigma}$  θα αυξηθούν και θα πάψει να ισχύει η ανισότητα

# Καθορισμός παροχής σε σύστημα



## ΒΑΣΙΚΗ ΕΙΣΩΣΗ

$$\frac{p_{atm}}{\rho} + gz_{\epsilon\pi} + \frac{1}{2} \langle v_{\epsilon\pi} \rangle^2 \approx 0 = \frac{p_{3+}}{\rho} + \frac{1}{2} \langle v_{3+} \rangle^2 + gz_3 - gH + h_{ολ}$$

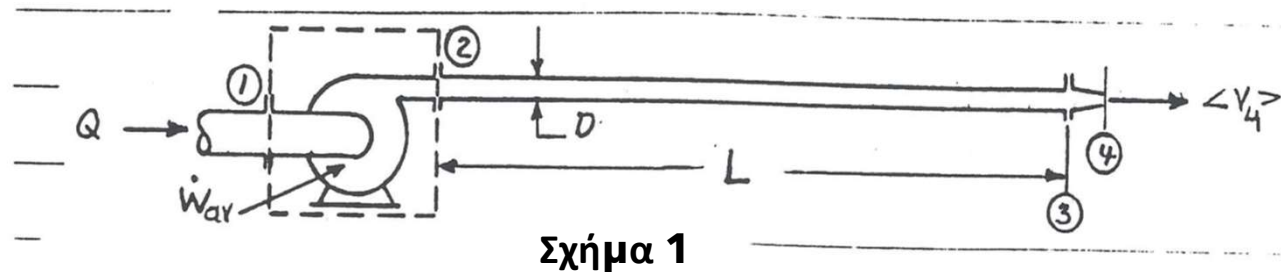
$p_{3+} = p_{atm}$

$$H = (z_3 - z_{\epsilon\pi}) + \frac{h_{ολ}}{g}$$

$$H(Q) = H_{\epsilon16} + H_{\epsilon\xi} + \frac{h_{ολ}(Q)}{g}$$



**Άσκηση 3:** Ένα ακροφύσιο τροφοδοτείται μέσω ενός λείου, πλαστικού, μαλακού σωλήνα ( $e/D = 1 \cdot 10^{-6}$ ), μήκους  $L = 91.44 \text{ m}$  και διαμέτρου  $D = 0.0381 \text{ m}$ . Νερό από έναν υδραγωγό παρέχεται σε μία αντλία συνδεδεμένη με τον σωλήνα με πίεση εισόδου  $P_1 = 4.4 \text{ atm}$ , όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1. Σε συνθήκες σχεδιασμού, η πίεση στην είσοδο του ακροφυσίου είναι  $P_3 = 7.8 \text{ atm}$  και η πτώση πίεσης κατά μήκος του σωλήνα, είναι  $3.25 \text{ atm}$  ανά  $30.48 \text{ m}$  μήκους σωλήνα.



- (α) Την ογκομετρική παροχή σχεδιασμού,  $Q$ .
- (β) Την ταχύτητα εξόδου από το ακροφύσιο,  $\langle v_4 \rangle$ , θεωρώντας μηδενικές απώλειες στο ακροφύσιο. Γράψτε ένα ισοζύγιο ενέργειας από το 3 μέχρι το 4-, θεωρώντας ότι η πίεση στο  $P_4$ - είναι ίση με  $1 \text{ atm}$ .
- (γ) Την καταναλισκόμενη ισχύ  $W'$  από την αντλία,  $\dot{W}_{αν}$  εάν η απόδοσή της,  $\eta$ , είναι  $70\%$ .

Υποδείξεις: Οι ιδιότητες του νερού είναι υπολογισμένες σε θερμοκρασία δωματίου ( $T=25^\circ\text{C}$ ) (η πυκνότητα και το ιξώδες). Η ισχύς που καταναλίσκει η αντλία είναι  $\dot{W}_{αν}$  ενώ η χρήσιμη ισχύς που αποδίδεται στο ρευστό είναι  $W'$ . Η συγκεκριμένη αντλία είναι στροβιλοαντλία ακτινικής ροής (φυγοκεντρική αντλία).

