

Σημειώσεις  
ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΥ  
Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ



## Περιεχόμενα

1. ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ - Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ COULOMB.....	5
Ηλεκτρικό φορτίο.....	5
Ηλεκτρόνια.....	6
Φορτίο - Μονάδες .....	8
Αγωγοί – Μονωτές.....	8
Ο Νόμος του Coulomb .....	12
Δύναμη μεταξύ μη σημειακών φορτίων .....	16
Προβλήματα .....	17
2. ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΠΕΔΙΑ .....	20
Ορισμός του Πεδίου .....	20
Ηλεκτρικό Πεδίο .....	21
Υπολογισμός του Ηλεκτρικού Πεδίου .....	25
α) Ένταση σημειακού φορτίου .....	25
β) Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένης γραμμής απείρου μήκους.....	26
γ) Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένου φύλλου απείρων διαστάσεων .....	27
Προβλήματα .....	32
3. Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ GAUSS.....	36
Δυναμικές Γραμμές.....	36
Ηλεκτρική Ροή.....	39
Ο Νόμος του Gauss .....	41
α) Φορτισμένη συμπαγής σφαίρα.....	41
β) Φορτισμένη κοίλη σφαίρα .....	42
γ) Φορτισμένη γραμμή απείρων διαστάσεων.....	43
δ) Φορτισμένο φύλλο απείρων διαστάσεων .....	43
ε) Επίπεδος Πυκνωτής .....	44
Ένταση Ηλεκτρικού Πεδίου στο εσωτερικό των Αγωγών.....	45
Προβλήματα .....	46
4. ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ – ΔΥΝΑΜΙΚΟ .....	49
Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια .....	49
Μηχανικό Έργο .....	51
Ηλεκτρική Δυναμική Ενέργεια – Ομοιογενές E .....	52

## Φυσική ΙΙ – Δ. Κουζούδης – Π. Πετρίδης

Ηλεκτρική Δυναμική Ενέργεια – Μη Ομοιογενές Ε.....	53
Ηλεκτρικό Δυναμικό– Ορισμός.....	54
Διαφορές Δυναμικού – Ηλεκτρική Τάση .....	57
Προβλήματα .....	58
6. ΠΥΚΝΩΤΕΣ - ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ .....	60
Ορισμός Χωρητικότητας .....	60
Επίπεδος πυκνωτής .....	61
Άλλες Γεωμετρίες.....	62
Διηλεκτρικά.....	63
Πυκνωτές σε Σειρά.....	64
Πυκνωτές σε Παράλληλη διάταξη .....	66
Ενέργεια Πυκνωτή .....	69
Προβλήματα .....	73
7. ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΡΕΥΜΑ και ο ΝΟΜΟΣ του ΟΗΜ .....	79
Ηλεκτρικό Ρεύμα.....	79
Ο νόμος του Ohm – Ηλεκτρική Αντίσταση .....	83
Φορτία ρε ρευματοφόρους αγωγούς.....	87
Ειδική Αντίσταση .....	89
Ηλεκτρική Ισχύς .....	91
Εναλλασσόμενα Ρεύματα .....	92
Ενεργός τιμή .....	93
Προβλήματα .....	95
8. ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ .....	97
Εισαγωγή.....	97
Μαγνητικό Πεδίο .....	99
Δύναμη σε κινούμενο φορτίο μέσα σε μαγνητικό πεδίο.....	100
Δύναμη σε ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό μέσα σε μαγνητικό πεδίο.....	104
Ροπή σε ρευματοφόρο βρόγχο μέσα σε μαγνητικό πεδίο.....	107
Ο νόμος των Biot-Savart - Παραγωγή μαγνητικού πεδίου από Ευθύγραμμο Ρευματοφόρο Αγωγό .....	110
Δύναμη μεταξύ ρευματοφόρων αγωγών .....	113
Προβλήματα .....	114
9. Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ AMPERE.....	120
Πηνίο - Σωληνοειδές.....	120
Μαγνητική διαπερατότητα.....	122
Προβλήματα .....	123

10. ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ .....	128
Μαγνητική Ροή .....	128
Ο νόμος του Faraday.....	130
Αυτεπαγωγή.....	134
Ενέργεια Σωληνοειδούς.....	135
Προβλήματα .....	136
11. ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ .....	141
Ηλεκτρική αντίσταση .....	141
Πυκνωτής.....	144
Πηνίο.....	145
Κυκλώματα με αντιστάσεις, πυκνωτές και πηνία .....	147
Κυκλώματα Συνεχούς Ρεύματος DC .....	147
α) Κύκλωμα <b>RC</b> -Φόρτιση.....	148
β) Κύκλωμα <b>RC</b> -Εκφόρτιση .....	151
γ) Κύκλωμα <b>RL</b> - Φόρτιση .....	153
δ) Κύκλωμα <b>RL</b> - Εκφόρτιση.....	155
Κυκλώματα Εναλλασσόμενου Ρεύματος AC .....	156
α) Κύκλωμα <b>RC</b> .....	156
β) Κύκλωμα <b>RL</b> .....	160
γ) Κύκλωμα <b>RCL</b> .....	163
Προβλήματα .....	167

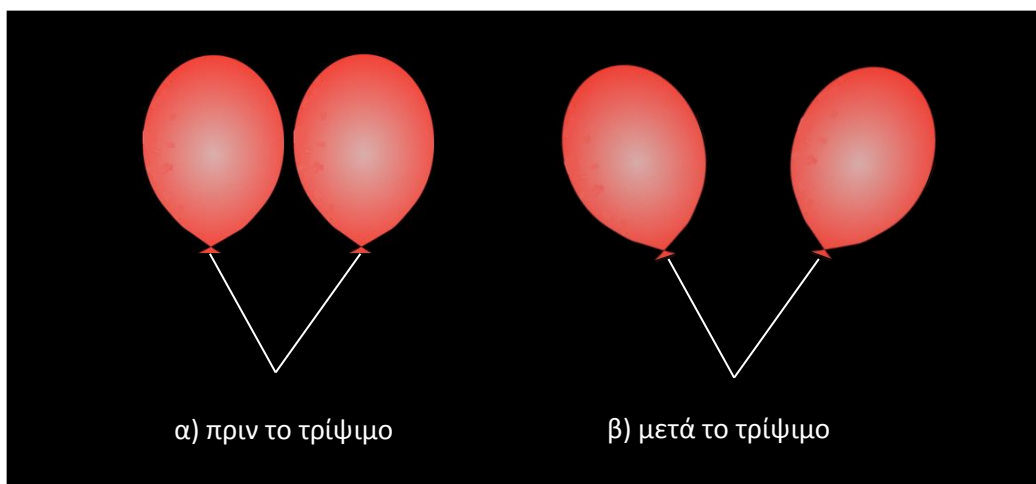
# 1. ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ - Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ COULOMB

## Ηλεκτρικό φορτίο

Στην φύση απαντιούνται διάφορα ηλεκτρικά φαινόμενα όπως π.χ. ο κεραυνός αλλά και στην καθημερινή μας εμπειρία μπορούμε να παρατηρήσουμε κάποια από αυτά, δείτε π.χ. αυτό το ενδιαφέρον βίντεο:

