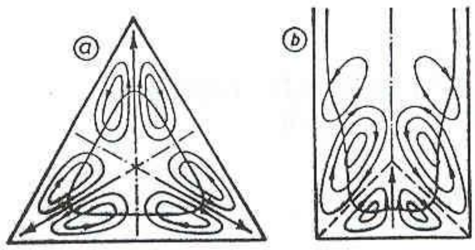
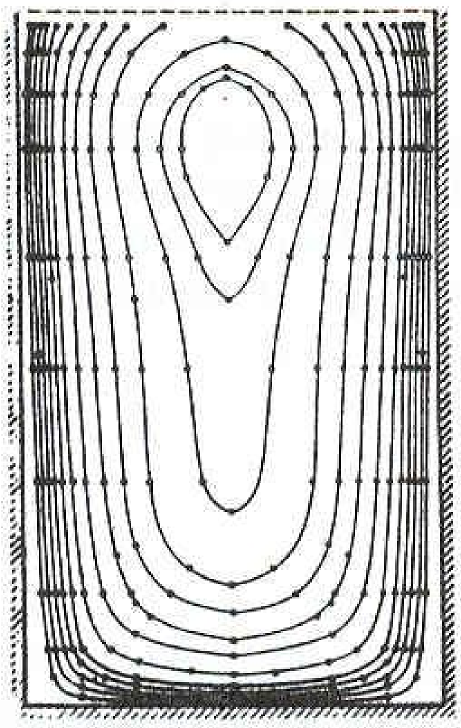


Σχήμα 11.19 Σχηματική παράσταση δευτερευουσών ροών σε αγωγούς με τριγωνική και ορθογωνική διατομή. (Πηγή: H. Schlichting, "Boundary Layer Theory")

Αξίζει να σημειωθεί ότι παρόμοιες δευτερεύουσες ροές συμβαίνουν και σε ανοικτούς αγωγούς (κανάλια), όπως φαίνεται από τη μορφή των καμπυλών σταθερής ταχύτητας που δίνεται στο Σχ. 11.20.



Σχήμα 11.20 Καμπύλες σταθερής ταχύτητας για τυρβώδη ροή σε ανοικτό αγωγό ορθογωνικής διατομής (Υπό J. Nikuradse. Πηγή: H. Schlichting, "Boundary Layer Theory")

Η μεγίστη ταχύτητα δεν παρατηρείται στην ελεύθερη επιφάνεια, όπως ίσως θα περιμέναμε, αλλά σε βάθος ίσο με ~1/5 του ολικού βάθους. Επιπλέον, η ταχύτητα στην επιφάνεια έχει μια μη-μηδενική συνιστώσα κάθετη προς τη διεύθυνση της κύριας ροής.

11.7-1 Υδραυλική διάμετρος

Αν ο λόγος όψεως (aspect ratio) της διατομής ενός αγωγού δεν είναι υπερβολικά μεγάλος ή μικρός, τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε, για τυρβώδη ροή, τις σχέσεις που ισχύουν για αγωγούς κυκλικής διατομής, χρησιμοποιώντας για διάμετρο την υδραυλική διάμετρο,

$$\boxed{D_\upsilon \equiv 4\frac{A}{C}} \quad \text{(υδραυλική διάμετρος)} \qquad (11.66)$$

όπου A = επιφάνεια διατομής και C = βρεχόμενη περίμετρος.

Βλέπουμε ότι για κυκλική διατομή $D_\upsilon = 4\left(\frac{\pi}{4}D^2\right)\Big/(\pi D) = D$.

Ας θεωρήσουμε, τώρα, για την ακόλουθη χαρακτηριστική περίπτωση.

Ορθογωνική Διατομή, b×h (b = πλάτος, h = ύψος)

$$A = bh \quad , \quad C = 2(b+h) \;\Rightarrow\; D_\upsilon = \frac{2bh}{(b+h)} \tag{11.67}$$

Ορίζουμε ω = h/b = λόγος όψεως

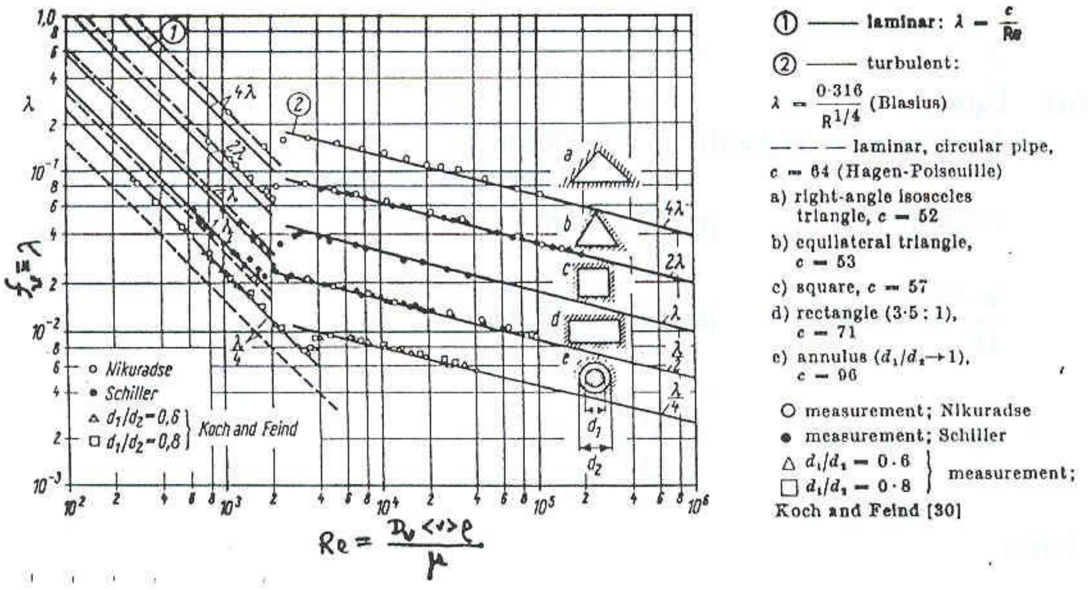
οπότε

$$D_\upsilon = \frac{2h}{(1+\omega)} \tag{11.68}$$

Για 1/3<ω<3 η ιδέα της υδραυλικής διαμέτρου μπορεί να εφαρμοσθεί σε αγωγούς ορθογωνικής διατομής. Τέτοιοι αγωγοί, κατασκευασμένοι από μεταλλικά φύλλα, είναι σχετικά φθηνοί και χρησιμοποιούνται για αερισμό και κλιματισμό χώρων.

11.7-2 Διατομές με ακραία γεωμετρία

Οι απώλειες υδροστατικής κεφαλής που οφείλονται σε δευτερεύουσες ροές αυξάνουν πολύ για ακραίες γεωμετρίες, όπως π.χ. ορθογωνικές διατομές με ω < 1/3 ή ω > 3, τριγωνικές διατομές κλπ. Σε τέτοιες περιπτώσεις πρέπει να χρησιμοποιούμε πειραματικά δεδομένα για τη συγκεκριμένη διατομή. Το Σχ. 11.21 δίνει το συντελεστή τριβής f_υ [εδώ $\lambda \equiv f_\upsilon = (-\Delta P/\ell)D_\upsilon / \frac{1}{2}\rho < v >^2$] για λείους αγωγούς μη-κυκλικής διατομής.



Σχήμα 11.21 Συντελεστής τριβής βάσει υδραυλικής διαμέτρου, f_υ, για μερικούς λείους αγωγούς μη-κυκλικής διατομής. (Πηγή: H. Schlichting, “Boundary Layer Theory”)

11.8 Ανάλυση σωληνώσεων χωρίς διακλαδώσεις

Εχουμε τους ακόλουθους τύπους προβλημάτων.

(α) $h_{ολ}$=; Δίδονται ℓ, D, Q, e/D, ρ, μ

(β) ℓ=; Δίδονται $h_{ολ}$, D, Q, e/D, ρ, μ

(γ) Q=; Δίδονται $h_{ολ}$, D, ℓ, e/D, ρ, μ

(δ) D=; Δίδονται $h_{ολ}$, ℓ, Q, e, ρ, μ

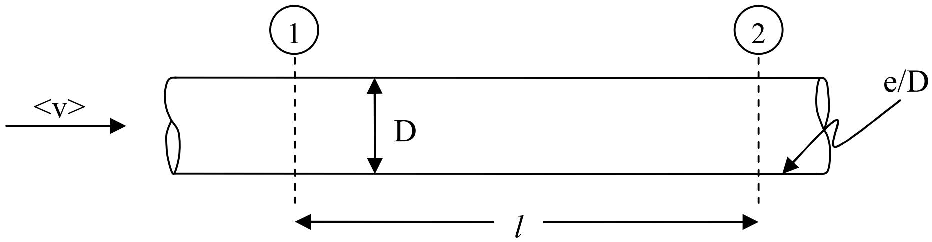
Στα ακόλουθα δίδονται μερικά παραδείγματα τέτοιων προβλημάτων με τις λύσεις τους.

Παράδειγμα 11α. Ας θεωρήσουμε ένα καινούργιο σωλήνα από κοινό χάλυβα με διάμετρο D = 2in. Μέσα στο σωλήνα ρέει νερό θερμοκρασίας ~ 15C με μόνιμη, πλήρως ανεπτυγμένη ροή και μέση ταχύτητα <v> =3m/s.

(i) Πόση είναι η ολική απώλεια υδροστατικής κεφαλής $h_{ολ}$ κατά μήκος ℓ = 100 m του σωλήνα;

(ii) Πόση είναι η αντίστοιχη απαιτούμενη ισχύς;

Λύση



Σχήμα 1

(i) Έχουμε

$$D = 2\text{in} = 2\times 25.4\times 10^{-3}\,\text{m} = 0.0508\text{m}$$

$$\ell = 100\text{m} \qquad \rho \cong 1000\text{kg/m}^3$$

$$\frac{e}{D} \overset{\Sigma\chi.11.2}{=} 0.0009 \qquad \mu \cong 1\text{mPa.s} = 10^{-3}\text{Pa.s}$$

$$<v> = 3\text{m/s} \qquad \nu = \frac{\mu}{\rho} \cong 10^{-6}\,\text{m}^2/\text{s}$$

Τώρα

$$\text{Re} = \frac{D<v>}{\nu} = \frac{0.0508\times 3}{10^{-6}} = \underline{152400} >> 2300 \Rightarrow \text{τυρβώδης ροή}$$

$$f = f\left(\text{Re},\ \frac{e}{D}\right) = f\ (152400,\ 0.0009) \overset{\Sigma\chi.11.1}{\underset{\downarrow}{=}} \underline{0.021}$$

$$\Rightarrow \qquad h_{ολ} = h_{\mu} = f\frac{\ell}{D}\ \frac{<v>^2}{2} = 0.021\times\frac{100}{0.0508}\ \frac{3^2}{2} = \underline{186\text{m}^2/\text{s}^2}$$

(ii) Η απαιτούμενη ισχύς υπολογίζεται από τη σχέση

$$\dot{W} = \dot{m}\left[(u_2 - u_1) - \frac{\dot{Q}}{\dot{m}}\right] = \dot{m}\, h_{o\lambda}$$

Αλλά

$$\dot{m} = \rho\, Q = \rho\, \frac{\pi}{4}\, D^2 < v > \; = 1000\, \frac{\pi}{4}\, 0.0508^2 \times 3 = \underline{6.08 kg/s}$$

$$\Rightarrow \qquad \dot{W} = 6.08 \times 186 = 1131 \text{ Watt} = 1.131 \text{ kW} = 1.131 \text{ kW} \times \left(1.340\, \frac{hp}{kW}\right) = \underline{1.516\, hp}$$

Παράδειγμα 11β. Ας θεωρήσουμε την (ομολογουμένως άκομψη) σωλήνωση από κοινό χάλυβα του Σχ 1.