## Λύση

Κάνουμε αρχικά τις εξής υποθέσεις

- 1) Σταθερή ροή
- 2) Ασυμπίεστη ροή
- 3) Πλήρως ανεπτυγμένη ροή από το (2) στο (3)
- 4) Ροή κατά μήκος μιας γραμμής (ομοιόμορφη ροή) στο ακροφύσιο
- 5) Μηδενικές απώλειες στο ακροφύσιο
- 6) Ομοιόμορφη ροή στις διατομές (1) και (2)
- 7) Θεωρούμε ατμοσφαιρική πίεση στο (4)

Παίρνουμε το ισοζύγιο από το σημείο (2) στο (3), δεξιά της αντλίας

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} \langle v_2 \rangle^2 + g z_2 = \frac{p_3}{\rho} + \frac{1}{2} \langle v_3 \rangle^2 + g z_3 + h_{ολ,23} \quad [1]$$

Αφού  $g z_2 = g z_3$ ,  $\langle v_2 \rangle = \langle v_3 \rangle = \langle v \rangle$ , Έτσι η Εξ [1] γίνεται

$$\frac{p_2}{\rho} - \frac{p_3}{\rho} = h_{ολ,23} = h_{μ,23} \quad [2] \quad (\text{μόνο μείζονες απώλειες στην διαδρομή } 3 \rightarrow 4)$$

$$\frac{p_2 - p_3}{\rho} = h_{μ,23} = f \frac{L}{D} \frac{\langle v \rangle^2}{2} \quad [3] \quad \langle v \rangle = \left[ \frac{2(p_2 - p_3) D}{\rho f L} \right]^{\frac{1}{2}} \quad [4], \text{ άγνωστο το } \mathbf{f}$$

Η πτώση πίεσης κατά μήκος του σωλήνα, είναι  $3.25 \text{ atm}$  ( $3.29 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ) ανά  $30.48 \text{ m}$  μήκους σωλήνα.

$$p_2 - p_3 = \frac{91.44}{30.48} (3.29 \cdot 10^5) \text{ Pa} = 9.87 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των πιέσεων, του  $D$ ,  $L$  και  $\rho$ , η εξίσωση [4] γίνεται:

$$\langle v \rangle = \left[ \frac{2 \cdot (9.87 \cdot 10^5) \cdot 0.0381}{1000 f (91.44)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad [5], \text{ άγνωστο παραμένει το } \mathbf{f} \text{ για το οποίο θα}$$