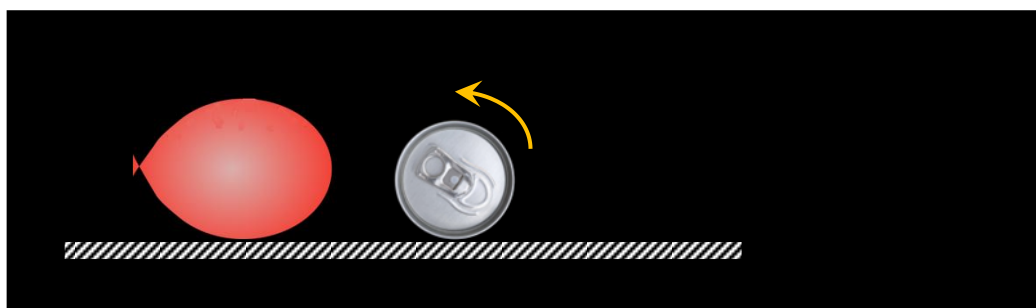
<http://www.youtube.com/watch?v=QcBVa1VKUdc>

Θεωρήστε για παράδειγμα τα δυο μπαλόνια του Σχήματος 1.1α τα οποία αρχικά βρίσκονται σε εγγύτητα. Όπως φαίνεται και στο βίντεο, αφού τα μπαλόνια τριφτούν επάνω στα μαλλιά της παρουσιάστριας, πλέον απωθεί το ένα το άλλο όπως στο Σχήμα 1.1β.



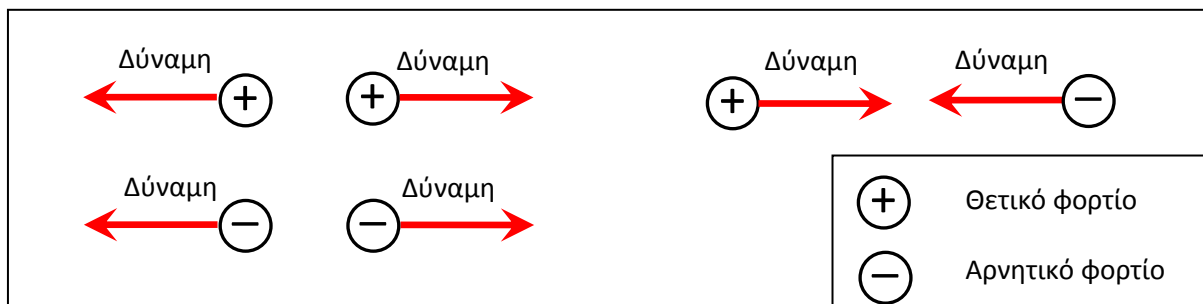
Σχήμα 1.1

Ένα άλλο ενδιαφέρον φαινόμενο που παρουσιάζεται στο βίντεο, φαίνεται στο Σχήμα 1.2. Ένα μπαλόνι το οποίο έχει τριφτεί επάνω στα μαλλιά της παρουσιάστριας, έλκει ένα αλουμινένιο δοχείο αναψυκτικού, αναγκάζοντάς το σε κύλιση επάνω σε οριζόντιο δάπεδο.



Σχήμα 1.2

Τα φαινόμενα αυτά μπορούν να ερμηνευτούν με την απλή παραδοχή ότι υπάρχουν μόνο δυο ειδών φορτία στη φύση, τα θετικά και τα αρνητικά και ότι τα ετερόσημα φορτία έλκονται ενώ τα ομόσημα φορτία απωθούνται, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1.3.

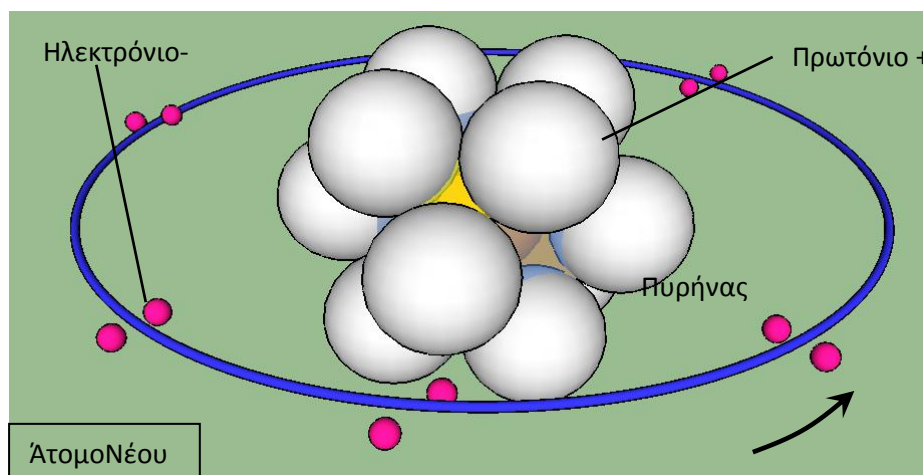


Σχήμα 1.3

## Ηλεκτρόνια

Το αρνητικό φορτίο στη φύση προέρχεται από τα ηλεκτρόνια ενώ το θετικό από τα πρωτόνια. Θεωρήστε π.χ. μια απλουστευμένη απεικόνιση του ατόμου του Νέουστο Σχήμα 1.4 με ατομικό αριθμό  $Z = 10$ . Για ευκολία απεικόνισης, τα νετρόνια έχουν παραληφθεί. Παρατηρήστε σε αυτό τα σχήματα εξής:

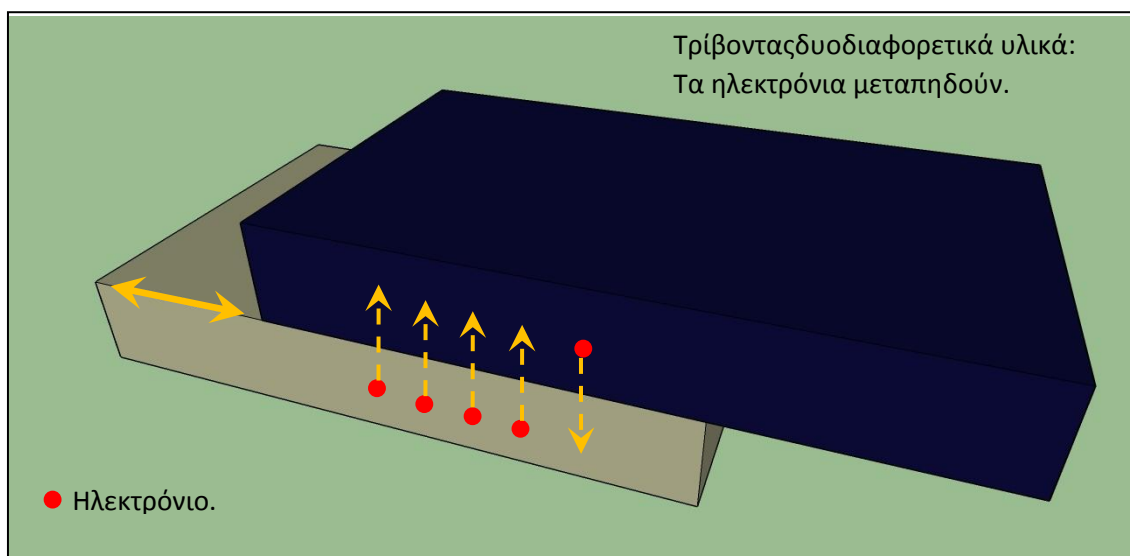
- 1) Ο αριθμός των ηλεκτρονίων (δέκα) είναι ίσος με τον αριθμό των πρωτονίων (το 10<sup>ο</sup> πρωτόνιο δεν φαίνεται καθαρά, είναι πίσω από τα υπόλοιπα πρωτόνια)
- 2) Τα πρωτόνια είναι συγκεντρωμένα μέσα στον πυρήνα, τα ηλεκτρόνια περιφέρονται γύρω από αυτόν
- 3) Τα πρωτόνια είναι πολύ βαρύτερα από τα ηλεκτρόνια (οπότε και τα ηλεκτρόνια είναι πολύ πιο ευέλικτα)
- 4) Το φορτίο του ηλεκτρονίου είναι ίσο και αντίθετο από αυτό του πρωτονίου οπότε συνολικά τα άτομα είναι ηλεκτρικώς ουδέτερα όπως και όλα τα υλικά.



