



# CHM\_582: Μηχανική Υλικών

## Διάλεξη 2: Ροπή, Φορείς, Στηρίξεις

Κωνσταντίνος Γ. Δάσιος, Αναπλ. Καθηγητής  
Τμήμα Χημικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών  
kdassios@upatras.gr

Πάτρα, Μάρτιος 2024

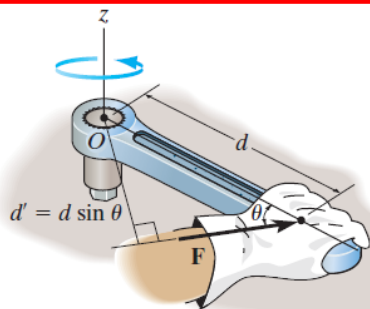
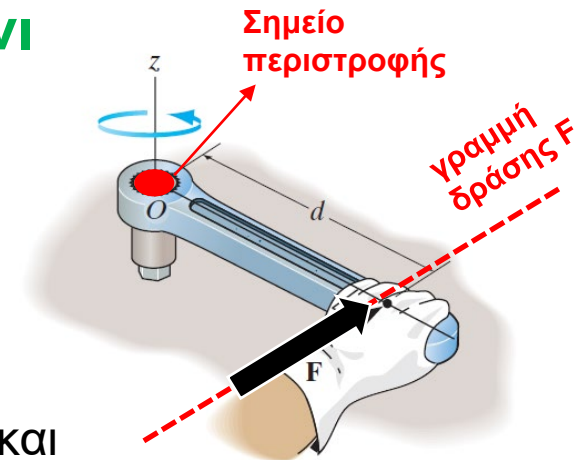
# Ροπή

Ροπή είναι η τάση μιας δύναμης να περιστρέψει ένα αντικείμενο γύρω από σημείο που **δεν** βρίσκεται πάνω στη γραμμή δράσης της

## Κλασσικό παράδειγμα: Κλειδί – μπουλόνι

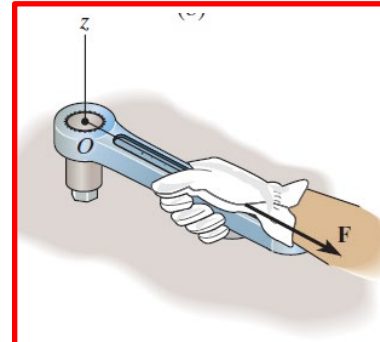
Επιβολή δύναμης στη λαβή του κλειδιού τείνει να περιστρέψει το μπουλόνι γύρω από το σημείο O (άξονας z).

- Μέγεθος ροπής ευθέως ανάλογο με:
  - μέτρο της **F**, και
  - κάθετη απόσταση μεταξύ σημείων εφαρμογής και περιστροφής: **μοχλοβραχίονας ροπής d**



Εάν **F** υπό γωνία  $\theta \neq 90^\circ$ :

- μ/β ροπής:  $d \sin \theta < d$
- ροπή μικρότερη
- περιστροφή δυσκολότερη



Εάν **F** κατά μήκος κλειδιού:

- γραμμή δράσης **F** διέρχεται από O:  $d = 0$
- Ροπή=0 (περιστροφή αδύνατη)

# Μέτρο και Διεύθυνση Ροπής

Γενίκευση: Δύναμη  $F$  που ασκείται σε απόσταση  $d$  από το σημείο  $O$ , θα τείνει να το περιστρέψει, ασκώντας του ροπή  $M_O$  (moment). Το μέτρο (μέγεθος) της ροπής:

$$M_O = F \cdot d$$

«Ροπή δύναμης  $F$  ως προς το σημείο  $O$ »  
Μονάδες: [N.m]

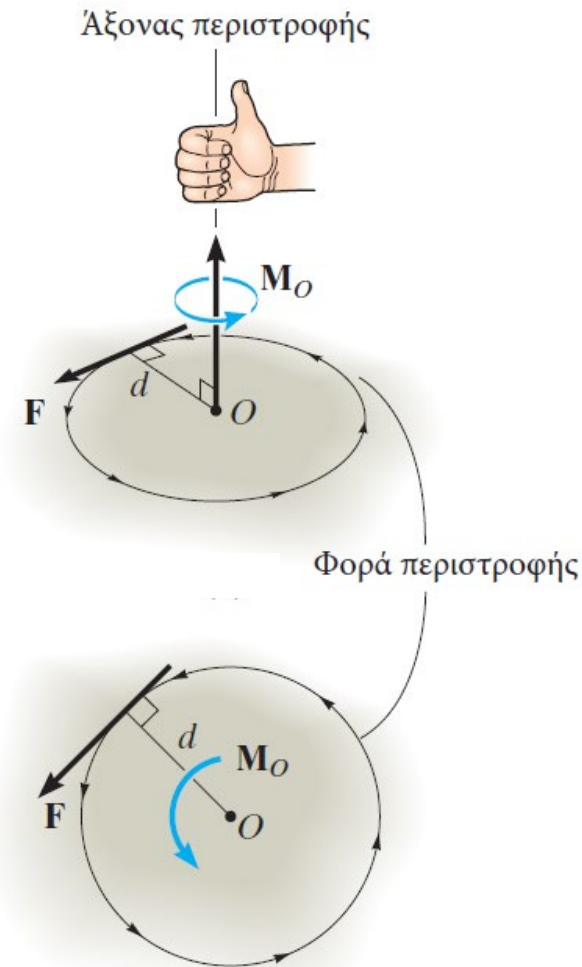
Η περιστροφή γίνεται γύρω από τον άξονα που διέρχεται από το  $O$ , κάθετα στο επίπεδο των  $F$ - $O$  και έχει **φορά**.

Συνεπώς η ροπή είναι **διανυσματικό μέγεθος**.

## Φορά από Κανόνα Δεξιού Χεριού

Στη φυσική καμπύλωση των δακτύλων του δεξιού χεριού στο σημείο περιστροφής προς τη δύναμη, ο αντίχειρας δείχνει τη φορά και τον άξονα περιστροφής.

**Κατά σύμβαση, θετική ροπή προκαλεί δεξιόστροφη περιστροφή (ανάποδα στη φορά των δεικτών του ρολογιού) και αντίθετα.**

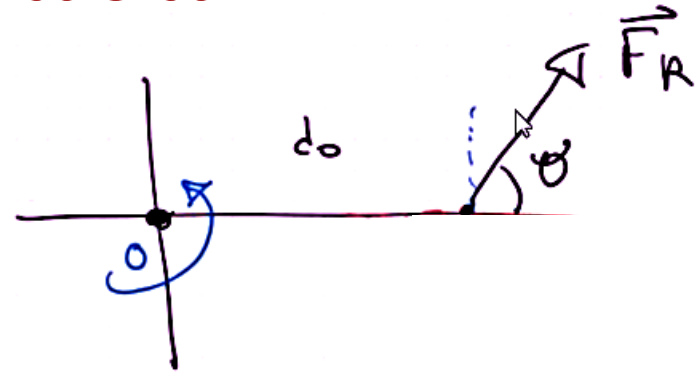


**Συμβολισμός** με κυκλικό διάνυσμα (βέλος προς την φορά περιστροφής)

# Ροπή συνιστωσών

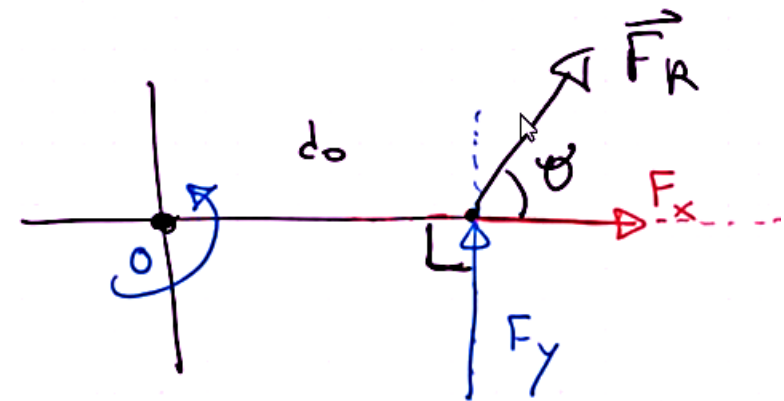
Τι ροπή προκαλεί η δύναμη  $F_R$  στο σημείο  $O$ ;