Εχουμε τα ακόλουθα στοιχεία

$$D_1 = D_5 = 2in = 0.0508m \quad , \quad D_2 = D_7 = 4in = 0.1016m$$

Ρευστό: αέρας, 20 C, ~ 1 atm $\Rightarrow \rho = 1.205 \frac{Kg}{m^3}$, $\nu = 15.05 \times 10^{-6} \frac{m^2}{s}$

$Q_7 = 365 m^3/hr$ (μετριέται στη διατομή 7)

$D_1 = D_5 = 2in = 0.0508m$, $D_2 = D_7 = 4$ in $= 0.1016m$

$\ell_{1,2} = 7m$, $\ell_{2,3} = 15m$, $\ell_{3,4} = 8$ m , $\ell_{4,5} = 5m$

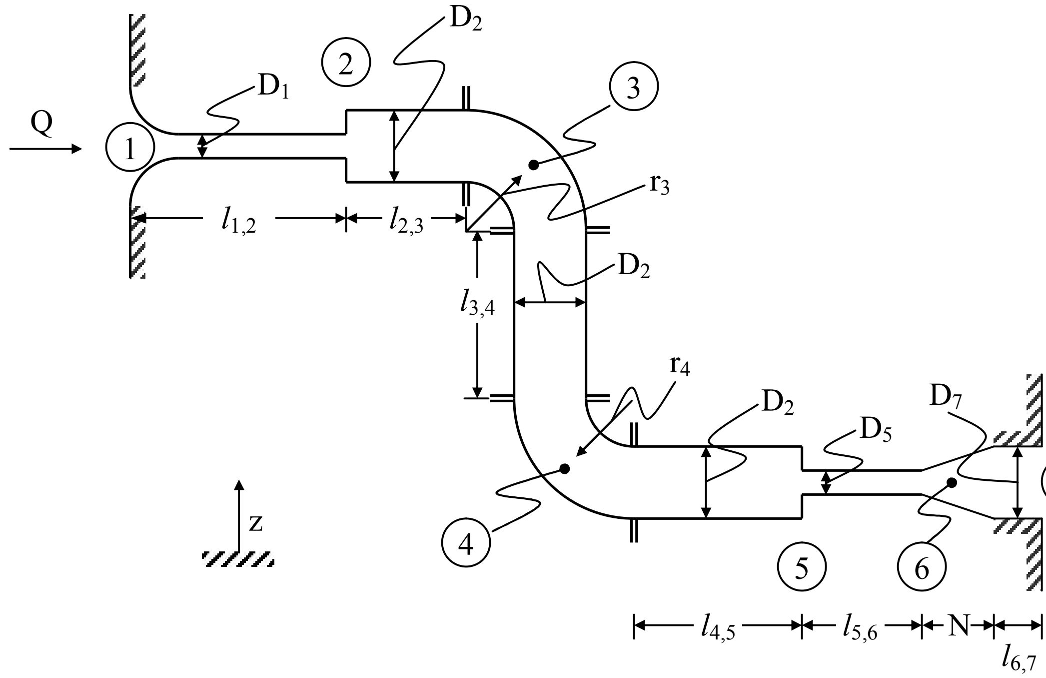
$\ell_{5,6} = 5m$, $\ell_{6,7} = 8m$, $\left(\frac{e}{D}\right)_{1,2} = \left(\frac{e}{D}\right)_{5,6} = 0.0009$

$\left(\frac{e}{D}\right)_{2,3} = \left(\frac{e}{D}\right)_{3,4} = \left(\frac{e}{D}\right)_{4,5} = \left(\frac{e}{D}\right)_{6,7} = 0.00045$, $r_3 = r_4 = 8$ in, N = 0.20 m

(i) Πόση είναι η ολική απώλεια υδροστατικής κεφαλής;

(ii) Πόση είναι η στατική πίεση στην είσοδο;

(iii) Πόση είναι η απαιτούμενη ισχύς;



Σχήμα 1

Λύση

Εφόσον το ρευστό είναι αέριο, προκύπτει το ερώτημα κατά πόσον η ροή μπορεί να θεωρηθεί ασυμπίεστη, και σε ποιές συνθήκες πιέσεως και θερμοκρασίας θα υπολογισθούν οι ιδιότητές του. Αρχίζουμε υπολογίζοντας τον αριθμό Mach.

Αν $<v_7>$ είναι η μέση ταχύτητα στον αγωγό ⑥–⑦, τότε

$$< v_7 >= \frac{4Q_7}{\pi\ D_7^2} = \frac{4\times(365/3600)}{\pi\ 0.1016^2} = \underline{12.51 m/s}$$

$$\Rightarrow \qquad Ma_7 = \frac{< v_7 >}{c} = \frac{12.51\, m/s}{340\, m/s} = 0.0368 << \frac{1}{3}$$

Εφόσον $Ma_7 < \frac{1}{3}$ η ροή κοντά στην έξοδο μπορεί να θεωρηθεί ασυμπίεστη. Η τιμή του αριθμού Mach στην είσοδο, Ma, εκτιμάται ως

$$Ma_1 = \frac{< v_1 >}{c} \overset{\rho=\sigma\tau\alpha\theta}{=} \frac{< v_7 >}{c}\left(\frac{D_7}{D_1}\right)^2 = \left(\frac{D_7}{D_1}\right)^2 Ma_7 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 0.0368 = 0.147 < \frac{1}{3}$$

Αρα, και κοντά στην είσοδο η ροή μπορεί να θεωρηθεί ασυμπίεστη.

Τέλος, ως πρώτη εκτίμηση, θα θέσουμε $\rho_1 = \rho_7 = \rho$ και $v_1 = v_7 = v$. Η θερμοκρασία θα θεωρηθεί ίση με 20 C, παντού.

(i) Η ολική απώλεια υδροστατικής κεφαλής μπορεί να γραφεί ως

$$h_{o\lambda} = h_\mu + h_\varepsilon$$

όπου

$$h_\mu = h_{1,2} + h_{2,3} + h_{3,4} + h_{4,5} + h_{5,6} + h_{6,7}$$

$$h_\varepsilon = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6 + h_7$$

Έχουμε

$$< v_1 > = \frac{4Q}{\pi\ D_1^2} = \frac{4\times(365/3600)}{\pi\ 0.0508^2} = \underline{50.0 m/s}$$

$$\mathrm{Re}_{1,2} = \mathrm{Re}_{5,6} = \frac{D_1 < v_1 >}{\nu} = \frac{0.0508 \times 50.0}{15.05 \times 10^{-6}} = \underline{1.688 \times 10^4}$$

$$\mathrm{Re}_{2,3} = \mathrm{Re}_{3,4} = \mathrm{Re}_{4,5} = \mathrm{Re}_{6,7} = \frac{D_7 < v_7 >}{\nu} = \frac{0.1016 \times 12.51}{15.05 \times 10^{-6}} = \underline{8.445 \times 10^4}$$

$$f_{1,2} = f_{5,6} = f(1.688 \times 10^5, 0.0009) \overset{\text{Διαγρ. Moody}}{\overset{\downarrow}{=}} 0.021$$

$$f_{2,3} = f_{3,4} = f_{4,5} = f_{6,7} = f(8.445 \times 10^4, 0.00045) \overset{\text{Διαγρ. Moody}}{\overset{\downarrow}{=}} 0.0207$$

$$h_{1,2} + h_{5,6} = f_{1,2} \frac{1}{D_1} (\ell_{1,2} + \ell_{5,6}) \frac{< v_1 >^2}{2}$$

$$= 0.021 \frac{1}{0.0508} (7.0 + 5.0) \frac{50.0^2}{2} = \underline{6201 \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2}$$

$$h_{2,3} + h_{3,4} + h_{4,5} + h_{6,7} = f_{2,3} \frac{1}{D_2} (\ell_{2,3} + \ell_{3,4} + \ell_{4,5} + \ell_{6,7}) \frac{< v_7 >^2}{2}$$

$$= 0.0207 \frac{1}{0.1016} (15.0 + 8.0 + 5.0 + 8.0) \frac{12.51^2}{2} = \underline{574 \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2}$$

$$\Rightarrow \quad h_\mu = h_{1,2} + h_{2,3} + \ldots + h_{6,7} = 6201 + 574 = \underline{6775 \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2}$$

Επίσης

$$h_1 = K_1 \frac{< v_1 >^2}{2} = 0.04 \frac{50.0^2}{2} = \underline{50 \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2} \text{ (καλά στρογγυλευμένη είσοδος)}$$

$$h_2 = K_\delta \frac{< v_1 >^2}{2} \overset{\text{Σχ. 11.9}}{\overset{\downarrow}{=}} 0.54 \frac{50.0^2}{2} = \underline{675 \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2}$$

$$h_3 = f_{2,3} \frac{\lambda_3}{D_2} \frac{< v_7 >^2}{2} \overset{\text{Σχ.11.12}}{\overset{\downarrow}{=}} 0.0207 \times 13 \times \frac{12.51^2}{2} = \underline{21 \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2}$$

$$h_4 = h_3 = 21 \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$$

$$h_5 = K_\sigma \frac{< v_1 >^2}{2} \overset{\text{Σχ.11 .9}}{\overset{\downarrow}{=}} 0.32 \frac{50.0^2}{2} = \underline{400 \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2}$$

$$h_7 = K_7 \frac{< v_7 >^2}{2} = 1 \frac{12.51^2}{2} = \underline{78 \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2}$$

Τέλος

$$h_6 = h_{\delta\iota\alpha\chi} = \frac{1}{2} < v_1 >^2 \left[\left(1 - \frac{1}{(AR)^2} \right) - C_p \right]$$

για $\quad AR = \left(\frac{D_7}{D_5} \right)^2 = \left(\frac{4}{2} \right)^2 = \underline{4}$

$$\frac{N}{R_1} \equiv \frac{N}{\left(\frac{D_5}{2}\right)} = \frac{0.20}{\left(\frac{0.0508}{2}\right)} = 7.9 \overset{\Sigma\chi.11.11}{\Rightarrow} C_p \cong \underline{0.60}$$

$$\Rightarrow \qquad h_6 = \frac{1}{2}\ 50.0^2 \left[\left(1 - \frac{1}{4^2}\right) - 0.60\right] = \underline{422 m^2/s^2}$$

Ετσι,

$$h_\varepsilon = h_1 + h_2 + ... + h_7 = (50 + 675 + 21 + 21 + 400 + 422 + 157) = \underline{1667 m^2/s^2}$$

$$\Rightarrow \quad h_{o\lambda} = h_\mu + h_\varepsilon = 6775 + 1667 = \underline{8442 m^2/s^2}$$

Βλέπουμε επίσης ότι $h_\varepsilon = 19.8\%$ της $h_{o\lambda}$.

