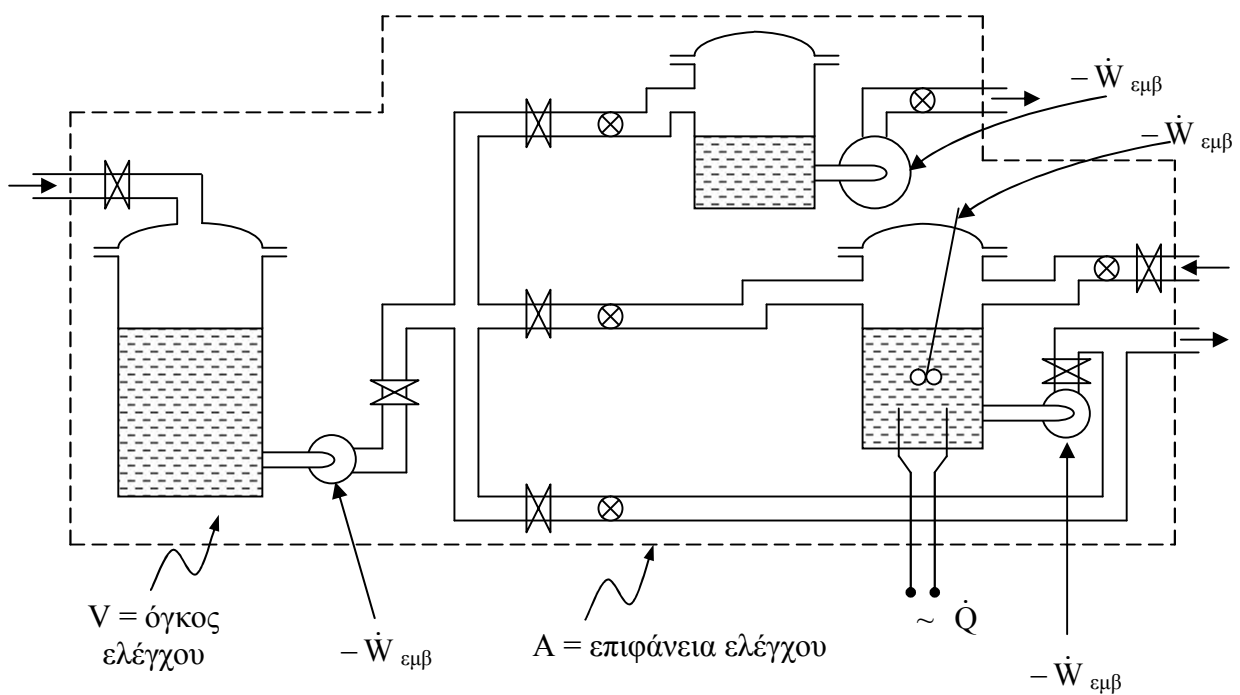


## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

### ΡΟΗ ΣΕ ΣΩΛΗΝΩΣΕΙΣ

Οι σωληνώσεις είναι ευρύτατα διαδεδομένες σε βιομηχανικές εγκαταστάσεις και αποτελούν αντικείμενο μελέτης του μηχανικού. Το ίδιο ισχύει για τις αντλίες (συσκευές για τη διακίνηση των ρευστών). Κατωτέρω δίνεται υπό τη μορφή σκίτσου ένα απλό παράδειγμα δικτύου σωληνώσεων δεξαμενών και αντλιών.

#### 11.1 Παράδειγμα



Σχήμα 11.1

Βάση για την επίλυση {
 

- Μακροσκοπικό Ισοζύγιο Μάζας
- Μακροσκοπικό Ισοζύγιο Ορμής
- Μακροσκοπικό Ισοζύγιο Ενέργειας

### 11.2 Μακροσκοπικό ισοζύγιο μάζας

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \, dV + \iint_A \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA = 0 \quad (11.1)$$

$\rho$  = πυκνότητα,  $\mathbf{v}$  = ταχύτητα,  $\hat{\mathbf{n}}$  = ορθομοναδιαίο άνωσμα.

### 11.3 Μακροσκοπικό ισοζύγιο γραμμικής ορμής

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \mathbf{v} \rho \, dV + \iint_A \mathbf{v} \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA = \mathbf{F}_\Sigma + \mathbf{F}_E = \mathbf{F} \quad (11.2)$$

$\mathbf{F}_\Sigma$  = σωματική δύναμη επί του όγκου ελέγχου

$\mathbf{F}_E$  = συνισταμένη των επιφανειακών δυνάμεων επί του όγκου ελέγχου

$\mathbf{F}$  = συνισταμένη όλων των δυνάμεων επί του όγκου ελέγχου.

### 11.4 Μακροσκοπικό ισοζύγιο ενέργειας

Έχουμε

$$\left( \frac{dN}{dt} \right)_{\text{συστ}} = \frac{d}{dt} \iiint_V \eta \rho \, dV + \iint_A \eta \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA \quad (11.3)$$

(Ειδική μορφή θεωρήματος μεταφοράς του Reynolds)

Θέτοντας

$$N = E \quad \eta = e \quad (11.4)$$

όπου

$$E = U + KE + \Delta E = \text{ολική ενέργεια του συστήματος} \quad (11.5)$$

$$e = u + \frac{1}{2} v^2 + gz = \text{ειδική ολική ενέργεια (=E α.μ.μ.)} \quad (11.6)$$

$$u = \text{εσωτερική ενέργεια α.μ.μ.} \quad (11.7)$$

$$\frac{1}{2} v^2 = \text{κινητική ενέργεια α.μ.μ.} \quad (v = |\mathbf{v}|) \quad (11.8)$$

$$gz = \text{δυναμική ενέργεια α.μ.μ.} \quad (11.9)$$

λαμβάνουμε

$$\left( \frac{dE}{dt} \right)_{\text{συστ}} = \frac{d}{dt} \iiint_V e \rho \, dV + \iint_A e \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA \quad (11.10)$$

Όμως, ο πρώτος θερμοδυναμικός νόμος μας δίνει

$$\left( \frac{dE}{dt} \right)_{\text{συστ}} = (\dot{Q} - \dot{W})_{\text{συστ}} \quad (11.11)$$

$$\dot{Q} = \text{ρυθμός παροχής θερμότητας προς το σύστημα από το περιβάλλον} \quad (11.12)$$

$$\dot{W} = \text{ρυθμός παραγωγής μηχανικού έργου από το σύστημα προς το περιβάλλον} \quad (11.13)$$

Τέλος,

$$(\dot{Q} - \dot{W})_{\text{συστ}} = (\dot{Q} - \dot{W})_{\text{όγκος ελέγχου}} \quad (11.14)$$

(βλ. Κεφ. 4).

Τώρα, οι Εξ. (11.10), (11.11) & (11.14) δίνουν

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{d}{dt} \iiint_V \epsilon \rho dV + \iint_A \epsilon \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \quad (11.15)$$

Συνήθως, τον ρυθμό παραγωγής μηχανικού έργου  $\dot{W}$  επιμερίζουμε ως εξής

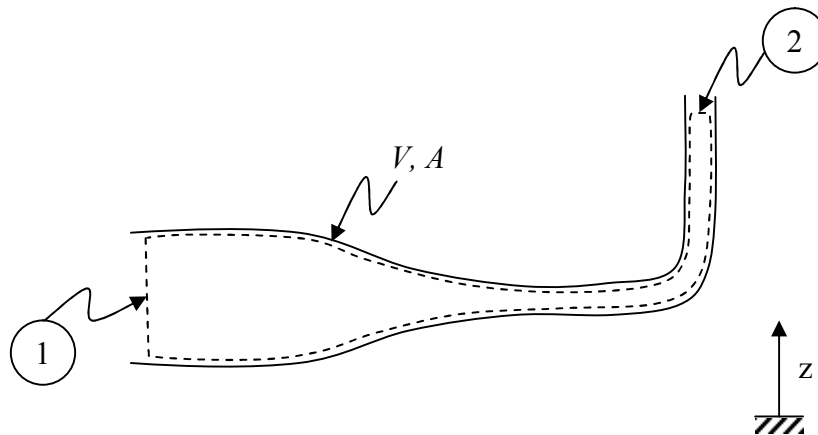
$$\dot{W} = \dot{W}_{\epsilon\mu\beta} + \dot{W}_{p+\mu} + \dot{W}_{\acute{\alpha}\lambda\lambda\alpha} \quad (11.16)$$

$$\dot{W}_{\epsilon\mu\beta} = \text{ρυθμός παραγωγής μηχανικού έργου μέσω εμβόλου (ή άξονα)} \quad (11.17)$$

$$\begin{aligned} \dot{W}_{p+\mu} &= - \iint_A \mathbf{t}_{(n)} \cdot \mathbf{v} dA = - \iint_A (\tilde{\boldsymbol{\pi}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{v} dA = - \iint_A \mathbf{v} \cdot (\tilde{\boldsymbol{\pi}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dA \\ &= \text{ρυθμός παραγωγής μηχανικού έργου επάνω στην επιφάνεια ελέγχου από} \\ &\quad \text{το άνυσμα της τάσεως } \mathbf{t}_{(n)} \end{aligned} \quad (11.18)$$

$$-\dot{W}_{\acute{\alpha}\lambda\lambda\alpha} = \text{παροχή ηλεκτρικής ενέργειας, απορρόφηση ακτινοβολίας κλπ} \quad (11.19)$$

### 11.5 Εφαρμογή του μακροσκοπικού ισοζυγίου ενέργειας σε σωληνώσεις



Σχήμα 11.2

Οι Εξ. (11.15) & (11.16) μας δίνουν

$$\dot{Q} - \dot{W}_{\epsilon\mu\beta} - \dot{W}_{p+\mu} - \dot{W}_{\acute{\alpha}\lambda\lambda\alpha} = \frac{d}{dt} \iiint_V \epsilon \rho dV + \iint_A \epsilon \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \quad (11.20)$$