- γωνία ως προς οριζόντιο:  $\theta$
- μ/β ροπής  $d_O$



Αναλύοντας την  $F_R$  σε **συνιστώσες** στους άξονες  $x$  και  $y$ , παρατηρούμε:

- Η γραμμή δράσης της συνιστώσας  $F_x$  **διέρχεται** από το σημείο ενδιαφέροντος  $O$ .
- Η  $F_x$  δεν προκαλεί περιστροφή
- Μόνο η  $y$  συνιστώσα συνεισφέρει στην ροπή που αναπτύσσεται στο σημείο. Μόνο η  $F_y$  προκαλεί περιστροφή.



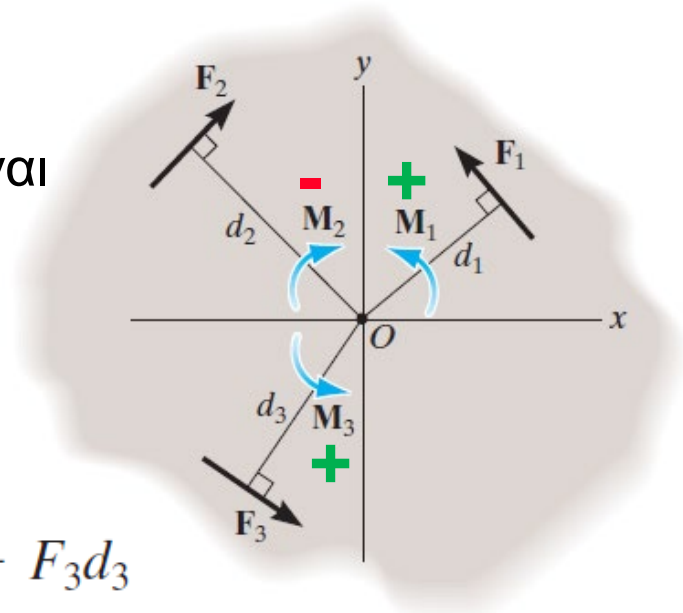
$$M_O = F_y \cdot d_O$$

# Συνιστάμενη Ροπή

Για δισδιάστατα προβλήματα, όπου δρουν πολλαπλές συνεπίπεδες δυνάμεις, η συνιστάμενη ροπή ως προς σημείο  $O$ ,  $M_{R,O}$  είναι το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που προκαλούνται από όλες τις δυνάμεις του συστήματος.

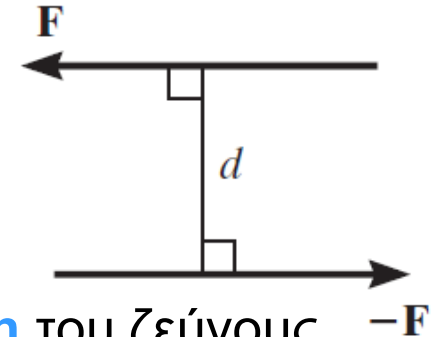
## Συνιστάμενη ροπή:

$$\zeta + (M_R)_o = \sum Fd \quad (M_R)_o = F_1d_1 - F_2d_2 + F_3d_3$$



# Ροπή Ζεύγους Δυνάμεων

**Ζεύγος δυνάμεων:** δύο παράλληλες δυνάμεις ίδιου μέτρου αλλά αντίθετης φοράς που χωρίζονται με κάθετη απόσταση  $d$ .



Εφόσον η συνισταμένη τους είναι μηδέν, η **μόνη δράση** του ζεύγους είναι η πρόκληση **περιστροφής** ή τάση περιστροφής αν η κίνηση είναι αδύνατη.

**$\Sigma F=0$  δεν σημαίνει  $\Sigma M=0$ .**



Η ροπή που παράγεται από ζεύγος δυνάμεων καλείται **ροπή ζεύγους**

# Ροπή Ζεύγους Δυνάμεων (2)

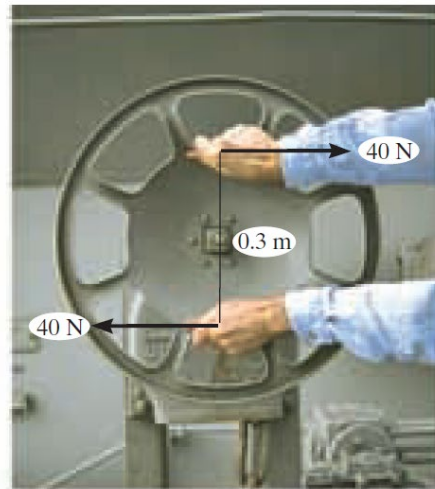
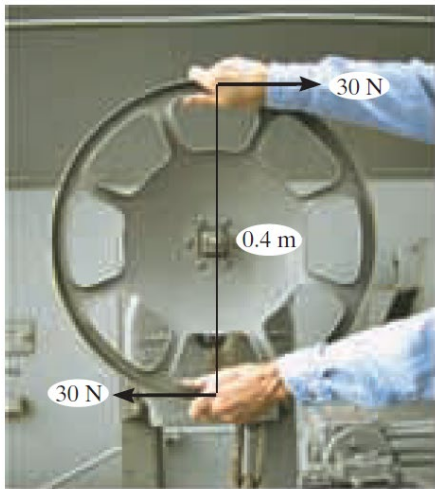
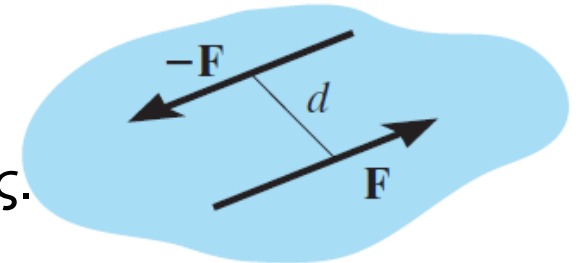
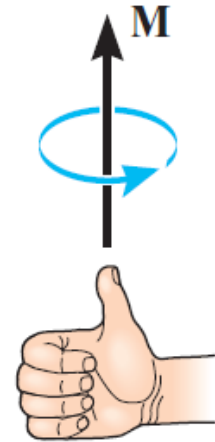
**Μέτρο** ροπής ζεύγους:

$$M = F \cdot d$$

- $F$ : μέτρο μιας εκ των δυνάμεων
- $d$ : κάθετη απόσταση μεταξύ τους (μ/β ροπής)

**Διεύθυνση** και **Φορά** από κανόνα δεξιού χεριού

Ο αντίχειρας δείχνει τη διεύθυνση ροπής (πάντα κάθετα στο επίπεδο των δυνάμεων) όταν τα δάχτυλα καμπυλώνουν κατά τη φορά περιστροφής.



