CHM_582: Μηχανική Υλικών

Διάλεξη 9: Λυγισμός

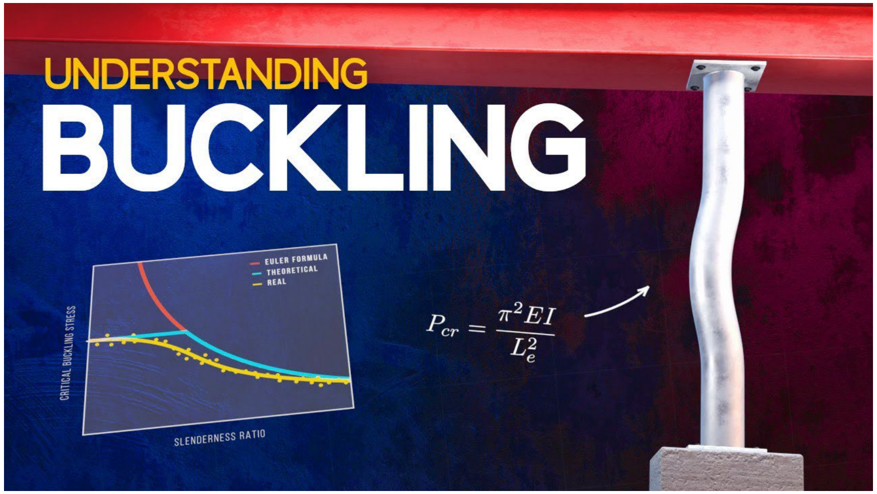
Κωνσταντίνος Γ. Δάσιος, Αναπλ. Καθηγητής
Τμήμα Χημικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών
kdassios@upatras.gr

Πάτρα, Μάιος 2024

Λυγισμός

Έως τώρα η μελέτη της απόκρισης του υλικού σε φορτίσεις **δεν μετέβαλε την διαμόρφωση (διάταξη)** του δομικού στοιχείου/κατασκευής.

Στον **λυγισμό** μελετούμε την **ευστάθεια** της κατασκευής, δηλαδή την ικανότητά της να φέρει φορτία χωρίς **απότομη αλλαγή της διαμόρφωσή της**.



Η συζήτηση θα επικεντρωθεί σε **υποστυλώματα**: κατακόρυφα πρισματικά μέλη που φέρουν αξονικά θλιπτικά φορτία.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Υποστύλωμα καταπονείται σε **λυγισμό** όταν υπό την επίδραση θλιπτικού φορτίου μεταβάλλει το αρχικό ευθύγραμμα σχήμα του και καμπυλώνεται σημαντικά.

Λυγισμός

Σχεδιασμός Κατασκευών

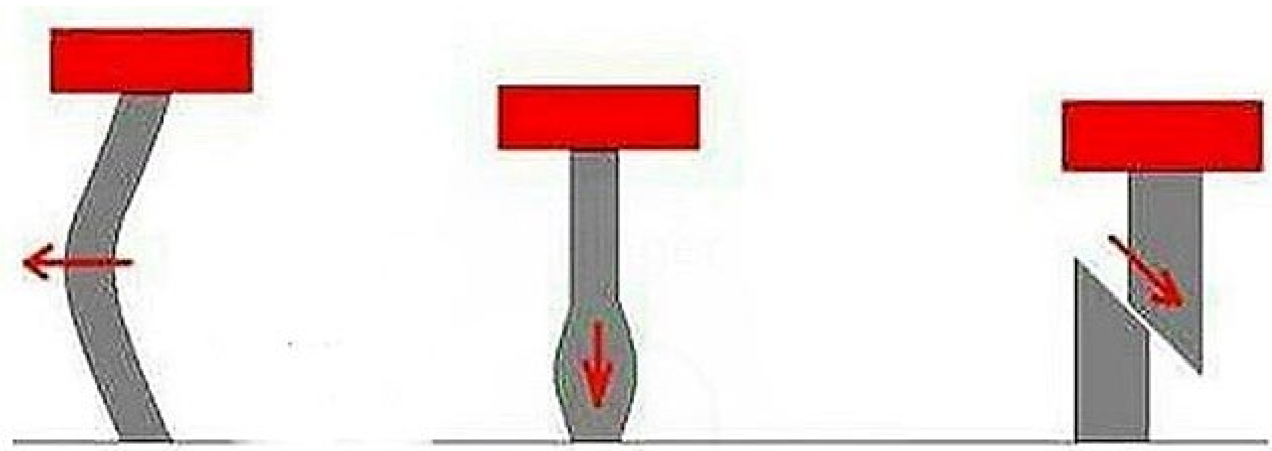
Αστοχία Υλικού

- Εύρεση **επιπέδου τάσης και παραμόρφωσης** σαν αποτέλεσμα των εφαρμοζόμενων δυνάμεων
- **Σύγκριση** επιπέδου με κριτήρια **μέγιστων τιμών** τάσης και παραμόρφωσης και εντοπισμός δυνάμεων αστοχίας
- Καθορισμός **συντελεστών ασφαλείας κατασκευής**

Αστοχία Κατασκευής

- Κανένα τμήμα της κατασκευής **δεν ικανοποιεί κριτήρια** μέγιστης τάσης ή παραμόρφωσης, διότι:
- Μικρές αλλαγές στη φόρτιση ή εισαγωγή μικρών ατελειών στην κατασκευή την θέτουν **εκτός ισορροπίας**
- Συνήθως συμβαίνει στη **θλιπτική φόρτιση**
- Κυριότερη αιτία ο **λυγισμός**