Εδώ

$$\dot{W}_{\epsilon\mu\beta} = 0 \quad \dot{W}_{\acute{\alpha}\lambda\lambda\alpha} = 0 \quad (11.21)$$

$$\begin{aligned} \dot{W}_{p+\mu} &\stackrel{(18)}{=} - \iint_A \mathbf{v} \cdot (\tilde{\boldsymbol{\pi}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dA = - \iint_A \mathbf{v} \cdot (\tilde{\boldsymbol{\tau}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dA + \iint_A \mathbf{v} \cdot (p\tilde{\boldsymbol{\delta}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dA \\ &= - \iint_A \mathbf{v} \cdot (\tilde{\boldsymbol{\tau}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dA + \iint_A p \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \end{aligned} \quad (11.22)$$

Αν ο όγκος ελέγχου εκλεγεί όπως στο σχήμα, δηλαδή παράλληλος στα τοιχώματα κατά μήκος του σωλήνα και κάθετος στη ροή στις εισόδους και εξόδους, τότε

$$\text{στα τοιχώματα} \quad \mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{v} \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0,$$

$$\text{στις εισόδους \& εξόδους} \quad \mathbf{v} = v\hat{\mathbf{n}} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v} \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \pm v \underbrace{(\hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}} \cdot \hat{\mathbf{n}})}_{\substack{\text{κάθετη ιξώδης} \\ \text{τάση, } \tau_{nn}}} = \pm v\tau_{nn} \ll O(\rho v)$$

$$\Rightarrow \dot{W}_{p+\mu} \approx \iint_A \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \quad (11.23)$$

( $\tau_{nn} = 0$  για στρωτή, πλήρως ανεπτυγμένη ροή)

Οι Εξ. (11.20) & (11.23) μας δίνουν

$$\dot{Q} - \iint_A \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \frac{d}{dt} \iiint_V e \rho dV + \iint_A e \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA$$

ή

$$\boxed{\dot{Q} = \frac{d}{dt} \iiint_V e \rho dV + \iint_A \left( e + \frac{p}{\rho} \right) \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA} \quad (11.24)$$

Υποθέσεις που έχουν γίνει μέχρι στιγμής:

1)  $\dot{W}_{\varepsilon\mu\beta} = 0$

2)  $W_{\tau} = \iint_A (\mathbf{v} \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \cong 0$  (αμελητέος ρυθμός παραγωγής μηχ. έργου στην επιφάνεια ελέγχου από ιξώδεις τάσεις)

3) Ασυμπιεστη ροή

4)  $\dot{W}_{\alpha\lambda\lambda\alpha} = 0$

5)  $|\tau_{nn}| \ll p$

Επιπλέον υποθέτουμε τώρα:

6) Μόνιμη ροή

7) Ομοιόμορφες  $u$  και  $p$  στις διατομές 1 και 2

Προχωρούμε γράφοντας την Εξ. (11.24) ως εξής,

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \iint_A \left( e + \frac{p}{\rho} \right) \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \iint_A \left( u + \frac{1}{2}v^2 + gz + \frac{p}{\rho} \right) \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \\ &= \iint_{A_1} \left( u + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2}v^2 \right) \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA + \iint_{A_2} \left( u + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2}v^2 \right) \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \\ &= \left( u_1 + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 \right) \iint_{A_1} \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA + \iint_{A_1} \left( \frac{1}{2}v^2 \right) \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \\ &\quad + \left( u_2 + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 \right) \iint_{A_2} \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA + \iint_{A_2} \left( \frac{1}{2}v^2 \right) \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \\ &= -\dot{m} \left( u_1 + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 \right) + \dot{m} \left( u_2 + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 \right) - \iint_{A_1} \frac{1}{2}v_1^2 \rho v_1 dA + \iint_{A_2} \frac{1}{2}v_2^2 \rho v_2 dA \end{aligned}$$

ή

$$\dot{Q} = \dot{m}(u_2 - u_1) + \dot{m} \left( \frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho} \right) + \dot{m}g(z_2 - z_1) + \iint_{A_2} \frac{1}{2} \rho v_2^3 dA - \iint_{A_1} \frac{1}{2} \rho v_1^3 dA \quad (11.25)$$

Η Εξ. (11.25) ισχύει για στρωτές καθώς και τυρβώδεις ροές. Εν γένει η  $v$  δεν είναι ομοιόμορφη σε μια διατομή. Συνήθως χρησιμοποιούμε τον εξής ορισμό,

$$\alpha = \frac{\iint_A \frac{1}{2} v^2 \rho v dA}{\iint_A \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 \rho v dA} = \text{συντελεστής παροχής κινητικής ενέργειας} \quad (11.26)$$

$$\Rightarrow \iint_A \frac{1}{2} v^2 \rho v dA = \alpha \dot{m} \frac{\langle v \rangle^2}{2} \quad (11.27)$$

Υιοθετώντας αυτόν τον ορισμό, η Εξ. (11.25) γίνεται

$$\dot{Q} = \dot{m}(u_2 - u_1) + \dot{m} \left( \frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho} \right) + \dot{m}g(z_2 - z_1) + \dot{m} \left( \frac{1}{2} \alpha_2 \langle v_2 \rangle^2 - \frac{1}{2} \alpha_1 \langle v_1 \rangle^2 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{Q}}{\dot{m}} = (u_2 - u_1) + \left( \frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho} \right) + g(z_2 - z_1) + \frac{1}{2} (\alpha_2 \langle v_2 \rangle^2 - \alpha_1 \langle v_1 \rangle^2) \quad (11.28)$$

$$\text{ή} \quad \left[ \left( \frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} \alpha_1 \langle v_1 \rangle^2 + gz_1 \right) \right] = \left[ \left( \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} \alpha_2 \langle v_2 \rangle^2 + gz_2 \right) \right] + h_{ολ} \quad (11.29)$$

όπου

$$\left( \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \alpha \langle v \rangle^2 + gz \right) = \left\{ \begin{array}{l} \text{ρυθμός παροχής μηχανικής ενέργειας α.μ.μ.} \\ \text{σε μια διατομή του σωλήνα} \end{array} \right\}$$

και

$$h_{ολ} \equiv (u_2 - u_1) - \frac{\dot{Q}}{\dot{m}} \quad (11.30)$$

$h_{ολ}$  = ολική απώλεια υδροστατικής κεφαλής (total head loss) [=](L/t)<sup>2</sup>

$u_2 - u_1$  = αύξηση της εσωτερικής ενέργειας του ρευστού (δηλ. θέρμανση του ρευστού, εν γένει ανεπιθύμητη)

$-\frac{\dot{Q}}{\dot{m}}$  = απώλεια θερμικής ενέργειας στο περιβάλλον

Βλέπουμε λοιπόν ότι η  $h_{ολ}$  είναι η αναντίστροφη μετατροπή μηχανικής ενέργειας σε θερμική ενέργεια ανά μονάδα μάζας. Ένα μέρος αυτής της θερμότητας καταναλίσκεται για να υψώσει τη θερμοκρασία του ρευστού ( $u_2 - u_1$ ) και το υπόλοιπο εκλύεται στο περιβάλλον ( $-\dot{Q}/\dot{m}$ ).

Η αναντίστροφη μετατροπή μηχανικής ενέργειας σε θερμική οφείλεται σε ιξώδεις τριβές μέσα στο ρέον ρευστό. Για ιδανικά ρευστά ( $\mu = 0$ ,  $\rho = \text{σταθ.}$ ) έχουμε

$$h_{ολ} = 0 \quad (\text{ιδανικό ρευστό})$$

$$\Rightarrow \frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} \alpha_1 \langle v_1 \rangle^2 + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} \alpha_2 \langle v_2 \rangle^2 + gz_2 = \text{σταθ.}$$

Εξίσωση του Bernoulli  $\mu = 0, \rho = \text{σταθ.}$

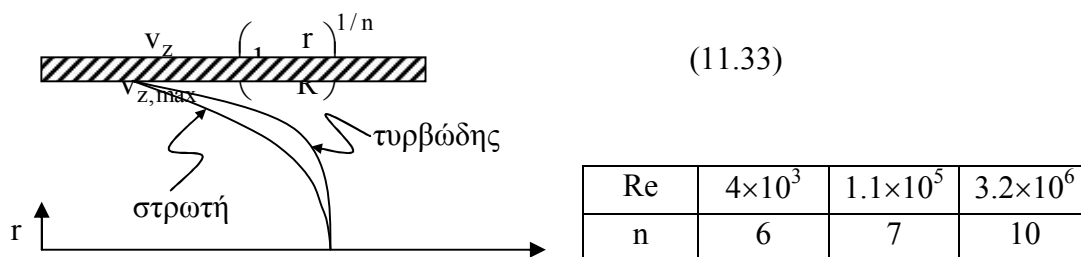
(11.31)

**Συντελεστής Παροχής Κινητικής Ενέργειας,  $\alpha$**   
**Στρωτή ροή**

$$\Rightarrow \alpha = 2 \quad \text{καθόσον} \quad v_z / \langle v_z \rangle = 2 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$$
(11.32)

**Τυρβώδης ροή**

Έχουμε το πειραματικό αποτέλεσμα



**Σχήμα 11.3**

από το οποίο λαμβάνουμε

$$\frac{\langle \bar{v} \rangle}{v_{\max}} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} \quad (11.34)$$

n	6	7	10
$\langle \bar{v} \rangle / v_{\max}$	0.79	0.82	0.87

Βλέπουμε ότι έχουμε μία πιο ομοιόμορφη κατανομή της  $v_z$  καθώς αυξάνεται ο Re. Από τα ανωτέρω λαμβάνουμε

$$\alpha = \left[ \frac{v_{\max}}{\langle v \rangle} \right]^3 \frac{2n^2}{(n+3)(2n+3)} \quad (11.35)$$

Re	$4 \times 10^3$	$1.1 \times 10^5$	$3.2 \times 10^6$
n	6	7	10
$\alpha$	1.08	1.05	1.03

Παρατηρούμε λοιπόν ότι για τυρβώδη ροή έχουμε:

$$\alpha \approx 1 \quad (11.36)$$

Αν γνωρίζουμε το  $h_{ολ}$  μεταξύ δύο σημείων κατά μήκος του σωλήνα, μπορούμε να υπολογίσουμε την πτώση πίεσεως.