$$M_1 = ; M_2 = ;$$

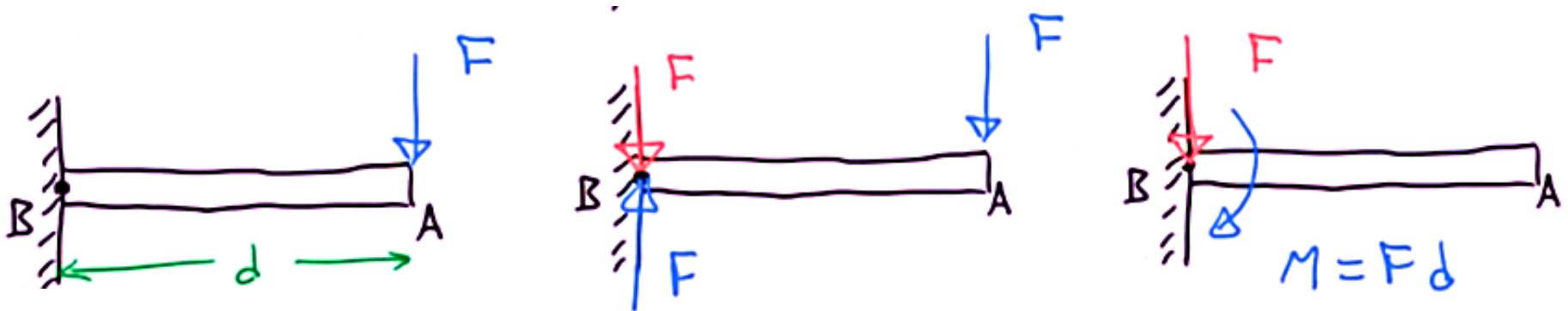
Ροπές ίδιου μέτρου & διεύθυνσης καλούνται **Ισοδύναμες ροπές ζεύγους**

# Ισοδύναμα Συστήματα Δύναμης-Ροπής

Συχνά απλοποιούμε συστήματα δυνάμεων και ροπών ζεύγους που δρουν σε ένα σώμα αντικαθιστώντας τα με **ισοδύναμα συστήματα** που αποτελούνται από **Μια συνιστώσα δύναμη** που δρα σε συγκεκριμένο σημείο και **Μια συνιστώσα ροπή ζεύγους**.

**Δύο συστήματα είναι ισοδύναμα** εάν οι μετατοπίσεις και περιστροφικές κινήσεις που προκαλούν στο σώμα οι δυνάμεις και οι ροπές ζεύγους τους, είναι ίδιες.

## Παράδειγμα: πρόβολος με απλή φόρτιση



Εισαγωγή ζεύγους ίσων & αντίθετων δυνάμεων στο σημείο B

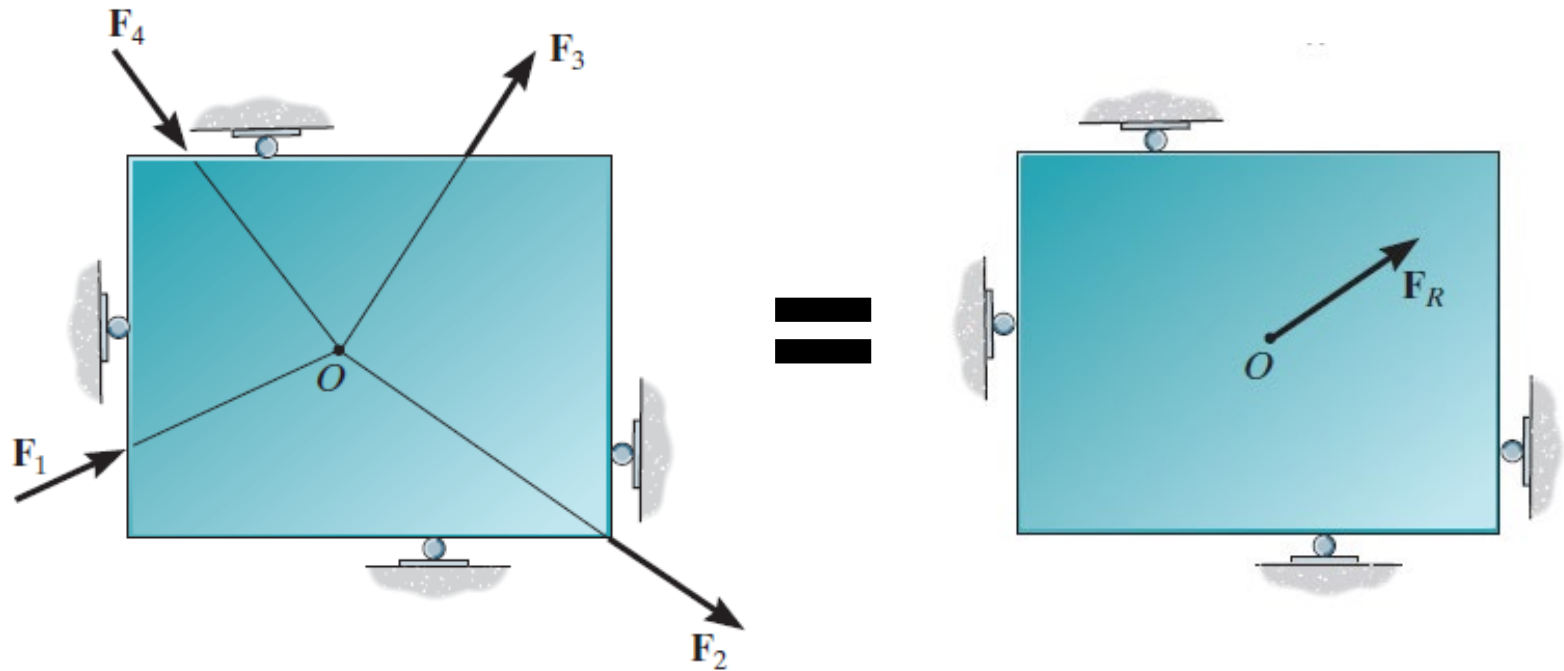
Αντικατάσταση ζεύγους δυνάμεων με ροπή ζεύγους



# Ισοδύναμα Συστημάτων Δυνάμεων

Ειδικές περιπτώσεις απλοποίησης δυνάμεων:

## 1. Δυνάμεις με κοινό σημείο τομής γραμμών δράσης



Το σύστημα δύναμης δεν παράγει ροπή ως προς το κοινό σημείο τομής,  $O$ .

Το ισοδύναμο σύστημα αναπαριστάται από μια συνιστώσα δύναμη  $F_R = \Sigma F$  που δρα στο  $O$ .

