



CHM_582: Μηχανική Υλικών

Διάλεξη 7: Στρέψη

Κωνσταντίνος Γ. Δάσιος, Αναπλ. Καθηγητής
Τμήμα Χημικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών
kdassios@upatras.gr

Πάτρα, Μάιος 2024

Στρέψη

- Εισαγωγή – Παραδείγματα – Γενική θεώρηση
- Υπόθεση επίπεδης & απαραμόρφωτης εγκάρσιας διατομής
- Κατανομή διατμητικής παραμόρφωσης σε κυκλική διατομή
- Γραμμική μεταβολή διατμητικής παραμόρφωσης με απόσταση από άξονα
- Κατανομή διατμητικής τάσης σε κυκλική διατομή
- Εξισώσεις ελαστικής στρέψης
- Γωνίας στρέψης άξονα υπό ροπή στρέψης
- Άξονες μετάδοσης κίνησης
- Συγκέντρωση τάσης σε μεταβολή διατομής

Στρέψη

Έως τώρα μελετήσαμε τις ροπές και τις τάσεις σε δομικά μέλη που υπόκεινται σε αξονικές και εγκάρσιες φορτίσεις (ορθές-διατμητικές τάσεις και παραμορφώσεις).

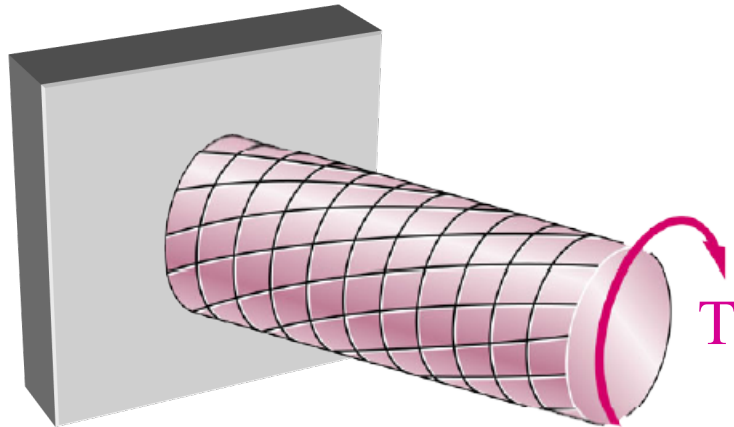
Στην **στρέψη** μελετούμε τις τάσεις και παραμορφώσεις σε άξονες (στοιχεία κυκλικής εγκάρσιας διατομής) που υπόκεινται σε **ζεύγη ροπών στρέψης**.



Είδος απλής καταπόνησης όπως εφελκυσμός, όμως $M \neq 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Στοιχείο καταπονείται σε **στρέψη** όταν πάνω σε αυτόν ενεργούν **ζεύγη ίσων και αντίθετων ροπών** (κοινό μέτρο και αντίθετες κατευθύνσεις), που τα **επίπεδα τους είναι κάθετα** στον κεντροβαρικό του άξονα.

Στρέψη - Παραδείγματα

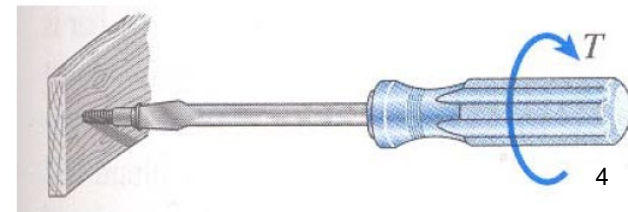
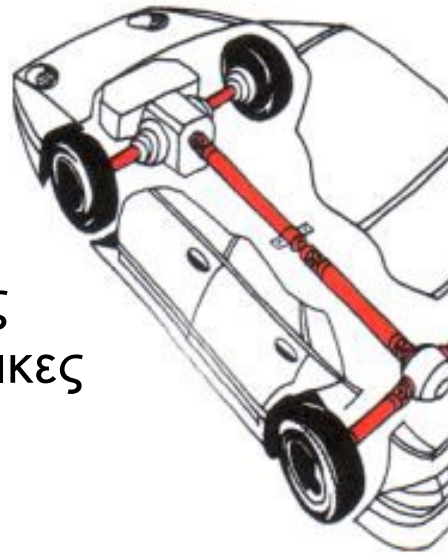


Οι στρεπτικές δυνάμεις παράγουν περιστροφική κίνηση γύρω από το διαμήκη άξονα, του ενός άκρου του σώματος ως προς το άλλο.



Πολλά εξαρτήματα καταπονούνται σε στρέψη εκ κατασκευής:

- Άξονες μετάδοσης κίνησης
- Στρόβιλοι (τουρμπίνες), έλικες
- Κατσαβίδια, κοχλίες κλπ



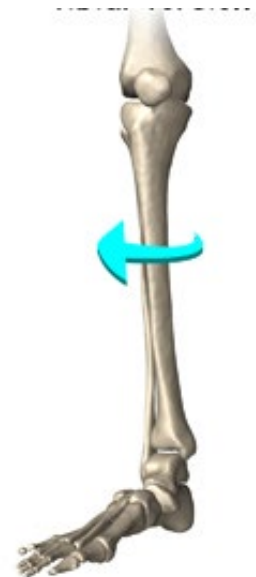
Στρέψη – Παραδείγματα (2)

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου η στρέψη **δεν** είναι επιθυμητή, αλλά συμβαίνει.