**κάνουμε μια αρχική εκτίμηση, έστω  $f=0,015$**  (δείτε το διάγραμμα Moody στην επόμενη σελίδα).

Έτσι η πρώτη εκτίμηση για την ταχύτητα  $\langle v \rangle$  είναι ίση με

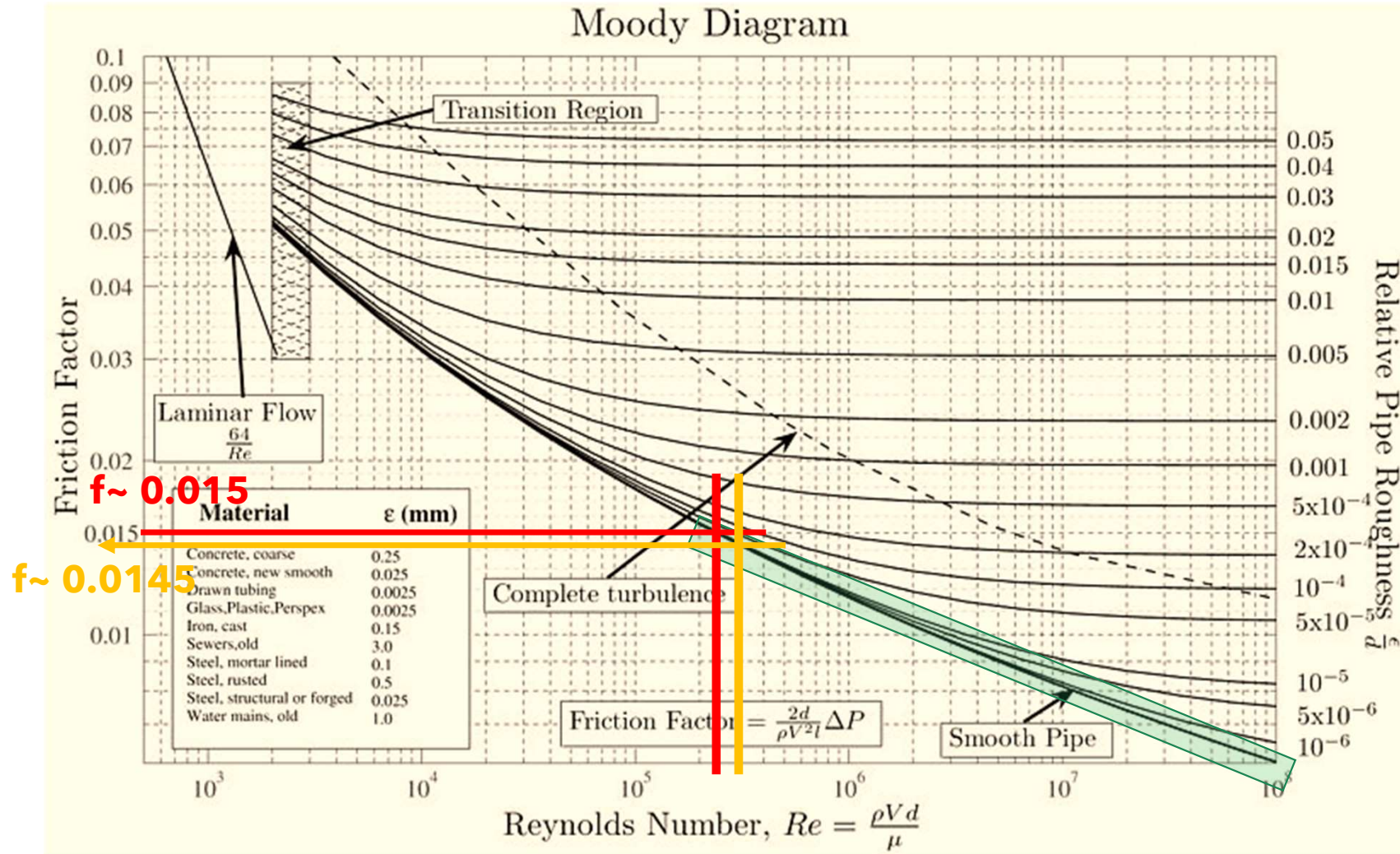
$$\langle v \rangle = 7.405 \text{ m/s}$$

Γνωρίζοντας την ταχύτητα μπορούμε να υπολογίσουμε τον αριθμό Reynolds και με δεδομένο το  $e/D = 10^{-6}$  θα υπολογίσουμε νέα τιμή για το  $f$ . Έτσι θα υπολογίσουμε μια δεύτερη εκτίμηση για την ταχύτητα  $\langle v \rangle$  κ.ο.κ

$$Re = \frac{\rho \langle v \rangle D}{\mu} = \frac{1000 \cdot 7.4 \cdot 0.0381}{10^{-3}} = 2.82 \cdot 10^5$$

# Διάγραμμα Moody

$$f_D(Re, k/D)$$



Από το διάγραμμα Moody παρατηρούμε ότι το  $f=0.0145$  πολύ κοντά στην αρχική εκτίμηση. Με τη τιμή αυτή ξανα-υπολογίζουμε την  $\langle v \rangle = 7,53 \text{ m/s}$  αρκετά κοντά στην προηγούμενη τιμή και σταματάμε εδώ τις επαναλήψεις. Έτσι τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε την ογκομετρική παροχή:

$$Q = \langle v \rangle \frac{\pi D^2}{4} = 7.53 \frac{3.14 * 0.0381^2}{4} = 8,58 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

(β) Την ταχύτητα εξόδου από το ακροφύσιο,  $\langle v_4 \rangle$ , θεωρώντας μηδενικές απώλειες στο ακροφύσιο. Γράφουμε το ισοζύγιο ενέργειας από το (3) μέχρι το (4)

$$\frac{p_3}{\rho} + \frac{1}{2} \langle v_3 \rangle^2 + gz_3 = \frac{p_4}{\rho} + \frac{1}{2} \langle v_4 \rangle^2 + gz_4 + h_{o\lambda,34} \quad [1]$$

Γνωρίζουμε ότι  $z_3 = z_4$  και  $h_{o\lambda,34} = 0$  και  $\langle v_3 \rangle = \langle v \rangle$  που υπολογίσαμε στο προηγούμενο ερώτημα

$$\langle v_4 \rangle = \sqrt{\frac{2(p_3 - p_4)}{\rho} + \langle v \rangle^2}$$

Γνωρίζουμε ότι  $\langle v \rangle = 7.53 \text{ m/s}$ ,  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  και  $p_4 = p_{\text{atm}} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  και  $p_3 = 7.9 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  (δεδομένο)

$$\langle v_4 \rangle = \sqrt{\frac{2(7.9 - 1.013) \cdot 10^5 - p_4}{1000} + 7.53^2} = 38.87 \text{ m/s}$$

(γ) Την καταναλισκόμενη ισχύ  $W'$  από την αντλία, εάν η απόδοσή της,  $\eta$ , είναι 70%.