### 11.6 Υπολογισμός της ολικής απώλειας υδροστατικής κεφαλής $h_{ολ}$

Συνήθως καταμερίζουμε το  $h_{ολ}$  σε δύο συνεισφορές, τη μείζονα  $h_{μ}$  και την ελάσσονα  $h_{ε}$ :

$$\boxed{h_{ολ} = h_{μ} + h_{ε}} \quad (11.37)$$

Η  $h_{μ}$  οφείλεται σε ιξώδεις τριβές μέσα σε πλήρως ανεπτυγμένη ροή. Η  $h_{ε}$  οφείλεται σε αλλαγή διατομής, γωνίες, βαλβίδες κλπ.

#### 11.6-1 Μείζων απώλεια υδροστατικής κεφαλής

Για πλήρως ανεπτυγμένη ροή μέσα σε σωλήνα έχουμε  $h_{ε} = 0$ . Επίσης,  $\alpha_1 = \alpha_2$ ,  $v_1 = v_2$ . Έτσι η Εξ. (11.29) γίνεται

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho} + g(z_1 - z_2) = h_{μ} \quad (11.38)$$

Εισάγοντας την τροποποιημένη πίεση  $P$ ,

$$P = p + \rho gz \quad (z \uparrow) \quad (11.39)$$

λαμβάνουμε

$$\boxed{\frac{(P_1 - P_2)}{\rho} = h_{μ}} \quad (\text{πλήρως ανεπτυγμένη ροή}) \quad (11.40)$$

#### Στρωτή Ροή

Θέτοντας

$$-\Delta P \equiv P_1 - P_2 \quad D = 2R$$

και χρησιμοποιώντας τον νόμο του Poiseuille, ο οποίος μας δίνει

$$\frac{-\Delta P}{\ell} = \frac{128\mu Q}{\pi D^4} = \frac{128\mu \langle v \rangle \left(\frac{\pi}{4} D^2\right)}{\pi D^4} = 32 \frac{1}{D} \frac{\mu \langle v \rangle}{D} \quad (11.41)$$

η Εξ. (11.40) γίνεται

$$\boxed{h_{μ} = 32 \frac{\ell}{D} \frac{\mu \langle v \rangle}{\rho D} = \frac{64}{\text{Re}} \frac{\ell}{D} \frac{\langle v \rangle^2}{2}} \quad (11.42)$$

με

$$\boxed{\text{Re} = \frac{\rho \langle v \rangle D}{\mu}} \quad (11.43)$$

#### Τυρβώδης Ροή

Από την πείρα γνωρίζουμε ότι η  $\Delta P$  εξαρτάται από συγκεκριμένες μεταβλητές και παραμέτρους,

$$\Delta P = \Delta P(D, \ell, e, \langle v \rangle, \rho, \mu) \quad (11.44)$$

όπου το  $e$  είναι το χαρακτηριστικό μήκος της τραχύτητας του εσωτερικού τοιχώματος του σωλήνα.

Χρησιμοποιώντας διαστατική ανάλυση ευρίσκουμε ότι

$$\frac{-\Delta P}{\rho \langle v \rangle^2} = \phi_1 \left( \frac{\rho \langle v \rangle D}{\mu}, \frac{\ell}{D}, \frac{e}{D} \right) = \phi_1 \left( \text{Re}, \frac{\ell}{D}, \frac{e}{D} \right) \quad (11.45)$$

όπου η μορφή της συναρτήσεως  $\phi_1$  είναι προς το παρόν άγνωστη.

Οι Εξ. (11.40) και (11.45) μας δίνουν

$$\frac{h_\mu}{\langle v \rangle^2} = \phi_1 \left( \text{Re}, \frac{\ell}{D}, \frac{e}{D} \right) \quad (11.46)$$

Όμως, είναι φανερό ότι για πλήρως ανεπτυγμένη ροή το  $h_\mu$  είναι γραμμική συνάρτηση του  $\ell$  και συνεπώς μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{h_\mu}{\langle v \rangle^2} = \frac{\ell}{D} \phi_2 \left( \text{Re}, \frac{e}{D} \right) \quad (11.47)$$

ή

$$\frac{h_\mu}{\frac{1}{2} \langle v \rangle^2} = \frac{\ell}{D} 2\phi_2 \left( \text{Re}, \frac{e}{D} \right) \quad (11.47')$$

όπου η  $\phi_2$  είναι επίσης προς το παρόν άγνωστη συνάρτηση. Θέτοντας  $f \equiv 2\phi_2$  λαμβάνουμε

$$\frac{h_\mu}{\frac{1}{2} \langle v \rangle^2} = \frac{\ell}{D} f \left( \text{Re}, \frac{e}{D} \right) \quad (11.48)$$

Τελικώς λαμβάνουμε

$$\Rightarrow \boxed{h_\mu = f \left( \text{Re}, \frac{e}{D} \right) \frac{\ell \langle v \rangle^2}{D}} \quad \eta \quad \boxed{\frac{(-\Delta P / \ell) D}{\frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2} = f \left( \text{Re}, \frac{e}{D} \right)} \quad (11.49)$$

Το  $f$  είναι γνωστό ως ο συντελεστής τριβής του Fanning (κυρίως ΗΠΑ). Στην Αγγλία χρησιμοποιείται συχνά ο συντελεστής τριβής του Moody,  $\phi = f/8$ .

Προσδιορισμός του Συντελεστή Τριβής  $f \left( \text{Re}, \frac{e}{D} \right)$

Για στρωτή ροή οι Εξ. (11.49) και (11.42) δίνουν αμέσως

$$\boxed{f = \frac{64}{\text{Re}}} \quad (\text{στρωτή ροή}) \quad (11.50)$$

Για τυρβώδη ροή ο συντελεστής τριβής έχει προσδιορισθεί από πειραματικά αποτελέσματα. Τιμές του  $f$  δίνονται συνήθως υπό τη μορφή του διαγράμματος του Moody, Σχ. 11.1 (από την εργασία του L.F. Moody). Βλέπουμε ότι για τυρβώδη ροή το  $f$  εξαρτάται ισχυρώς όχι μόνο από το  $\text{Re}$  αλλά και από τη σχετική τραχύτητα  $e/D$ , σύμφωνα με την Εξ. (11.49). Διάγραμμα τυπικών τιμών του  $e/D$  δίνεται στο Σχ. 11.2.

Στο διάγραμμα Moody διακρίνουμε τέσσερις περιοχές

Περιοχή 1 ( $\text{Re} < 2000$ ) Στρωτή ροή,  $f = 64/\text{Re}$ .

$$(-\Delta P / \ell) \sim \langle v \rangle$$



Περιοχή 2 ( $2000 < Re < 3000$ ) Μεταβατική περιοχή μεταξύ στρωτής και τυρβώδους ροής. Η μετάπτωση από στρωτή σε τυρβώδη ροή εξαρτάται από την κατάσταση του σωλήνα, την παρουσία βαλβίδων, αγκώνων, κλπ. στο σωλήνα και την καθαρότητα του ρευστού.

Περιοχή 3 ( $Re > 3000$ ) Τυρβώδης ροή,  $f = f(Re, e/D)$

$$(-\Delta P / \ell) \sim \langle v \rangle^m, \quad 1 < m < 2$$

Περιοχή 4 (Τραχειές σωληνώσεις και υψηλές τιμές του  $Re$ )

$$f = f(e/D), \quad (-\Delta P / \ell) \sim \langle v \rangle^2$$

Π.χ.	$e/D = 0.05$	$Re > 1 \times 10^5$	$f = 0.072$
	$e/D = 0.0075$	$Re > 1 \times 10^5$	$f = 0.034$
	$e/D = 0.001$	$Re > 1 \times 10^6$	$f = 0.0196$

**Αναλυτικές εκφράσεις για τη σχέση  $f = f(Re, e/D)$**

(i) Στρωτή Ροή

$$f = \frac{64}{Re}, \quad \phi = \frac{8}{Re}, \quad Re < 2000 \quad (11.50')$$

(ii) Τυρβώδης Ροή

(ii-1) Λείοι σωλήνες:  $2.5 \times 10^3 < Re < 10^5$

$$f = 0.317 Re^{-0.25}, \quad \phi = 0.0396 Re^{-0.25}$$

(ii-2) Λείοι σωλήνες:  $2.5 \times 10^3 < Re < 10^7$

$$\left. \begin{aligned} f &= 8\phi \\ \phi^{-0.5} &= 2.5 \ln(Re \phi^{0.5}) + 0.3 \end{aligned} \right\} \quad (11.51)$$

(ii-3) Τραχείς σωλήνες

$$\left. \begin{aligned} f &= 8\phi \\ \phi^{-0.5} &= -2.5 \ln \left( 0.27 \frac{e}{D} + 0.885 Re^{-1} \phi^{-0.5} \right) \end{aligned} \right\} \quad (11.52)$$