Πτερύγια



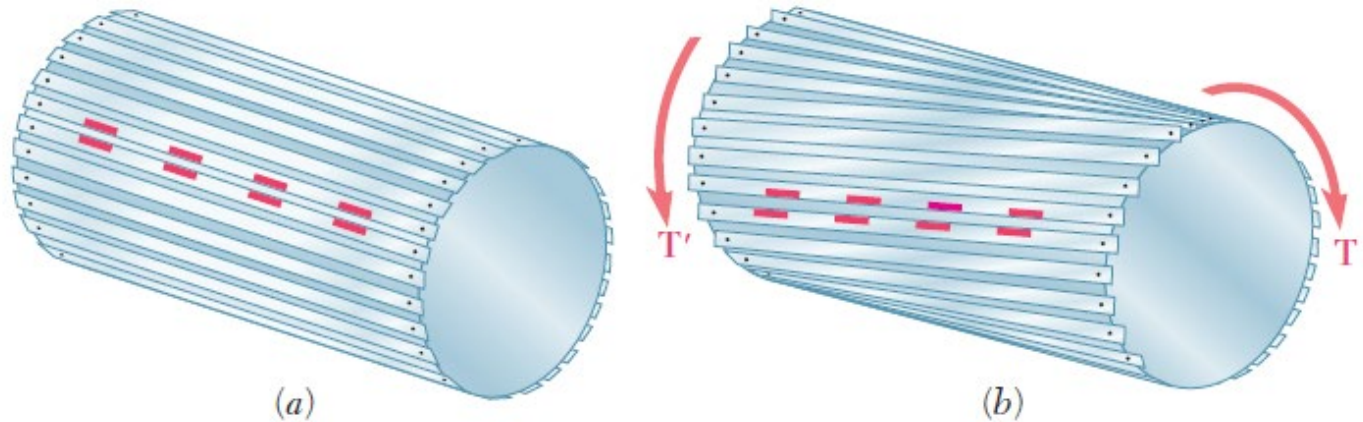
Αμαξώματα



Ανθρώπινα οστά

Γενική Θεώρηση

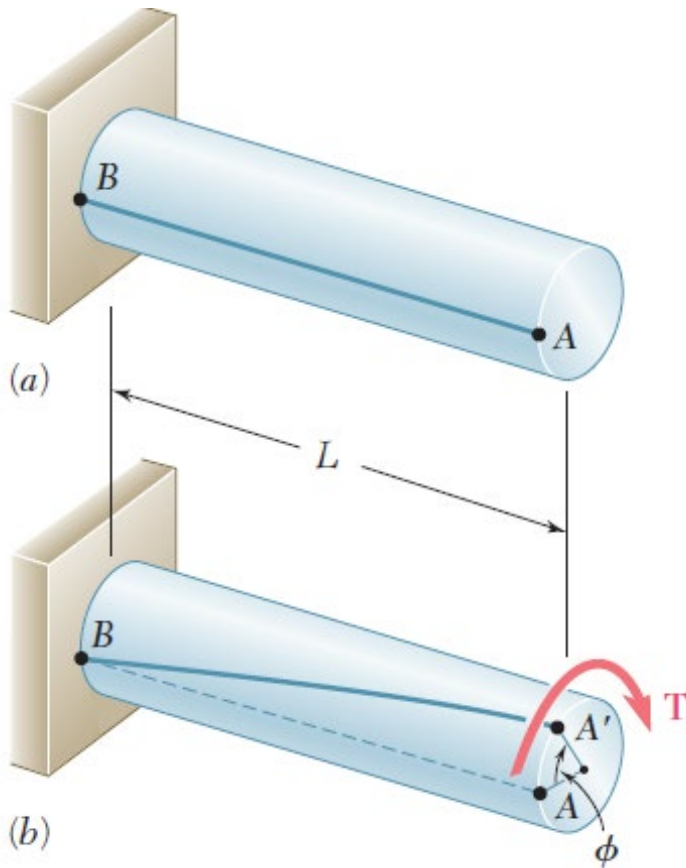
Απόδειξη
ανάπτυξης
διάτμησης υπό
στρέψη



Η στατική ανάλυση για τον προσδιορισμό της **πραγματικής κατανομής των τάσεων** σε άξονα υπό στρέψη (υπό την επίδραση ροπής) είναι **πολύπλοκη** γιατί το πρόβλημα είναι **υπερστατικό** (απόδ. ενότ. 3.2 συγγρ.)

Γενική Θεώρηση (2)

Αναπτύσσουμε απλοποιημένη προσέγγιση μέσω **παραμορφώσεων**.



Στο ελεύθερο άκρο άξονα-προβόλου μήκους L ασκείται ροπή T , που το οδηγεί να περιστραφεί (ως προς το σταθερό άκρο) κατά ϕ : **γωνία στρέψης**.

Για μικρές ϕ , οι σχέσεις $\phi(T)$ και $\phi(L)$ είναι **γραμμικές**.



$\phi(2L)$ σε άξονα ίδιου υλικού & διατομής υπό ίδια ροπή = ;

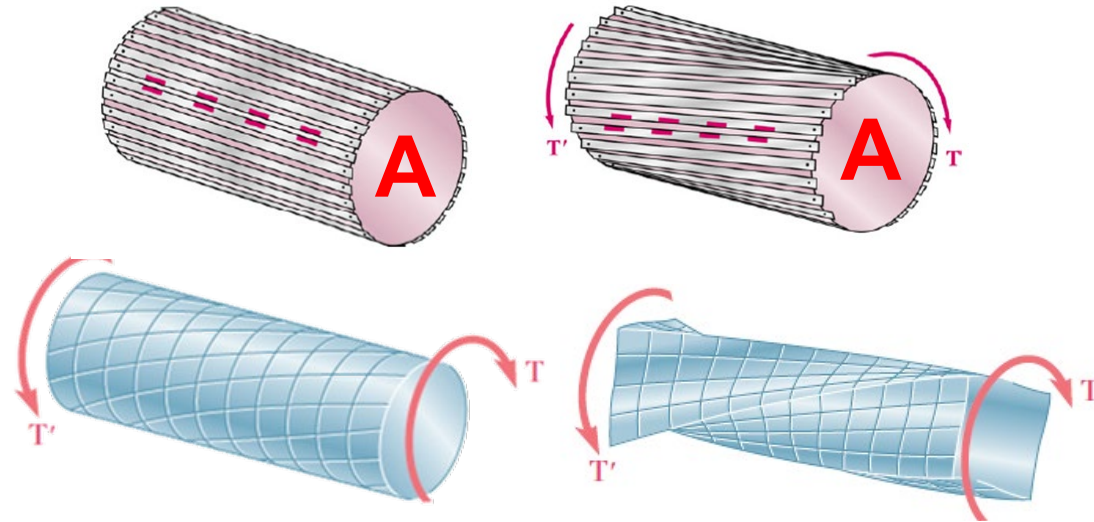
Θα προσδιορίσουμε $\phi(T)$, $\phi(L)$ & την **κατανομή των τάσεων** στον άξονα βάσει αυτών.