Αστοχία Υποστυλωμάτων

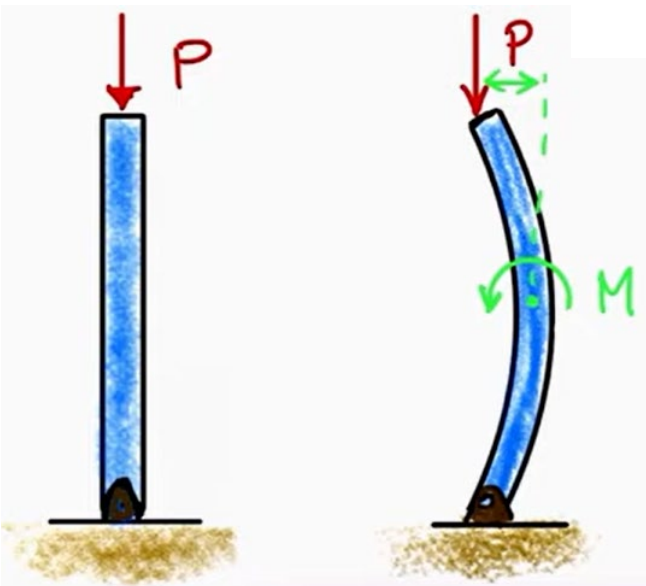


ΛΥΓΙΣΜΟΣ **ΘΛΙΨΗ** **ΔΙΑΤΜΗΣΗ**

Παραδείγματα λυγισμού

Ισορροπία και Αστάθεια

Ιδανικό υποστύλωμα: Ευθύγραμμο, λεπτό, από υλικό με ελαστικές ιδιότητες



Με αύξηση του κάθετου αξονικού φορτίου P το ιδανικό υποστύλωμα περνά από 2 διαδοχικές καταστάσεις:

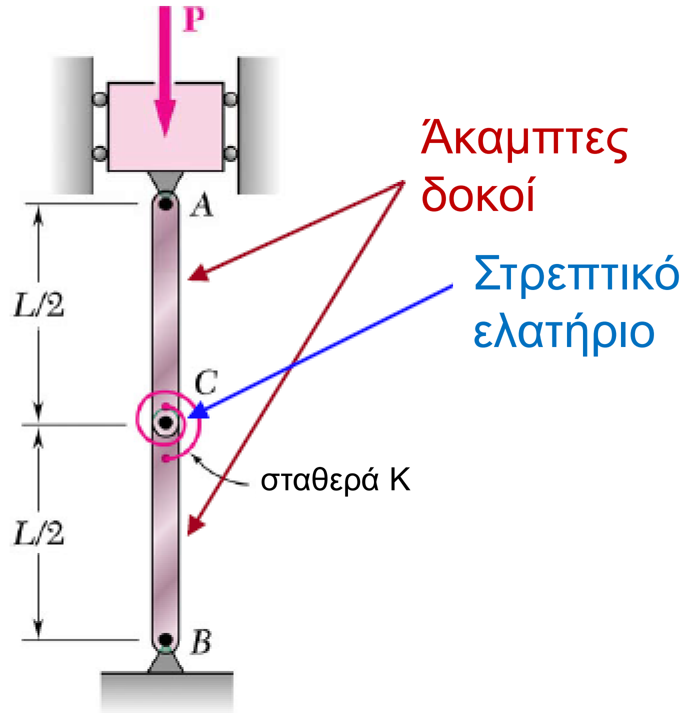
1. **<u>Ευσταθής ισορροπία</u>**
   Όταν **μικρή** δύναμη ασκούμενη μεταξύ των δύο άκρων εκτός από θλίψη, λόγω σχήματος υφίσταται και μικρή πλευρική **εκτροπή** η οποία ισχύει όσο και μόνο ισχύει η πλευρική δύναμη και **παύει να ισχύει όταν αυτή αναιρεθεί.** **Η εκτροπή παράγει καμπτική ροπή.**

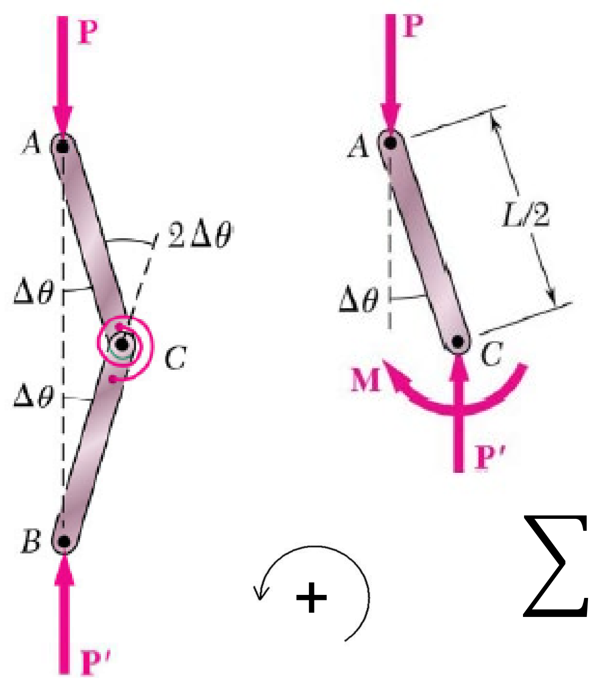
2. **<u>Ασταθής ισορροπία</u>**
   Με περαιτέρω αύξηση του φορτίου πάνω από μια τιμή που καλείται , **κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr}** επέρχεται κατάσταση όπου η πλευρική εκτροπή του υποστυλώματος υφίσταται ακόμη και μετά την αναίρεση του πλευρικού φορτίου.