(ii-4) Τραχείς σωλήνες  $\frac{e}{D} Re \phi^{0.5} \gg 3.3$

$$\left. \begin{aligned} f &= 8\phi \\ \phi^{-0.5} &= 3.2 - 2.5 \ln \left( \frac{e}{D} \right) \end{aligned} \right\} \quad (11.53)$$

Το διάγραμμα Moody είναι πολύ χρήσιμο για τον υπολογισμό του  $f$  και του  $(-\Delta P/\ell)$ , αν η γεωμετρία του σωλήνα και η τιμή της  $\langle v \rangle$  είναι γνωστές. Αν όμως μας δίνεται η γεωμετρία του σωλήνα καθώς και η διαθέσιμη πτώση πίεσεως, και θέλουμε να προσδιορίσουμε την  $\langle v \rangle$  (και  $Q$ ), τότε το διάγραμμα Moody γίνεται δύσχρηστο. Ο λόγος είναι ότι στην τελευταία περίπτωση η άγνωστη ταχύτητα  $\langle v \rangle$  εμφανίζεται και στους δύο άξονες του διαγράμματος, καθόσον τόσο ο  $Re$  όσο και ο συντελεστής  $f$  περιέχουν στον ορισμό τους την ταχύτητα. Για προβλήματα του τύπου αυτού συμφέρει να χρησιμοποιήσουμε μια διαφορετική μορφή του διαγράμματος Moody, Σχήμα 11.3, όπου καταγράφουμε τιμές του  $Re$  έναντι τιμών της ομάδας τριβής

$$\phi Re^2 = \frac{1}{8} f Re^2 = \frac{D^3 \rho}{4\mu^2} \left( -\frac{\Delta P}{\ell} \right). \quad \text{Όπως βλέπουμε, η ομάδα τριβής } \phi Re^2 \text{ δεν}$$

περιλαμβάνει την άγνωστη ταχύτητα  $\langle v \rangle$  και υπολογίζεται αμέσως. Προσδιορίζοντας

την αντίστοιχη τιμή του  $Re$  από το διάγραμμα, Σχήμα 11.3, λαμβάνουμε την τιμή της ταχύτητας από τη σχέση του  $\langle v \rangle = Re \mu / \rho D$ .

### 11.6-2 Ελάχιστες απώλειες υδροστατικής κεφαλής

Η ροή μέσα σε σωληνώσεις συνήθως αναγκάζεται να περάσει μέσα από μία ποικιλία εξαρτημάτων και γωνιών καθώς και αλλαγών διατομής. Τα στοιχεία αυτά των σωληνώσεων προκαλούν πρόσθετες απώλειες υδροστατικής κεφαλής, συχνά ως αποτέλεσμα αποχωρισμού της ροής. Μηχανική ενέργεια δαπανάται λόγω των εντόνων ιξωδών τριβών που λαμβάνουν χώρα στις ζώνες αποκολλήσεως της ροής. Οι απώλειες αυτές είναι σχετικά μικρές, εξού και ο όρος “ελάχιστες απώλειες”, σε συστήματα σωληνώσεων που αποτελούνται κυρίως από μακρύτερα τμήματα σωλήνων σταθερής διατομής. Σε συστήματα σωληνώσεων αποτελούμενα από σχετικά βραχεία τμήματα σωλήνων τα οποία περιλαμβάνουν πολλές βαλβίδες, γωνίες, αλλαγές διατομής, κλπ, οι “ελάχιστες απώλειες” μπορεί να είναι συγκρίσιμες με ή μεγαλύτερες από τις “μείζονες απώλειες”.

Οι ελάχιστες απώλειες υδροστατικής κεφαλής συνήθως εκφράζονται ως εξής (για κάθε στοιχείο):

$$h_e = K \frac{\langle v \rangle^2}{2} \quad K = \text{συντελεστής απώλειας [=] αδιάστατος} \quad (11.54)$$

Η τιμή του  $K$  εξαρτάται από τον τύπο και το ακριβές σχήμα του εξαρτήματος που προκαλεί την  $h_e$ . Σε περίπτωση βαλβίδας, η τιμή του  $K$  εξαρτάται από το πόσο ανοικτή (ή κλειστή) είναι η βαλβίδα. Ένας άλλος τρόπος έκφρασης της  $h_e$  είναι να δοθεί η αντίσταση στην ροή από το εξάρτημα ως ισοδύναμο μήκος  $\lambda$  ευθύγραμμου σωλήνα της ίδιας ονομαστικής διαμέτρου, δηλ.

$$h_e = f \frac{\lambda \langle v \rangle^2}{2D} \quad (11.55)$$

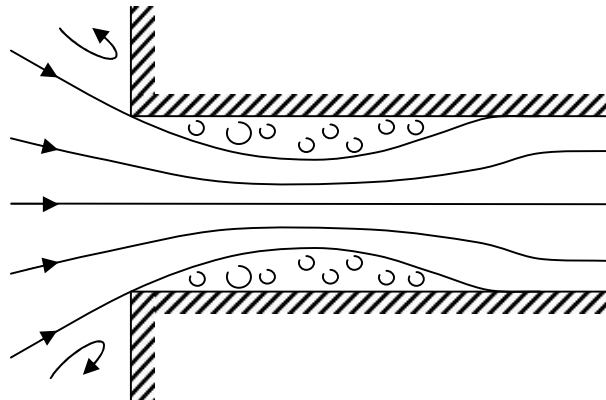
όπου η τιμή του συντελεστή τριβής  $f$  είναι εκείνη για τον αντίστοιχο σωλήνα.

Οι δύο τρόποι εκφράσεως της  $h_e$  είναι ισοδύναμοι, καθόσον έχουμε

$$K = f \frac{\lambda}{D} \quad \lambda = K \frac{D}{f} \quad (11.56)$$

#### (i) Είσοδος και Μήκος Εισόδου

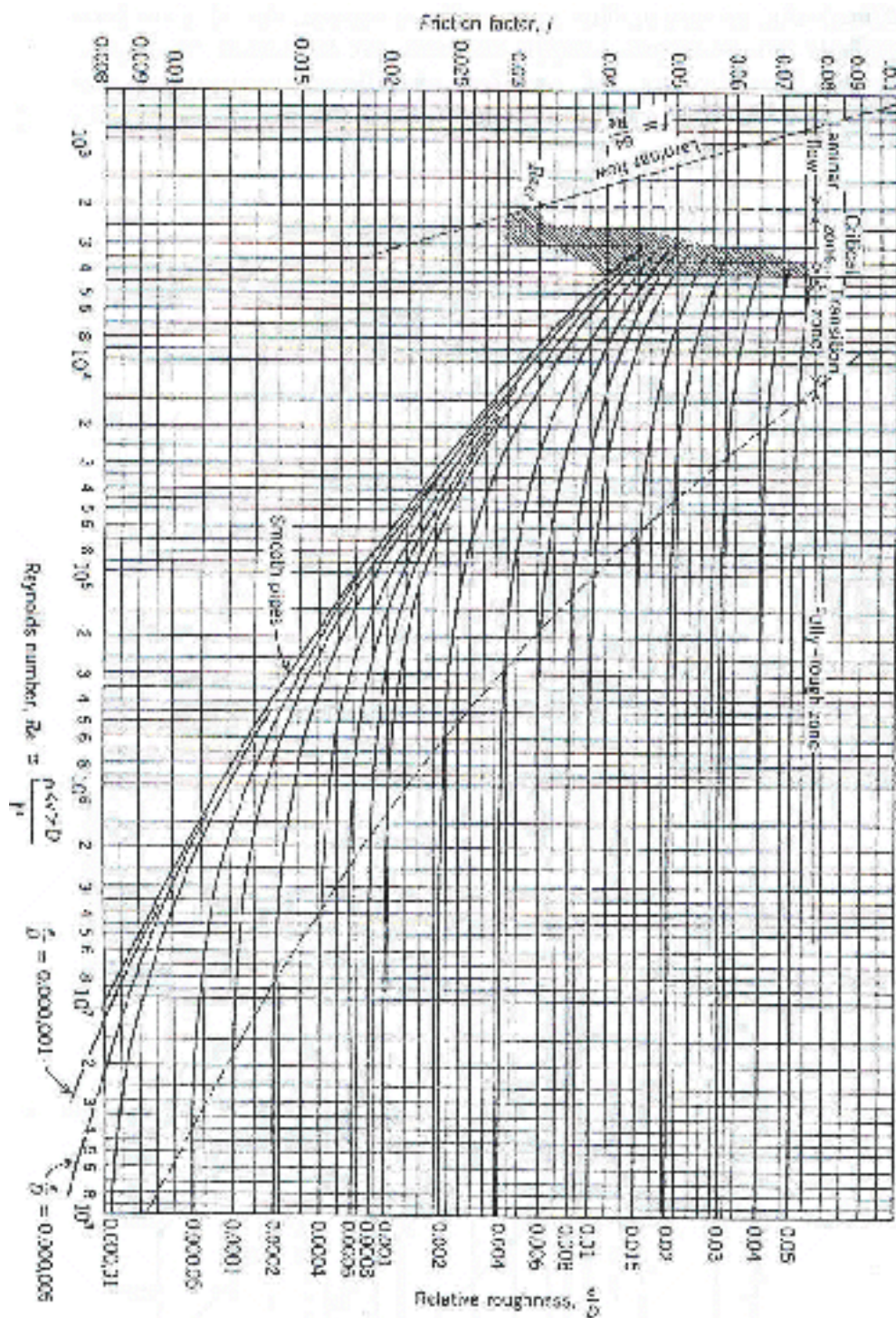
Σημαντική πτώση πίεσης μπορεί να προξενηθεί από μια κακώς σχεδιασμένη είσοδο σωλήνα. Εάν το χείλος της εισόδου είναι απότομο, η ροή αποκολλάται και δημιουργεί μια στενωμένη φλέβα (vena contracta) με σημαντική απώλεια υδροστατικής κεφαλής.