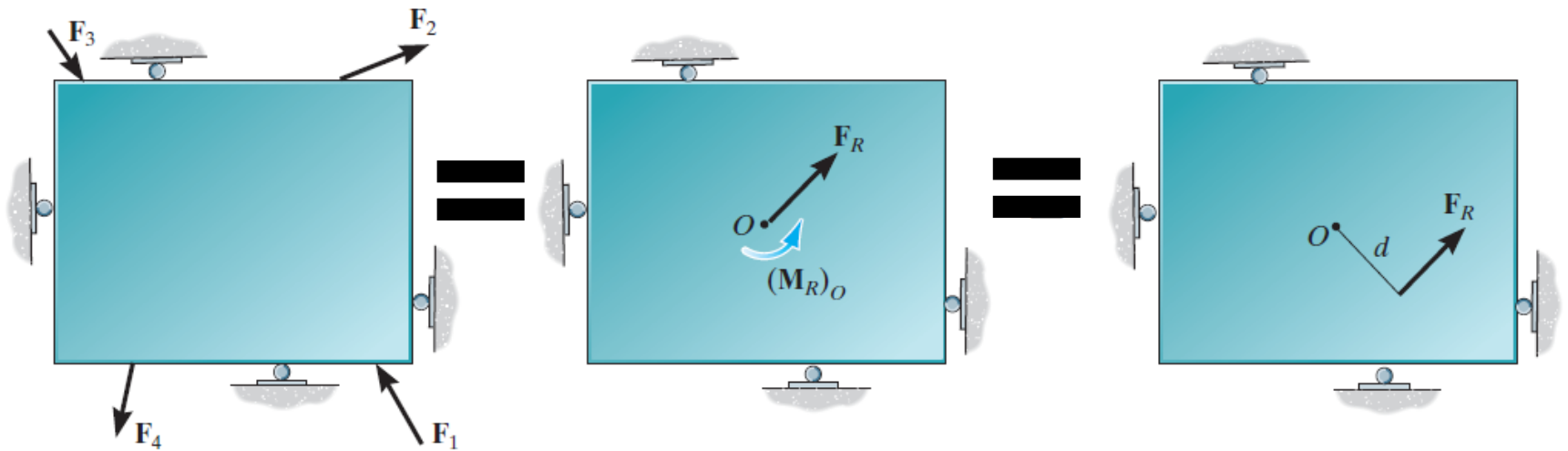


Γιατί;

# Ισοδύναμα Συστημάτων Δυνάμεων (2)

## 2. Σύστημα συνεπίπεδων δυνάμεων

- Οι γραμμές δράσης όλων των δυνάμεων βρίσκονται στο **ίδιο επίπεδο**, όπως και η **συνισταμένη** τους  $F_R = \Sigma F$ .
- Η **ροπή** κάθε δύναμης ως προς  $O$  είναι **κάθετη** στο επίπεδο. Άρα και η **συνισταμένη** ροπή  $(M_R)_O$  θα είναι κάθετη στην  $F_R$  και το επίπεδο.



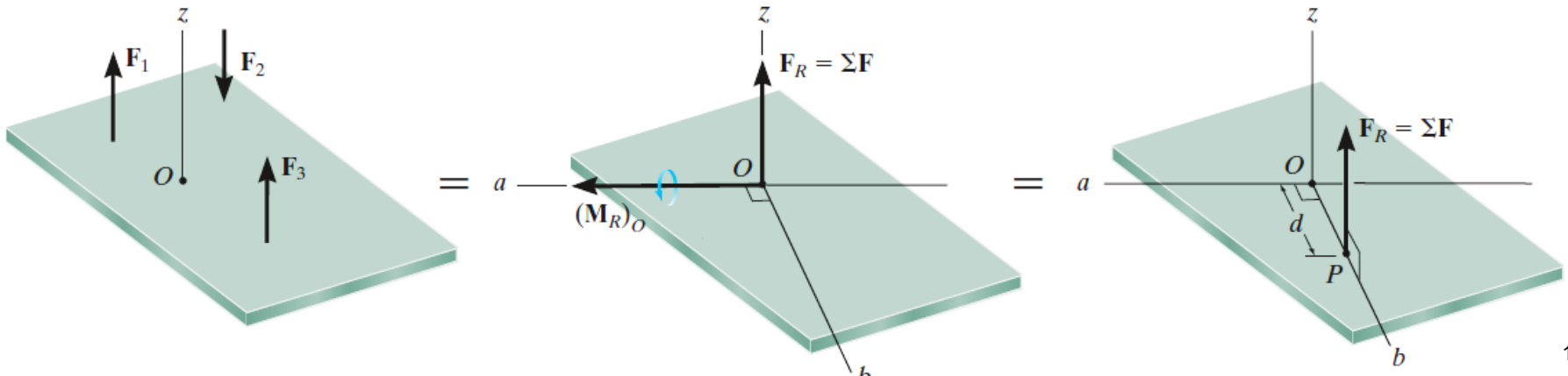
Η συνισταμένη  $(M_R)_O$  μπορεί να **αντικατασταθεί** με μετακίνηση της  $F_R$  κατά απόσταση (μ/β ροπής)  $d$  από το σημείο  $O$ , ώστε η  $F_R$  να παράγει την ίδια ροπή  $(M_R)_O$  ως προς  $O$ .  $d$  βρίσκεται από:

$$(M_R)_O = F_R \cdot d \Rightarrow d = (M_R)_O / F_R$$

# Ισοδύναμα Συστημάτων Δυνάμεων (3)

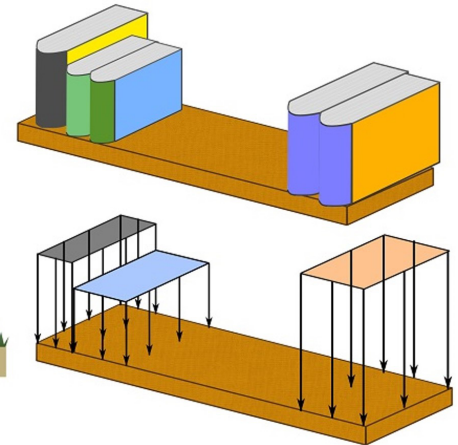
## 3. Σύστημα παράλληλων δυνάμεων

- Όταν οι δυνάμεις είναι όλες παράλληλες, η συνισταμένη  $F_R = \Sigma F$  στο σημείο  $O$  πρέπει επίσης να είναι παράλληλή τους.
- Η ροπή που παράγεται από κάθε δύναμη βρίσκεται στο κάθετο στη δύναμη επίπεδο και η συνισταμένη ροπή επίσης.
- Το σύστημα δύναμης μπορεί να μειωθεί περαιτέρω σε ισοδύναμο με μοναδική συνισταμένη δύναμη  $F_R$ , που δρα στο σημείο  $P$  που βρίσκεται στο κάθετο άξονα  $\beta$ .
- $(M_R)_O = F_R d = \Sigma M_O$  ή  $d = \Sigma M_O / F_R$



# Αναγωγή Κατανεμημένων Φορτίων

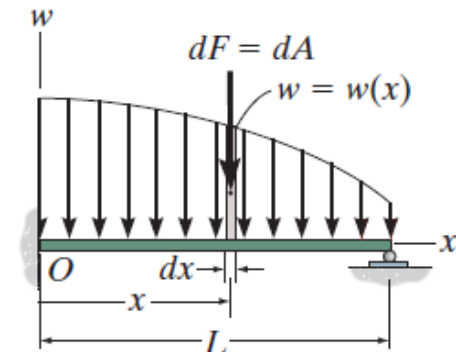
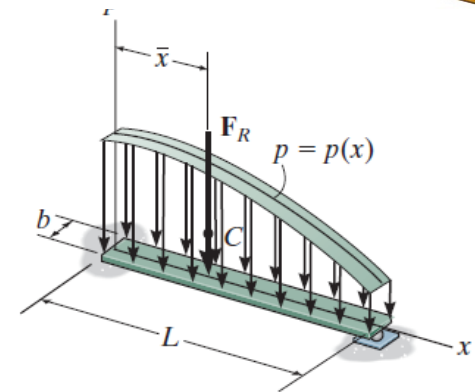
Συχνά η ένταση της φόρτισης που ασκείται σε σώμα μεταβάλλεται με την θέση ακολουθώντας κατανομή.



Συνηθέστερος τύπος: Φόρτιση κατανεμημένη κατά μήκος ενός άξονα

πχ. δοκός σταθερού πλάτους  $b$  υπόκειται σε πίεση που μεταβάλλεται μόνο κατά μήκος του άξονα  $x$ ,  $p = p(x)$  [N/m<sup>2</sup>].