Η (θεωρητική/ιδανική) ισχύς της αντλίας  $W'_{\text{αντ}}$  δίνεται από την σχέση:

$$\dot{W} = \dot{m} gH = \rho Q gH = Q (\rho g H) = Q (\Delta P_{\text{αν}}) = Q (p_2 - p_1)$$

Γνωρίζουμε ότι  $p_2 - p_3 = 9.87 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  και  $p_3 = 7.9 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ , οπότε η  $p_2 = 17,77 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ .  
Επίσης  $p_1 = 4.46 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  (δεδομένο)

Η καταναλισκόμενη ισχύς  $W'$  από την αντλία δίνεται από την σχέση

$$W'_{\text{αν}} = \frac{W'}{\eta} = Q \frac{p_2 - p_1}{\eta} = 8,58 \cdot 10^{-3} (17.77 - 4.46) \frac{10^5}{0.7} = 16 \text{ kW} = 12 \text{ hp}$$

**Άσκηση 4:** Επιθυμούμε να διακινήσουμε νερό από το φρεάτιο του Σχ. 2 προς μια δεξαμενή (και από εκεί στην κατανάλωση). Προς τούτο διαθέτουμε μια φυγοκεντρική αντλία με διάμετρο παρακινητή **150 mm**, η οποία λειτουργεί με 3450 rpm. Οι χαρακτηριστικές καμπύλες φυγοκεντρικών αντλιών αυτού του τύπου δίνονται στο Σχ 3.

Για τη διασύνδεση θα χρησιμοποιήσουμε σωλήνα από κοινό χάλυβα ονομαστικής διαμέτρου 2 in, και με συντελεστή τραχύτητας  $e/D \approx 0.001$ .

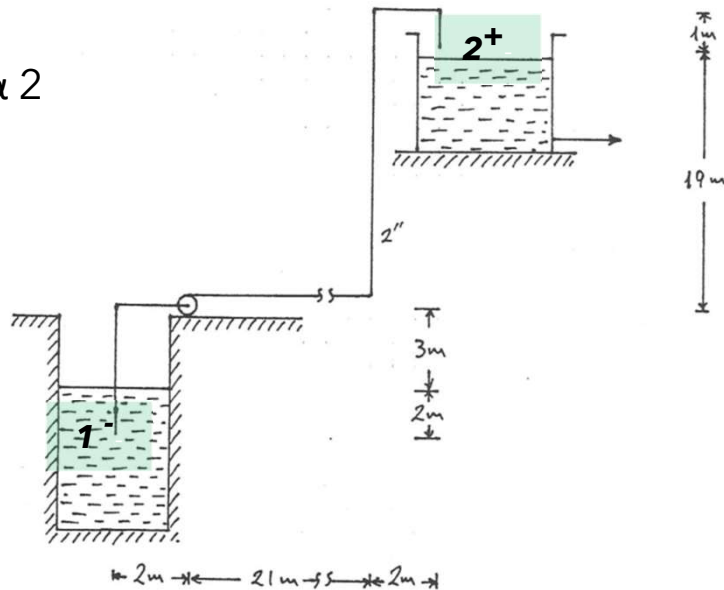
α) Πόση θα είναι η μαζική παροχή,  **$m'$**  που θα επιτύχουμε;

β) Πόση θα είναι η ισχύς που θα αποδίδει η αντλία στο νερό,  **$W'$** ;