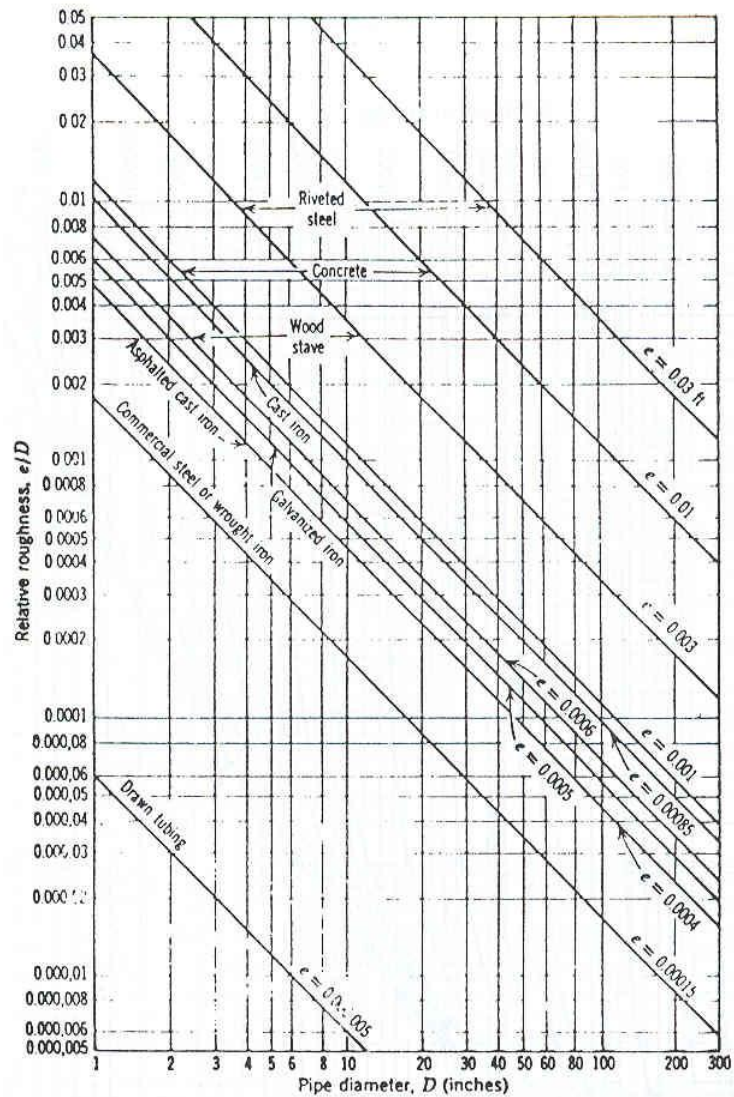
**Σχήμα 11.7**

Στενωμένη φλέβα (vena contracta)



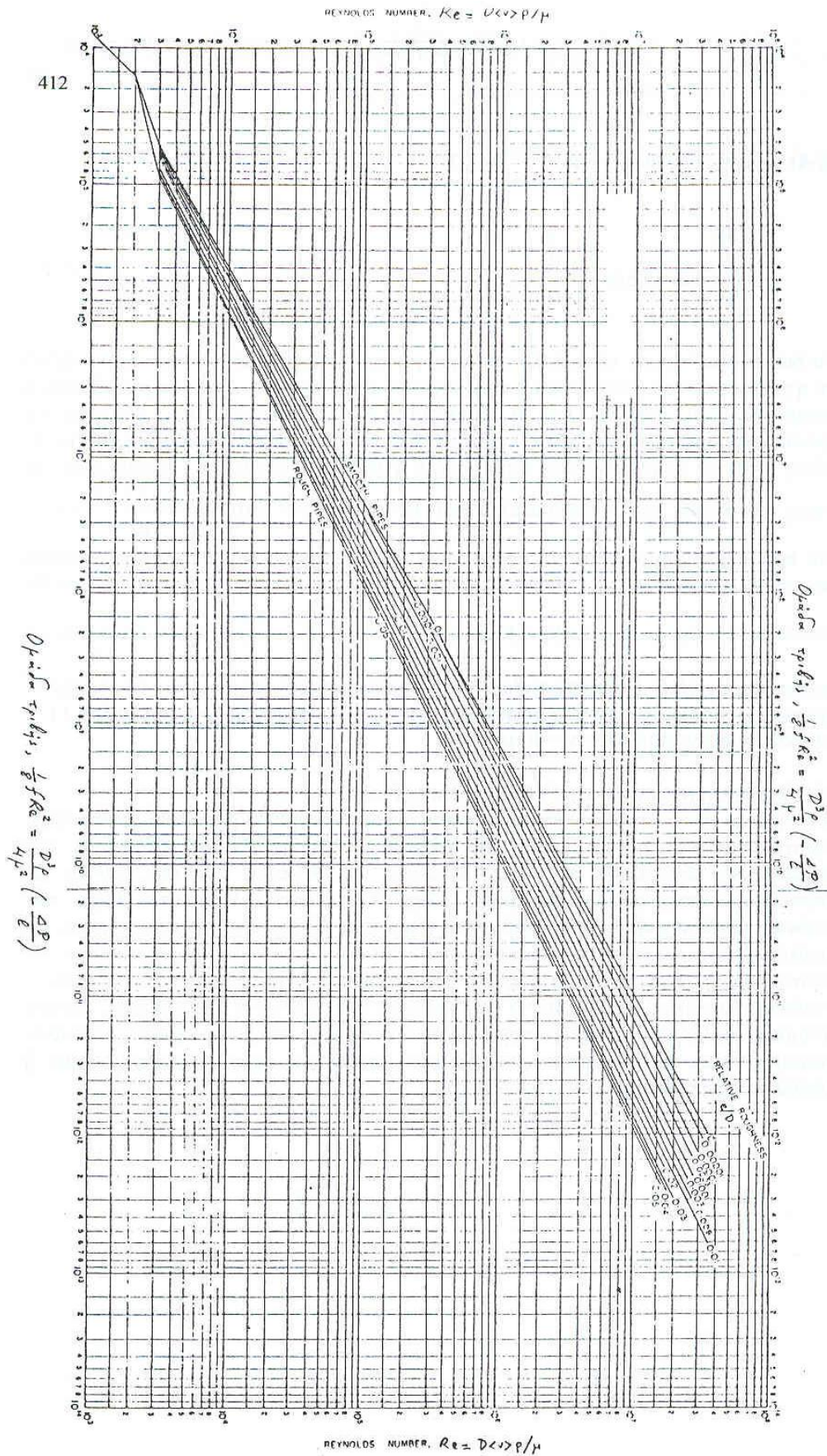


Σχήμα 11.4 Συντελεστής τριβής για πλήρως ανεπτυγμένη ροή σε σωλήνες (Πηγή: Fox & McDonald “Introduction to Fluid Mechanics”, 2<sup>nd</sup> ed.)



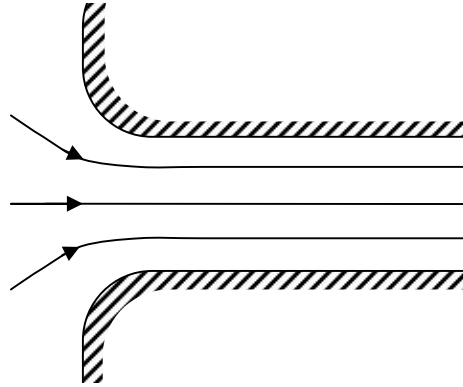
**Σχήμα 11.5** Σχετική τραχύτητα για διάφορα είδη σωλήνων. Όλες οι τιμές του  $e/D$  από το ανωτέρω διάγραμμα ισχύουν για καινούργιους σωλήνες. Διάβρωση, σκωρίαση και απόθεση αλάτων αυξάνουν την τραχύτητα κατά πολύ με την πάροδο του χρόνου σε σημείο που να παρουσιάζεται και ελάττωση της εσωτερικής διαμέτρου. Οι επιπτώσεις στην πτώση πίεσεως και την παροχή είναι τότε δραστικές και πρέπει να συυπολογίζονται.

(Πηγή: Fox & McDonald "Introduction to Fluid Mechanics", 2<sup>nd</sup> ed.)



Σχήμα 11.6 (Πηγή: Coulson & Richardson “Chemical Engineering”, Vol. 1)

Το μεγαλύτερο μέρος της απώλειας οφείλεται στην ανάμιξη που λαμβάνει χώρα καθώς η ροή επιβραδύνεται και απλώνει για να γεμίσει ξανά το σωλήνα. Το ανεπιθύμητο αυτό φαινόμενο περιορίζεται αποτελεσματικά, αν το χείλος της εισόδου στρογγυλευθεί:

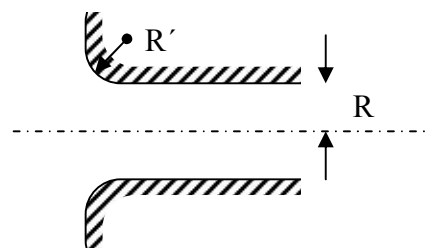


Σχήμα 11.8

Οι συντελεστές απώλειας για διάφορους τύπους εισόδου δίνονται κατωτέρω.