Καθώς εμπεριέχει μόνο τη μεταβλητή  $x$  μπορεί να αναπαρασταθεί ως **συνεπίπεδη κατανεμημένη φόρτιση**: πολλαπλασιασμός με πλάτος  $b$ , ώστε  $w(x) = p(x)b$  [N/m].



# Αναγωγή Κατανεμημένων Φορτίων (2)

Θέλουμε να αντικαταστήσουμε το συνεπίπεδο σύστημα παράλληλων δυνάμεων με μια ενιαία ισοδύναμη **συνισταμένη δύναμη μέτρου  $F_R$**  που θα ενεργεί σε **συγκεκριμένη θέση** στη δοκό.

## Μέγεθος συνισταμένης

Το μέγεθος της  $F_R$  θα είναι ισοδύναμο με το άθροισμα όλων των δυνάμεων στο σύστημα.

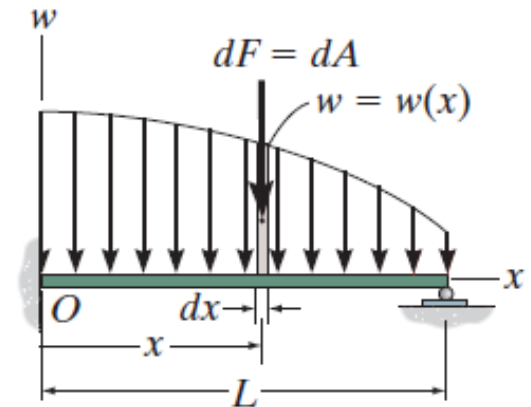
Άπειρος αριθμός παράλληλων δυνάμεων  $dF$  δρουν στη δοκό: ολοκλήρωση.

Αν  $dF$  δρα σε στοιχείο μήκους  $dx$ , και  $w(x)$  είναι δύναμη ανά μονάδα μήκους:

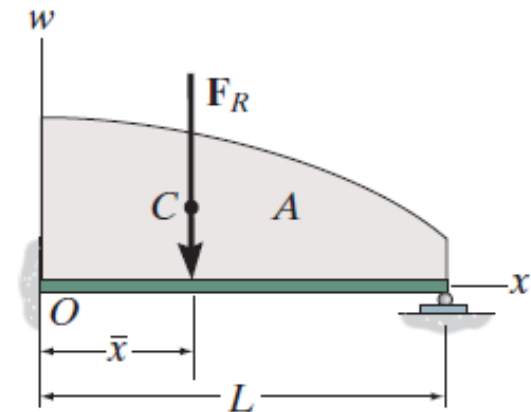
$$dF = w(x)dx = dA$$

Για ολόκληρο το μήκος  $L$ :

$$F_R = \int_L w(x)dx = \int_A dA = A$$



(b)



(c)

# Αναγωγή Κατανεμημένων Φορτίων (2)

Θέση συνισταμένης δύναμης,  $\bar{x}$ .

Η ροπή της συνισταμένης δύναμης  $F_R$ ,  $\bar{x}F_R$ , ισούται με τη ροπή της κατανεμημένης δύναμης ως προς το σημείο O.

Η  $dF$  παράγει ροπή:  $x dF = x[w(x)dx]$ . Για όλο το μήκος:  $\int_L xw(x)dx$

$$\bar{x}F_R = \int_L xw(x)dx \Rightarrow \bar{x} \int_L w(x)dx = \int_L xw(x)dx$$

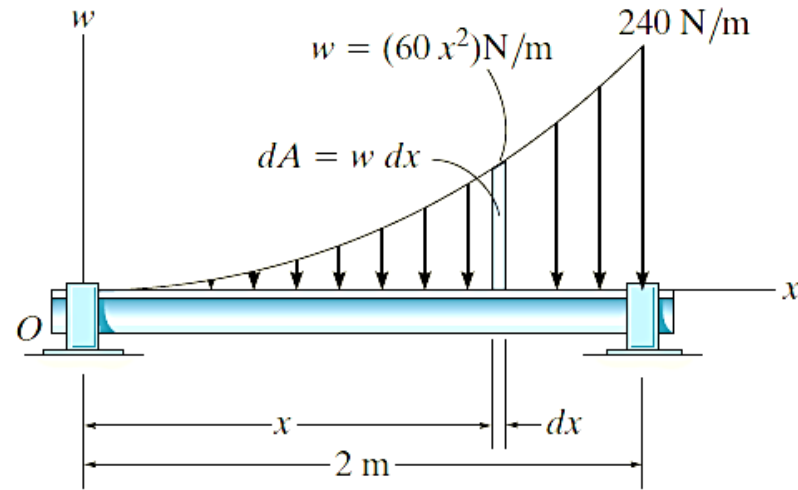
$$\bar{x} = \frac{\int_L xw(x)dx}{\int_L w(x)dx} = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA}$$

Η συντεταγμένη  $\bar{x}$  προσδιορίζει το **γεωμετρικό κέντρο** ή **κεντροειδές** της περιοχής κάτω από την κατανεμημένη φόρτωση. Άρα σε κατανεμημένες φορτίσεις, η **γραμμή δράσης της συνισταμένης δύναμης** διέρχεται από το **κεντροειδές** της επιφάνειας κάτω από το διάγραμμα φόρτισης.

# Παράδειγμα

Προσδιορίστε το μέγεθος και τη θέση της ισοδύναμης συνισταμένης δύναμης που δρα στη δοκό.

$$w(x) = 60x^2$$



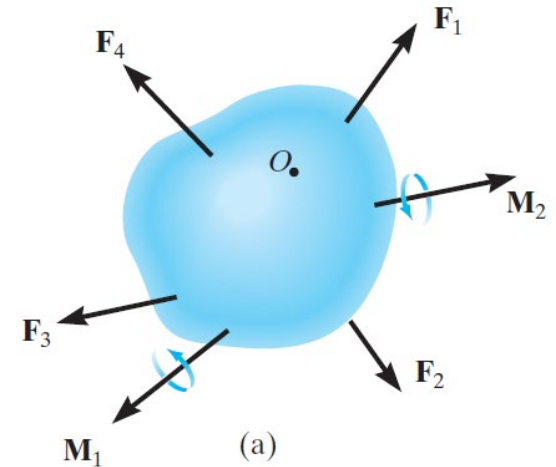
$$F_R = \int_L w(x) dx = \int_L 60x^2 dx = \int_0^{2m} 60x^2 dx =$$

$$= 60 \left( \frac{x^3}{3} \right)_0^{2m} = 60 \frac{2^3}{3} = 160N$$

$$\bar{x} = \frac{\int_L xw(x) dx}{\int_L w(x) dx} = \frac{\int_0^{2m} x(60x^2) dx}{160N} = \frac{60 \left( \frac{x^4}{4} \right)_0^{2m}}{160N} = 1.5m$$

# Ισορροπία Απαραμόρφωτου Σώματος υπό την Επίδραση Ροπών

Όταν σε σώμα εκτός από **δυνάμεις** ασκούνται και **ροπές**, η διατήρηση της ισορροπίας (ηρεμίας ή κίνησης με διατήρηση της πρότερης κατάστασης) προϋποθέτει και το **άθροισμα των ροπών να είναι μηδέν**.