(ii) Από το ισοζύγιο ενέργειας έχουμε

$$\frac{p_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{1}{2} < v_1 >^2 + g z_1 = \frac{p_{7+}}{\rho} + \alpha_2 \frac{1}{2} < v_{7+} >^2 + g z_{7+} + h_{o\lambda}$$

με $\qquad \alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 1\ ,\ p_{7+} = 1\,\text{atm}\ ,\ z_1 - z_{7+} \cong \ell_{3,4} = 8 m$

Άρα,

$$(p_1 - p_{7+}) = \rho h_{o\lambda} - \frac{1}{2}(< v_1 >^2 - < v_{7+} >^2) - \rho g (z_1 - z_{7+})$$

$$< v_{7+} > = 0 \ \text{(μετά την έξοδο)}$$

$$= 1.205 \times 8442 - \frac{1}{2} 1.205\,(50.0^2) - 1.205 \times 9.81 \times 8$$

$$= (10173 - 1506 - 95)\ \text{Pa} = \underline{8572 \text{Pa}}$$

Τώρα

$$1\ \text{atm (κανονική)} = 1.01325 \times 10^5\ \text{Pa} = 101.325\ \text{kPa}$$

$$1\ \text{atm (τεχνική)} = 9.806650 \times 10^4\ \text{Pa} = 98.0665\ \text{kPa}$$

$$p_1 = p_{atm} + 8572\ \text{Pa} = (1.013 \times 10^5 + 8572)\ \text{Pa} \cong \underline{110.0 \text{kPa}}$$

Η p_1 είναι ~ 8.6% μεγαλύτερη από την ατμοσφαιρική. Για πιο λεπτομερή λύση μπορούμε τώρα να επαναλάβουμε τους προηγούμενους υπολογισμούς χρησιμοποιώντας για κάθε τμήμα αγωγού τις τιμές των ρ και μ που αντιστοιχούν στη μέση τοπική πίεση (και να επαναλάβουμε τον υπολογισμό μέχρις ότου συγκλίνουμε). Εδώ, όμως, θα θεωρήσουμε την παρούσα προσέγγιση ικανοποιητική.

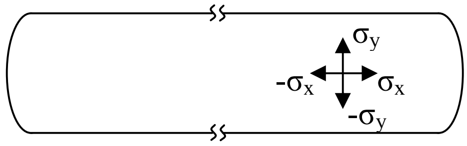
(iii) Η ισχύς δίνεται από τη σχέση

$$\dot{W} = \dot{m}\, h_{o\lambda} = \rho Q h_{o\lambda} = 1.205 \frac{365}{3600} 8442 = \underline{1.03 kW} = (1.03 kW) \times (1.34\ hp/kW) = \underline{1.38 hp}$$

Παράδειγμα 11γ. Βαρύ ακάθαρτο πετρέλαιο ($\rho = 925\ kg/m^3,\ \nu = 1.2 \times 10^{-4}\ m^2/s$) αντλείται μέσω ενός οριζόντιου σωλήνα. Ο σωλήνας είναι κατασκευασμένος από κοινό χάλυβα, έχει εσωτερική διάμετρο D = 24 in (≅0.610 m) και πάχος τοιχώματος $b = \frac{1}{2}$ in (=12.7 mm). Η μέγιστη επιτρεπτή τάση εφελκυσμού μέσα στο τοίχωμα του σωλήνα είναι σ_{max}=40000 psi (=2.758×10^8 Pa) λαμβάνοντας υπόψη μελλοντική διάβρωση. Για να αποφύγουμε την εξάτμιση των ελαφρών συστατικών του πετρελαίου η ελάχιστη πίεση μέσα στο σωλήνα δεν πρέπει να πέσει κάτω από 75psia ($=5.17\times10^5$ Pa). Η ογκομετρική παροχή είναι 400.000 βαρέλια/ημέρα (στη βιομηχανία πετρελαίου 1 βαρέλι = 42gal. Εξάλλου 1gal = 3.786 ℓt, άρα 1 βαρέλι = 159.0, $lt = 0.159\text{m}^3$). Προσδιορίστε τη μέγιστη απόσταση μεταξύ διαδοχικών αντλιοστασίων. Υπολογίστε την ισχύ που προσδίδεται στο πετρέλαιο από κάθε αντλιοστάσιο.

Λύση

Κάνοντας μια ανάλυση της πιέσεως η οποία μπορεί να προκαλέσει εφελκυστική ζημιά στο σωλήνα βρίσκουμε



Σχήμα 1

$$\sigma_x \pi\, Db = p\frac{\pi}{4}D^2 \Rightarrow p = 4\frac{b}{D}\sigma_x$$

$$\sigma_y\, 2\, bL \cong p\, DL \Rightarrow p \cong 2\frac{b}{D}\sigma_y$$

Αφού δε $\sigma_x \le \sigma_{max}$, $\sigma_y \le \sigma_{max}$ παίρνουμε

$$p_{max} = 2\frac{b}{D}\ \sigma_{max} = 2\ \frac{12.7\text{ mm}}{610\text{ mm}} 2.758\times10^8\ \text{Pa} = 1.15\times10^7\,\text{Pa} = \underline{117.2\text{ atm}}^{*}$$

Τώρα,

$$< v > \ = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4\times(400000\times0.159/86400)}{3.14159\times0.610^2} = \underline{2.519\text{ m/s}}$$

$$\Rightarrow \quad Re = \frac{D<v>\rho}{\mu} = \frac{D<v>}{\nu} = \frac{0.610\times2.519}{1.2\times10^{-4}} = \underline{1.28\times10^4} \quad (\text{τυρβώδης})$$

$$\frac{e}{D} = 0.00007 \quad (\text{από Σχ. 11.2})$$

$$f = f(1.28\times10^4, 0.00007) \overset{\text{Σχ.11.1}}{=} \underline{0.028}$$

Τώρα
$$\ell = \frac{2(-\Delta P)D}{\rho<v>^2 f}$$

και

$$\ell_{max} = \frac{2\ (-\Delta P)_{max} D}{\rho<v>^2 f} = \frac{2\times(1.15\times10^7 - 5.17\times10^5)\times0.610}{925\times2.519^2\times0.028} = \underline{81532\text{ m}}$$

$$\Rightarrow \quad \ell_{max} = \underline{81.5\text{km}}$$

$$\dot{W} = \dot{m}\, h_{ολ} = ;$$

$$h_{ολ} = -\frac{(\Delta P)_{max}}{\rho} = \frac{1.15\times10^7 - 5.17\times10^5}{925} = \underline{11873.5\text{ m}^2/\text{s}^2}$$

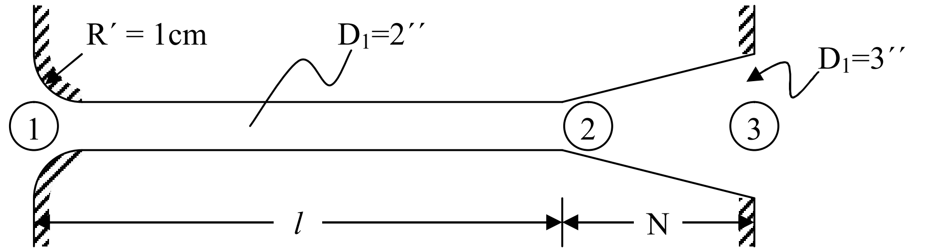
$$\dot{m} = \rho Q = 925\ \frac{400000\times0.159}{86400} = \underline{680.9\text{ kg/s}}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{W} = 680.9\times11873.5 = 8084699\text{ Watt} = \underline{8.085\text{MW}}$$

---

* 1 τεχνική ατμ. $= 9.81\times10^4$ Pa=98.1 kPa

Παράδειγμα 11δ. Ας θεωρήσουμε τη σωλήνωση του σχήματος



Σχήμα 1

Έχουμε τα εξής στοιχεία $\frac{e}{D_1} = 0.0075$,

$$\left.\begin{array}{l} D_1 = 2'' \,(= 0.0508\mathrm{m}) \\ D_3 = 3'' \,(= 0.0762\mathrm{m}) \end{array}\right\} \Rightarrow AR = \left(\frac{D_3}{D_1}\right)^2 = 2.25$$

$R' = 1\,\mathrm{cm}$, N=13.5 cm=0.135 m ⇒ $N/R_1=2N/D_1=5.3$

Ρευστό: Νερό σε 20oC ⇒ μ≅1cp=10-3 N.s/m2 ρ≅1000 Kg/m3

Ερώτηση: Πόση είναι η μεγίστη τιμή του ℓ αν η απαιτούμενη παροχή είναι Q = 100 m^3/hr και η ολική ισχύς για τη ροή δεν πρέπει να υπερβεί την τιμή $\dot{W} = 6\,\mathrm{hp}$;

Λύση

Έχουμε

$$\dot{W} = \dot{m}\, h_{ολ} \quad ή \quad h_{ολ} = \frac{\dot{W}}{\dot{m}}$$

Αλλά $\dot{W} = 6\,\mathrm{hp} = 6 \times 0.746\,\mathrm{kW} = 4.476\,\mathrm{kW} = 4476\,\mathrm{W} = \underline{4476\,\mathrm{N.m/s}}$

$$\dot{m} = \rho Q = 1000\,\mathrm{kg/m^3} \times 100\,\mathrm{m^3/hr} = 10^5\,\mathrm{kg/hr} = \frac{10^5}{3600}\,\mathrm{kg/s} = \underline{27.78\mathrm{kg/s}}$$

$$\Rightarrow \qquad h_{ολ} = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} = \frac{4476}{27.78} = \underline{161.1\mathrm{m^2/s^2}}$$

Αρα η επιτρεπόμενη μέγιστη απώλεια υδροστατικής κεφαλής είναι 161.1 m^2/s^2.