Ανάλυση Ευστάθειας Ελαστικών Υποστυλωμάτων

Θεωρούμε απλουστευμένο μοντέλο 2 άκαμπτων ράβδων που συνδέονται με πείρο και στρεπτικό ελατήριο.
Εφαρμόζουμε μικρή δύναμη ώστε το σημείο C να μετακινηθεί δεξιά. Εάν μετά την αναίρεση της δύναμης το σύστημα :

- επανέλθει στην κατακόρυφη θέση, τότε έχουμε **ευσταθή ισορροπία**
- δεν επανέλθει έχουμε **αστάθεια**





Κατασκευάζουμε το ΔΕΣ της άνω δοκού

Ροπή στρεπτικού ελατηρίου: $\mathrm{M} = \mathrm{K}(2\Delta\theta)$

Άθροισμα ροπών στο σημείο C:

$$\sum \mathrm{M_C} = \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{L}}{2}\right)\sin\Delta\theta - \mathrm{M} = \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{L}}{2}\right)\sin\Delta\theta - \mathrm{K}(2\Delta\theta)$$

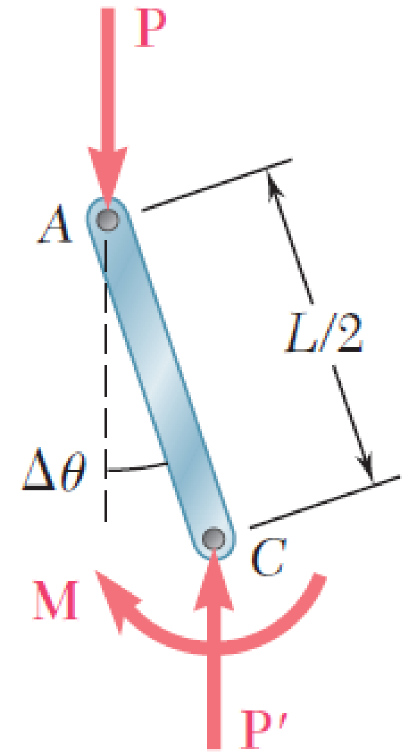
Ανάλυση Ευστάθειας Ελασ. Υποστυλωμάτων (2)

Για μικρές δυνάμεις → μικρές γωνίες Δθ → sinΔθ≈Δθ

$$\sum M_C = P\left(\frac{L}{2}\right)\sin\Delta\theta - K(2\Delta\theta) =$$

$$= P\left(\frac{L}{2}\right)\Delta\theta - K(2\Delta\theta)$$

$$= \left(\frac{PL}{2} - 2K\right)\Delta\theta$$



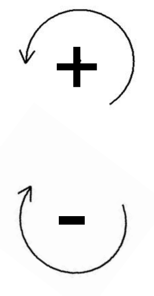
Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως:

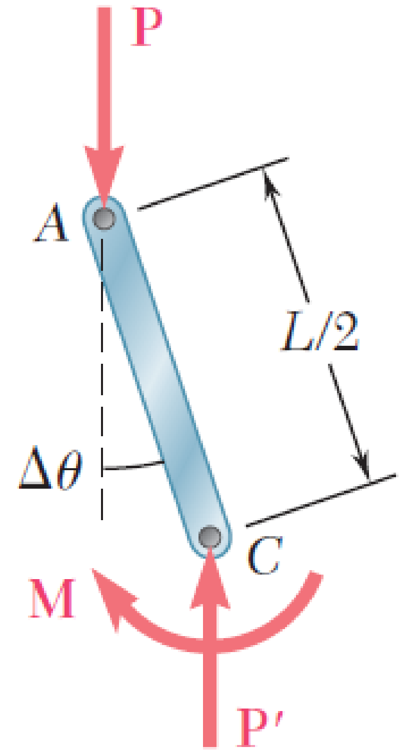
$$\boxed{\sum M_C = \frac{L}{2}\Delta\Theta\left(P - \frac{4K}{L}\right)}$$

Ανάλυση Ευστάθειας Ελασ. Υποστυλωμάτων (3)

Η ροπή αλλάζει πρόσημο για διαφορετικές τιμές φορτίου P:

$$\sum M_C = \frac{L}{2}\Delta\Theta\left(P - \frac{4K}{L}\right)$$





1. $P < \frac{4K}{L} \Rightarrow P - \frac{4K}{L} < 0 \Rightarrow \sum M_C < 0$

Το σημείο C κινείται προς την αρχική θέση στα αριστερά. **Ευσταθής Ισορροπία.**

2. $P = \frac{4K}{L} \Rightarrow P - \frac{4K}{L} = 0 \Rightarrow \sum M_C = 0$

Το σημείο C παραμένει ακίνητο. **Ουδέτερη ισορροπία.**

3. $P > \frac{4K}{L} \Rightarrow P - \frac{4K}{L} > 0 \Rightarrow \sum M_C > 0$

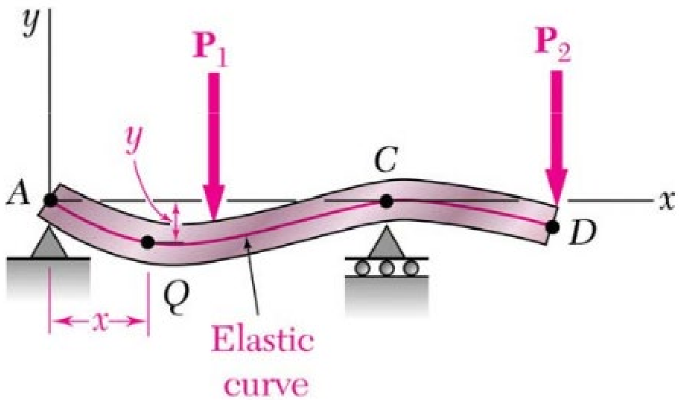
Το σημείο C κινείται προς τα δεξιά. **Ασταθής ισορροπία.**