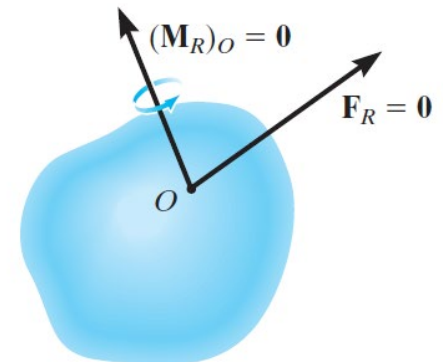


$$F_R = \Sigma F = 0$$
$$(M_R)_O = \Sigma M_O = 0$$

**ΣΥΝΘΗΚΗ  
ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ  
ΠΑΡΟΥΣΙΑ  
ΡΟΠΩΝ**

$$\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0, \Sigma M_O = 0$$

**ΣΥΣΤΗΜΑ  
ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ  
ΣΤΑΤΙΚΗΣ  
ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ**



**Ισοστατικό:** το προσδιορισμένο σύστημα εξισώσεων στατικής ισορροπίας.



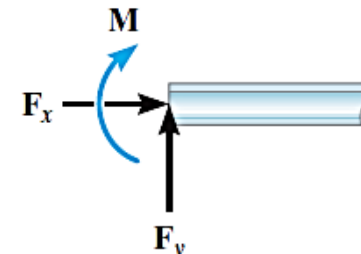
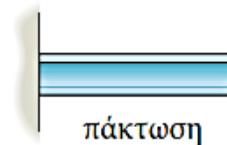
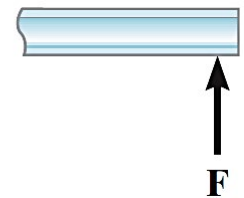
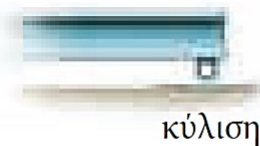
# Δ.Ε.Σ. Παρουσία Ροπών

Όπως είδαμε ο καλύτερος τρόπος να υπολογίσουμε τις δυνάμεις που δρουν σε ένα σώμα είναι να το αναπαραστήσουμε σχεδιαστικά απομονωμένο («ελεύθερο») από το περιβάλλον του (αφαίρεση όλων των στηρίξεων), με όλες τις δυνάμεις που δρουν σε αυτό.

Παρουσία ροπών, το Δ.Ε.Σ. πρέπει να περιλαμβάνει και τη δράση τους.

## 2 γενικοί κανόνες για τις αντιδράσεις από στηρίξεις:

1. Στήριξη που εμποδίζει τη **μετατόπιση** ενός σώματος προς μια κατεύθυνση, του ασκεί δύναμη προς την αντίθετη κατεύθυνση
2. Στήριξη που την **περιστροφή** ενός σώματος προς μια κατεύθυνση, του ασκεί ροπή προς την αντίθετη κατεύθυνση.




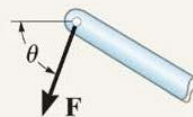



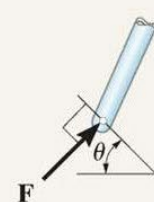
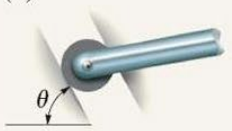

# Αντιδράσεις από Στηρίξεις

Όλες οι στηρίξεις μπορούν να αντικατασταθούν από φορτία (δυνάμεις, ροπές) αντίδρασης.

Καλώδιο

Εσ. Αρθρωση


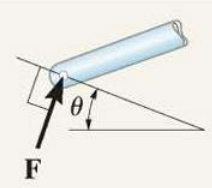

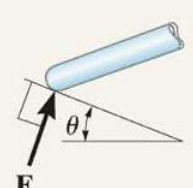

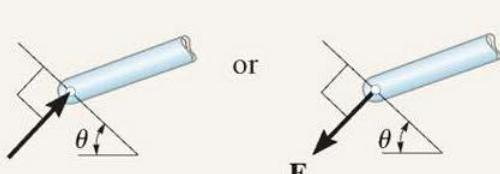
Κυλίσεις

Types of Connection	Reaction	Number of Unknowns
(1)  cable		One unknown. The reaction is a tension force which acts away from the member in the direction of the cable.
(2)  weightless link		One unknown. The reaction is a force which acts along the axis of the link.
(3)  roller		One unknown. The reaction is a force which acts perpendicular to the surface at the point of contact.
(4)  roller or pin in confined smooth slot		One unknown. The reaction is a force which acts perpendicular to the slot.

# Αντιδράσεις από Στηρίξεις (2)

Επαφές

Οδηγός

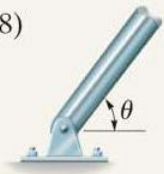
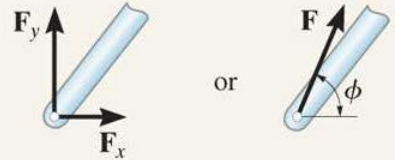

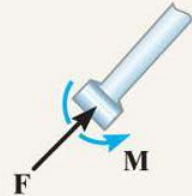


Types of Connection	Reaction	Number of Unknowns
(5)  rocker		One unknown. The reaction is a force which acts perpendicular to the surface at the point of contact.
(6)  smooth contacting surface		One unknown. The reaction is a force which acts perpendicular to the surface at the point of contact.
(7)  member pin connected to collar on smooth rod		One unknown. The reaction is a force which acts perpendicular to the rod.

# Αντιδράσεις από Στηρίξεις (3)

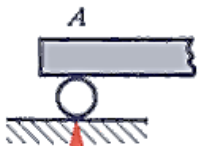
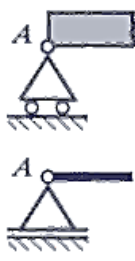
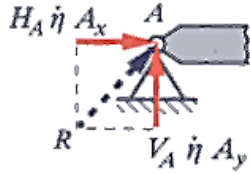
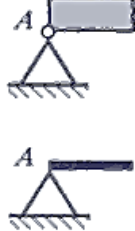
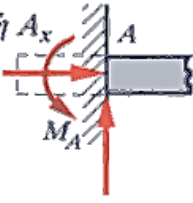
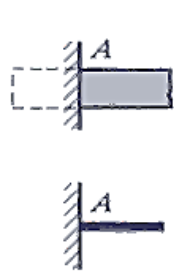
Άρθρωση