Παραδοχές

Για την ανάλυση κάνουμε τις παραδοχές:

1. Το υλικό είναι **ομογενές** και **γραμμικά ελαστικό**.
2. Μικρές γωνίες στρέψης → **Ελαστική** συμπεριφορά
3. Όταν κυκλικός άξονας κυκλικής διατομής υπόκειται σε στρέψη, **κάθε διατομή του** παραμένει **επίπεδη** και **απαραμόρφωτη**.

Ενώ οι επιμέρους διατομές κατά μήκος του άξονα, **περιστρέφονται κατά διαφορετικό βαθμό**, κάθε μια περιστρέφεται ως **στερεός συμπαγής δίσκος**, παραμένοντας **κυκλικές και επίπεδες, κάθετες στον κεντροβαρικό άξονα**.



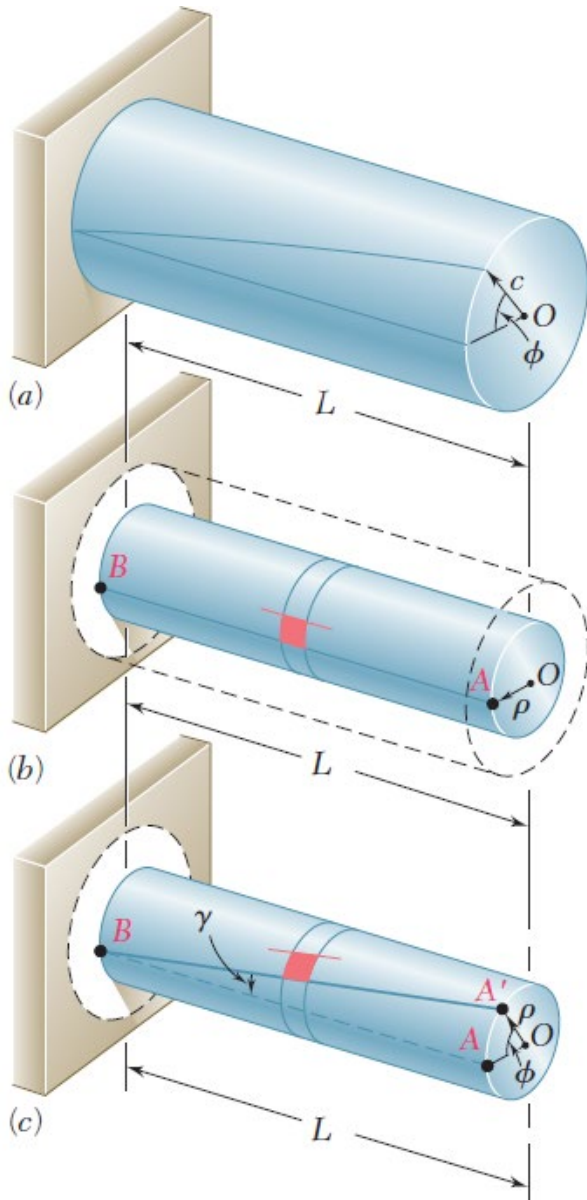
Ισχύει για αξονοσυμμετρικούς άξονες (επίπεδη διατομή, \perp στον άξονα)
Απόδειξη ενότητα 3.3

Δεν ισχύει για τους περισσότερους άξονες μη-κυκλικής διατομής (μη-επίπεδη διατομή, υπό γωνία προς άξονα) 8

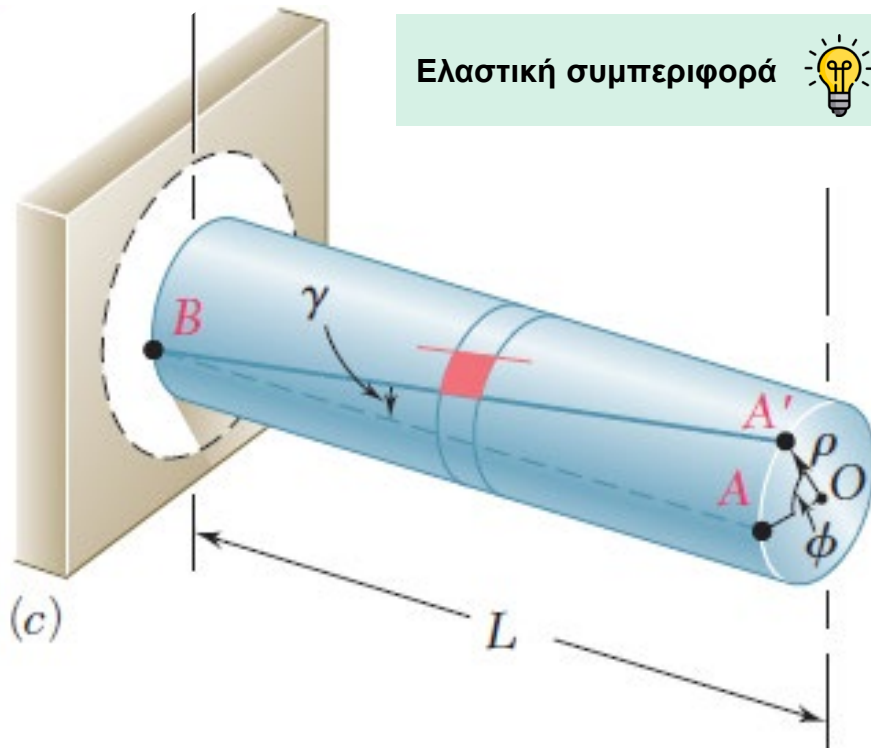
Κατανομή Διατμητικής Παραμόρφωσης

Άξονας **κυκλικής διατομής**, μήκους L , ακτίνας c , στρεμμένος κατά **γωνία ϕ** .