Σχήμα 1.4

Τα περισσότερα σώματα τριγύρω μας είναι ηλεκτρικώς ουδέτερα γιατί όπως είδαμε παραπάνω, τα άτομα που τα αποτελούν είναι εξ' ορισμού ουδέτερα. Όπως όμως φαίνεται στο Σχήμα 1.5, οι δυνάμεις τριβής μπορούν να αναγκάσουν τα ηλεκτρόνια να μεταπηδήσουν από ένα σώμα ενός υλικού σε ένα άλλο σώμα διαφορετικού υλικού. Αυτό γίνεται επειδή γενικά κάποια υλικά χάνουν ευκολότερα ηλεκτρόνια κατά την διαδικασία της τριβής από ότι κάποια άλλα. Το φαινόμενο είναι σε αναλογία με την υλική φθορά όπου κάποια υλικά είναι πιο ανθεκτικά στην τριβή όπως τα μέταλλα ενώ κάποια άλλα φθείρονται περισσότερο όπως τα πολυμερή. Θεωρήστε για παράδειγμα το κάτω σώμα στο Σχήμα 1.5 το οποίο χάνει συνολικά 4 ηλεκτρόνια κατά την επαφή του με το πάνω σώμα το οποίο χάνει μόλις 1. Έτσι συνολικά το κάτω σώμα έχασε  $4 - 1 = 3$  αρνητικά φορτία και άρα θα "φορτιστεί" όπως λέμε θετικά. Τα ηλεκτρόνια βέβαια δεν χάνονται αλλά μεταπηδούν από το ένα σώμα στο άλλο. Έτσι το πάνω σώμα έχασε 1 ηλεκτρόνιο αλλά κέρδισε 4 από το κάτω σώμα και επομένως δέχθηκε συνολικά 3 αρνητικά φορτία και άρα φορτίζεται αρνητικά. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **ηλεκτρική φόρτιση** ενός σώματος.

Κατά την "**ηλεκτρική φόρτιση**", ένα ουδέτερο σώμα αποκτάει επιπλέον φορτίο. Η λέξη "επιπλέον" χρησιμοποιείται για να επισημανθεί το γεγονός ότι το σώμα πριν τη φόρτιση έφερε ένα τεράστιο αριθμό φορτίων το οποίο όμως ήταν εξίσου μοιρασμένο σε θετικό και αρνητικό και έτσι εμφανιζόταν ως ένα ηλεκτρικά ουδέτερο σώμα.



Σχήμα 1.5

Υπάρχουν και άλλοι τρόποι φόρτισης εκτός από την τριβή. Κατά το φωτο-ηλεκτρικό φαινόμενο για παράδειγμα, προσπίπτουν φως κατάλληλης συχνότητας επάνω σε μεταλλικό σώμα, μπορεί να οδηγήσει σε εξαγωγή ηλεκτρονίων από το υλικό και άρα να το φορτίσει αρνητικά. Παρόμοια είναι και το θερμο-ηλεκτρικό φαινόμενο όπου τώρα η θερμότητα και όχι το φως, αναγκάζει κάποια ηλεκτρόνια να εξέλθουν από το υλικό. Επίσης σε κάποιες ηλεκτροχημικές αντιδράσεις, ηλεκτρόδια που έρχονται σε επαφή με διαλύματα οξέων, προσφέρουν κάποια από τα ηλεκτρόνια τους στο διάλυμα όπως π.χ. στις μπαταρίες. Επίσης εκτός από το φως, και ραδιενεργές ακτινοβολίες μπορούν να προκαλέσουν "**ιονισμό**" των ατόμων, δηλαδή τη μετατροπή τους σε ιόντα που είναι

στην ουσία άτομα με πλεονασμό ή έλλειψη ηλεκτρονίων σε σχέση με την ουδέτερη κατάστασή τους. Για προφανείς λόγους αυτές οι ακτινοβολίες ονομάζονται "ιονίζουσες ακτινοβολίες".

## Φορτίο - Μονάδες

Όπως και οποιαδήποτε άλλη φυσική ποσότητα, έτσι και το φορτίο έχει μονάδες. Έτσι μπορούμε να συγκρίνουμε αριθμητικώς ένα σώμα με μεγαλύτερο φορτίο επειδή π.χ. έχει φορτιστεί για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα από ένα άλλο σώμα με μικρότερο φορτίο. Το φορτίο το συμβολίζουμε με το γράμμα  $Q$  ή  $q$  και η μονάδα του είναι το Coulomb  $C$ . Τα ηλεκτρόνια φέρουν ένα πολύ μικρό αρνητικό φορτίο

$q_e = -1.6 \times 10^{-19} C$	Φορτίο Ηλεκτρονίου	1.1
--------------------------------	--------------------	-----

Καθημερινά φαινόμενα (π.χ. τρίψιμο) έχουν να κάνουν με μερικά  $\mu Q$ . Για να σχηματίσουμε φορτίο ενός Coulomb πρέπει να συγκεντρώσουμε ένα τεράστιο αριθμό  $6.25 \times 10^{18}$  ηλεκτρονίων αφού

$$6.25 \times 10^{18} \times 1.6 \times 10^{-19} = 1 C$$

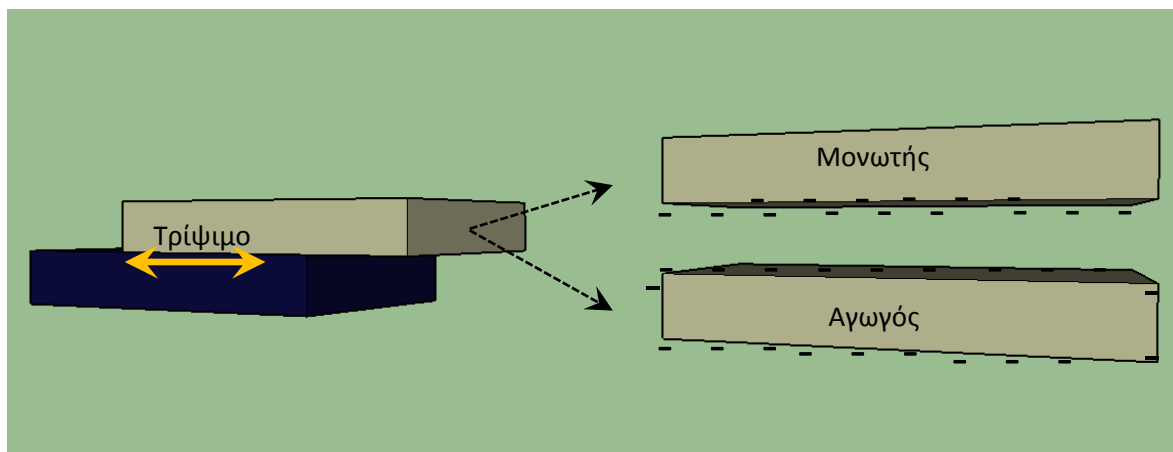
## Αγωγοί–Μονωτές

Μέσα σε ένα ηλεκτρικώς ουδέτερο υλικό όπως είδαμε, τα ηλεκτρόνια περιφέρονται γύρω από τον πυρήνα του κάθε ατόμου. Εάν όμως ένα σώμα έχει φορτιστεί, θα υπάρχουν μέσα σε αυτό και επιπλέον φορτία από φόρτιση (π.χ. λόγω τριβής). Υπάρχουν δυο ειδών υλικά όσον αφορά την ευκολία μετακίνησης του φορτίου:

Μονωτές. Τα ηλεκτρόνια είναι πολύ ισχυρά προσκολλημένα στους πυρήνες, δεν μπορούν να μετακινηθούν από άτομο σε άτομο. Τα επιπλέον φορτία από τυχόν φόρτιση επίσης δεν μπορούν να κινηθούν εύκολα και παραμένουν εκεί όπου δημιουργήθηκαν αρχικά, όπως στο πάνω δεξί μέρος του Σχήματος 1.6. Αφού μόνο η κάτω επιφάνεια αυτής της πλάκας ήταν σε επαφή με το άλλο σώμα (το σκουρόχρωμο στο σχήμα), τότε τα επιπλέον φορτία δημιουργούνται εκεί αρχικά αλλά και θα παραμείνουν εκεί για πάντα.

Αγωγοί: Μέρος των ηλεκτρονίων έλκονται πολύ ασθενώς από τους πυρήνες και επομένως μπορούν και κινούνται πολύ εύκολα από περιοχή σε περιοχή του υλικού. Τα επιπλέον φορτία κινούνται πολύ γρήγορα, απωθούνται μεταξύ τους και σε χρόνο μερικόν  $ms$  κατανέμονται σε όλη την επιφάνεια του υλικού όπως στο κάτω δεξί μέρος του Σχήματος 1.6. Και πάλι τα φορτία έχουν δημιουργηθεί στην κάτω επιφάνεια αρχικά, αλλά σχεδόν ακαριαία θα κατανεμηθούν και στις έξι έδρες της πλάκας.



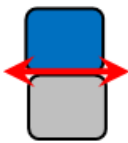
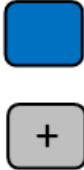
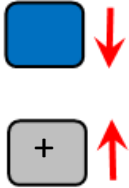
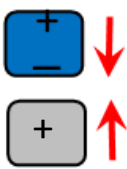
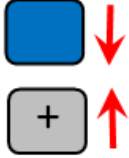
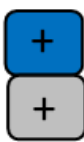
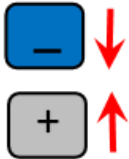



Σχήμα 1.6

Κλασικά παραδείγματα μονωτών είναι τα μη μέταλλα: Πλαστικό, Ξύλο, Γυαλί, Κεραμικά. Αντιθέτως τα περισσότερα μέταλλα είναι αγωγοί: Χάλυβας, Αλουμίνιο, Χαλκός, Πλατίνα, Χρυσός, Ψευδάργυρος.

Όπως φαίνεται και στον παρακάτω Πίνακα 1.1, υπάρχουν συνολικά τέσσερις τρόποι για την μεταβολή του φορτίου ενός σώματος.

- Τριβή: Όπως είδαμε παραπάνω, η τριβή οδηγεί σε φόρτιση. Αυτό εξηγεί στο Σχήμα 1.1 γιατί τα δυο μπαλόνια απωθούνται μεταξύ τους μετά από την τριβή τους σε ανθρώπινο μαλλί.
- επαγωγή: Όταν πλησιάσουμε ένα φορτισμένο σώμα σε ένα μεταλλικό σώμα, τότε λόγω της εύκολης μετακίνησης του φορτίου στο δεύτερο, αυτό ανακατανέμεται ώστε τα δυο σώματα να έλκονται μεταξύ τους. Για παράδειγμα, εάν πλησιάσουμε ένα θετικά φορτισμένο σώμα σε ένα κομμάτι μετάλλου, η πλησιέστερη μεριά του μετάλλου προς το θετικό σώμα φορτίζεται αρνητικά. Αυτό εξηγεί στο Σχήμα 1.2 γιατί το μπαλόνι έλκει το αλουμινένιο δοχείο του αναψυκτικού και το αναγκάζει σε κύλιση.
- επαφή. Εάν φέρουμε σε επαφή ένα φορτισμένο σώμα με ένα αφόρτιστο σώμα, τότε μπορεί να λάβει χώρα η μερική ή η ολική μεταφορά φορτίου μεταξύ των δυο σωμάτων, ανάλογα με το είδος των υλικών τους.
- Εξουδετέρωση. Εάν φέρουμε σε επαφή δυο αντίθετα φορτισμένα σώματα, τότε μπορεί να λάβει χώρα η μεταφορά φορτίου μεταξύ των δυο σωμάτων, και έτσι αυτά να αλληλοεξουδετερωθούν μερικώς ή ολικώς (εάν είναι κατά μέτρο ίσα).

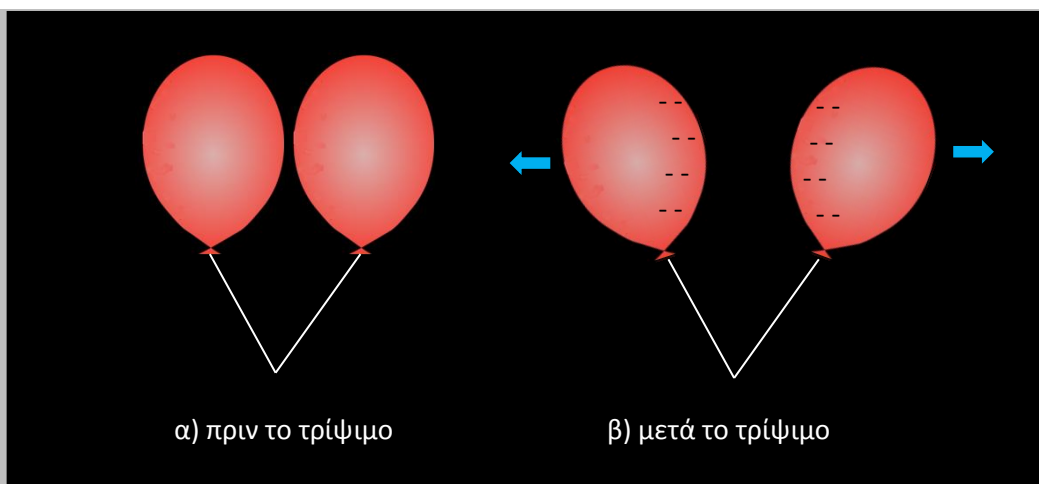
Τρίψιμο		
Επαγωγή		
Επαφή		
Εξουδετέρωση		

Πίνακας 1.1

Παράδειγμα 1.1.

Εξηγήστε γιατί τα μπαλόνια του Σχήματος 1.1β απωθούνται μεταξύ τους εάν γνωρίζετε ότι έχει προηγηθεί το τρίψιμο τους επάνω σε μάλλινο ύφασμα.