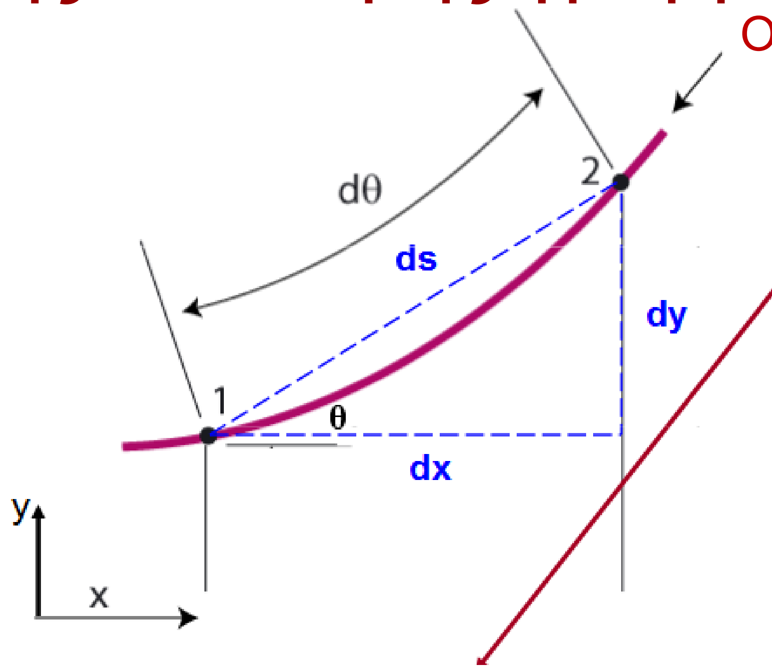
Ανάλυση Ευστάθειας Ελασ. Υποστυλωμάτων (4)

Ορίζουμε ως $\boxed{P_{CR} = \dfrac{4K}{L}}$

Την **κρίσιμη τιμή του φορτίου P** για την οποία το σύστημα μεταβαίνει από την κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας στην κατάσταση ασταθούς ισορροπίας

Εξίσωση εκτροπής ουδέτερης γραμμής y(x)





$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin\theta$$

$$ds = \rho d\theta \Rightarrow \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

Παραδοχή 1:
Μικρές γωνίες θ:

$$ds \cong dx \longrightarrow \frac{d\theta}{ds} \cong \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\rho}$$

$$\tan\theta \cong \theta \longrightarrow \frac{dy}{dx} \cong \theta \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\rho}$$

Εξίσωση εκτροπής ουδέτερης γραμμής (συν.)

Παραδοχή 2:
Υποστύλωμα συμπεριφέρεται γραμμικά ελαστικά

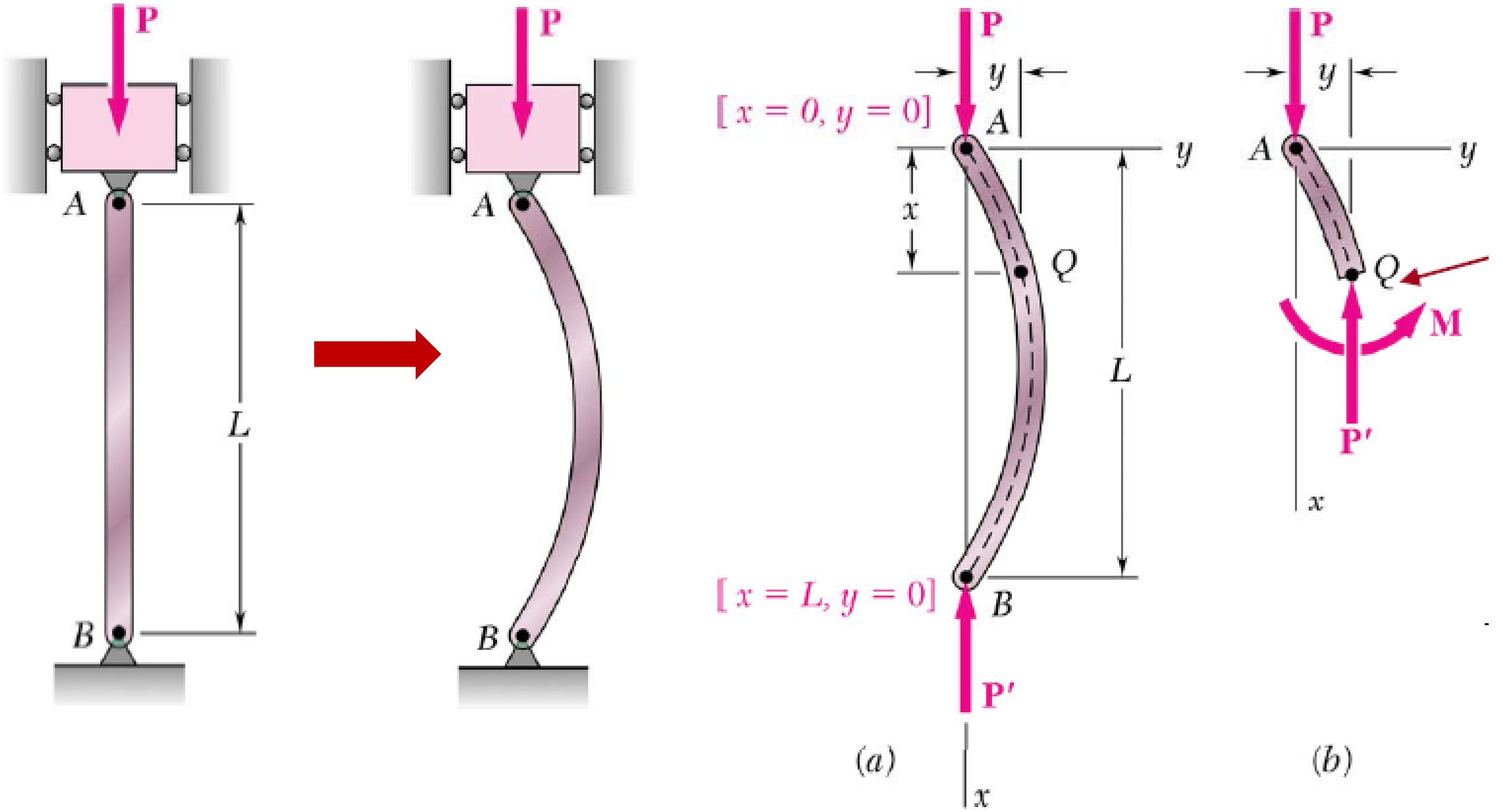
$$M = \frac{EI}{\rho} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

Από ύλη κάμψης

Συνεπώς: $$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}}$$

Διαφορική εξίσωση ουδέτερης γραμμής

Κρίσιμο φορτίο Euler για διαρθρωτό υποστύλωμα



Ροπή στη θέση x: **M=Py**

Επίλυση της εξίσωσης της ουδέτερης γραμμής $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{Py}{EI}$$

Τύπος Euler (συν.)