Τώρα $$h_{ολ} = h_{1,2} + h_1 + h_{διαχ} + h_3$$

$$\Rightarrow \qquad h_{1,2} = h_{ολ} - h_1 - h_{διαχ} - h_3$$

$$h_1 = K_1 \frac{<v_1>^2}{2} \quad , \quad K_1 = 0.04 \text{ (καλώς στρογγυλεμένο στόμιο)}$$

$$h_3 = K_3 \frac{<v_3>^2}{2} \quad , \quad K_3 = 1 \text{ (έξοδος)}$$

$$h_{διαχ} \overset{Εξ.(11.63)}{=} \frac{1}{2} <v_1>^2 \left[\left(1 - \frac{1}{(AR)^2}\right) - C_p\right]$$

Για AR = 2.25 και $N/R_1 = 5.3$ το διάγραμμα του Σχ. 11.11 μας δίνει $C_p \cong 0.60$. Επίσης έχουμε

$$<v_1> = \frac{4Q}{\pi\, D_1^2} = \frac{4\times(100/3600)}{\pi\ 0.0508^2} = \underline{13.7 m/s}$$

$$<v_3> \ = \left(\frac{D_1}{D_3}\right)^2 <v_1> \ = \left(\frac{2}{3}\right)^2 13.7 = \underline{6.1 m/s}$$

Αρα $$h_1 = 0.04\ \frac{13.7^2}{2} = \underline{3.75 m^2/s^2}$$

$$h_3 = 1\ \frac{6.1^2}{2} = \underline{18.6 m^2/s^2}$$

$$h_{\delta\iota\alpha\chi} = \frac{1}{2}\ 13.7^2\ \left[\left(1-\frac{1}{2.25^2}\right)-0.60\right] = \underline{19.0 m^2/s^2}$$

$\Rightarrow$ $$h_{1,2} = 161.1-(3.75+18.6+19.0) = \underline{119.75 m^2/s^2}$$

Τώρα: $$h_{1,2} = f\left(\mathrm{Re}, \frac{e}{D_1}\right)\frac{\ell}{D_1}\frac{<v_1>^2}{2}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{D_1 <v_1> \rho}{\mu} = \frac{0.0508\times13.7\times1000}{10^{-3}} = \underline{6.96\times10^5} >> 2300$$

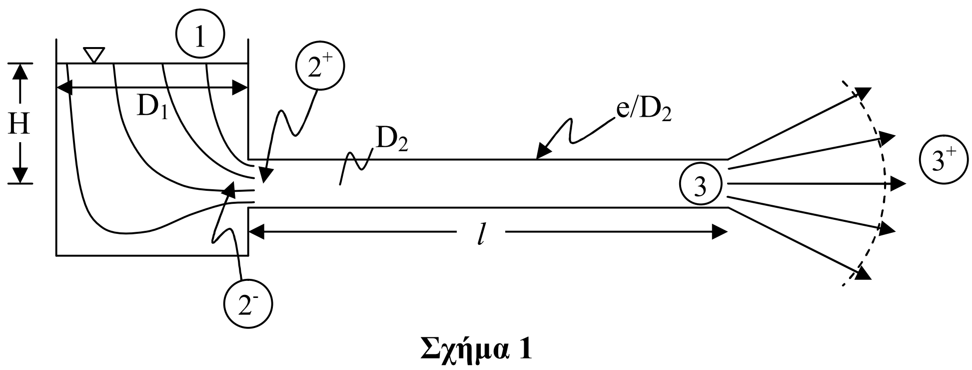
Τυρβώδης ροή

$$f\ (6.96\times10^5,\ 0.0075) \ \overset{\substack{\text{Διαγρ.Moody} \\ \downarrow}}{=} \ \underline{0.034}$$

Τώρα $$\ell = D_1\ \frac{2\ h_\mu}{f <v_1>^2} = 0.0508\frac{2\times119.75}{0.034\times13.7^2} \cong \underline{1.91 m}$$

Ώστε $$\boxed{\ell \le 1.91\, m}$$

Παράδειγμα 11ε. Θεωρούμε τη διάταξη του σχήματος.



Σχήμα 1

Δεδομένα

H = 12 m , D_1 = 3 m , D_2 = 2″ =(0.0508 m) , $\frac{e}{D_2} = 0.01$, ℓ=15 m , p_1=p_{3+}=1 atm

Ρευστό: νερό σε 20^{o}C $\Rightarrow$ $\mu \cong 1$ cp = 10^{-3} N.s/m^2 $\rho \cong 1000$ Kg/m^3

Ζητείται Q = ;

Λύση

Μέθοδος 1

Εξ. (11.29) $\Rightarrow \left(\frac{p_1}{\rho}+\frac{1}{2}\alpha_1<v_1>^2+gz_1\right)=\left(\frac{p_{3+}}{\rho}+\frac{1}{2}\alpha_2<v_{3+}>^2+gz_3\right)+h_{ολ}$

Θα υποθέσουμε τυρβώδη ροή, οπότε $\alpha_1 \cong \alpha_2 \cong 1$. Συνεπώς

$$h_{ολ}=\frac{(p_1-p_{3+})}{\rho}+\frac{1}{2}\left(<v_1>^2-<v_{3+}>^2\right)+(z_1-z_2)\,g$$

$\Rightarrow$ $$h_{ολ}=g\,H$$

αφού $$p_1=p_{3+}=p_{atm}\,;\ <v_1>\approx 0\ ,\ <v_{3+}>\overset{\substack{\text{μετά την έξοδο}\\ \downarrow}}{=}0$$

Τώρα, $$h_{ολ}=h_\mu+h_\varepsilon=h_{2,3}+h_2+h_3$$

$$h_2=K_2\frac{<v_3>^2}{2}\ ,\quad h_3=\frac{<v_3>^2}{2}\quad (K_2=0.34)$$

$$h_{2,3}=f\,\frac{\ell}{D_2}\frac{<v_3>^2}{2}\qquad\left(\frac{e}{D_2}=0.01,\ \mathrm{Re}=\frac{D_2<v_3>\rho}{\mu}\right)$$

$\Rightarrow$ $$\boxed{\left[f\left(\frac{D_2<v_3>\rho}{\mu},\frac{e}{D_2}\right)\frac{\ell}{D_2}+K_2+1\right]\frac{1}{2}<v_3>^2=g\,H}$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να λυθεί για $<v_3>$ αριθμητικά, ή με τη μέθοδο της δοκιμής και σφάλματος.

Ως πρώτη προσέγγιση του f διαλέγουμε την τιμή για $\frac{e}{D_2}=0.01$ και $\mathrm{Re}>10^6$ (όπου $f \cong$ σταθ.), δηλαδή

$$f^{(0)}=0.038$$

Τότε,

$$\left[0.038\frac{15}{0.0508}+0.34+1\right]\frac{1}{2}<v_3>^{(0)^2}=9.81\times 12$$

ή

$$6.28<v_3>^{(0)^2}=117.7\ \mathrm{m^2/s^2}$$

ή

$$<v_3>^{(0)^2}=18.75\ \mathrm{m^2/s^2}\Rightarrow\ <v_3>^{(0)}=\underline{4.33\mathrm{m/s}}$$

$\Rightarrow$ $$\mathrm{Re}^{(0)}=\frac{\rho<v_3>^0 D_2}{\mu}=\frac{1000\times 4.33\times 0.0508}{10^{-3}}=\underline{2.2\times 10^5}$$

$\Rightarrow$ $$f^{(1)}=f(2.2\times 10^5,\ 0.01)\overset{\substack{\text{Διαγ.Moody}\\ \downarrow}}{=}\underline{0.038}$$

Βλέπουμε ότι $f^{(1)}\approx f^{(0)}$, άρα έχουμε συγκλίνει.

$\Rightarrow$ $$\boxed{<v_3>=4.33\ \mathrm{m/s}}$$

Η μέθοδος αυτή μας έδωσε πολύ εύκολα το τελικό αποτέλεσμα γιατί έτυχε ο πραγματικός αριθμός Reynolds να είναι κοντά στην περιοχή όπου $f\approx$ σταθ. $=0.038$, όπως υποθέσαμε για την αρχική εκτίμηση.

Θα δούμε τώρα μια άλλη μέθοδο επιλύσεως που ενδείκνυται αν h_ε = αμελητέο. Αλλιώς, όπως θα δούμε, η δεύτερη μέθοδος δεν είναι απαραιτήτως καλύτερη από την πρώτη.

Μέθοδος 2 (Χρήση Σχ. 11.3)

$$\frac{1}{8} f\,\mathrm{Re}^2 = \frac{D_2^3\,\rho}{4\mu^2}\left(-\frac{\Delta P}{\ell}\right) \quad , \quad -\frac{\Delta P}{\rho} = \frac{(p_{2+} - p_{3-})}{\rho} \quad , \quad \frac{-\Delta P}{\rho} = \ ;$$

Έχουμε

$$\left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}\alpha_1 < v_1 >^2 + g\,z_1\right) \cong \left(\frac{p_{2-}}{\rho} + \frac{1}{2} < v_{2-} >^2 + g\,z_2\right) \text{, } (h_{1,2-} = 0)$$

$$<v_1> = 0$$

$$\left(\frac{p_{2+}}{\rho} + \frac{1}{2} < v_{2+} >^2 + g\,z_2\right) + h_2 = \left(\frac{p_{2-}}{\rho} + \frac{1}{2} < v_{2-} >^2 + g\,z_2\right)$$

$$\left(\frac{p_{3-}}{\rho} + \frac{1}{2} < v_{3-} >^2 + g\,z_3\right) - h_3 = \left(\frac{p_{3+}}{\rho} + \frac{1}{2} < v_{3+} >^2 + g\,z_3\right)$$

$$< v_{2+} > = < v_{3-} > \quad , \qquad < v_{2-} > \approx < v_{2+} > \quad , \qquad < v_{3+} > \cong 0$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{p_{2+}}{\rho} = \dfrac{p_{2-}}{\rho} - h_2 = \left(gH + \dfrac{p_{atm}}{\rho} - \dfrac{1}{2} < v_{2-} >^2\right) - h_2 \\ \\ \dfrac{p_{3-}}{\rho} + \dfrac{1}{2} < v_{3-} >^2 - h_3 = \dfrac{p_{atm}}{\rho} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\left(-\frac{\Delta P}{\rho}\right) = \frac{(p_{2+} - p_{3-})}{\rho} = g\,H - h_2 - h_3}$$

Ως πρώτη προσέγγιση θα υποθέσουμε ότι

$$h_2 + h_3 << gH$$

οπότε
$$-\frac{\Delta P^{(0)}}{\rho} = g\ H$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\frac{1}{8} f\,\mathrm{Re}^2\right)^{(0)} = \frac{D_2^3\rho^2}{4\mu^2}\,\frac{gH}{\ell} = \frac{0.0508^3 \times 1000^2}{4\times(10^{-3})^2}\,\frac{9.81\times 12}{15} = \underline{2.57\times 10^8}$$

Από το Σχ. 11.3 βρίσκουμε

$$\mathrm{Re}^{(0)} \cong 2.3\times 10^5 >> 2300 \text{ (τυρβώδης)}$$

ή

$$< v_3 >^{(0)} = \mathrm{Re}^{(0)}\,\frac{\mu}{\rho D_2} = 2.3\times 10^5\,\frac{10^{-3}}{1000\times 0.0508} = \underline{4.53\mathrm{m/s}}$$