Λύση: Όπως είδαμε παραπάνω, η τριβή οδηγεί σε δημιουργία φορτίου. Το είδος του φορτίου εξαρτάται από το υλικό. Αφού τα μπαλόνια είναι κατασκευασμένα από το ίδιο υλικό, τότε θα αποκτήσουν αναγκαστικά το ίδιο είδος φορτίου, είτε θετικό είτε αρνητικό. Από την εμπειρία μας γνωρίζουμε ότι τα περισσότερα πλαστικά υλικά που απαντάμε στην καθημερινότητά μας όπως το PET (μπουκάλι νερού), το PVC (μονώσεις καλωδίων), το Πολυαιθυλένιο (σακούλες) το Πολυπροπυλένιο (συσκευασίες τροφίμων) το Φελιζόλκ.λ.π., φορτίζονται συνήθως αρνητικά όταν τα τρίψουμε με μάλλινα υφάσματα (οπότε και τα υφάσματα αυτά φορτίζονται θετικά). Ως αντιπαράδειγμα, το γυαλί φορτίζεται θετικά όταν το τρίψουμε επάνω σε μεταξένιο ύφασμα. Στην προκειμένη λοιπόν περίπτωση και τα δυο μπαλόνια αποκτούν αρνητικό φορτίο και έτσι απωθούνται μεταξύ τους λόγω του ότι τα ομόσημα φορτία απωθούνται.

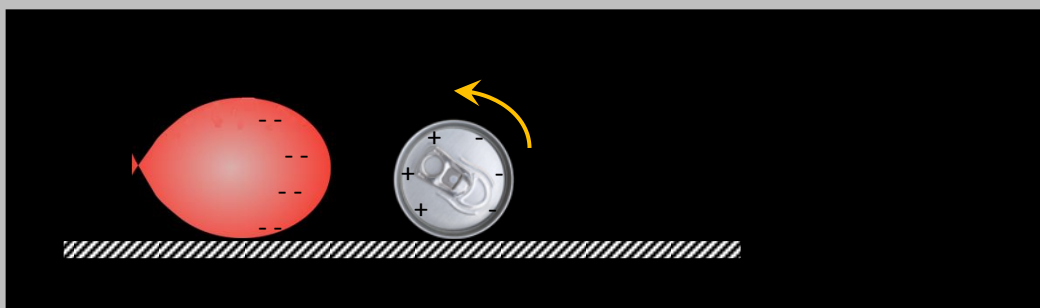


Προσέξτε ότι το φορτίο επάνω στα μπαλόνια έχει σχεδιασθεί από την μια μεριά τους μόνο, προφανώς από αυτή που ήρθε σε επαφή με ταμάλλινο ύφασμα. Αυτό όπως είδαμε γίνεται επειδή το πλαστικό είναι μονωτής και έτσι το επιπλέον φορτίο δεν δύναται να μετακινηθεί μέσα στο μπαλόνι αλλά παραμένει εκεί όπου δημιουργήθηκε αρχικά.

#### Παράδειγμα 1.2.

Εξηγήστε γιατί το αλουμινένιο δοχείο αναψυκτικού του Σχήματος 1.2 έλκεται από το μπαλόνι, εάν γνωρίζετε ότι έχει προηγηθεί το τρίψιμο του μπαλονιού επάνω σε μάλλινο ύφασμα.

Λύση: Όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, το μπαλόνι με την τριβή φορτίζεται αρνητικά ενώ θεωρούμε ότι το αλουμινένιο δοχείο είναι ηλεκτρικώς ουδέτερο αφού δεν έχει υποστεί κάποια διαδικασία τριβής. Όταν πλησιάσουμε αρκετά το μπαλόνι στο μεταλλικό δοχείο, τότε λαμβάνει χώρα το φαινόμενο της επαγωγής το οποίο εικονίζεται σχηματικά στη δεύτερη γραμμή του Πίνακα 1.1. Συγκεκριμένα, τα ηλεκτρόνια που βρίσκονται στην αριστερή ημικυλινδρική επιφάνεια του δοχείου, απωθούνται από το αρνητικό φορτίο του μπαλονιού και μεταβαίνουν στην απέναντι επιφάνεια (τα ομόσημα φορτία απωθούνται). Έτσι δημιουργείται έλξη μεταξύ του αρνητικού φορτίου του μπαλονιού και του θετικού φορτίου στην αριστερή επιφάνεια του δοχείου (τα ετερόσημα φορτία έλκονται).

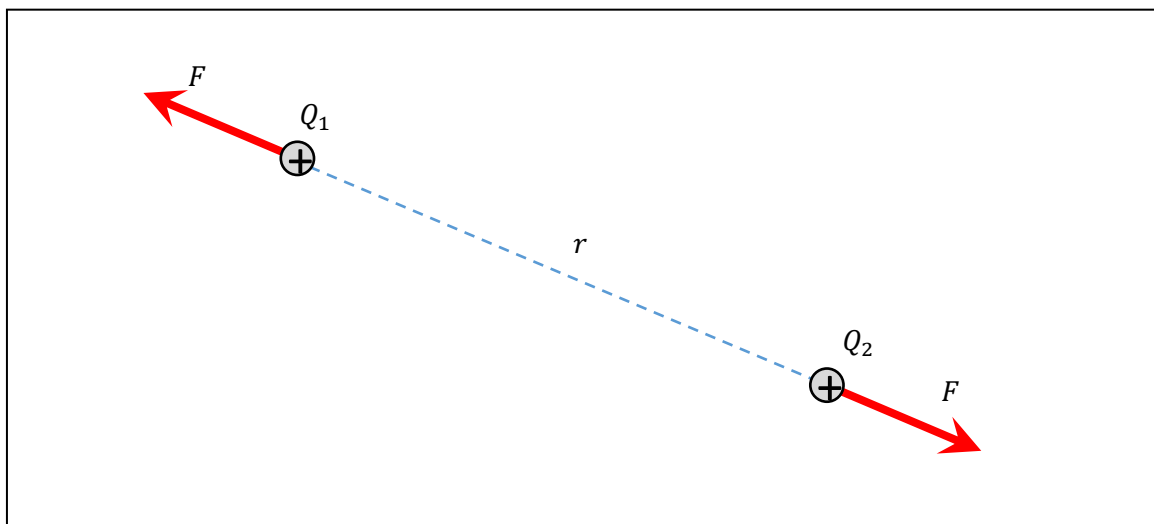


Σημειώστε ότι απαραίτητη προϋπόθεση για την παρατήρηση αυτού του φαινομένου είναι η χρήση αγώγιμου υλικού για το δοχείο αφού μόνο τότε μπορούν να μεταφερθούν εύκολα τα ηλεκτρόνια από την μια μεριά του δοχείου στην άλλη. Επίσης κατά την κύλιση θα μπορούσε να έχει έρθει ξανά το αρνητικό φορτίο στην αριστερή πλευρά του δοχείου μετά π.χ. από μισή περιστροφή αυτού. Αυτό όμως δεν γίνεται επειδή και πάλι, λόγω της ευκινησίας των ηλεκτρονίων μέσα στο αγώγιμο υλικό, αυτά αναπροσαρμόζονται ώστε να είναι πάντοτε κατανεμημένα στην δεξιά επιφάνεια του δοχείου,

αφήνοντας έτσι την αριστερή επιφάνεια θετικά φορτισμένη, όσες περιστροφές και να εκτελέσει το δοχείο. Σημειώστε επίσης ότι λαμβάνει χώρα μόνο μετακίνηση των αρνητικών ηλεκτρονίων και όχι των πρωτονίων. Αυτό γίνεται αφετέρου επειδή τα ηλεκτρόνια είναι κατά πολύ ελαφρύτερα από τα πρωτόνια (κατά ~2000 φορές) και άρα περισσότερο ευκίνητα, και αφενός επειδή τα πρωτόνια μέσα στον πυρήνα συγκρατούνται μεταξύ τους (και με τα νετρόνια) με ισχυρές πυρηνικές αλληλεπιδράσεις και έτσι η αποκόλλησή τους μπορεί να γίνει μόνο σε πυρηνικές αντιδράσεις (οι οποίες απαιτούν πολύ υψηλές ενέργειες).