Πίνακας 11.1 Συντελεστές απώλειας για εισόδους σωλήνων

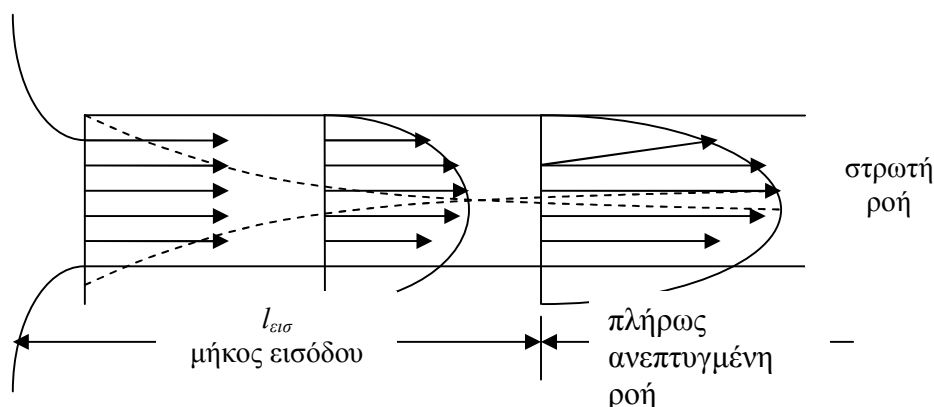
Τύπος εισόδου	Διάγραμμα	Συντ. απώλειας K
Οπισθοχωρημένη είσοδος (Στόμιο του Borda)		0.78
Απότομη είσοδος		0.34
Ελαφρώς στρογγυλευμένη είσοδος		0.20-0.25



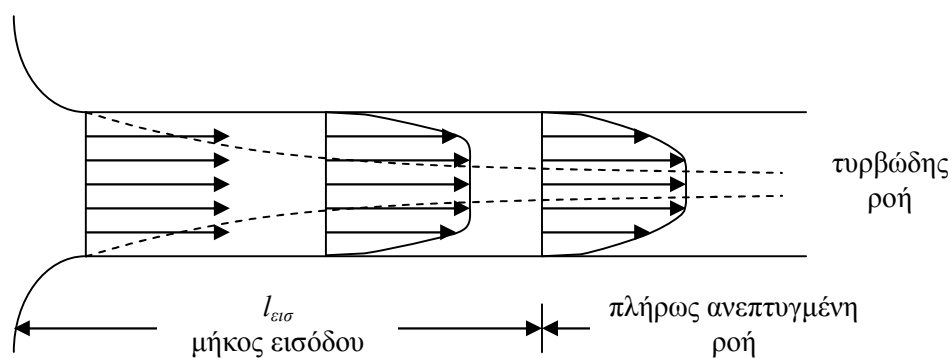


Καλώς στρογγυλεμένη είσοδος ( $R'/R \approx 0.35$ )		0.04
---	--	------

Ακόμα και για εισόδους με καλώς στρογγυλεμένο χείλος έχουμε μια πρόσθετη απώλεια υδραυλικής κεφαλής εξαιτίας της παρουσίας της εισόδου. Μέρος αυτής της πρόσθετης απώλειας οφείλεται στο ότι η ροή δεν είναι πλήρως ανεπτυγμένη στην είσοδο



Σχήμα 11.9 (Πηγή: Fox & McDonald “Introduction to Fluid Mechanics”, 2<sup>nd</sup> ed.)



Σχήμα 11.10 (Πηγή: Fox & McDonald “Introduction to Fluid Mechanics”, 2<sup>nd</sup> ed.)

Μέρος της επιπρόσθετης απώλειας πίεσης από την παρουσία της εισόδου,  $\Delta P_{\text{εισ}}$ , οφείλεται στο ότι η πλήρως ανεπτυγμένη ροή έχει μεγαλύτερη γραμμική ορμή από εκείνη της ροής στην είσοδο, όπου η ταχύτητα είναι σχεδόν ομοιόμορφη. Έτσι απαιτείται πρόσθετη δύναμη (άρα πτώση πίεσης) για να προσδοθεί στη ροή εισόδου η ορμή της πλήρως ανεπτυγμένης ροής. Το υπόλοιπο της απώλειας πίεσης από την παρουσία της εισόδου προκύπτει από τη μεγαλύτερη τιμή της διατμητικής τάσης πάνω στον τοίχο του σωλήνα στην ζώνη όπου αναπτύσσεται η ροή (βλ. και σχήμα). Το μήκος εισόδου για στρωτή ροή δίνεται από τη σχέση

$$\ell_{\text{εισ}}/D = 0.057\text{Re} \quad (\text{στρωτή ροή}) \quad (11.57)$$

Για  $Re = 2000$  έχουμε  $l_{εισ} = 114D$ . Βλέπουμε, δηλαδή, ότι το  $l_{εισ}$  για στρωτή ροή μπορεί να είναι αξιόλογο. Το  $l_{εισ}$  για τυρβώδη ροή είναι αρκετά μικρότερο εκείνου για στρωτή ροή εξαιτίας του γεγονότος ότι ο μηχανισμός διασποράς της ορμής στην περίπτωση της τυρβώδους ροής είναι πολύ πιο ισχυρός από ότι στη στρωτή. Για τυρβώδη ροή η πρόσθετη πτώση πίεσεως  $\Delta P_{εισ}$  δίνεται από τη σχέση

$$-\Delta P_{εισ} = \rho h_{\varepsilon} = \rho K \frac{\langle v \rangle^2}{2} \quad (\text{τυρβώδης}) \quad (11.58)$$

όπου η τιμή του  $K$  λαμβάνεται από τον Πίνακα 11.1. Έτσι, η ολική πτώση πίεσεως δίνεται από τη σχέση

$$P_{εισ} - P_{\ell} = \rho h_{ολ} = \rho (h_{\mu} + h_{\varepsilon}) = \rho \left( f \frac{\ell}{D} + K \right) \frac{\langle v \rangle^2}{2} \quad (\text{τυρβώδης}) \quad (11.59)$$

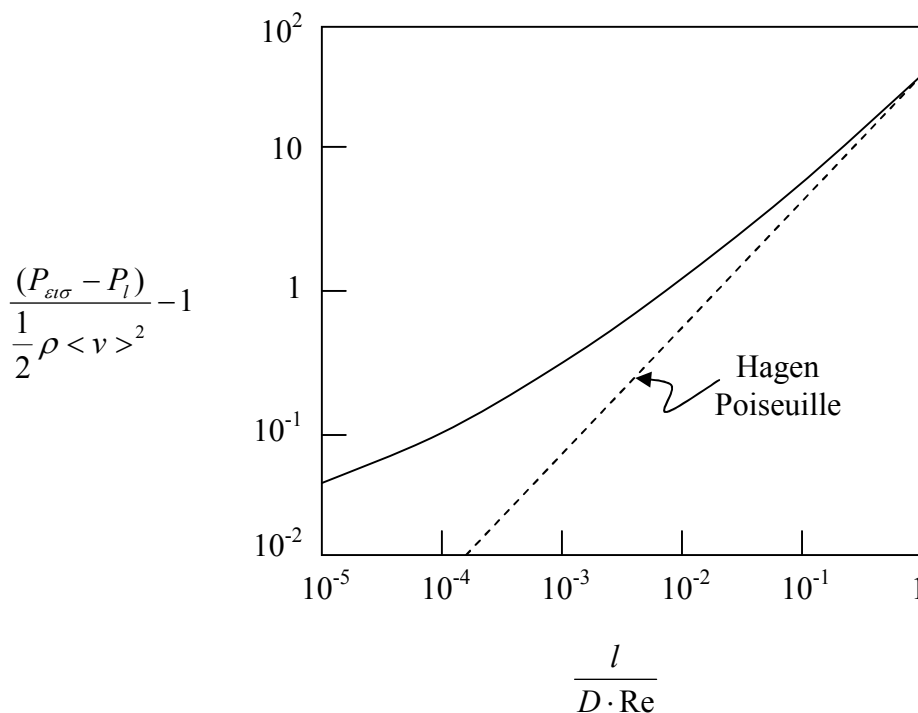
Για στρωτή ροή χρησιμοποιούμε το διάγραμμα του Σχ. 11.11

Εδώ  $P_{εισ}$  = πίεση στην είσοδο του σωλήνα

$P_{\ell}$  = πίεση σε απόσταση  $\ell$  από την είσοδο

$\ell$  = απόσταση από την είσοδο

(ii) Απότομες Διευρύνσεις και Στενώσεις



**Σχήμα 11.11** (Πηγή: Perry's Chemical Engineers' Handbook)

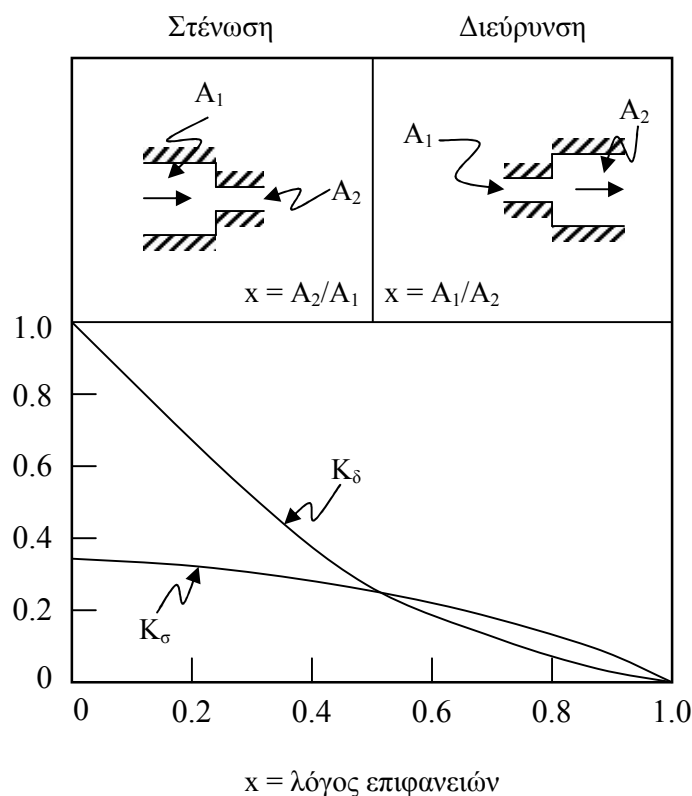
Τιμές του συντελεστή απώλειας  $K$  για απότομες αλλαγές διατομής σε κυλινδρικούς αγωγούς δίνονται στο Σχ. 11.12. Παρατηρήστε ότι τόσο ο συντελεστής απώλειας για διεύρυνσης  $K_{\delta}$ , όσο και ο συντελεστής απώλειας για στενώση,  $K_{\sigma}$ , είναι βασισμένος στη μεγαλύτερη τιμή του  $\frac{1}{2}\langle v \rangle^2$ . Έτσι, έχουμε