Αρα

$$h_2^{(0)} = \frac{1}{2}0.34\times 4.53^2 = \underline{3.49\mathrm{m^2/s^2}}$$

$$h_3^{(0)} = \frac{1}{2}4.53^2 = \underline{10.26\mathrm{m^2/s^2}}$$

$$h_2^{(0)} + h_3^{(0)} = \underline{13.75 m^2/s^2}$$

Αλλά

$$gH = 9.81 \times 12 = \underline{118 m^2/s^2}$$

Βλέπουμε ότι $h_2^{(0)} + h_3^{(0)} = 13.75\, m^2/s^2$ είναι ένα σημαντικό μέρος του gH. Κάνουμε μια σειρά υπολογισμών ακόμα

$$-\frac{\Delta P^{(1)}}{\rho} = g\, H - \left[h_2^{(0)} + h_3^{(0)}\right] = 118 - 13.75 = \underline{104.25 m^2/s^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{8} f\, Re^2\right)^{(1)} = \frac{D_2^3 \rho^2}{4\mu^2}\left(-\frac{\Delta P^{(1)}/\rho}{\ell}\right) = \frac{0.0508^3 \times 1000^2}{4 \times (10^{-3})^2}\frac{104.25}{15} = \underline{2.28 \times 10^8}$$

Σχ. 11.3 $\Rightarrow$ $Re^{(1)} \cong \underline{2.2 \times 10^5}$

$$\Rightarrow \quad <v_3>^{(1)} = Re^{(1)} \frac{\mu}{\rho D_2} = 2.2 \times 10^5 \frac{10^{-3}}{1000 \times 0.0508} = \underline{4.33 m/s}$$

Αρα

$$h_2^{(1)} = \frac{1}{2} 0.34 \times 4.33^2 = 3.19\, m^2/s^2$$

$$h_3^{(1)} = \frac{1}{2} \times 4.33^2 = 9.39\, m^2/s^2$$

$$h_2^{(1)} + h_3^{(1)} = \underline{12.6 m^2/s}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-\Delta P^{(2)}}{\rho} = g\, H - \left[h_2^{(1)} - h_3^{(1)}\right] = \underline{105 m^2/s^2}$$

Το $\left(\frac{-\Delta P^{(2)}}{\rho}\right)$ είναι αρκετά πλησίον στο $\left(\frac{-\Delta P^{(1)}}{\rho}\right)$ και γι αυτό θεωρούμε ότι συγκλίναμε στο αποτέλεσμα

$$\boxed{<v_3> \cong 4.33\, m/s}$$

$$Q = \frac{\pi}{4} D_2^2 <v_3> = 8.78 \times 10^{-3}\ m^3/s = \underline{31.6 m^3/hr}$$

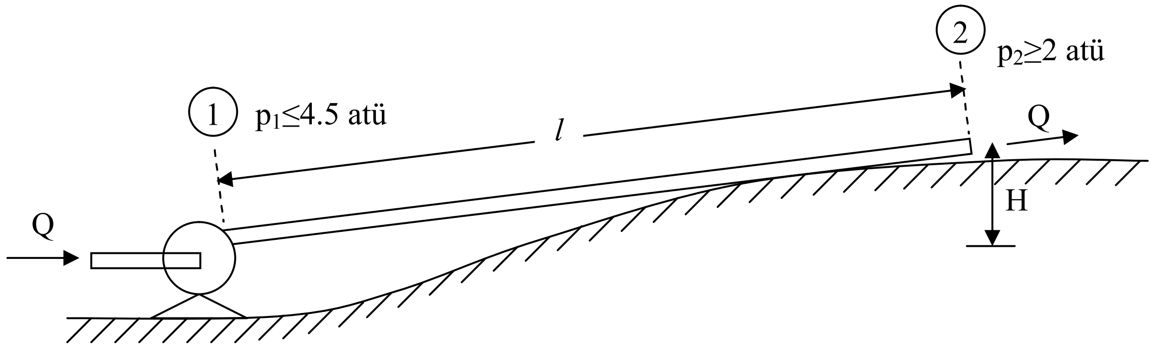
Παρατήρηση 1. Οι δύο μέθοδοι δίνουν τα ίδια αποτελέσματα.

Παρατήρηση 2. Η δεύτερη μέθοδος δίνει το αποτέλεσμα Q αμέσως αν $h_\varepsilon << h_\mu$. Αλλιώς, οι δύο μέθοδοι είναι συγκρίσιμοι με καλύτερη την πρώτη, καθόσον έχουμε μια καλή αρχική εκτίμηση για το f, δηλαδή την ασυμπτωτική τιμή του f για Re→∞.

Παράδειγμα 11στ. Ένας ψεκαστήρας για αγροκαλλιέργεια πρόκειται να τροφοδοτηθεί με νερό από μία αντλία που ευρίσκεται σε απόσταση 180m από το ψεκαστήρα και σε υψόμετρο κατά 7 μέτρα χαμηλότερο. Η αντλία στην περιοχή μέγιστης απόδοσής της παρέχει μια ογκομετρική παροχή Q = 5.64m^3/min με πίεση εξόδου που δεν υπερβαίνει 4.5atü. Για να λειτουργήσει ικανοποιητικά ο ψεκαστήρας, η πίεση στην είσοδο του ψεκαστήρα δεν πρέπει να είναι μικρότερη από 2atü.

Προσδιορίστε την πιο μικρή διάμετρο σωλήνα αλουμινίου που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να συνδεθεί η αντλία με το ψεκαστήρα.

Λύση



Σχήμα 1

Εδώ ℓ, ΔP και Q είναι γνωστά, ενώ ζητάμε τη διάμετρο D. Εχουμε

$$-\Delta p_{max} = p_{1\,max} - p_{2\,min} = 4.5 - 2.0 = 2.5\,\text{atm} = 2.5 \times 9.81 \times 10^4 \text{ Pa} = \underline{245250 \text{ Pa}}$$

Από το ισοζύγιο ενέργειας παίρνουμε

$$\left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}\alpha_1 < v_1 >^2 + g z_1\right) - \left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}\alpha_2 < v_2 >^2 + g z_2\right) = h_{o\lambda}$$

$$\overset{<v_1>=<v_2>}{\Rightarrow} \quad h_{o\lambda} = \frac{p_1 - p_2}{\rho} - g\,H \Rightarrow h_{o\lambda,max} = \frac{-\Delta p_{max}}{\rho} - g\,H$$

$$\Rightarrow \qquad h_{o\lambda,max} = \frac{245250}{1000} - 9.81 \times 7 = 245.3 - 68.7 = \underline{176.6 m^2/s^2}$$

Εξάλλου

$$h_{o\lambda} = f\,\frac{\ell}{D}\frac{< v >^2}{2} = f\,\frac{\ell}{D}\frac{1}{2}\left(\frac{4Q}{\pi D^2}\right)^2$$

$$\boxed{h_{o\lambda} = \frac{8 f\,\ell\,Q^2}{\pi^2\,D^5}}$$

Επίσης

$$Re = \frac{D < v >}{\nu} = \frac{D\dfrac{4Q}{\pi\,D^2}}{\nu} \Rightarrow Re = \frac{4Q}{\pi \nu D}$$

με
$$Q = \left(\frac{5.64}{60}\right) m^3/s = \underline{0.094 m^3/s}$$

Το D μπορεί να προσδιορισθεί με δοκιμή και σφάλμα. Ως αρχική εκτίμηση διαλέγουμε την ονομαστική διάμετρο 3 in. Σύμφωνα με το Πρόγραμμα 40 (Schedule 40) η πραγματική διάμετρος (βλ. Πίνακα 11.4) είναι 3.068in,

$$D^{(0)} = 3.068\,\text{in} \cong 0.07793\,\text{m}$$

Τότε

$$Re^{(0)} = \frac{4Q}{\pi \nu D^{(0)}} = \frac{4 \times 0.094}{\pi \times 10^{-6} \times 0.07793} = 1.54 \times 10^6$$

$$\left(\frac{e}{D}\right)^{(0)} \overset{\Sigma\chi.11.2}{=} 0.00002$$

$$f^{(0)} = f(1.54\times10^6, 0.00002) = 0.011$$

$$h_{o\lambda}^{(0)} = \frac{8f^{(0)}\ell\, Q^2}{\pi^2 D^{(0)^5}} = \frac{8\times0.011\times180\times0.094^2}{\pi^2\ 0.07793^5} = 4933.9\ m^2/s^2$$

Αφού $h_{o\lambda}^{(0)} >> h_{o\lambda,max}$ η εκλεγείσα διάμετρος $D^{(0)} = 4$ in είναι πολύ μικρή.

Κάνουμε την επόμενη εκτίμηση ως εξής. Αφού f είναι μια σχετικά αδύνατη συνάρτηση του Re και του e/D για τυρβώδη ροή σε λείους σωλήνες, έχουμε $f \propto D^{-n}$ όπου $n \cong 5$ (για Q = σταθ.). Έτσι,

$$\frac{h_{o\lambda,max}}{h_{o\lambda}^{(0)}} \cong \left(\frac{D^{(0)}}{D_{min}}\right)^5 \Rightarrow D_{min} \cong D^{(0)}\left(\frac{h_{o\lambda}^{(0)}}{h_{o\lambda,max}}\right)^{1/5}$$

$$\Rightarrow \qquad D_{min} \cong 3.068\left(\frac{4933.9}{176.6}\right)^{1/5} = \underline{5.97\ in}$$

Πίνακας 11.4 (Πηγή: Fox & McDonald "Introduction to Fluid Mechanics", 2nd ed.)

Nominal Pipe Size (in)	Inside Diameter (in)
1/8	0.269
1/4	0.364
3/8	0.493
1/2	0.622
3/4	0.824
1	1.049
1 ½	1.610
2	2.067
2 ½	2.469
3	3.068
3 ½	3.548
4	4.026
5	5.047
6	6.065
8	8.071
10	10.020
12	12.090

Διαλέγοντας την αμέσως μεγαλύτερη διαθέσιμη διάμετρο, θέτουμε

$$D^{(1)} = 6.065\,\text{in} \cong 0.15405\,\text{m} \quad \text{(6in, ονομαστική διάμετρος)}$$

Τότε

$$Re^{(1)} = \frac{4Q}{\pi\,\nu\,D^{(1)}} = \frac{4\times0.094}{\pi\times10^{-6}\times0.15405} = 7.77\times10^5$$

$$\left(\frac{e}{D}\right)^{(1)} \overset{\Sigma\chi.11.2}{\overset{\downarrow}{=}} 0.00001$$

$$f^{(1)} = f(7.77\times10^5, 0.00001) = 0.0122$$

$$\Rightarrow \qquad h_{ολ}^{(1)} = \frac{8 f^{(1)} \ell\, Q^2}{\pi^2 D^{(1)^5}} = \frac{8\times0.0122\times180\times0.094^2}{\pi^2\ 0.15405^5} = \underline{181.3 m^2/s^2}$$

Δυστυχώς, και η διάμετρος $D^{(1)} = 6\,\text{in}$ δίνει $h_{ολ}^{(1)} > h_{ολ,max}$, αν και με μικρή διαφορά. Για ασφάλεια, διαλέγουμε D = 8.071 in = 0.2050 m (8 in, ονομαστική διάμετρος), οπότε

$$Re = \frac{4\times0.094}{\pi\times10^{-6}\times0.2050} = 5.84\times10^5$$

$$\frac{e}{D} = 0.000008$$

$$f = f\,(5.84\times10^5, 0.000008) = 0.0128$$

$$h_{ολ} = \frac{8\times0.0128\times180\times0.094^2}{\pi^2\ 0.2050^5} = \underline{45.58 m^2/s^2}$$