- Θεωρούμε **στοιχειώδες ορθογώνιο** τμήμα της επιφάνειας του κυλίνδρου που σχηματίζεται σε τυχαία θέση ρ της ακτίνας.
- Λόγω της στρεπτικής ροπής, το τμήμα παραμορφώνεται προς **λοξό παραλληλεπίπεδο** (ρόμβος).
- Ορισμός: Η γωνία γ (rad) μεταξύ των πλευρών του αρχικού και του συνεστραμμένου στοιχείου είναι η **διατμητική παραμόρφωση γ** .
- Εφόσον οι κύκλοι παραμένουν απαραμόρφωτοι, γ είναι η γωνία μεταξύ **AB και $A'B$** .



Κατανομή Διατμητικής Παραμόρφωσης (2)



Ελαστική συμπεριφορά



Για **μικρές γωνίες γ** ($\tan \gamma \approx \gamma$):

- Τρίγωνο $A'BA$: τόξο AA' ευθύγραμμο, μήκος **$AA' \approx L\gamma$**

- Τρίγωνο μικρό $A'OA$: **$AA' \approx \rho\phi$**

Συνεπώς **$L\gamma = \rho\phi$** , ή:

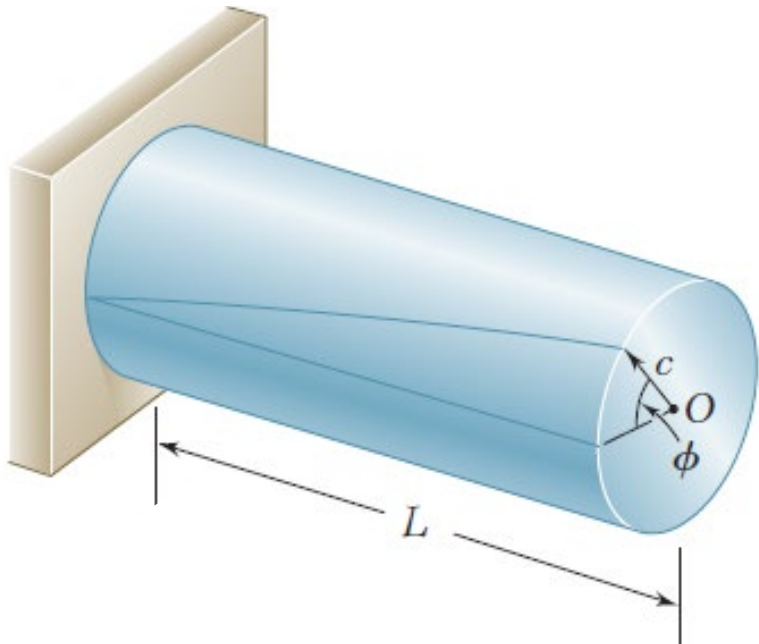
Η διατμητική παραμόρφωση γ είναι ανάλογη:

- της γωνίας στρέψης ϕ
- της απόστασης ρ από τον κεντροβαρικό άξονα

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L}$$

Η διατμητική παραμόρφωση σε κυκλικό άξονα μεταβάλλεται **γραμμικά** με την απόσταση από το κέντρο του.

Κατανομή Διατμητικής Παραμόρφωσης (3)



Για $\rho=0$, $\gamma=0=\min$

Για $\rho=c$, $\gamma=\gamma_{\max}$ $\gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L}$

Η διατμητική παραμόρφωση σε συμπαγή άξονα είναι **μέγιστη** στην εξωτερική του επιφάνεια και **μηδέν** στο κέντρο του.



Από ποια σημεία ξεκινά η αστοχία ενός άξονα σε στρέψη;

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L}$$

$$\gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L}$$

$$\gamma = \frac{\rho}{c} \gamma_{\max}$$

Διατμητική παραμόρφωση γ σε απόσταση ρ από το κέντρο του άξονα

Κατανομή Διατμητικών Τάσεων

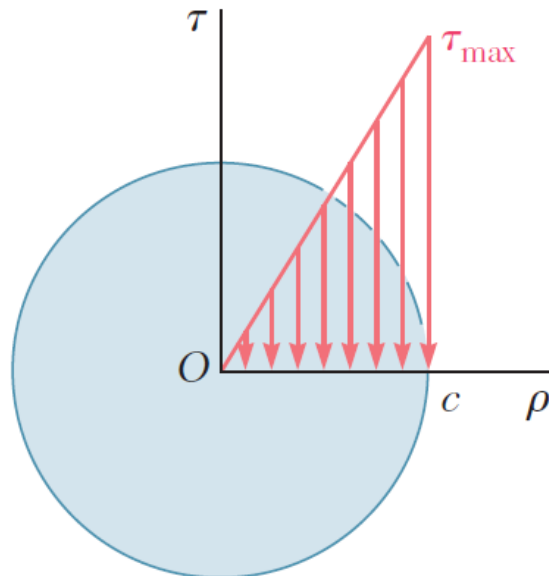
Για ελαστικές τάσεις-παραμορφώσεις (κάτω από το όριο διαρροής) ισχύει ο νόμος του Hooke για διάτμηση:

$$\tau = G\gamma$$

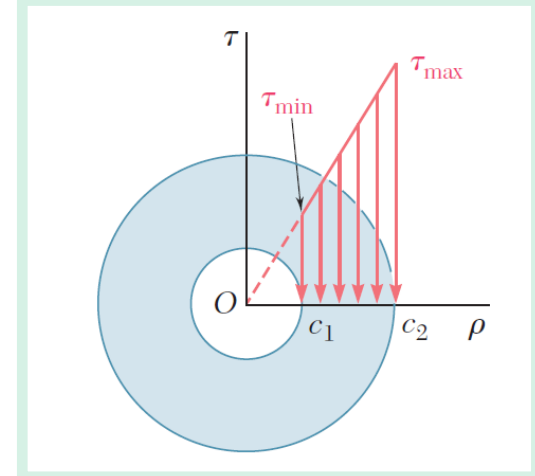
Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη:

$$\gamma G = \gamma_{max} G \frac{\rho}{c} \Rightarrow \tau = \tau_{max} \frac{\rho}{c}$$

Η διατμητική τάση μεταβάλλεται γραμμικά με την απόσταση από το κέντρο του άξονα.
min @ $\rho=0$ / max @ $\rho=c$



Τι συμβαίνει σε κοίλο άξονα;



Ροπή Στρέψης

Θέλουμε να εκφράσουμε τη διατμητική τάση T ως προς την επιβαλλόμενη ροπή, T , που συχνά αποτελεί το μόνο γνωστό μέγεθος κατά τη στρέψη.