## Ο Νόμος του Coulomb

Όπως είδαμε παραπάνω, τα φορτία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους είτε με άπωση, είτε με έλξη. Αυτή είναι μια ποιοτική παρατήρηση θα θέλαμε όμως ποσοτικώς να γνωρίζουμε πόσο μεγάλη είναι αυτή η έλξη ή η άπωση, δηλαδή ποιο είναι το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο κάθε φορτίο αλλά και τη διεύθυνση αυτής της δύναμης. Την απάντηση σε αυτό το ερώτημα δίνει ο **νόμος του Coulomb**.



Σχήμα 1.7

Θεωρήστε τα δυο σημειακά φορτία στο Σχήμα 1.7. Ως "σημειακά" θεωρούνται τα φορτία που δεν έχουν διαστάσεις. Στην πράξη ως σημειακά λαμβάνουμε φορτισμένα σώματα πολύ μικρών διαστάσεων όπως ένα ηλεκτρόνιο, ο κόκκος σκόνης που έχει φορτιστεί στην ατμόσφαιρα γύρω μας λόγω τριβής του με μόρια του αέρα, ένα πολύ μικρό κομματάκι χαρτιού που το έχουμε συμπυκνώσει σε σφαιρική μορφή και το έχουμε τρίψει επάνω σε μάλλινο ύφασμα.ο.κ. Τα δυο φορτία δεν είναι αναγκαστικά ίσα μεταξύ τους, έστω ότι τα φορτία τους σε *Coulomb* είναι ίσα με  $Q_1$  and  $Q_2$  και βρίσκονται σε απόσταση  $r$  μεταξύ τους. Λόγω δράσης-αντίδρασης, οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ τους (άπωση στο συγκεκριμένο παράδειγμα αφού στο σχήμα τα φορτία είναι και τα δυο θετικά) είναι κατά μέτρο ίσες. Το μέτρο  $F$  αυτής της δύναμης σε *Newtons* σύμφωνα με τον **νόμο του Coulomb** δίνεται **από την εξίσωση**:

$F = k \frac{ Q_1  Q_2 }{r^2}$	Νόμος Coulomb	1.2
--------------------------------	---------------	-----

όπου η σταθερά  $k$  ισούται με  $9 \times 10^9$  σε μονάδες S.I. Προσέξτε ότι στην Εξ. 1.2 υπεισέρχονται οι απόλυτες τιμές των φορτίων αφού μιλάμε για το μέτρο της δύναμης το οποίο είναι πάντοτε μια

θετική ποσότητα ενώ τα φορτία μπορούν να έχουν τόσο θετικές όσο και αρνητικές τιμές. Όσον αφορά την διεύθυνση της  $F$ , βρίσκεται πάντοτε επάνω στον άξονα που συνδέει τα δυο φορτία και η φορά της καθορίζεται από τον κανόνα έλξης-άπωσης των δυο φορτίων.

**Παράδειγμα 1.3.** Δυο φορτία  $-3$  και  $+4 \mu\text{C}$  βρίσκονται σε απόσταση  $12 \text{ mm}$  μεταξύ τους. Ποια είναι η ηλεκτροστατική δύναμη που δέχονται;

**Λύση:** Από την Εξ. 1.2

$$F = k \frac{|Q_1||Q_2|}{r^2}$$

Μετατροπή σε μονάδες S.I.:

$$r = 12 \text{ mm} = 0.012 \text{ m}$$

$$Q_1 = -3 \mu\text{C} = -3 \times 10^{-6} \text{ C}$$

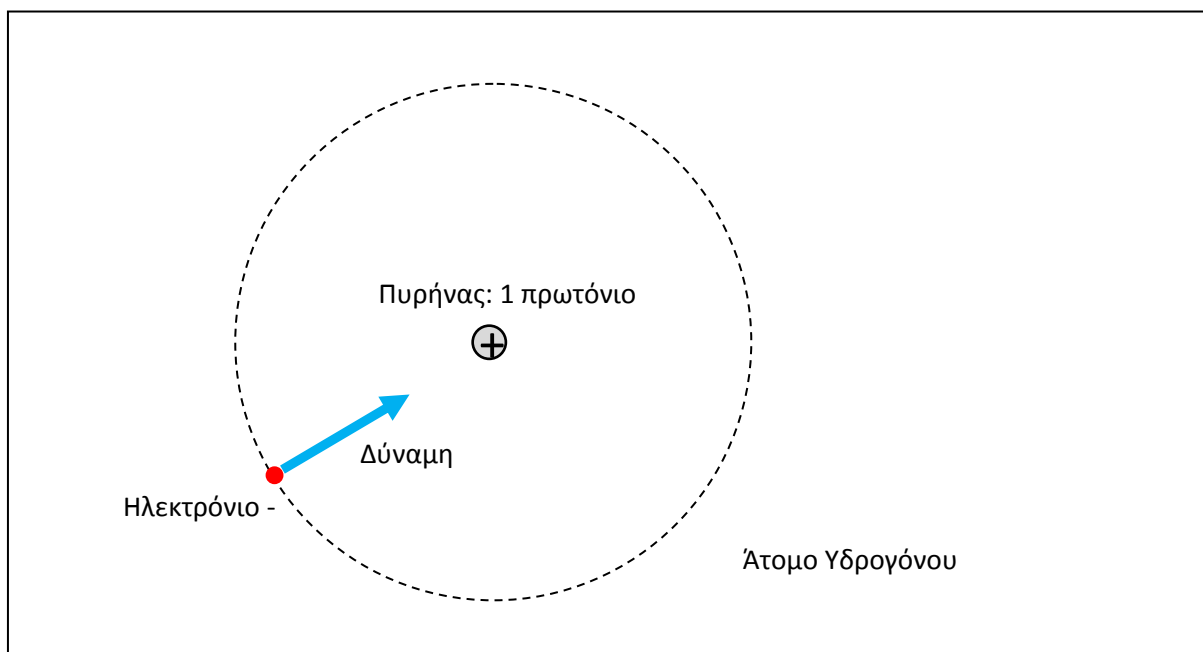
$$Q_2 = 4 \mu\text{C} = 4 \times 10^{-6} \text{ C}$$

Το μέγεθος της δύναμης (διεύθυνση : ελκτική)

$$F = 9 \times 10^9 \frac{3 \times 10^{-6} \times 4 \times 10^{-6}}{(0.012)^2} = 750 \text{ N}$$

**Παράδειγμα 1.4.** Θεωρήστε ότι η ακτίνα του ατόμου του υδρογόνου (1 ηλεκτρόνιο – 1 πρωτόνιο) είναι  $5.2 \times 10^{-11} \text{ m}$ . Ποια είναι η δύναμη που κρατάει το ηλεκτρόνιο σε τροχιά ;