Η εκλογή D = 8in εξασφαλίζει με μεγάλο περιθώριο ασφαλείας την καλή λειτουργία του ψεκαστήρα. Όμως, εν όψει του υψηλότερου κόστους του αγωγού με D = 8in και του γεγονότος ότι η εκλογή $D^{(1)}$ = 6in αποτυγχάνει να δώσει $h_{ολ}^{(1)} < h_{ολ,min}$ μόνο κατά λίγο, πρέπει να εξετάσουμε αν ο ψεκαστήρας θα μπορούσε να λειτουργήσει ικανοποιητικά με ελαφρώς μικρότερη πίεση εισόδου. Πράγματι, αν διαλέξουμε $D^{(1)}$=6in, τότε η πίεση p_2 γίνεται

$$p_2^{(1)} = p_1 - \rho\left(h_{ολ}^{(1)} + g\,H\right) = 4.5 - 1000\,(181.3 + 9.81\times7)\,\frac{1}{9.81\times10^4}$$

$$= (4.5 - 2.548)\ \text{atü} = 1.95\text{atü}$$

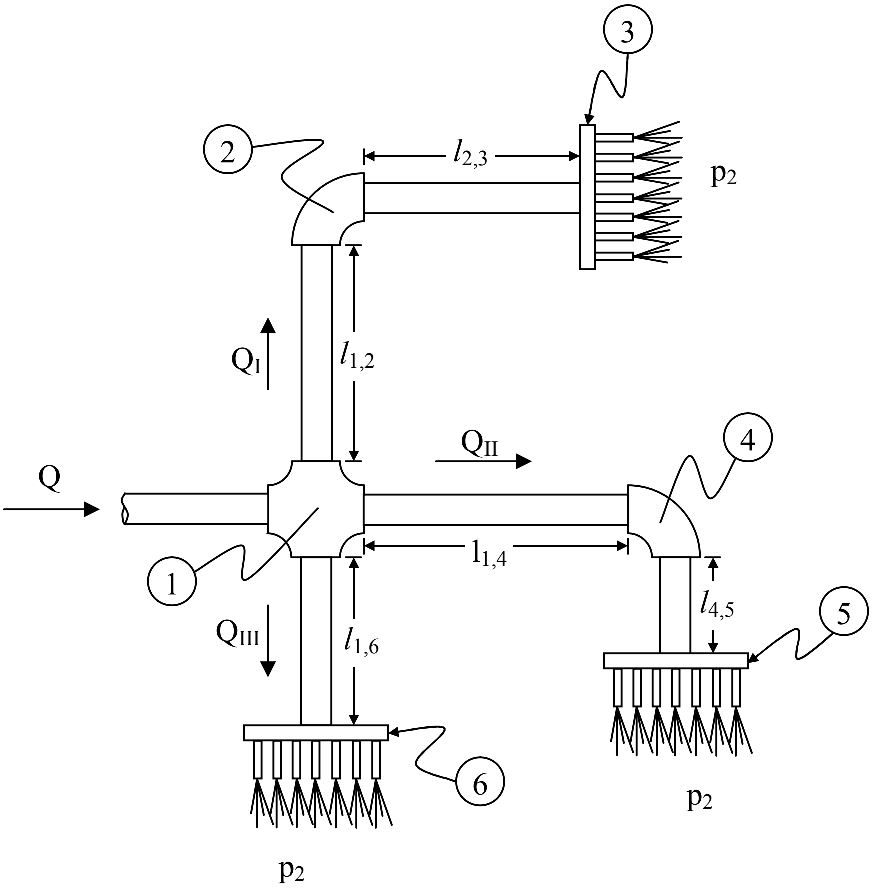
Το ερώτημα που πρέπει να εξετασθεί είναι: λειτουργεί ικανοποιητικά ο ψεκαστήρας με πίεση εισόδου 1.95atü αντί για 2.0atü; Αν όχι, D = 8in.

11.9 Δίκτυα σωληνώσεων

Στην πράξη συχνά συναντάμε σωληνώσεις με διακλαδώσεις καθώς και δίκτυα σωληνώσεων. Οι μέθοδοι που ήδη αναπτύξαμε για γραμμικές σωληνώσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν και σε αυτή την περίπτωση με την πρόσθετη περιπλοκή ότι στην περίπτωση δικτύων έχουμε να προσδιορίσουμε πολλούς αγνώστους ταυτοχρόνως. Οι εξισώσεις καταστρώνονται κατά τρόπο ανάλογο με εκείνο της αναλύσεως ηλεκτρικών δικτύων, με την παροχή να αντιστοιχεί στην ένταση του ρεύματος και την υδροστατική κεφαλή να αντιστοιχεί στο ηλεκτρικό δυναμικό. Υπάρχει όμως και μία βασική διαφορά ανάμεσα στα δύο προβλήματα. Σε ηλεκτρικά κυκλώματα η πτώση δυναμικού κατά μήκος ενός γραμμικού αγωγού είναι ανάλογη με την αντίστοιχη ένταση του ρεύματος. Έτσι, οδηγούμεθα σε συστήματα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων που λύνονται σχετικά εύκολα. Σε δίκτυα σωληνώσεων η απώλεια υδροστατικής κεφαλής κατά μήκος ενός γραμμικού αγωγού είναι μη-γραμμική συνάρτηση της αντίστοιχης παροχής. Έτσι, οδηγούμεθα σε συστήματα μη-γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων που απαιτούν χρονοβόρες λύσεις με επαναληπτικές μεθόδους. Τέτοια συστήματα απαιτούν κατά κανόνα τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Η μεθοδολογία επιλύσεως τέτοιων προβλημάτων γίνεται καλύτερα αντιληπτή μέσω παραδειγμάτων.

Παράδειγμα 11ζ.



Σχήμα 1

Υλικό σωλήνα: αλουμίνιο

D = 3.068 in (3 in, ονομαστικό)

$\cong 7.793\times10^{-2}$m

$\ell_{1,2} = 35\,\text{m}$, $\ell_{2,3} = 35\,\text{m}$

$\ell_{1,4} = 70\,\text{m}$, $\ell_{4,5} = 20\,\text{m}$

$\ell_{1,6} = 30\,\text{m}$, $\dfrac{e}{D} = 0.00002$

$Q = 5.64\,\text{m}^3/\text{min}$

$\rho = 1000\,\text{Kg}/\text{m}^3$

$\nu \cong 10^{-6}\,\text{m}^2/\text{s}$

Οριζόντιο έδαφος

Ας θεωρήσουμε το σύστημα αρδεύσεως του σχήματος, όπου τα στοιχεία ③, ⑤ και ⑥ είναι πανομοιότυποι ψεκαστήρες νερού. Η γεωμετρία του δικτύου δίνεται στο σχήμα (όχι υπό κλίμακα). Η απώλεια υδροστατικής κεφαλής σε ένα ψεκαστήρα υπό συνθήκες ομαλής λειτουργίας (δηλ. για p≥1.5atü στην είσοδο του ψεκαστήρα. Η εκτίμηση αυτή περιλαμβάνει τις απώλειες εξόδου του ψεκαστήρα.

(i) Προσδιορίστε τις τιμές των τριών παροχών, Q_I, Q_{II}, Q_{III}.

(ii) Προσδιορίστε την πίεση στο σημείο ①, p_1.

(iii) Προσδιορίστε τις πιέσεις στις εισόδους των τριών ψεκαστήρων.

Λύση

Για το απλό του υπολογισμού θα αμελήσουμε τις απώλειες υδροστατικής κεφαλής στην είσοδο κάθε κλάδου (δηλαδή στην περιοχή ①).

Ισοζύγιο μάζας

$$\boxed{Q_I + Q_{II} + Q_{III} = Q} \quad \text{(κόμβος ①)} \tag{1}$$

Ισοζύγια ενέργειας

Κλάδος I
$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}\alpha_I < v_I >^2 = \frac{p_a}{\rho} + h_{o\lambda,I} \tag{2}$$

Κλάδος II
$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}\alpha_{II} < v_{II} >^2 = \frac{p_a}{\rho} + h_{o\lambda,II} \tag{3}$$

Κλάδος III
$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}\alpha_{III} < v_{III} >^2 = \frac{p_a}{\rho} + h_{o\lambda,III} \tag{4}$$

Θέτοντας $\alpha_I \approx \alpha_{II} \approx \alpha_{III} \approx 1$ (τυρβώδης ροή) και υποκαθιστώντας τις παροχές αντί για τις ταχύτητες λαμβάνουμε:

$$\frac{(p_1 - p_\alpha)}{\rho} + \frac{8}{\pi^2 D^4} Q_I^2 = h_{o\lambda,I} \tag{5}$$

$$\frac{(p_1 - p_\alpha)}{\rho} + \frac{8}{\pi^2 D^4} Q_{II}^2 = h_{o\lambda,II} \tag{6}$$

$$\frac{(p_1 - p_\alpha)}{\rho} + \frac{8}{\pi^2 D^4} Q_{III}^2 = h_{o\lambda,III} \tag{7}$$

Εξάλλου, έχουμε

$$h_{o\lambda,I} = \left[f_I \frac{(\ell_{1,2} + \ell_{2,3})}{D} + f_I \frac{\lambda_2}{D} + K_\psi \right] \frac{< v_I >^2}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad h_{o\lambda,I} = \frac{8}{\pi^2 D^4} \left[f_I \frac{1}{D} (\ell_{1,2} + \lambda_2 + \ell_{2,3}) + K_\psi \right] Q_I^2 \tag{8}$$

Ομοίως,

$$h_{o\lambda,II} = \frac{8}{\pi^2 D^4} \left[f_{II} \frac{1}{D} (\ell_{1,4} + \lambda_4 + \ell_{4,5}) + K_\psi \right] Q_{II}^2 \tag{9}$$

$$h_{o\lambda,III} = \frac{8}{\pi^2 D^4} \left[f_{III} \frac{1}{D} \ell_{1,6} + K_\psi \right] Q_{III}^2 \tag{10}$$

Συνδυάζοντας τις Εξ. (5)-(10) παίρνουμε

$$\boxed{\frac{8}{\pi^2 D^4} \left[f_I \frac{1}{D} (\ell_{1,2} + \lambda_2 + \ell_{2,3}) + K_\psi - 1 \right] Q_I^2 = \frac{(p_1 - p_a)}{\rho}} \tag{11}$$

$$\boxed{\frac{8}{\pi^2 D^4} \left[f_{II} \frac{1}{D} (\ell_{1,4} + \lambda_4 + \ell_{4,5}) + K_\psi - 1 \right] Q_{II}^2 = \frac{(p_1 - p_a)}{\rho}} \tag{12}$$

$$\boxed{\frac{8}{\pi^2 D^4}\left[f_{III}\frac{1}{D}\ell_{1,6}+K_\psi-1\right]Q_{III}^2=\frac{(p_1-p_a)}{\rho}} \qquad (13)$$

όπου

$$\boxed{f_I = f\left(Re_I,\frac{e}{D}\right)} \quad \mu\varepsilon \quad \boxed{Re_I=\frac{D<v_I>}{\nu}=\frac{4Q_I}{\pi\,\nu\,D}} \qquad (14)$$

Οι Εξ. (1), (11), (12) και (13) είναι ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους: Q_I, Q_{II}, Q_{III} και p_1. Το σύστημα αυτό μπορεί να λυθεί με πολλές μεθόδους. Κατωτέρω χρησιμοποιούμε μια απλή μέθοδο επαναληπτικής φύσεως.