Αρχικά βρίσκουμε τη ροπή, dM , που ασκείται σε ένα στοιχείο dA της διατομής, σε θέση r κατά μήκος της ακτίνας:

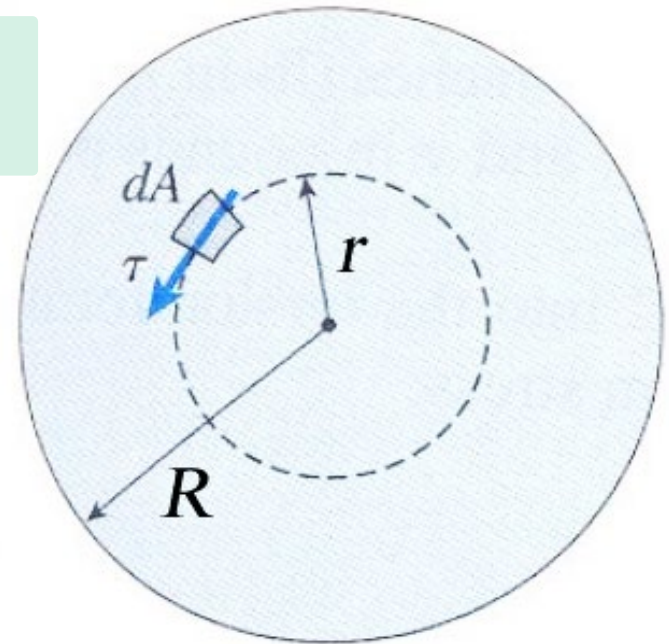
$$dM = r\tau dA$$



$$\tau dA [=] ?$$

Η συνολική ροπή θα είναι:

$$T = \int_A \tau r dA = \frac{\tau_{max}}{R} \int_A r^2 dA$$



Ροπή Στρέψης (2)

Στη σχέση

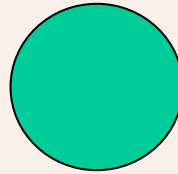
$$T = \frac{\tau_{max}}{R} \int_A r^2 dA$$

$$\tau_{max} = \frac{TR}{J}$$

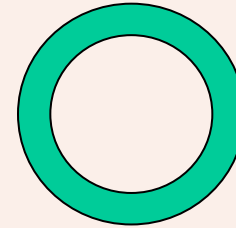
J

**«Πολική ροπή αδράνειας»
της διατομής του άξονα**

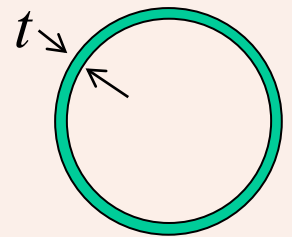
Μέτρο της ικανότητας της γεωμετρίας του άξονα να αντιστέκεται στη στρέψη



$$J = \frac{1}{2} \pi R^4$$



$$J = \frac{1}{2} \pi (R^4 - r^4)$$



$$J = 2\pi R^3 t$$

Ομοίως

$$\tau(r) = \frac{Tr}{J}$$

Διατμητική τάση σαν
συνάρτηση της
απόστασης από το
κέντρο βάρους του άξονα

Γωνία στρέψης από τάση

$$\tau_{max} = \gamma_{max} G \Rightarrow \tau_{max} = \frac{\varphi R}{L} G$$

Σε συνδυασμό με $\tau_{max} = \frac{TR}{J}$ προκύπτει:

$$\frac{TR}{J} = \frac{\varphi R}{L} G \Rightarrow \varphi = \frac{TL}{JG}$$

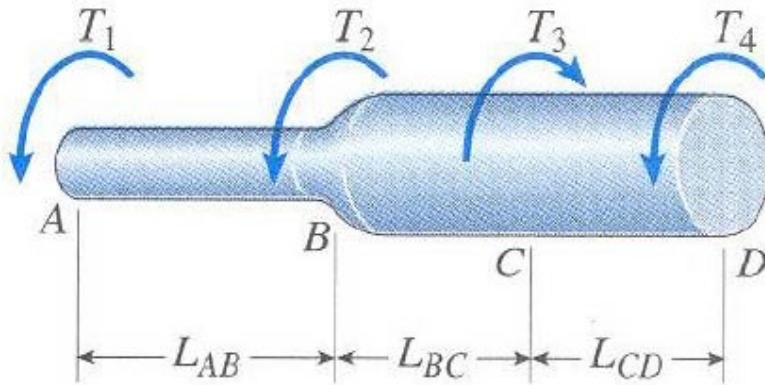
Η γωνία στρέψης εξαρτάται από την **εξωτερικά επιβαλλόμενη ροπή T**, το **μήκος** του άξονα L, την **πολική ροπή αδράνειας** της διατομής J και το **μέτρο διάτμησης** του άξονα, G.



Πως
υπηρεύεται
το υλικό;

Ροπή στρέψης - ειδικές περιπτώσεις

Για άξονα μη-ομοιόμορφης διατομής:

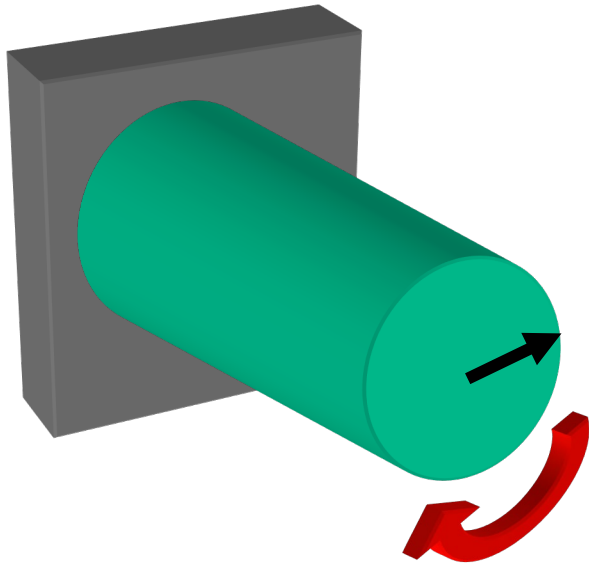


$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \sum_{i=1}^n \frac{T_i L_i}{J_i G_i}$$