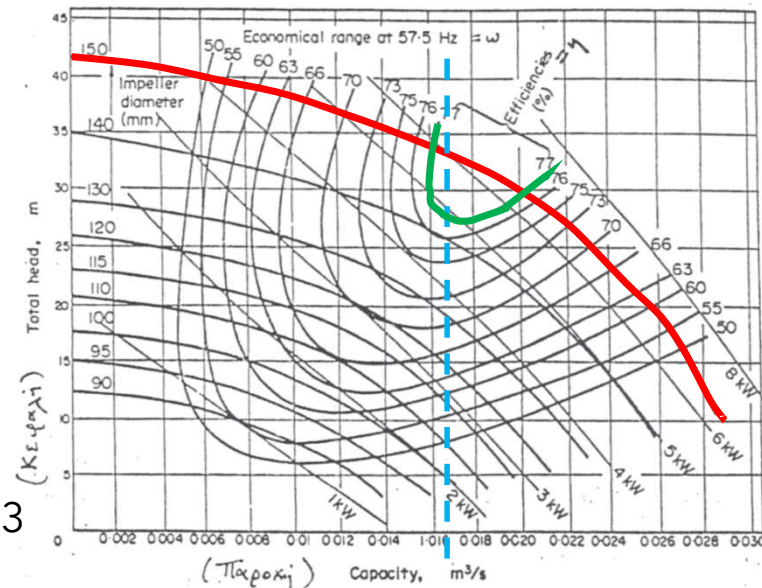
γ) Πόση θα είναι η ισχύς που θα καταναλίσκει η αντλία,  **$W'_{av}$**  και πόση η αποδοτικότητά της,  **$\eta$**

Υπόδειξη. Η πυκνότητα και το ιξώδες του νερού μπορούν να ληφθούν προσεγγιστικά ως  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  και  $\mu = 1 \text{ mPa}\cdot\text{s}$

Σχήμα 2

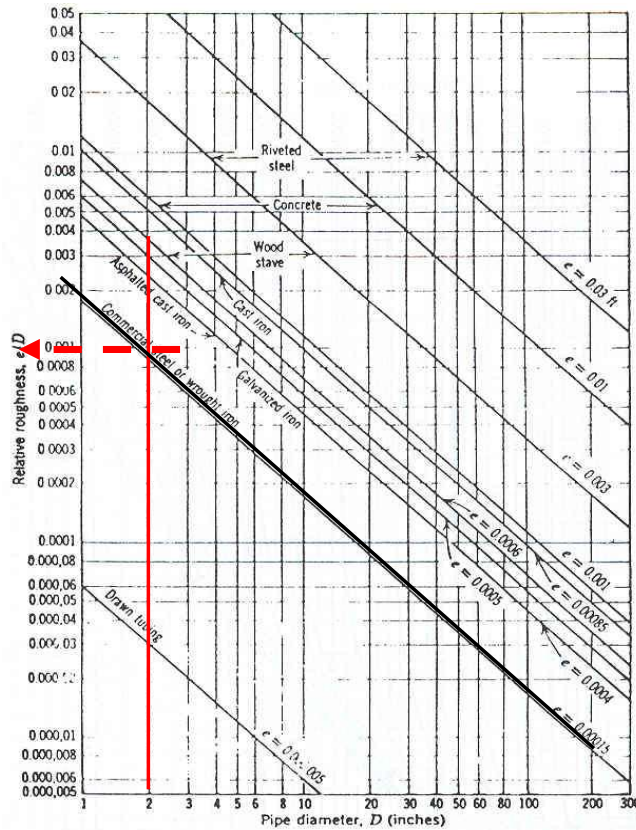


Σχήμα 3



**ΛΥΣΗ:** Σύμφωνα με τον Πίνακα 11.4 του βιβλίου σας, ένας σωλήνας από υλικό και χαρακτηριστικά κοινού χάλυβα **ονομαστικής** διαμέτρου 2 in αντιστοιχεί σε σωλήνα με εσωτερική διάμετρο, **D=2.067 in** ( $=52.50 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ). Ο συντελεστής τραχύτητας για το ίδιο υλικό και για  $D=2 \text{ in}$  είναι ίσος με  **$e/D \approx 0.001$**  (Σχήμα 11.5 των σημειώσεων σας).

Η αντλία που θα χρησιμοποιήσουμε έχει διάμετρο παρακινητή (φτερωτή) ίση με 150 mm και γυρνάει σε 3450 στροφές το λεπτό ( $=57.5 \text{ rps} = 17.5 \text{ Hz}$ ) και καλό θα ήταν να χρησιμοποιήσουμε την μέγιστη απόδοση της που φθάνει το  $\eta=77\%$  (δείτε τις χρωματιστές καμπύλες στο Σχήμα 3).