**Λύση:** Το υδρογόνο είναι το απλούστερο άτομο με το ένα και μοναδικό πρωτόνιο να έλκει αντίστοιχα ένα ηλεκτρόνιο. Η φοράτης δύναμης που ασκείται στο ηλεκτρόνιο είναι προς το πρωτόνιο δηλαδή το κέντρο της τροχιάς (κεντρομόλος)



Το ηλεκτρόνιο έχει φορτίο  $Q_1 = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$  ενώ το πρωτόνιο  $Q_2 = +1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ . Η απόσταση των φορτίων είναι ίση με την ακτίνα της τροχιάς  $r = 5.2 \times 10^{-11} \text{ m}$  οπότε η δύναμη ισούται με:

$$F = 9 \times 10^9 \frac{|Q_1||Q_2|}{r^2}$$

$$F = 9 \times 10^9 \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 1.6 \times 10^{-19}}{(5.2 \times 10^{-11})^2} = 8.52 \times 10^{-8} \text{ N}$$

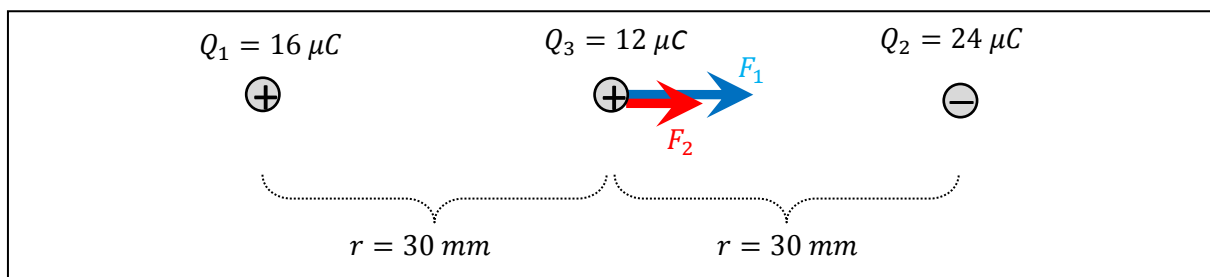
**Παράδειγμα 1.5:** Δυο ταυτόσημα φορτία απέχουν μεταξύ τους 30 mm και δρουν πάνω τους μια απωστική δύναμη 700 N. Ποιο είναι το μέγεθος του κάθε φορτίου;

**Λύση:** Για ταυτόσημα φορτία  $Q_1 = Q_2 = Q$ . Η απωστική δύναμη σημαίνει ότι τα φορτία έχουν το ίδιο πρόσημο και για απλότητα τα παίρνουμε θετικά. Η απόσταση είναι  $r = 30 \text{ mm} = 0.03 \text{ m}$ . Από τον νόμο του Coulomb έχουμε:

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} = k \frac{Q^2}{r^2} \Rightarrow Q^2 = \frac{F}{k} r^2 = \frac{980}{9 \times 10^9} \times 0.03^2 = 7.0 \times 10^{-11} \Rightarrow Q = 8.37 \times 10^{-6} \text{ C}$$

**Παράδειγμα 1.4:** Σημειακό φορτίο  $+16 \mu\text{C}$  τοποθετείται 60 mm αριστερά από ένα άλλο σημειακό φορτίο  $-24 \mu\text{C}$ . Πόση δύναμη δρουν σε ένα τρίτο φορτίο  $+12 \mu\text{C}$  το οποίο τοποθετείται στο κέντρο μεταξύ των δυο;

**Λύση:** Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, στο  $Q_3$  δρουν δυο δυνάμεις, η  $F_1$  από το  $Q_1$  και η  $F_2$  από το  $Q_2$ :



Τα μέτρα των δυνάμεων αυτών ισούνται με

$$F_1 = k \frac{|Q_1||Q_3|}{r^2} = 9 \times 10^9 \frac{16 \times 10^{-6} \times 12 \times 10^{-6}}{(0.03)^2} = 1920 \text{ N}$$

και

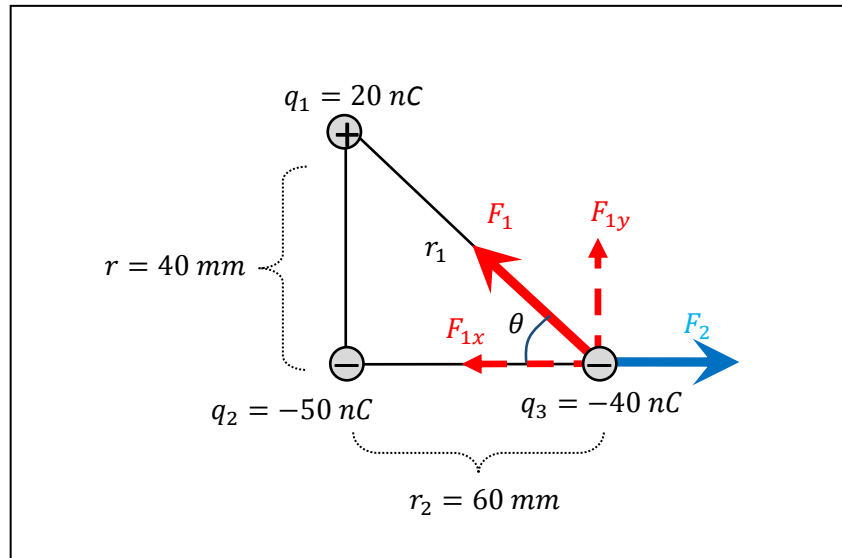
$$F_2 = k \frac{|Q_2||Q_3|}{r^2} = 9 \times 10^9 \frac{24 \times 10^{-6} \times 12 \times 10^{-6}}{(0.03)^2} = 2880 \text{ N}$$

Οι φορές τους φαίνονται στο σχήμα. Η  $F_1$  είναι απωστική και η  $F_2$  είναι ελκτική. Και οι δυο είναι προς τα δεξιά οπότε η συνισταμένη δύναμη ισούται με:

$$F = F_1 + F_2 = 4800 \text{ N}$$

**Παράδειγμα 1.6:** Ένα φορτίο  $+20 \text{ nC}$  είναι τοποθετημένο  $40 \text{ mm}$  πάνω από ένα άλλο φορτίο  $-50 \text{ nC}$ . Ποια είναι η συνολική δύναμη σε ένα τρίτο φορτίο  $-40 \text{ nC}$  το οποίο είναι τοποθετημένο  $60 \text{ mm}$  οριζόντια στα δεξιά του φορτίου των  $-50 \text{ nC}$ ;

**Λύση:** Η γεωμετρία του προβλήματος φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Στο  $q_3$  ασκούνται δυο δυνάμεις, μια από το  $q_1$  και μια από το  $q_2$ . Είναι ευκολότερο να υπολογίσουμε πρώτα την δύναμη  $F_2$  που προέρχεται από το  $q_2$ :

$$F_2 = k \frac{|q_2||q_3|}{r_2^2} = 9 \times 10^9 \frac{50 \times 10^{-9} \times 40 \times 10^{-9}}{(0.06)^2} = 5.0 \times 10^{-3} \text{ N}$$

Για την  $F_1$  που προέρχεται από το  $q_1$ , πρέπει πρώτα να βρούμε το  $r_1^2$ . Από το Πυθαγόρειο θεώρημα:

$$r_1^2 = r^2 + r_2^2 = 5200 \text{ mm}^2 = 5.2 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

Επομένως

$$F_1 = k \frac{|q_1||q_3|}{r_1^2} = 9 \times 10^9 \frac{50 \times 10^{-9} \times 60 \times 10^{-9}}{5.2 \times 10^{-3}} = 5.2 \times 10^{-3} \text{ N}$$