Για άξονα μονοτόνως μεταβαλλόμενης διατομής:

$$\varphi = \int_0^L \frac{T(x)}{GJ(x)} dx$$

Παράδειγμα 1



Εάν η μέγιστη διατμητική τάση του υλικού είναι 120 MPa, ποια είναι η μέγιστη στρεπτική ροπή που μπορεί να ασκηθεί στο άκρο της δοκού;

$$R=10\text{mm} \quad \tau_{max} = \frac{TR}{J} \Rightarrow T = \frac{\tau_{max}J}{R}$$

T=?

$$J = \frac{1}{2} \pi R^4 = \frac{1}{2} \pi 0.01^4 = 1.57 \cdot 10^{-8} \text{m}^4$$

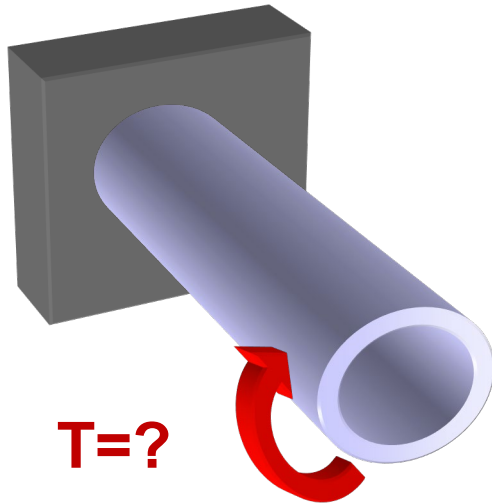
$$T = \frac{\tau_{max} \cdot J}{R} = \frac{120 \cdot 10^6 \cdot 1.57 \cdot 10^{-8}}{0.01} = 188.4 \text{N} \cdot \text{m}$$

Εάν το μέτρο διάτμησης είναι $G=40$ GPa, και το μήκος $L=1$ m υπολογίστε τη γωνία στροφής του ελεύθερου άκρου.

$$\varphi = \frac{TL}{JG} = 0.3 \text{ rad}$$

Παράδειγμα 2

Εφόσον η μέγιστη διατμητική τάση του υλικού είναι 120 MPa, ποια είναι η μέγιστη στρεπτική ροπή που μπορεί να ασκηθεί στο άκρο της δοκού; Δίνονται εξωτερική ακτίνα $R=30$ mm, εσωτερική ακτίνα $r=20$ mm.



$$T = \frac{\tau_{max} J}{R}$$

$$J = \frac{1}{2} \pi (R^4 - r^4) = \frac{1}{2} \pi (0.03^4 - 0.02^4) = 1.0205 \cdot 10^{-6} m^4$$

$$T = \frac{\tau_{max} \cdot J}{R} = \frac{120 \cdot 10^6 \cdot 1.0205 \cdot 10^{-6}}{0.03} = 4.082 kNm$$



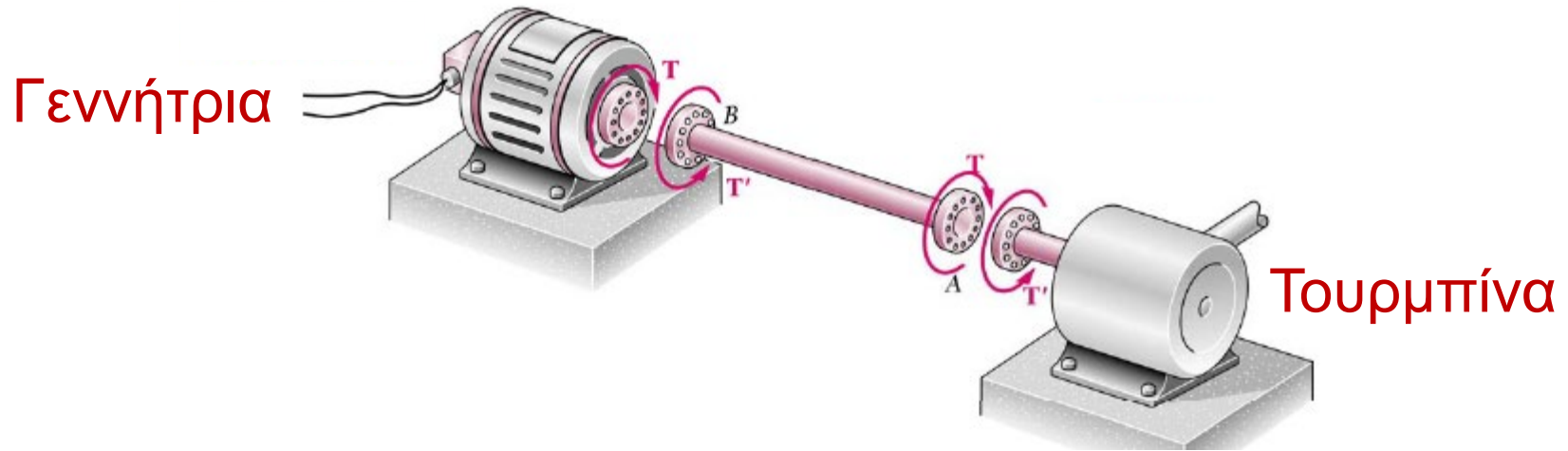
Συγκρίνετε με προηγούμενο

Ποια είναι η ελάχιστη διατμητική τάση;

$$\tau_{min} = \frac{r}{R} \tau_{max} = \frac{0.02}{0.03} 120 = 80 MPa$$

Ισχύς Άξονα

Ένας άξονα μετάδοσης μεταδίδει μηχανική ισχύς από μια συσκευή, σε μια άλλη, όπως για παράδειγμα από μια γεννήτρια προς μια τουρμπίνα