Nominal Pipe Size (in)	Inside Diameter (in)
1/8	0.269
1/4	0.364
3/8	0.493
1/2	0.622
3/4	0.824
1	1.049
1 1/2	1.610
<b>2</b>	<b>2.067</b>
2 1/2	2.469
3	3.068
3 1/2	3.548
4	4.026
5	5.047
6	6.065
8	8.071
10	10.020
12	12.090



Το ισοζύγιο ενέργειας στην διαδρομή 1<sup>-</sup> (ακριβώς λίγο από την είσοδο του νερού στον σωλήνα στην αριστερή δεξαμενή) μέχρι το 2<sup>+</sup> (στην έξοδο του σωλήνα που καταλήγει στη δεξαμενή δεξιά).

$$\frac{p_{1^-}}{\rho} + \frac{1}{2} \alpha_{1^-} \langle v_{1^-} \rangle^2 + g z_{1^-} + gH = \frac{p_{2^+}}{\rho} + \frac{1}{2} \alpha_{2^+} \langle v_{2^+} \rangle^2 + g z_{2^+} + h_{tot} \quad [1]$$

Ο όρος **gH** αναφέρεται στο ποσό της ενέργειας που προσφέρεται στο σύστημα από την αντλία.

### Υποθέσεις:

Τυρβώδης ροή, άρα  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$

$v_{1^-} = 0$ , πολύ μικρή ταχύτητα του ρευστού που κατεβαίνει στην δεξαμενή αριστερά

$v_{2^+} = 0$ , το νερό διασκορπίζεται αμέσως μετά την έξοδο από τον σωλήνα δεξιά

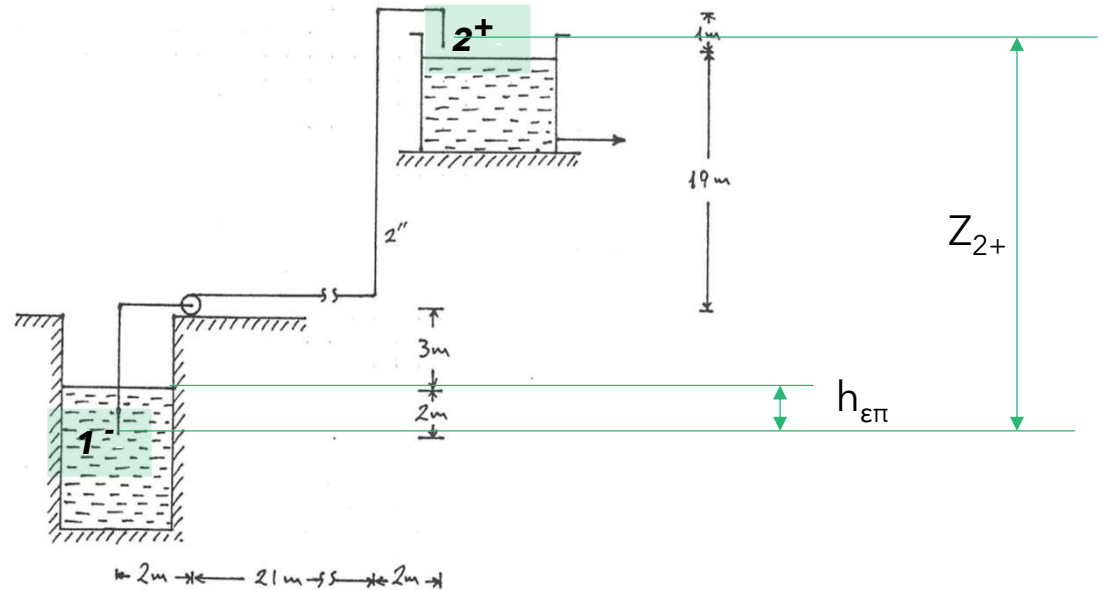
$\langle v \rangle$  θα ονομάσουμε τη ταχύτητα του ρευστού μέσα στους σωλήνες

$z_{1^-} = 0$ , θεωρώ ως επίπεδο μηδέν το σημείο λίγο πριν την είσοδο του ρευστού στον σωλήνα

$z_{2^+} = (2+3+19) \text{ m} = 24 \text{ m}$  (δείτε τα ύψη στο Σχήμα 2).