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{Py}{EI} = 0 \xrightarrow{\text{Θέτω } p^2 = \frac{P}{EI}} \frac{d^2y}{dx^2} - p^2y = 0$$

Γενική λύση: $y = A\sin px + B\cos px$

Οριακές συνθήκες: $y(0) = 0 \Rightarrow B = 0$

$$y(L) = 0 \Rightarrow A\sin pL = 0$$

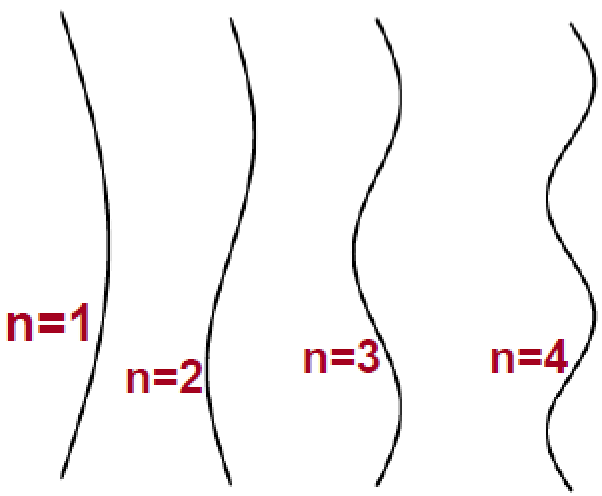
$$\Rightarrow pL = n\pi \Rightarrow p = \frac{n\pi}{L}$$

Ειδική λύση: $\boxed{y(x) = A\sin\frac{n\pi}{L}x}$

Τύπος Euler (συν.)

Αντικατάσταση: $p^2 = \frac{P}{EI} \xrightarrow{\quad p = \frac{n\pi}{L} \quad} \frac{n^2\pi^2}{L^2} = \frac{P}{EI} \Rightarrow$

$$\boxed{P = \frac{n^2\pi^2}{L^2} EI}$$

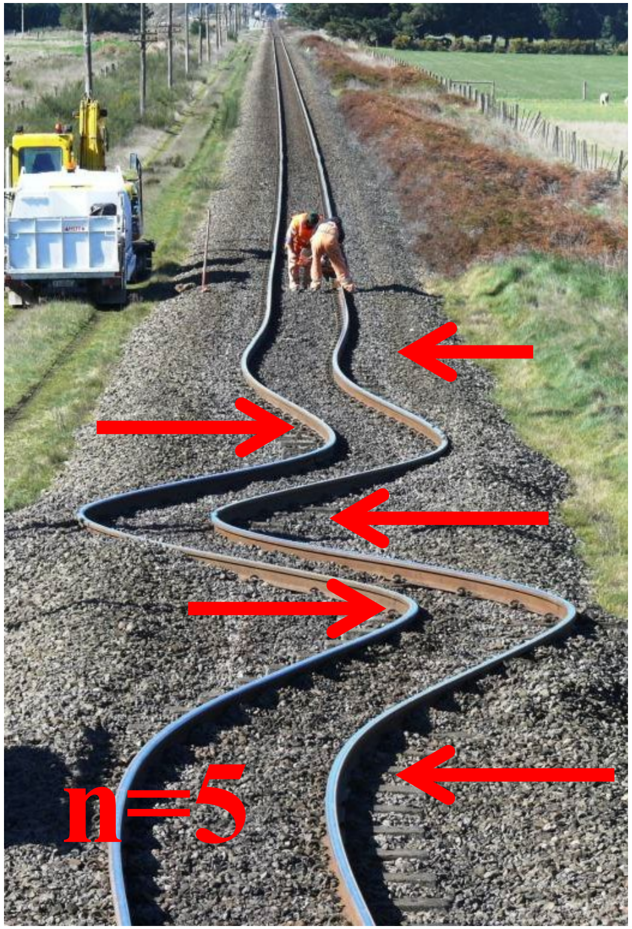


$$(P_{CR})_{n=1} = \frac{\pi^2}{L^2} EI$$

$$< (P_{CR})_{n=2} = \frac{4\pi^2}{L^2} EI$$

$$< (P_{CR})_{n=3} = \frac{9\pi^2}{L^2} EI$$

$$< (P_{CR})_{n=4} = \frac{16\pi^2}{L^2} EI$$



Τύπος Euler (συν.)