Η ισχύς, P , που μεταδίδεται από τον άξονα δίνεται από τη σχέση:

$$P = T\omega$$

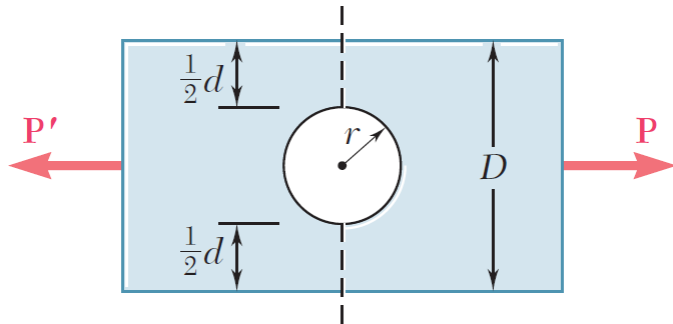
- T , η ροπή που ασκείται στον άξονα, και μεταδίδεται από αυτόν [N.m]
- ω , η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του άξονα [rad/s]

P σε [W]

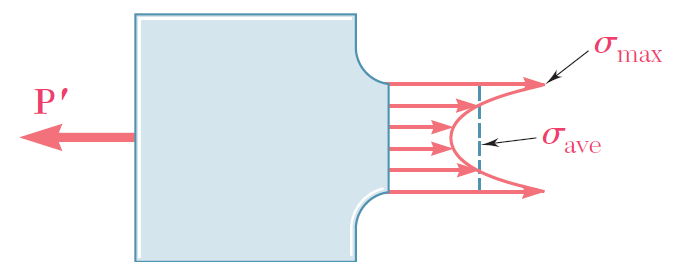
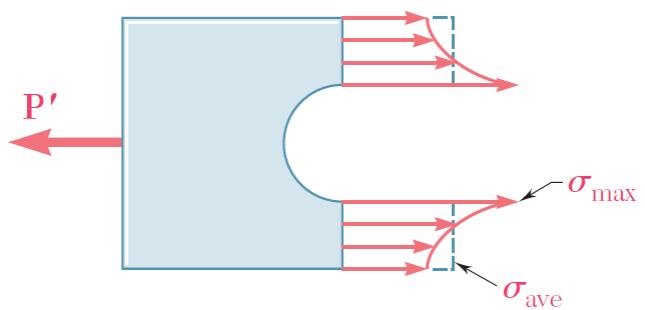
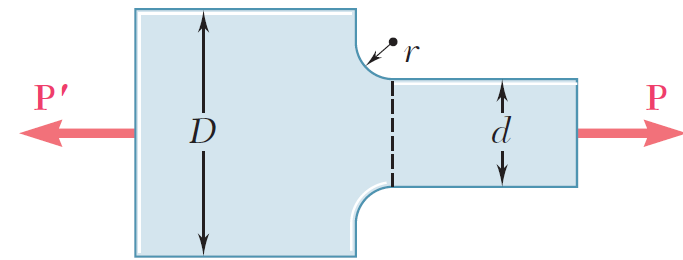
Συγκέντρωση Τάσεων

Κοντά σε ατέλειες/ασυνέχειες υλικού και απότομες μεταβολές διατομής, οι τάσεις μεγαθύνονται (συγκεντρώνονται).

Ατέλεια/ασυνέχεια



Μεταβολή διατομής

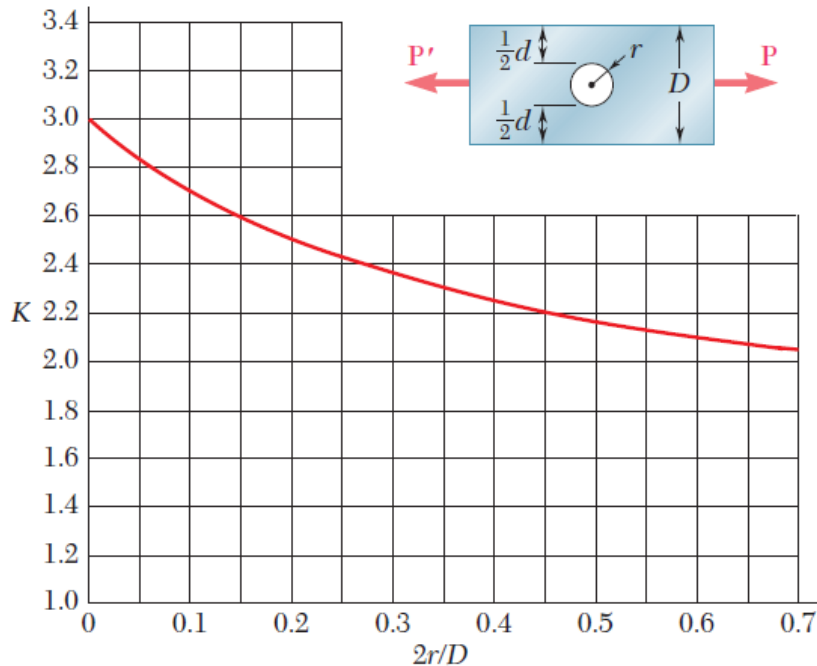


Συντελεστής συγκέντρωσης τάσης:

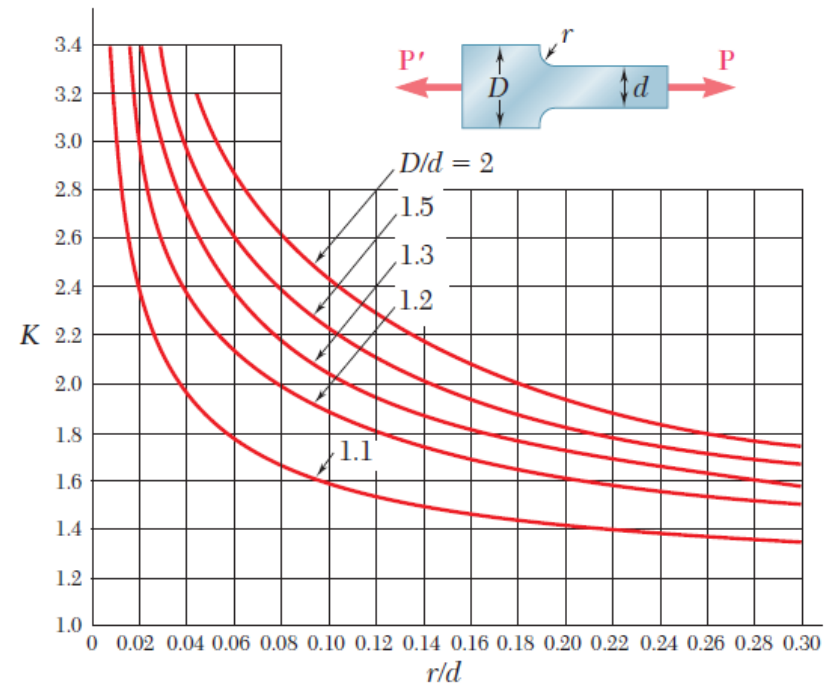
$$K = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{ave}}}$$