$p_{1^-} = p_{atm} + \rho g h_{\epsilon\pi}$  ( $h_{\epsilon\pi} = 2 \text{ m}$ , απόσταση από τη επιφάνεια του νερού στην δεξαμενή αριστερά)

$h_{tot}$  = το σύνολο των απωλειών κατά τη διαδρομή του ρευστού από το 1<sup>-</sup> μέχρι το 2<sup>+</sup>.



Εφαρμόζοντας τις παραπάνω υποθέσεις η Εξ. [1] γίνεται:

$$\frac{p_{atm} + \rho g h_{\varepsilon\pi}}{\rho} + gH = \frac{p_{atm}}{\rho} + gz_{2+} + h_{tot} \quad [2]$$

Η επίλυση της [2] ως προς H, δίνει:  $H = \frac{h_{tot}}{g} + (z_2 - h_{\varepsilon\pi})$  [3]

Στην Εξ. [3] η άγνωστη παράμετρος είναι η  $h_{tot}$ , η οποία περιέχει τον όρο της ταχύτητας (άγνωστη στο παρόν πρόβλημα).

$$h_{tot} = h_{\mu} + h_{\varepsilon} \quad [4]$$

$$h_{\mu} = f \frac{l_{tot}}{D} \frac{\langle v \rangle^2}{2} = f \frac{(2+3+2+21+19+1+2+1)m}{0.0525 m} \frac{\langle v \rangle^2}{2} = 971.428 f \frac{\langle v \rangle^2}{2} \quad [5]$$

$$h_{\varepsilon} = h_{\varepsilon,entrance} + 4 h_{\varepsilon,elbow} + h_{\varepsilon,exit} = k_{entr} \frac{\langle v \rangle^2}{2} + 4f \left(\frac{\lambda}{D}\right)_{elbow} \frac{\langle v \rangle^2}{2} + k_{exit} \frac{\langle v \rangle^2}{2} \quad [6]$$

Σύμφωνα με τους Πίνακες και τα διαγράμματα των σημειώσεων οι τιμές και κακοσχεδιασμένη είσοδο και έξοδο είναι και για αγκώνες 90° είναι:

$$k_{entr} = 0.78, k_{exit} = 1, \left(\frac{\lambda}{D}\right)_{elbow} = 30$$

Έτσι η Εξ. [6], για τις ελάχιστες απώλειες, γίνεται:

$$h_{\varepsilon} = \{0.78 + 1 + 4 * 30 * f\} \frac{\langle v \rangle^2}{2}, \text{ σε } \left[\frac{m^2}{s^2}\right]$$

## Διαφάνεια 34

---

CP1

Christakis Paraskeva; 28/3/2020

Έτσι οι συνολικές απώλειες δίνονται από την σχέση:

$$h_{tot} = h_{\mu} + h_{\varepsilon} = \left[ \{1091.428 * f + 1.78\} \frac{\langle v \rangle^2}{2} \right] \quad [7] \quad H = \frac{h_{tot}}{g} + (z_2 - h_{\varepsilon\pi}) \quad [3]$$

Παρατηρούμε ότι στην Εξ. [7] το  $\langle v \rangle$  αλλά και το  $f$  (που εξαρτάται έμμεσα από το  $\langle v \rangle$ ) είναι άγνωστα.

Σύμφωνα με την Εξ. [3] το συνολικό  $H$  με την βοήθεια της Εξ. [7] γίνεται:

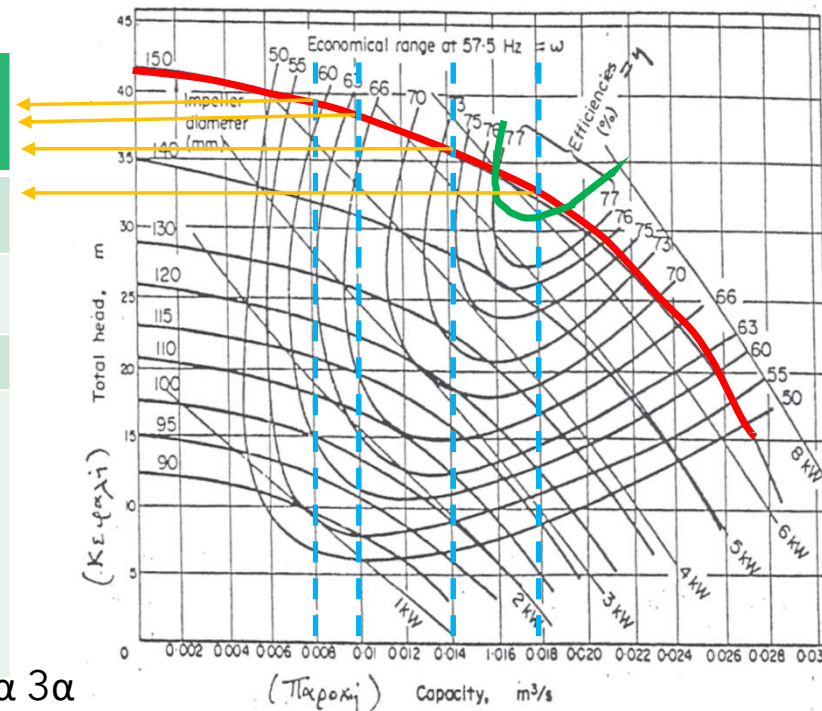
$$H = \frac{h_{tot}}{g} + (z_{2+} - h_{\varepsilon\pi}) = \frac{\left[ \{1091.428 f + 1.78\} \frac{\langle v \rangle^2}{2} \right]}{g} + (24 - 2) = \{1091.428 f + 1.78\} \frac{\langle v \rangle^2}{2g} + 22 \quad [8]$$

Για τον υπολογισμό του συντελεστή τριβής πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα τον αριθμό Reynolds και την σχετική τραχύτητα (εδώ είναι η τιμή του  $e/D$  είναι σταθερή,  $e/D = 0.001$ )

$$Re = \frac{\rho \langle v \rangle D}{\mu} = \frac{\rho \frac{4Q}{\pi D^2} D}{\mu} = 2.4 \cdot 10^7 Q \quad [9]$$

Τιμές για το H μπορούμε να πάρουμε από την Εξ. [8] (με την προϋπόθεση ότι το f είναι διαθέσιμο, ή με την βοήθεια του Σχήματος 3, όπου για μια συγκεκριμένη τιμή της παροχής Q, μπορούμε να πάρουμε τιμή για το H στο σημείο τομής με την καμπύλη για τον παρακινητή με διάμετρο 150 mm. Έτσι δοκιμάζουμε διάφορες τιμές του Q και παίρνουμε τιμές του H από την Εξ. [8] και το Σχήμα 3:

	Εκτιμώμενη τιμή για Q, m <sup>3</sup> /s	Re (Εξ.9)	f (Διάγραμμα Moody)	H (Εξ. 8), m	H από Σχ. 3, m
0	0.018	436760	0.0205	107.3	33, πολύ μακριά
1	0.014	339640	0.021	74.8	36, πολύ μακριά
2	0.010	242640	0.021	48.9	38, μακριά
3	0.008	19408	0.0215	<b>39.6</b>	<b>39</b> , σχεδόν συμπίπτουν με την καμπύλη της αντλίας με διάμετρο φτερωτής 150mm



Σχήμα 3α

Έτσι επιλέγουμε **Q= 0.008 m<sub>3</sub>/s= 28.8 m<sup>3</sup>/h and H=39.6 m (η=0.57)**

Αν Q=0.008 m/s, τότε η μαζική παροχή υπολογίζεται **m' = ρ Q = 1000 × 0.008 = 8 kg/s**

β) πόση είναι η απαιτούμενη ισχύς της αντλίας που μεταφέρει την μαζική παροχή που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα

$$\dot{W} = m' g H = 8 \frac{kg}{s} \times \left( 9.81 \frac{m}{s^2} \right) 39.6 m = 3108 W = 3.1 kW$$

Γ) Αν η απόδοση της αντλίας είναι **0.575** (δείτε Σχήμα 3α) πόση η είναι ιδανική τιμή της ισχύος της αντλίας που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε?

Για  $H = 39.6 m$ ,  $Q = 0.008 m^3/s$  και  $D_{imp} = 150 mm$ ,  $\eta = 57.5 \%$ , η απαιτούμενη τιμή της αντλίας είναι:

$$\eta = \frac{\dot{W}}{\dot{W}_{av}}, \quad \dot{W}_{av} = \frac{3108}{0.575} = 5.4 kW$$