$$h_\varepsilon = K_\delta \frac{\langle v_1 \rangle^2}{2} \quad (11.60)$$

$$h_\varepsilon = K_\sigma \frac{\langle v_2 \rangle^2}{2} \quad (11.61)$$

(iii) Βαθμιαίες Στενώσεις

Μερικές τυπικές τιμές δίνονται στον Πίνακα 11.2. Αυτά τα πειραματικά αποτελέσματα φαίνεται να υποδηλώνουν ότι οι απώλειες σε βαθμιαίες στενώσεις είναι ανεξάρτητες από τον λόγο των επιφανειών  $A_2/A_1$ . Αυτό όμως είναι αλήθεια μόνο για μέτριες τιμές του λόγου  $A_2/A_1$ .



**Σχήμα 11.12** (Πηγή: ASHRAE Guide and Data Book-Equipment Volume, New York, Am. Soc. Heating, Refrigeration and Air Conditioning Engrs, 1969)

**Πίνακας 11.2** Συντελεστές απώλειας για βαθμιαίες στενώσεις. (Πηγή: Fox & McDonald "Introduction to Fluid Mechanics", 2<sup>nd</sup> ed.).

Διάγραμμα	Γωνία της στενώσεως	Συντ. απώλειας K
	30°	0.02
	45°	0.04
	60°	0.07

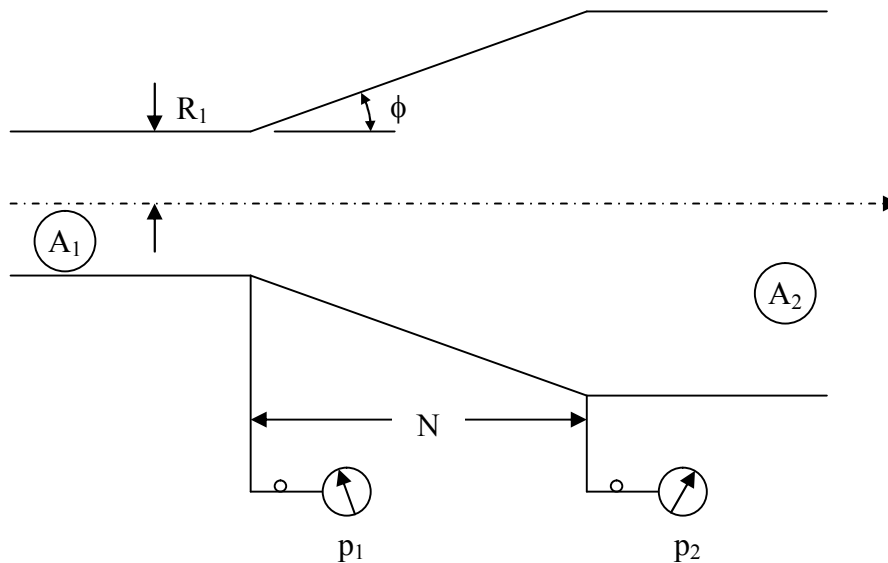
$$h_\varepsilon = K \frac{\langle v_2 \rangle^2}{2}$$

(iv) Διαχυτήρες (ή αποκαταστάτες πίεσεως)

Ο διαχυτήρας ή αποκαταστάτης πίεσεως είναι μία βαθμιαία διεύρυνση του σωλήνα η οποία έχει για σκοπό την ανύψωση της πίεσεως του ρευστού εις βάρος της κινητικής του ενέργειας. Οι απώλειες μέσα σε διαχυτήρες εξαρτώνται από αρκετές παραμέτρους της ροής και του σχήματος. Συνήθως, οι απώλειες μέσα σε διαχυτήρες εκφράζονται υπό τη μορφή του συντελεστή αποκαταστάσεως της πίεσεως,  $C_p$ , ο οποίος ορίζεται ως εξής

$$C_p = \frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{2}\rho \langle v_1 \rangle^2} = \frac{P_2 - P_1}{\frac{1}{2}\rho \langle v_1 \rangle^2} \quad (11.62)$$

Η διαφορά  $(p_2 - p_1) \cong (P_2 - P_1)$  είναι η αύξηση της στατικής πίεσεως την οποία προξενεί ο διαχυτήρας, βλ. και Σχ. 11.13.



Σχήμα 11.13 Κωνικός διαχυτήρας

Αμελώντας τη βαρύτητα, έχουμε

$$\begin{aligned} & \left( \frac{p_1}{\rho} + \frac{\langle v_1 \rangle^2}{2} \right) - \left( \frac{p_2}{\rho} + \frac{\langle v_2 \rangle^2}{2} \right) = h_\varepsilon \\ \Rightarrow h_\varepsilon &= \frac{\langle v_1 \rangle^2}{2} - \frac{\langle v_2 \rangle^2}{2} - \frac{(p_2 - p_1)}{\rho} = \frac{\langle v_1 \rangle^2}{2} \left[ \left( 1 - \frac{\langle v_2 \rangle^2}{\langle v_1 \rangle^2} \right) - \frac{(p_2 - p_1)}{\frac{1}{2}\rho \langle v_1 \rangle^2} \right] \\ &= \frac{\langle v_1 \rangle^2}{2} \left[ \left( 1 - \frac{\langle v_2 \rangle^2}{\langle v_1 \rangle^2} \right) - C_p \right] \stackrel{\text{εξίσωση συνέχειας}}{=} \frac{\langle v_1 \rangle^2}{2} \left[ 1 - \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 - C_p \right] \end{aligned}$$

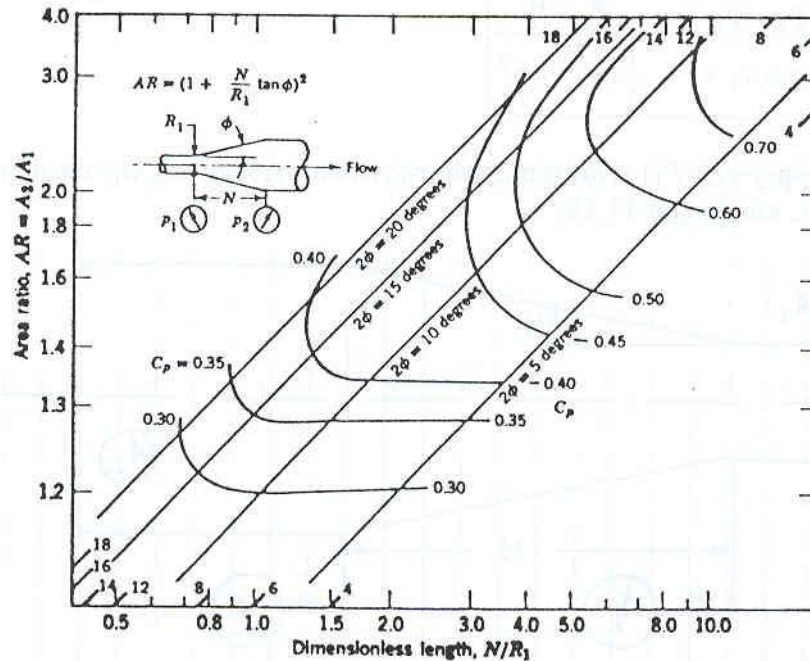
ή

$$h_\varepsilon = \frac{1}{2} \langle v_1 \rangle^2 \left[ \left( 1 - \frac{1}{(AR)^2} \right) - C_p \right] \quad (11.63)$$

όπου

$$AR = \frac{A_2}{A_1} = \left(1 + \frac{N}{R_1} \tan \phi\right)^2 \quad (11.64)$$

Πειραματικές τιμές του συντελεστή αποκατάστασης της πίεσης για τυρβώδη ροή δίνονται στο Σχ. 11.14.



**Σχήμα 11.14** Συντελεστής αποκατάστασης της πίεσης για κωνικούς διαχυτήρες. Τυρβώδης ροή (Πηγή: Fox & McDonald “Introduction to Fluid Mechanics”, 2<sup>nd</sup> ed.)

Η αποκατάσταση πίεσης με ομοιόμορφη κατανομή ταχύτητας στην είσοδο είναι κάπως καλύτερη από ότι με πλήρως ανεπτυγμένη ροή στην είσοδο. Επειδή η πίεση αυξάνει κατά τη φορά της ροής μέσα στο διαχυτήρα, είναι δυνατόν να προκληθεί αποκόλληση της ροής με δυσμενείς για την οικονομία ενέργειας επιπτώσεις. Για μερικές γεωμετρίες μπορεί η ροή να “κολλήσει” σε μια πλευρά του διαχυτήρα (φαινόμενο Coanda) ή και να αρχίσει να πάλλεται. Τέτοια ανεπιθύμητα φαινόμενα δεν παρατηρούνται συνήθως για  $2\phi < 7 \text{ deg}$  (βλ. Σχ. 11.10).