Στ. Οδηγός

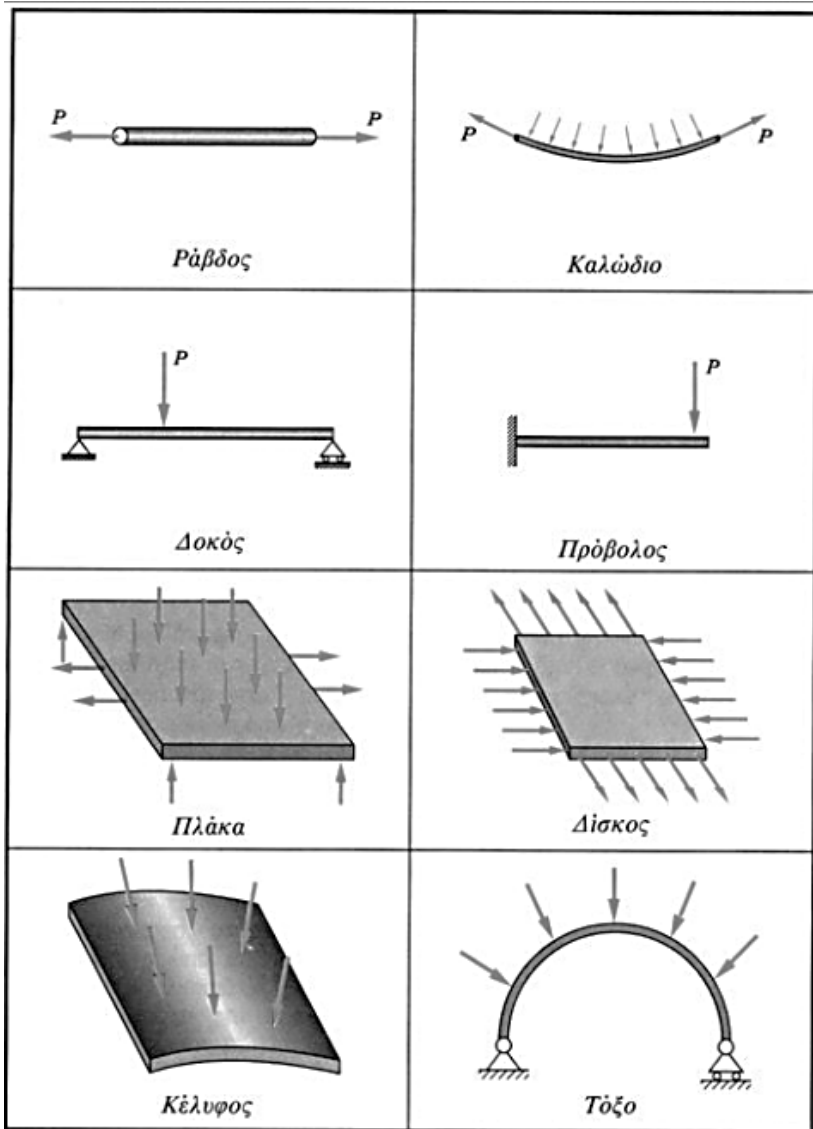
Πάκτωση

Types of Connection	Reaction	Number of Unknowns
(8)  smooth pin or hinge		Two unknowns. The reactions are two components of force, or the magnitude and direction $\phi$ of the resultant force. Note that $\phi$ and $\theta$ are not necessarily equal [usually not, unless the rod shown is a link as in (2)].
(9)  member fixed connected to collar on smooth rod		Two unknowns. The reactions are the couple moment and the force which acts perpendicular to the rod.
(10)  fixed support		Three unknowns. The reactions are the couple moment and the two force components, or the couple moment and the magnitude and direction $\phi$ of the resultant force.

# Αντιδράσεις από Στηρίξεις (4)

Είδος στήριξης	Συμβολισμοί	Βαθμοί ελευθερίας		Αντιδράσεις στήριξης		
		μετα-κίνηση	στροφή	δυνάμεις	ροπή	Σύνολο
 <p><math>V_A</math> ή <math>A_y</math></p> <p>Κύλιση</p>		1	1	1	0	1
 <p><math>H_A</math> ή <math>A_x</math></p> <p><math>V_A</math> ή <math>A_y</math></p> <p>Άρθρωση</p>		0	1	2	0	2
 <p><math>H_A</math> ή <math>A_x</math></p> <p><math>M_A</math></p> <p><math>V_A</math> ή <math>A_y</math></p> <p>Πάκτωση</p>		0	0	2	1	3

# Είδη Φορέων

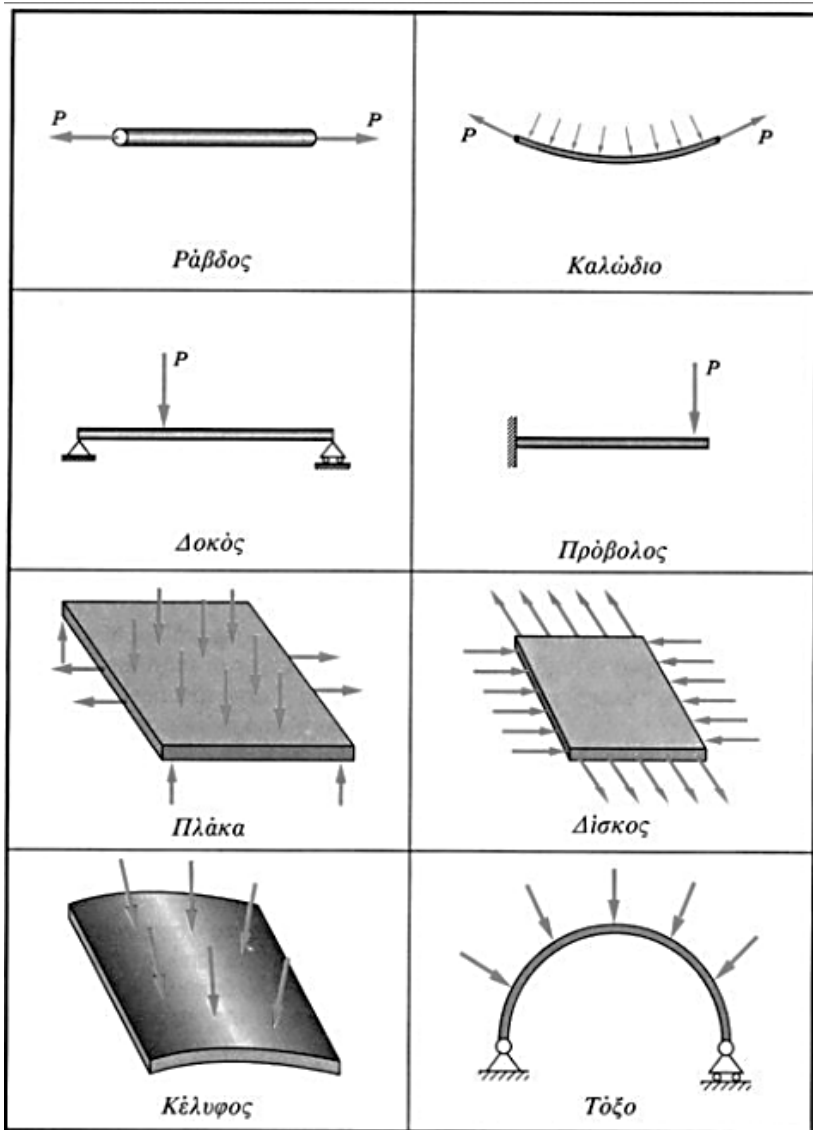


**Φορέας:** κάθε σώμα ή κατασκευή που μπορεί να φέρει εξωτερικά φορτία (δυνάμεις και ροπές), τα οποία μεταφέρει στις στηρίξεις του, μέσω των οποίων καταλήγουν τελικά στο έδαφος.

**Ράβδος:** Σώμα με ευθύγραμμο άξονα συμμετρίας και μήκος συγκριτικά πολύ μεγαλύτερο από τις άλλες του διαστάσεις. Καταπονείται συνήθως μόνο από αξονικά φορτία (εφελκυσμό/θλίψη).

**Δοκός:** Σώμα με ευθύγραμμο άξονα συμμετρίας και μήκος συγκριτικά πολύ μεγαλύτερο από τις άλλες του διαστάσεις. Καταπονείται από αξονικά και από εγκάρσια φορτία.