Συντελεστής Συγκέντρωσης Τάσεων

Ατέλεια/ασυνέχεια



Μεταβολή διατομής

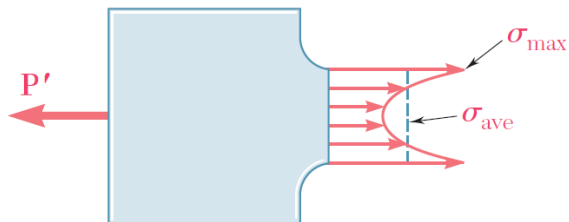
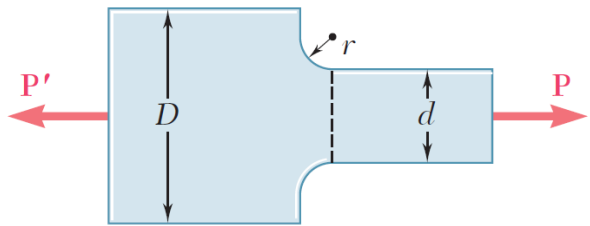


Παρουσία ατέλειας/ασυνέχειας ή μεταβολής διατομής, ο **σχεδιασμός** και ο συντελεστής ασφάλειας, πρέπει να λαμβάνει υπόψη την **μέγιστη τάση** λόγω του φαινομένου της συγκέντρωσης τάσεων.

Συγκέντρωση Τάσεων

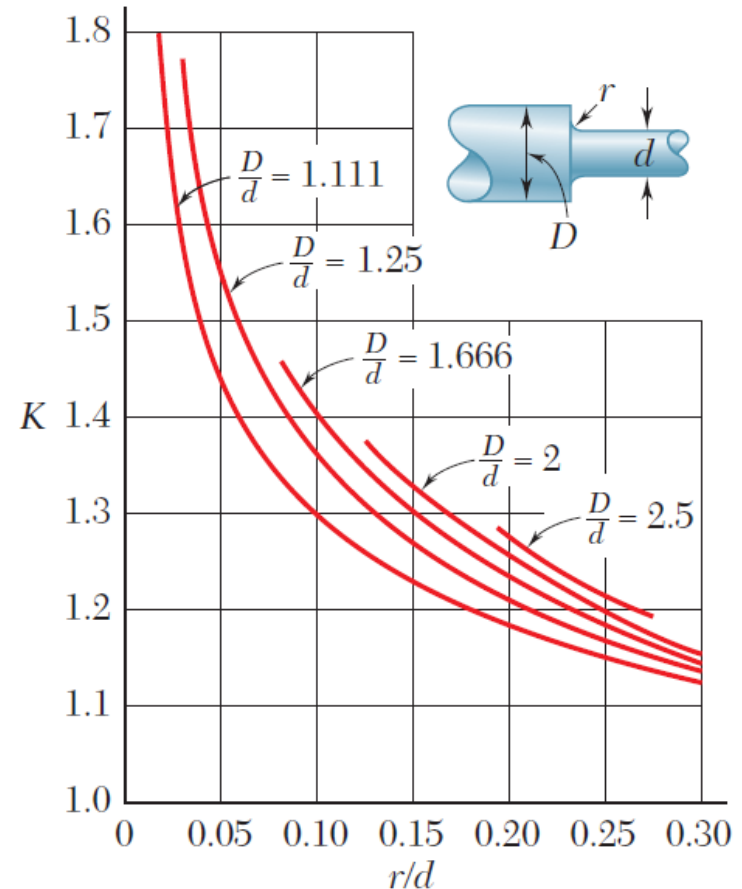
Συγκέντρωση τάσης: Ενίσχυση της επιβαλλόμενης τιμής σε απότομες μεταβολές διατομής, **ιδιαίτερης σημασίας στην στρέψη**

$$\tau_{\max} = K \frac{Tc}{J}$$



Συντελεστής συγκέντρωσης τάσης:

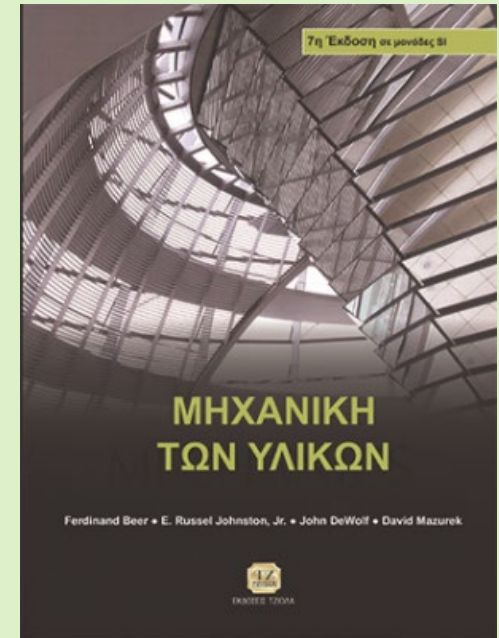
$$K = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{ave}}}$$



Ανακοινώσεις

Περισσότερη Μελέτη:

- Κεφάλαιο 3, F. Beer et al, Μηχανική των Υλικών, 7^η Έκδοση, 2022



Ώρες συνεργασίας με φοιτητές: Τετάρτη 12.00-14.00