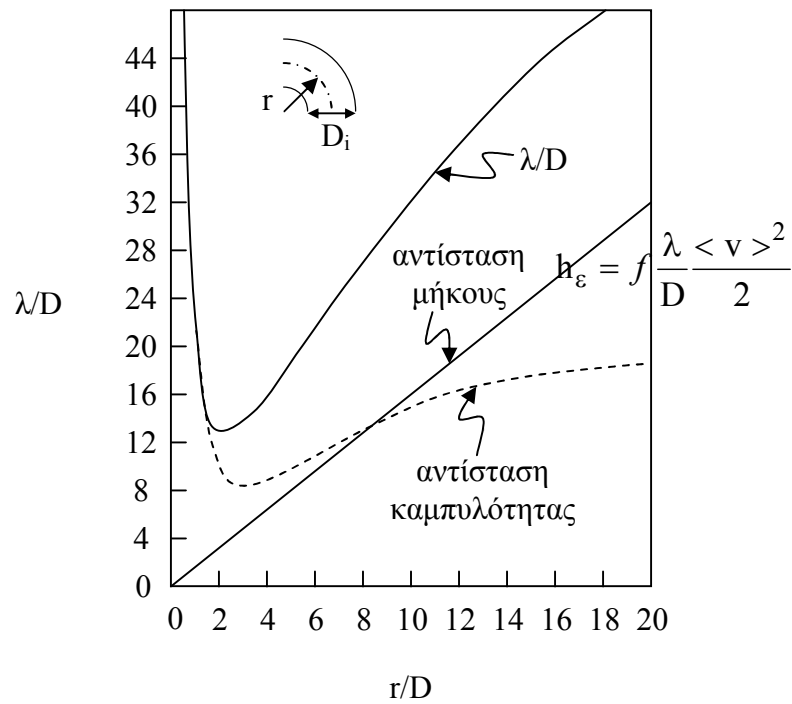
(v) Έξοδοι

Η κινητική ενέργεια ανά μονάδα μάζας  $\frac{1}{2}\langle v \rangle^2$  διασκορπίζεται τελείως λόγω πλήρους αναμίξεως, όταν η ροή εξέρχεται από έναν αγωγό και εισέρχεται σε ένα μεγάλο δοχείο ή χώρο. Η κατάσταση είναι ανάλογη με εκείνη μιας απότομης διευρύνσεως με λόγο επιφανειών  $A_1/A_2 = 0$  (Σχ. 11.9). Έτσι, ανεξαρτήτως του σχήματος της εξόδου, έχουμε

$$h_\varepsilon = \frac{1}{2} K_\delta \langle v_1 \rangle^2 \quad \text{με} \quad K_\delta \cong 1 \quad (11.65)$$

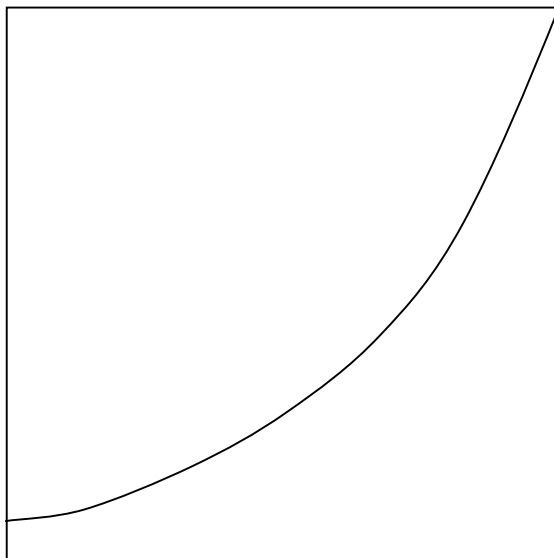
(vi) Καμπές

Ροή μέσα σε μία καμπή συνεπάγεται σημαντικές απώλειες μηχανικής ενέργειας εξαιτίας δευτερευουσών ροών. Η επιπλέον απώλεια υδροστατικής κεφαλής εκφράζεται συνήθως ως ισοδύναμο μήκος ευθύγραμμου σωλήνα,  $\lambda/D$ . Το ισοδύναμο μήκος  $\lambda$  εξαρτάται από την ανηγμένη ακτίνα καμπυλότητας  $r/R$  της καμπής, Σχ. 11.15.



**Σχήμα 11.15** Ισοδύναμο μήκος καμπής (Πηγή: Fox & McDonald “Introduction to Fluid Mechanics”, 2<sup>nd</sup> ed.)

(vii) Απότομες Γωνίες



$$h_\epsilon = f \frac{\lambda \langle v \rangle^2}{D \cdot 2}$$

**Σχήμα 11.16** (Πηγή: Fox & McDonald “Introduction to Fluid Mechanics”, 2<sup>nd</sup> ed.)

(viii) Βαλβίδες κι Εξαρτήματα

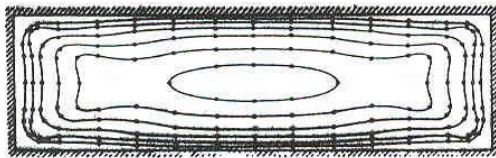
Τιμές ισοδύναμων μηκών για τυπικές περιπτώσεις βαλβίδων και άλλων εξαρτημάτων δίνονται στον Πίνακα 11.3.

**Πίνακας 11.3.** Τυπικά ισοδύναμα μήκη ( $\lambda/D$ ) για βαλβίδες και εξαρτήματα. (Πηγή: Fox & McDonald “Introduction to Fluid Mechanics”, 2<sup>nd</sup> ed.)

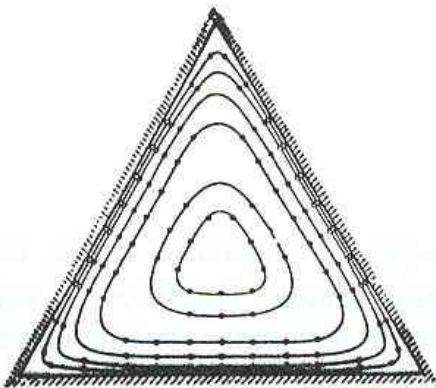
Εξάρτημα	Περιγραφή	Ισοδύναμο μήκος $\lambda/D$
Σφαιρική βαλβίδα (Globe valve)	Πλήρως ανοικτή	350
Βαλβίδα τύπου πύλης (Gate valve)	Πλήρως ανοικτή	13
	$\frac{3}{4}$ ανοικτή	35
	$\frac{1}{2}$ ανοικτή	160
	$\frac{1}{4}$ ανοικτή	900
Βαλβίδα ελέγχου (Check valve)		50-100
Αγκώνας κανονικός, 90 deg (Standard elbow)		30
Αγκώνας κανονικός, 45 deg		16
Αγκώνας 90 deg (Elbow)	Μακριάς ακτίνας (Long radius)	20
Δρομικός αγκώνας, 90 deg (Street elbow)		50
Δρομικός αγκώνας, 45 deg		26
Ταυ (tau)	Ευθύγραμμη ροή	20
	Κλαδική ροή	60
Επιστροφική καμπή (return bend)	Στροφή 180 deg (πιο “ανοικτή” από δύο κανονικούς αγκώνες)	50

### 11.7 Αγωγοί με μη-κυκλική διατομή

Οι κατανομές ταχύτητας σε τέτοιους αγωγούς διαφέρουν σημαντικά από την κατανομή σε αγωγούς κυκλικής διατομής. Οι καμπύλες σταθερής ταχύτητας για τυρβώδη ροή σε αγωγούς με ορθογωνικές και τριγωνικές διατομές προσδιορίστηκαν από τον J. Nikuradse\*, Σχ. 11.17 και 11.18.



**Σχήμα 11.17** Καμπύλες σταθερής ταχύτητας μέσα σε αγωγό με ορθογωνική διατομή. Τυρβώδης ροή. (Υπό J. Nikuradse, Πηγή: H. Schlichting, “B-L Theory”)



**Σχήμα 11.18** Καμπύλες σταθερής ταχύτητας μέσα σε αγωγό με διατομή που είναι ισόπλευρο τρίγωνο. Τυρβώδης ροή. (Υπό J. Nikuradse, Πηγή: H. Schlichting, “B-L Theory”)

\* J. Nikuradse, “Über die Geschwindigkeitsverteilung in reibungseisförmigen Röhren” Ing.-Arch. 1, 306 (1930)

Στις περιπτώσεις αυτές οι ταχύτητες κοντά στις γωνίες είναι σχετικά μεγάλες. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι σε όλους τους ευθύγραμμους αγωγούς μη-κυκλικής διατομής υπάρχουν δευτερεύουσες ροές εγκάρσιως προς την κύρια ροή. Κατά τη δευτερεύουσα ροή το ρευστό κινείται προς τη γωνία κατά μήκος της διχοτόμου της γωνίας και στην συνέχεια κινείται μακριά από τη γωνία και από τις δύο πλευρές της διχοτόμου.

Έτσι οι δευτερεύουσες ροές μεταφέρουν γραμμική ορμή από το κέντρο του αγωγού προς τις γωνίες του, όπου και τελικά προξενούν μεγάλες σχετικά ταχύτητες. Σχηματικές παραστάσεις των δευτερευουσών ροών σε αγωγούς ορθογωνικής και τριγωνικής διατομής δίνονται στο Σχ. 11.19.