# Είδη Φορέων (2)



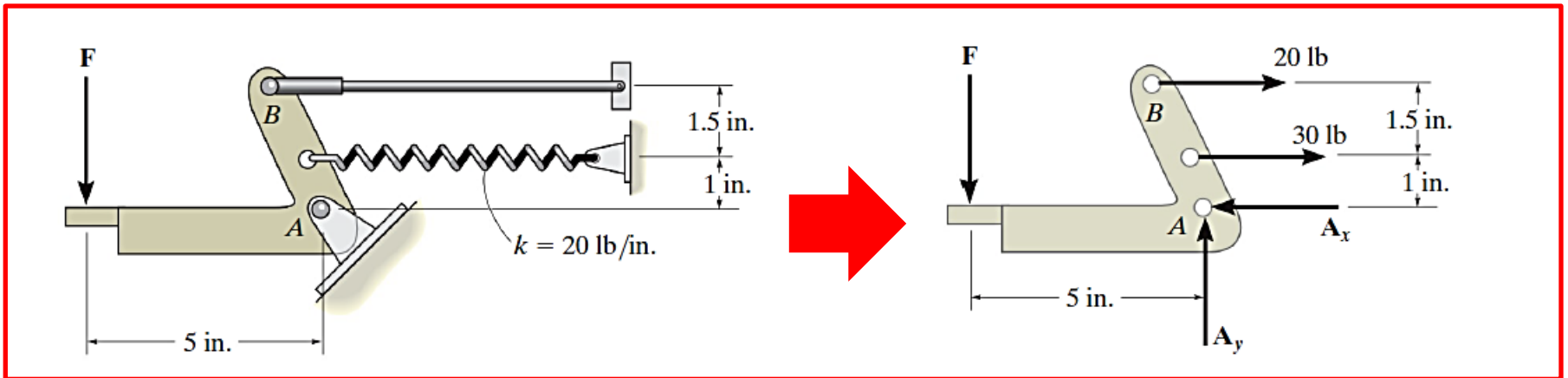
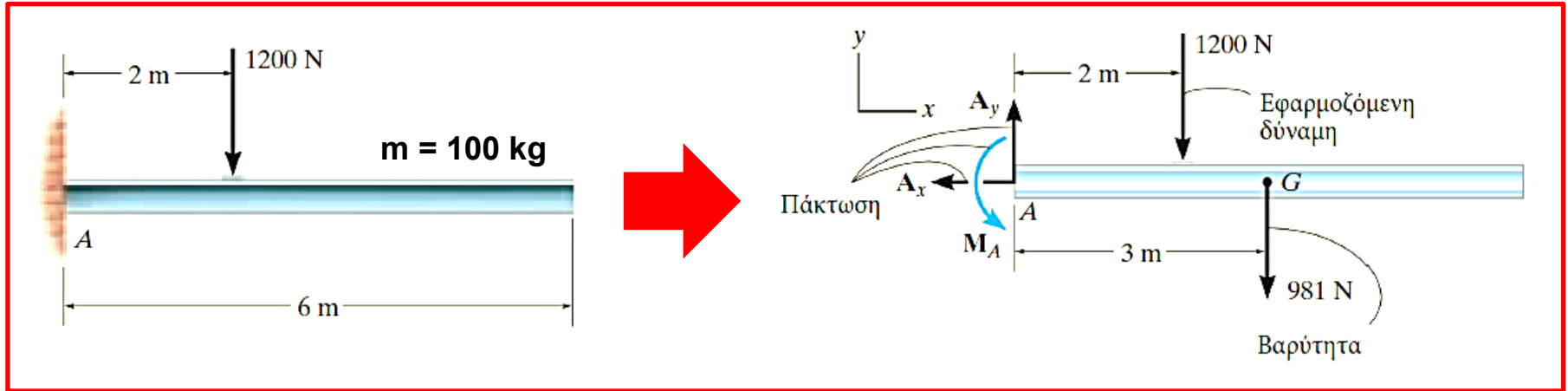
**Τόξο:** Δοκός καμπύλου άξονα.

**Δίσκος:** Επίπεδο σώμα, πάχους πολύ μικρότερο από τις άλλες του διαστάσεις. Καταπονείται από δυνάμεις εφελκυστικές ή θλιπτικές που δρουν στο επίπεδο του.

**Πλάκα:** Επίπεδο σώμα με πάχος πολύ μικρότερο από τις άλλες του διαστάσεις. Σε αντίθεση με το δίσκο, μπορεί να καταπονείται και από εγκάρσια φορτία στο επίπεδο της.

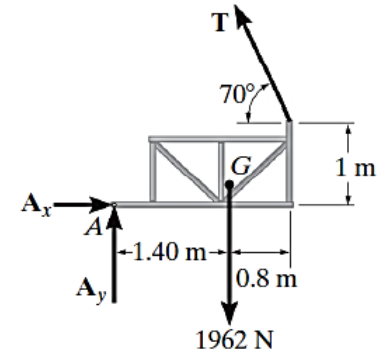
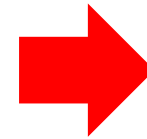
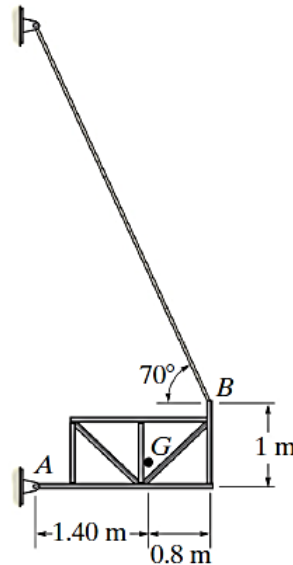
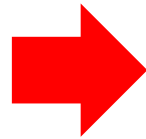
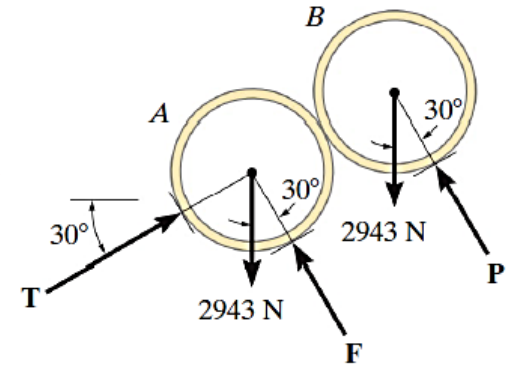
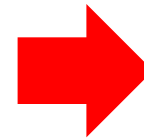
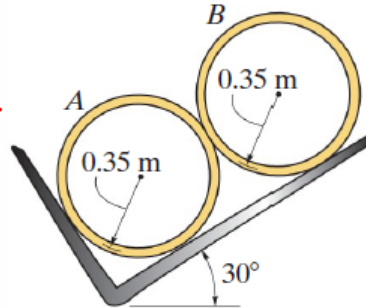
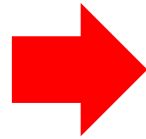
**Κέλυφος:** Σώμα με πάχος πολύ μικρότερο από τις άλλες του διαστάσεις, που η μέση του επιφάνεια είναι καμπύλη.

# Παραδείγματα Δ.Ε.Σ.





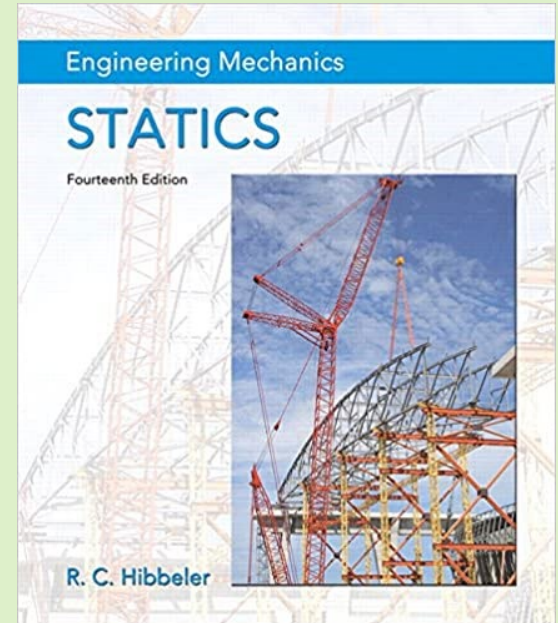
# Παραδείγματα Δ.Ε.Σ. Εφαρμογών



# Ανακοινώσεις

## Περισσότερη Μελέτη:

- Κεφάλαια 4-5, R.C. Hibbeler, Engineering Mechanics: Statics, 14<sup>th</sup> Edition, 2015



**Ώρες συνεργασίας με φοιτητές: Τετάρτη 12.00-14.00**