Η χαμηλότερη τιμή φορτίου λυγισμού P αντιστοιχεί στο n = 1

$$\boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2}{L^2}EI}$$

$$\boxed{y(x) = A\sin\frac{\pi}{L}x}$$

Κρίσιμο φορτίο λυγισμού

Όσο κοντύτερη και σκληρότερη είναι η ράβδος και όσο πιο «ανοιχτή» η διατομή τόσο δυσκολότερα λυγίζει!!

$$\boxed{\sigma_{cr} = \frac{\pi^2}{AL^2}EI}$$

Να υπολογίζεται στο σημείο της διατομής με το μικρότερο λόγο A/I

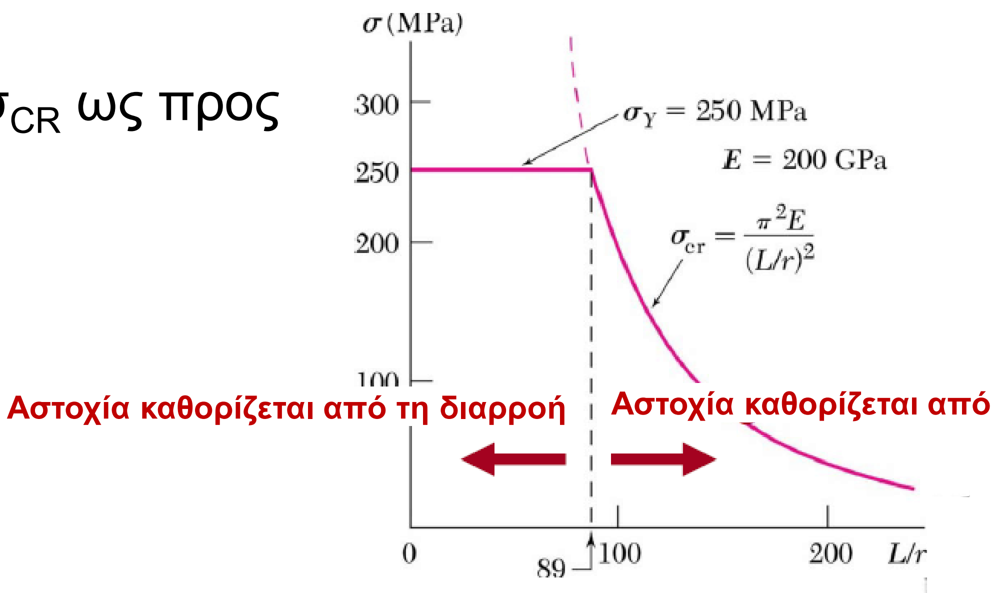
Τύπος Euler (συν.)

Για διατομή ορθογώνιου παραλληλόγραμμου $I = \frac{bh^3}{12}$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2}{AL^2} EI = \frac{\pi^2}{bhL^2} E \frac{bh^3}{12} = \frac{\pi^2 E h^2}{12L^2} = \frac{\pi^2 E}{12} \left(\frac{1}{(L/h)^2} \right)$$