Αρχική εκτίμηση

$$Q_I^{(0)}=Q_{II}^{(0)}=Q_{III}^{(0)}\overset{(i)}{=}\frac{1}{3}Q=1.88\ m^3/\min=\underline{3.133\times10^{-2}\,m^3/s}$$

$$\Rightarrow \qquad Re_I^{(0)}=Re_{II}^{(0)}=Re_{III}^{(0)}=\frac{4Q_I^{(0)}}{\pi\ \nu\ D}=\frac{4\times3.133\times10^{-2}}{\pi\times10^{-6}\times7.793\times10^{-2}}=\underline{5.12\times10^5}$$

$$\Rightarrow \qquad f_I^{(0)}=f_{II}^{(0)}=f_{III}^{(0)}=f(5.12\times10^5,0.00002)\overset{\substack{\text{Moody}\\ \downarrow}}{=}\underline{0.013}$$

Με αυτές τις εκτιμήσεις για τους συντελεστές τριβής και με $\lambda_2=\lambda_4=30\,D=2.34m$ (από πίνακες), οι Εξ. (11)-(13) δίνουν

$$\begin{cases}\dfrac{8}{\pi^2\times(7.793\times10^{-2})^4}\left[\dfrac{0.013(35+2.34+35)}{(7.793\times10^{-2})}+9.5-1\right]Q_I^{(1)^2}=\dfrac{(p_1-p_a)}{\rho}\\[3ex]\dfrac{8}{\pi^2\times(7.793\times10^{-2})^4}\left[\dfrac{0.013(70+2.34+20)}{(7.793\times10^{-2})}+9.5-1\right]Q_{II}^{(1)^2}=\dfrac{(p_1-p_a)}{\rho}\\[3ex]\dfrac{8}{\pi^2\times(7.793\times10^{-2})^4}\left[\dfrac{0.013\times30}{(7.793\times10^{-2})}+9.5-1\right]Q_{III}^{(1)^2}=\dfrac{(p_1-p_a)}{\rho}\end{cases}$$

ή

$$\begin{cases}4.520\times10^5\ Q_I^{(1)^2}=\dfrac{(p_1-p_a)}{\rho}\\[3ex]5.253\times10^5\ Q_{II}^{(1)^2}=\dfrac{(p_1-p_a)}{\rho} \qquad (\mu ονάδες\ S.I.)\\[3ex]2.968\times10^5\ Q_{III}^{(1)^2}=\dfrac{(p_1-p_a)}{\rho}\end{cases}$$

ή

$$\begin{cases} 672.3\,Q_{I}^{(1)} = \sqrt{\dfrac{(p_1 - p_a)}{\rho}} \\[2ex] 724.8\,Q_{II}^{(1)} = \sqrt{\dfrac{(p_1 - p_a)}{\rho}} \qquad\qquad (\text{μονάδες S.I.}) \\[2ex] 544.8\,Q_{III}^{(1)} = \sqrt{\dfrac{(p_1 - p_a)}{\rho}} \end{cases}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις τελευταίες τρεις εξισώσεις παίρνουμε

$$\left.\begin{aligned} \frac{Q_{II}^{(1)}}{Q_{I}^{(1)}} &= 0.928 \\[2ex] \frac{Q_{III}^{(1)}}{Q_{I}^{(1)}} &= 1.234 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{Q_{I}^{(1)} + Q_{II}^{(1)} + Q_{III}^{(1)}}{Q_{I}^{(1)}} = 1 + 0.928 + 1.234 = 3.162$$

Χρησιμοποιώντας την (1) παίρνουμε

$$Q_{I}^{(1)} = \frac{Q}{3.162} = \frac{0.094}{3.162} = \underline{2.973 \times 10^{-2}\,m^3/s}$$

Έτσι,

$$Q_{II}^{(1)} = 0.928\ Q_{I}^{(1)} = 2.759 \times 10^{-2}\,m^3/s$$

$$Q_{III}^{(1)} = 1.234\ Q_{I}^{(1)} = 3.668 \times 10^{-2}\,m^3/s$$

Μπορούμε τώρα να επανακυκλώσουμε τον υπολογισμό

$$Re_{I}^{(1)} = \frac{4Q_{I}^{(1)}}{\pi\nu D} = \ldots = 4.86 \times 10^5$$

$$Re_{II}^{(1)} = \frac{4Q_{II}^{(1)}}{\pi\nu D} = \ldots = 4.51 \times 10^5$$

$$Re_{III}^{(1)} = \frac{4Q_{III}^{(1)}}{\pi\nu D} = \ldots = 5.99 \times 10^5$$

$$f_{I}^{(1)} = f\,(4.86 \times 10^5, 0.00002) \cong 0.0137$$

$$f_{II}^{(1)} = f\,(4.51 \times 10^5, 0.00002) \cong 0.0138$$

$$f_{III}^{(1)} = f\,(5.99 \times 10^5, 0.00002) \cong 0.0131$$

Με αυτές τις τιμές οι Εξ. (11)-(13) δίνουν

$$4.663 \times 10^5 Q_{I}^{(2)^2} = \frac{(p_1 - p_a)}{\rho} \tag{15}$$

$$5.461 \times 10^5 Q_{II}^{(2)^2} = \frac{(p_1 - p_a)}{\rho} \tag{16}$$

$$2.976 \times 10^5 Q_{III}^{(2)^2} = \frac{(p_1 - p_a)}{\rho} \tag{17}$$

ή
$$\begin{cases} 682.9\, Q_I^{(2)} = \sqrt{\dfrac{(p_1 - p_a)}{\rho}} \\ 739.0\, Q_{II}^{(2)} = \sqrt{\dfrac{(p_1 - p_a)}{\rho}} \\ 545.6\, Q_{III}^{(2)} = \sqrt{\dfrac{(p_1 - p_a)}{\rho}} \end{cases}$$

Διαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\frac{Q_{II}^{(2)}}{Q_I^{(2)}} = 0.924 \qquad \frac{Q_{III}^{(2)}}{Q_I^{(2)}} = 1.252$$

Αρα,
$$\frac{Q_I^{(2)} + Q_{II}^{(2)} + Q_{III}^{(2)}}{Q_I^{(2)}} = 1 + 0.924 + 1.252 = 3.176$$

$$Q_I^{(2)} = \frac{Q}{3.176} = \underline{2.960 \times 10^{-2}\, m^3/s = 1.78 m^3/min}$$

και
$$Q_{II}^{(2)} = 0.924\, Q_I^{(2)} = \underline{2.735 \times 10^{-2}\, m^3/s = 1.64 m^3/min}$$

$$Q_{III}^{(2)} = 1.252\, Q_I^{(2)} = \underline{3.706 \times 10^{-2}\, m^3/s = 2.22 m^3/min}$$

Είναι φανερό ότι μια ακόμη ανακύκλωση δεν θα επιφέρει σημαντικές αλλαγές. Έτσι

$$\boxed{Q_I = 1.78\, m^3/min} \qquad (18)$$

$$\boxed{Q_{II} = 1.64\, m^3/min} \qquad (19)$$

$$\boxed{Q_{III} = 2.22\, m^3/min} \qquad (20)$$

(ii) Η πίεση p_1 μπορεί να υπολογισθεί από οιαδήποτε των Εξ. (15)-(17) με τις τιμές των παροχών από τις Εξ. (18)-(20). Έτσι

$$\begin{cases} p_1 - p_a = 4.663 \times 10^5 \times 1000 \times (2.960 \times 10^{-2})^2 = 408.6\, kPa = 4.16\, atm \\ p_1 - p_a = 5.461 \times 10^5 \times 1000 \times (2.73 \times 10^{-2})^2 = 408.5\, kPa = 4.16\, atm \\ p_1 - p_a = 2.976 \times 10^5 \times 1000 \times (3.706 \times 10^{-2})^2 = 408.7\, kPa = 4.17\, atm \end{cases}$$

ή
$$\boxed{p_1 = 4.16\, \text{atü}} \qquad (21)$$

Η ουσιαστική συμφωνία των τριών αποτελεσμάτων είναι ένδειξη ότι έχουμε σύγκλιση.

(iii) Η πίεση στην είσοδο του ψεκαστήρα ③, p_{3-}, προσδιορίζεται εύκολα ως εξής. Από το ισοζύγιο ενέργειας έχουμε:

$$\frac{p_{3-}}{\rho} + \frac{1}{2} < v_I >^2 = \frac{p_a}{\rho} + h_\psi = \frac{p_a}{\rho} + K_\psi \frac{1}{2} < v_I >^2 \qquad (22)$$

ή

$$p_{3-} - p_a = \rho\,(K_\psi - 1)\,\frac{1}{2} < v_I >^2 = (K_\psi - 1)\,\frac{8\rho}{\pi^2 D^4}\,Q_I^2 \tag{23}$$

Αρα,

$$p_{3-} - p_a = (9.5-1)\,\frac{8\times 1000}{\pi^2 (7.793\times 10^{-2})^4}\,(2.960\times 10^{-2})^2\,\text{Pa}$$

$$= 163.7\ \text{kPa} = 1.67\ \text{atm} \Rightarrow \boxed{p_{3-}=1.67\ \text{atü}}$$

Ομοίως παίρνουμε

$$p_{5-} - p_a = (K_\psi - 1)\,\frac{8\rho}{\pi^2 D^4}\,Q_{II}^2 = (9.5-1)\,\frac{8\times 1000}{\pi^2 (7.793\times 10^{-2})^4}\,(2.735\times 10^{-2})^2\ \text{Pa}$$

$$= 139.7\ \text{kPa} = 1.42\ \text{atm} \Rightarrow \boxed{p_{5-}=1.42\ \text{atü}}$$

$$p_{6-} - p_a = (K_\psi - 1)\,\frac{8\rho}{\pi^2 D^4}\,Q_{III}^2 = (9.5-1)\,\frac{8\times 1000}{\pi^2 (7.793\times 10^{-2})^4}\,(3.706\times 10^{-2})^2\ \text{Pa}$$

$$= 256.6\ \text{kPa} = 2.62\ \text{atm} \Rightarrow \boxed{p_{6-}=2.62\ \text{atü}}$$

Παρατήρηση 1. Ως τελική επιβεβαίωση της ορθότητας των αποτελεσμάτων μπορούμε να υπολογίσουμε, π.χ., την p_{6-} και με άλλο τρόπο. Από ισοζύγιο ενέργειας παίρνουμε

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} < v_{III} >^2 = \frac{p_{3-}}{\rho} + \frac{1}{2} < v_{III} >^2 + h_{1,6}$$

με
$$h_{1,6} = f_{III}\,\frac{\ell_{1,6}}{D}\,\frac{< v_{III} >^2}{2} = f_{III}\,\frac{\ell_{1,6}}{D}\,\frac{8Q_{III}^2}{\pi^2 D^4} = \frac{8 f_{III}\ell_{1,6}}{\pi^2 D^5}\,Q_{III}^2$$

$\Rightarrow$
$$p_{3-} = p_1 - \rho h_{1,6} = p_1 - \frac{8\rho f_{III}\ell_{1,6}}{\pi^2 D^5}\,Q_{III}^2$$

$$= p_1 - \frac{8\times 1000\times 0.0131\times 30}{\pi^2 (7.793\times 10^{-2})^5}\,(3.706\times 10^{-2})^2\,\text{Pa}$$

$$= p_1 - 152.2\ \text{kPa} = p_1 - 1.55\ \text{atm}$$

$$= 4.16\ \text{atü} - 1.55\ \text{atm} = \underline{2.61\ \text{atü}}$$

Η μικρή διαφωνία οφείλεται στο προσεγγιστικό της λύσεως.