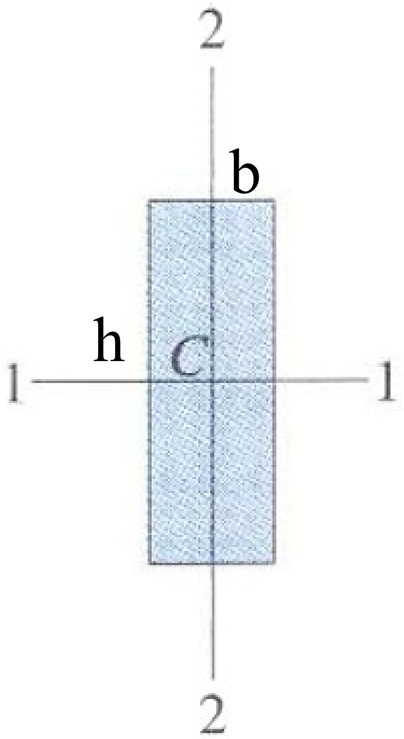
Συντελεστής λυγηρότητας

Τυπικό διάγραμμα σ_{CR} ως προς L / h για χάλυβα



Διεύθυνση λυγισμού

$$I_{1-1} = \frac{1}{12} b h^3$$



$$I_{2-2} = \frac{1}{12} h b^3$$

$$I_{1-1} > I_{2-2}$$

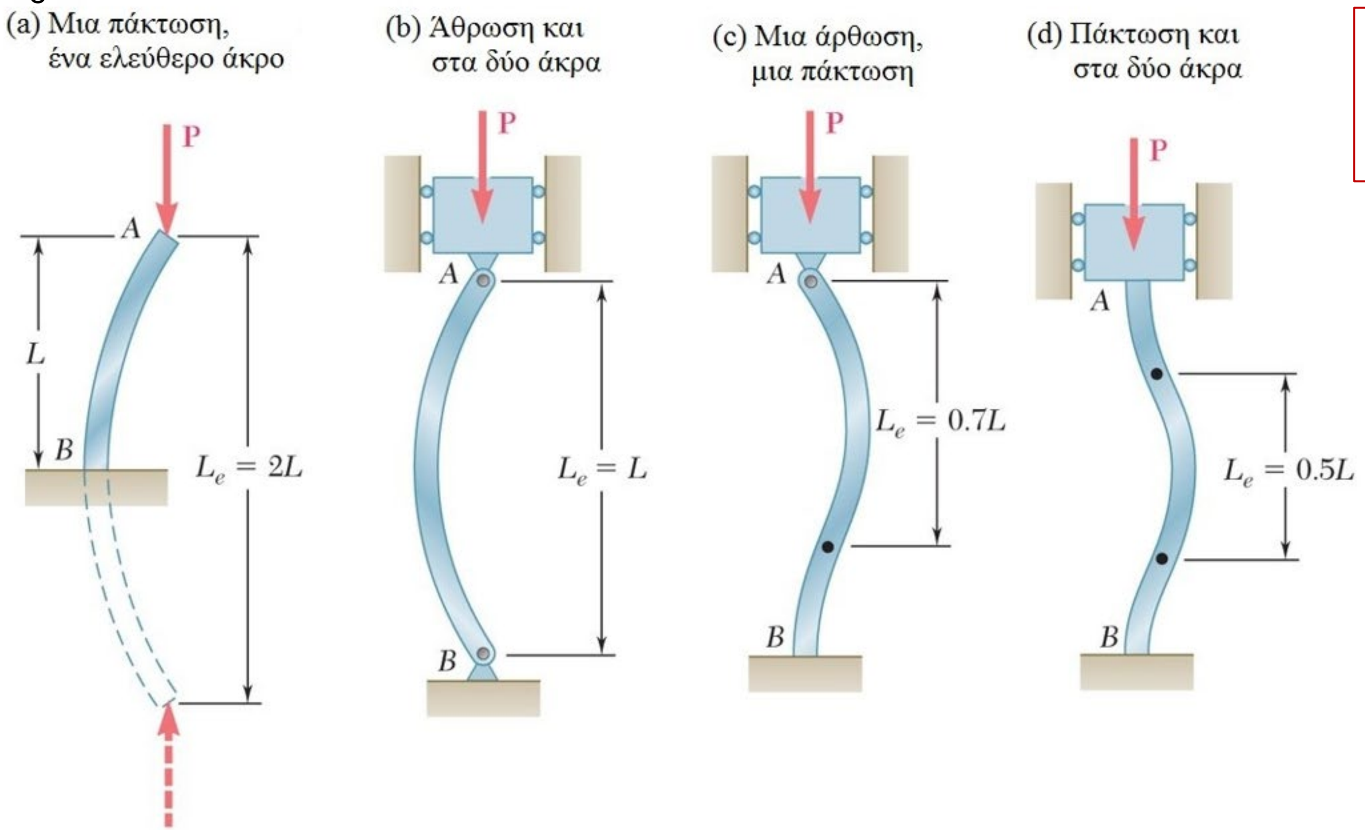
$$P_{cr} = \frac{\pi^2}{L^2} EI$$

$$P_{CR,1-1} > P_{CR,2-2}$$

Το υποστύλωμα λυγίζει ως προς τον άξονα 2-2 πρώτα.

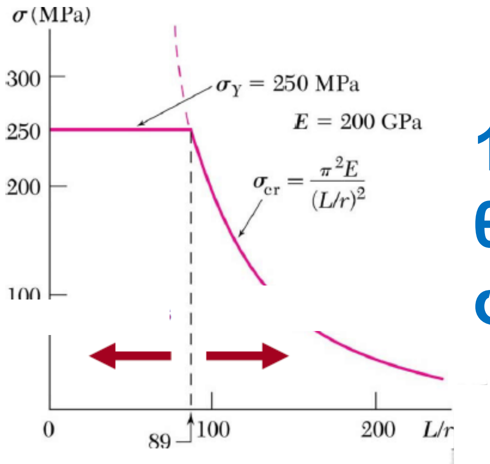
Άλλες συνθήκες άκρων

Ο τύπος Euler υπολογίστηκε για διαρθρωτό υποστύλωμα. Η χρήση του μπορεί να επεκταθεί σε υποστυλώματα με άλλες συνθήκες άκρων με αντικατάσταση του μήκους L με ένα ισοδύναμο μήκος L_e. L συνεχίζει να είναι το πραγματικό μήκος του υποστυλώματος όμως στη σχέση του Euler χρησιμοποιείται το ισοδύναμο μήκος L_e.



$$P_{cr} = \frac{\pi^2}{L_e^2} \mathrm{EI}$$

Ο λυγισμός εξαρτάται

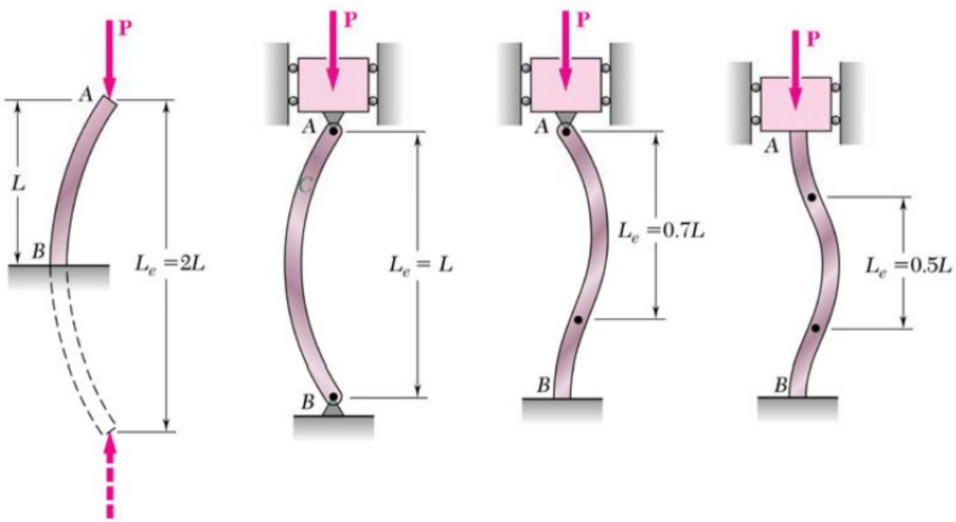


1. από το θλιπτικό φορτίο

$$\boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2}{L^2} EI}$$

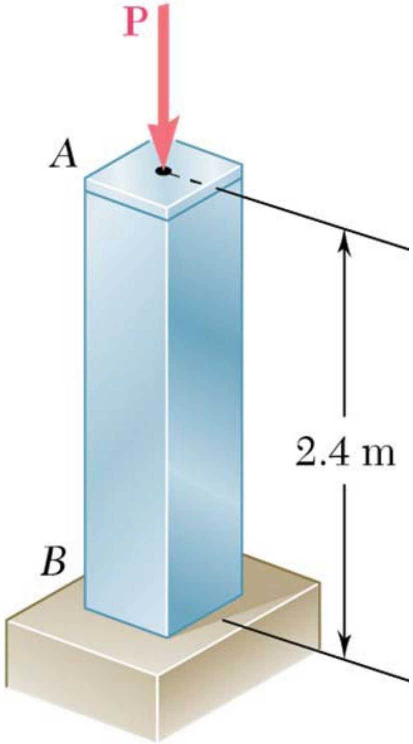
2. τις ελαστικές ιδιοτήτες του υλικού

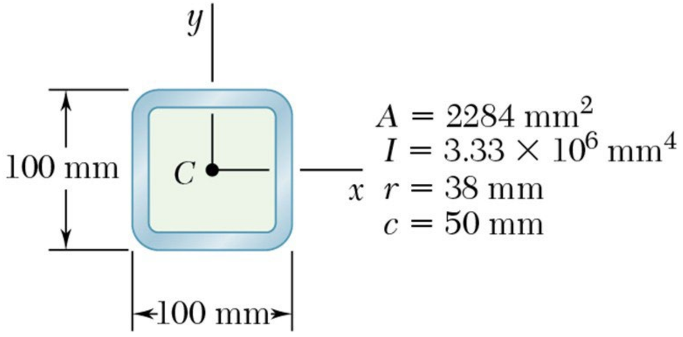
3. το σχήμα της διατομής



4. τον τρόπο στήριξης της ράβδου

Πρόβλημα 1



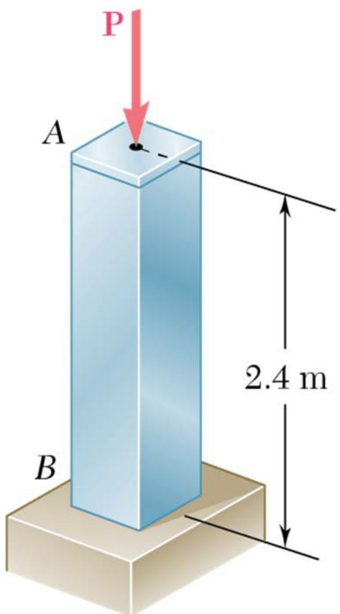


Το ομοιόμορφο υποστύλωμα *AB* αποτελείται από δομικό σωλήνα μήκους 2,4 m που έχει την εικονιζόμενη εγκάρσια τομή.

Χρησιμοποιώντας το τύπο του Euler και συντελεστή ασφαλείας *FS*=2.0, προσδιορίστε το μέγιστο επιτρεπόμενο κεντρικό φορτίο για το υποστύλωμα και την αντίστοιχη ορθή τάση.

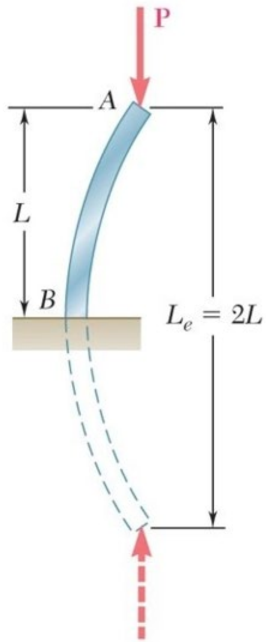
Δίνεται *E* = 200 GPa

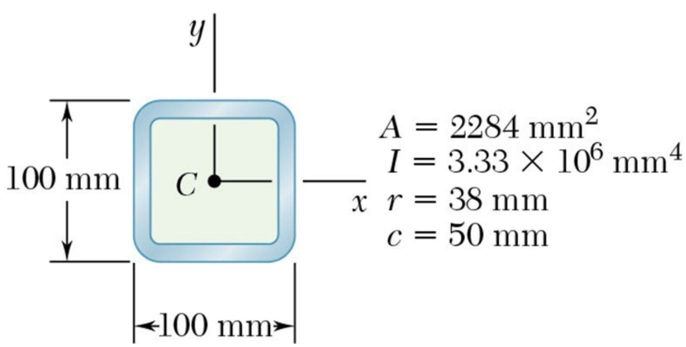
Πρόβλημα 1 (συν.)



(a)

(a) Μια πάκτωση, ένα ελεύθερο άκρο





Λύση:

- Ισοδύναμο μήκος: $L_e = 2(2,4\ \text{m}) = 4,8\ \text{m}$

- Κρίσιμο φορτίο λυγισμού:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{\pi^2 \left(200\times 10^9\ \text{Pa}\right)\left(3,33\times 10^{-6}\ \text{m}^4\right)}{(4,8\ \text{m})^2}$$

$$= 285,3\ \text{kN}$$

- Επιτρεπόμενο φορτίο & τάση:

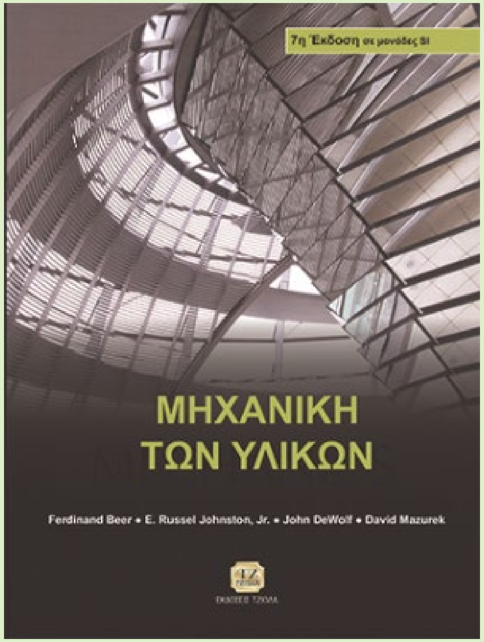
$$P_{all} = \frac{P_{cr}}{FS} = \frac{285,3\ \text{kN}}{2} \qquad \boxed{P_{all} = 142,7\ \text{kN}}$$

$$\sigma = \frac{P_{all}}{A} = \frac{142,7\ \text{kN}}{2284\times 10^{-6}\ \text{m}^2} \qquad \boxed{\sigma = 62,5\ \text{MPa}}$$

Ανακοινώσεις

Περισσότερη Μελέτη:

- **Κεφάλαιο 10**, F. Beer et al, Μηχανική των Υλικών, 7η Έκδοση, 2022



Ώρες συνεργασίας με φοιτητές: Τετάρτη 12.00-14.00