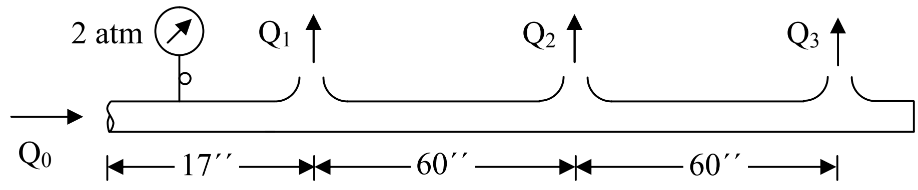
Παρατήρηση 2. Βλέπουμε ότι $p_{5-} = 1.42\text{atü} < 1.5\text{atü}$. Ενδέχεται λοιπόν ο ψεκαστήρας 5 να μην λειτουργεί ικανοποιητικά.

Αν υποτεθεί ότι αυτό πράγματι συμβαίνει, τότε πρέπει να κάνουμε κάποια τροποποίηση στο σύστημα.

Ο σπουδαστής θα πρέπει να διερευνήσει ποσοτικά τις πιο εύλογες εναλλακτικές λύσεις και να συζητήσει τα πλεονεκτήματα και μειονέκτημα εκάστης.

11.10 Ασκήσεις

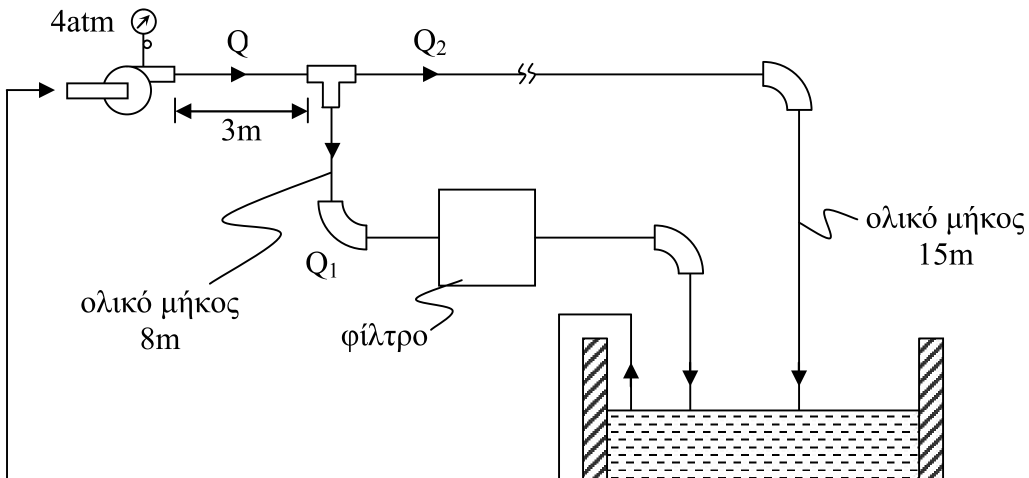
11.1 Ένα σύστημα ψεκασμού έχει τη μορφή του σχήματος. Για το ψεκασμό χρησιμοποιούμε νερό θερμοκρασίας 20 C. Η επιφάνεια της διατομής κάθε στομίου εξόδου είναι $0.25 in^2$, ενώ ο σωλήνας έχει εσωτερική διάμετρο 1in και είναι κατασκευασμένος από γαλβανισμένο σίδηρο. Θέλουμε να υπολογίσουμε την ογκομετρική παροχή μέσω κάθε στομίου.



Σχήμα 1

11.2 Μια υδραυλική πρέσσα παίρνει την ισχύ της από μια αντλία πιέσεως η οποία ευρίσκεται σε απόσταση 50m. Η αντλία παρέχει νερό με πίεση 3000psig και ογκομετρική παροχή 30ℓ/min. Για τη σύνδεση θα χρησιμοποιήσουμε χαλύβδινο σωλήνα. Ποιά είναι η ελάχιστη διάμετρος σωλήνα που μπορεί να χρησιμοποιηθεί, δεδομένου ότι η υδραυλική πρέσα απαιτεί πίεση 2800psig και παροχή 30ℓ/min για να λειτουργήσει ικανοποιητικά;

11.3 Το νερό μιας κολυμβητικής δεξαμενής διηθείται εν μέρει μέσω ενός φίλτρου, όπως στο σχήμα.



Σχήμα 2

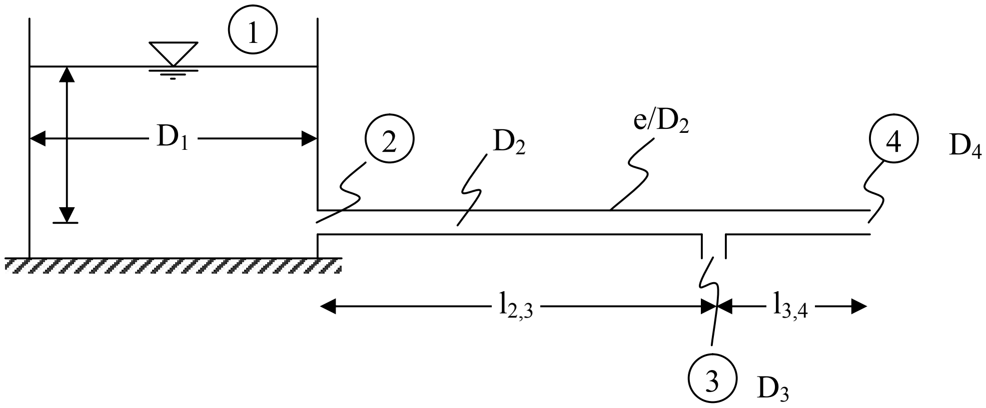
Η αντλία παρέχει ογκομετρική παροχή Q = 120ℓ/min νερού θερμοκρασίας 25 C υπό πίεση 4atm. Οι σωληνώσεις είναι από γαλβανισμένο σίδηρο ($e/D \approx 0.009$). Η πτώση πιέσεως μέσω του φίλτρου δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση

$$(-\Delta P)_{\varphi\acute{\iota}\lambda\tau\rho o} = 0.05 Q_1 \qquad (\Delta P[=]\text{atm}, \ Q_1[=]\ell/\text{min})$$

Ποιές είναι οι τιμές των Q_1 και Q_2;

11.4 Πετρέλαιο ειδικού βάρους 0.855, θερμοκρασίας 15 C και ιξώδους 9cp ρέει μέσα σε υπόγειο σωλήνα. Δύο σταθμοί αντλιών ευρίσκονται σε απόσταση 12km και έχουν το ίδιο σχεδόν υψόμετρο. Η πτώση πιέσεως μεταξύ των δύο σταθμών είναι 15atm. Ο σωλήνας έχει εσωτερική διάμετρο 24in. Μολονότι ο σωλήνας είναι κατασκευασμένος από κοινό χάλυβα, γήρανση και διάβρωση έχουν αυξήσει την τραχύτητά του σε εκείνη περίπου του γαλβανισμένου σιδήρου. Ποιά είναι η ογκομετρική παροχή σε m^3/s; Ποιά είναι η απαιτούμενη ισχύς σε kW;

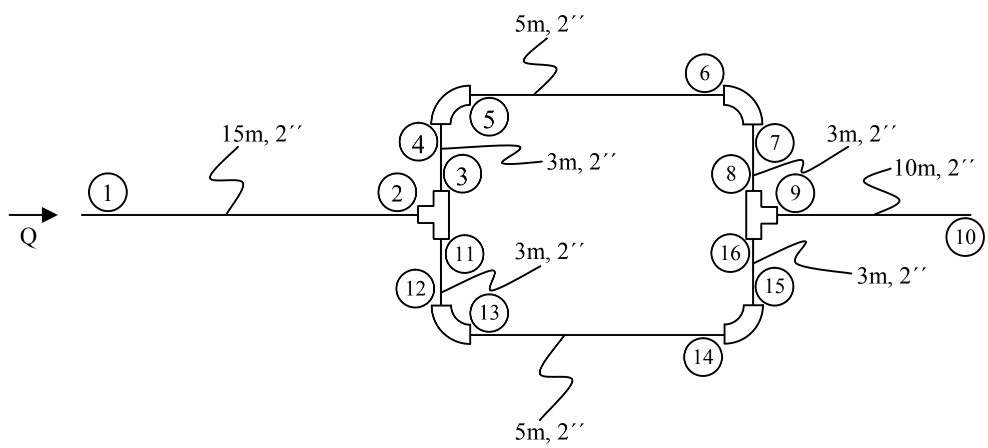
11.5 Θεωρήστε τη δεξαμενή του σχήματος με τη σωλήνωση κοντά στον πυθμένα. Η σωλήνωση είναι από κοινό χάλυβα. Η δεξαμενή είναι γεμάτη νερό θερμοκρασίας 20 C. Ποιές είναι οι παροχές από τα δύο στόμια ③ και ④;



Σχήμα 1

H = 9m	$D_1 = 10m$	$D_2 = 2''$	$\frac{e}{D_2} = 0.01$
$\ell_{2,3} = 10\,m$	$D_3 = 1''$,	$\ell_{3,4} = 3\,m$,	$D_4 = 2''$

11.6 Θεωρήστε τη σωλήνωση του σχήματος.



Σχήμα 1

Το υλικό του σωλήνα είναι κοινός χάλυβας ($e/D \cong 0.01$).

(i) Πόση υδροστατική κεφαλή και πόση ισχύ χρειαζόμαστε για να κινήσουμε νερό θερμοκρασίας 20 C μέσω της σωληνώσεως με παροχή $Q = 36.5 m^3/hr$;

(ii) Με την ίδια υδροστατική κεφαλή, ποιά θα είναι η τιμή του Q αν το τμήμα ③-⑤ αντικατασταθεί με σωλήνα διαμέτρου 1″ ;