Οι φορές των δυνάμεων που δρουν στο  $q_3$  φαίνονται στο Σχήμα. Η  $\vec{F}_1$  είναι ελκτική ενώ η  $\vec{F}_2$  απωστική. Στη περίπτωση της  $\vec{F}_1$  απαιτείται η ανάλυσή της σε συντεταγμένες οπότε πρέπει να βρούμε την γωνία  $\theta$ . Από την τριγωνομετρία

$$\tan \theta = \frac{r}{r_2} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{40}{60} = 33.7^\circ$$

Αναλύοντας σε συνιστώσες

$$F_{1x} = -F_1 \cos \theta = -5.2 \times 10^{-3} \times \cos(33.7^\circ) = -4.33 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$F_{1y} = F_1 \sin \theta = 5.2 \times 10^{-3} \times \sin(33.7^\circ) = 2.88 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$F_{2x} = F_2 = 5.0 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$F_{2y} = 0 \text{ N}$$

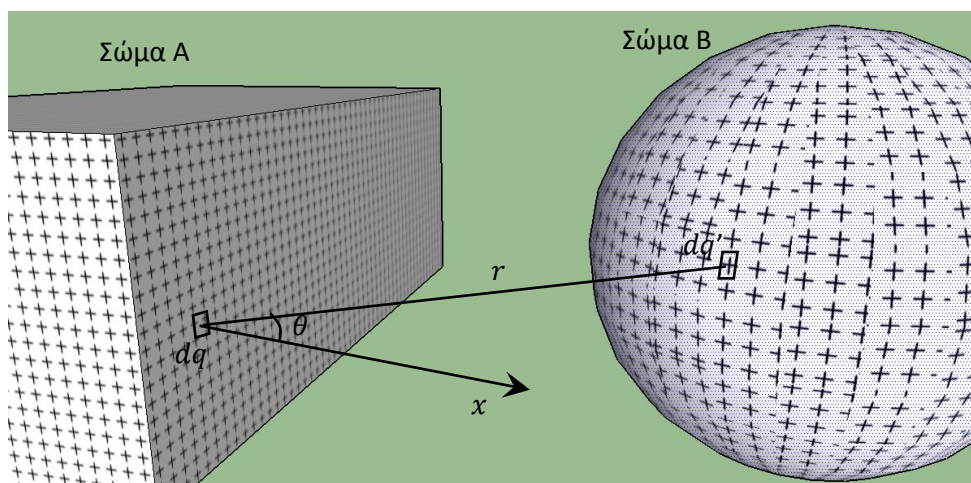
Η συνισταμένη δύναμη  $\vec{F}$  που δρα στο  $Q_3$  έχει συνιστώσες:

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} = 0.67 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$F_y = F_{1y} + F_{2y} = 2.88 \times 10^{-3} \text{ N}$$

## Δύναμη μεταξύ μη σημειακών φορτίων

Ο νόμος του Coulomb ισχύει μόνο στην περίπτωση όπου τα δυο φορτία είναι σημειακά ή φορτισμένες σφαίρες με σφαιρική κατανομή φορτίου, με την απόσταση  $r$  να μετράει από τα κέντρα τους. Πως μπορούμε να υπολογίσουμε την δύναμη μεταξύ δυο φορτισμένων σωμάτων όπως αυτά του παρακάτω Σχήματος 1.8; Σε αυτήν τη περίπτωση έχουμε όπως λέμε μια συνεχή κατανομή φορτίου δηλαδή το φορτίο είναι κατανεμημένο σε κάποιον όγκο του χώρου (συνήθως σε ένα στερεό σώμα) και όχι μόνο επάνω σε ένα υλικό σημείο.



Σχήμα 1.8

Σε αυτή την περίπτωση χωρίζουμε τα δυο σώματα σε απειροστά κομμάτια. Τότε το κάθε απειροστό κομμάτι συμπεριφέρεται ως σημειακό φορτίο και έτσι μπορούμε να εφαρμόσουμε τον νόμο του Coulomb. Για παράδειγμα έστω ένα τέτοιο κομμάτι με φορτίο  $dq$  στο σώμα A του σχήματος και ένα αντίστοιχο φορτίο  $dq'$  στο σώμα B. Εάν η μεταξύ τους απόσταση είναι ίση με  $r$ , τότε το μέτρο της δύναμης  $dF$  μεταξύ τους ισούται με

$$dF = k \frac{|dq||dq'|}{r^2}$$

Αυτή η δύναμη είναι γενικά ένα διάνυσμα και πρέπει να αναλυθεί σε συνιστώσες. Για παράδειγμα κατά μήκος του άξονα  $x$ , η συνιστώσα της δύναμης που ασκείται στο σώμα A εξαιτίας της αλληλεπίδρασης των  $dq$  και  $dq'$  είναι ίση με

$$dF_x = -dF \cos\theta = -k \frac{|dq||dq'|}{r^2} \cos\theta$$



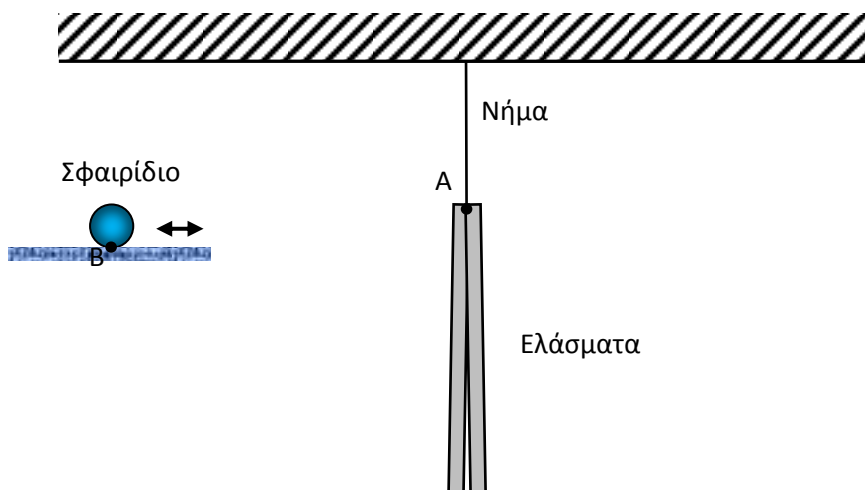
(τα μείον είναι επειδή λόγω άπωσης, η δύναμη στο σώμα A είναι προς τα αριστερά). Για να βρούμε την συνολική δύναμη πρέπει να ολοκληρώσουμε μια-μια όλες τις συνιστώσες επάνω στα δυο σώματα A και B. Π.χ. για τη  $x$  συνιστώσα:

$$F_x = \pm \int_A \int_B dF \cos\theta = \pm k \int_A \int_B \frac{|dq||dq'|}{r^2} \cos\theta$$

Αυτό είναι γενικώς ένα πολύ δύσκολο πρόβλημα επειδή τόσο το  $r$  όσο και το  $\theta$  μεταβάλλονται όπως ολοκληρώνουμε επάνω στα A και B (δηλαδή όπως αλλάζουμε ζευγάρια  $dq$  και  $dq'$ ). Θα παραλείψουμε τη συζήτηση περί συνεχών κατανομών φορτίου για το επόμενο κεφάλαιο όπου θα εξετάσουμε την έννοια του πεδίου πρώτα.

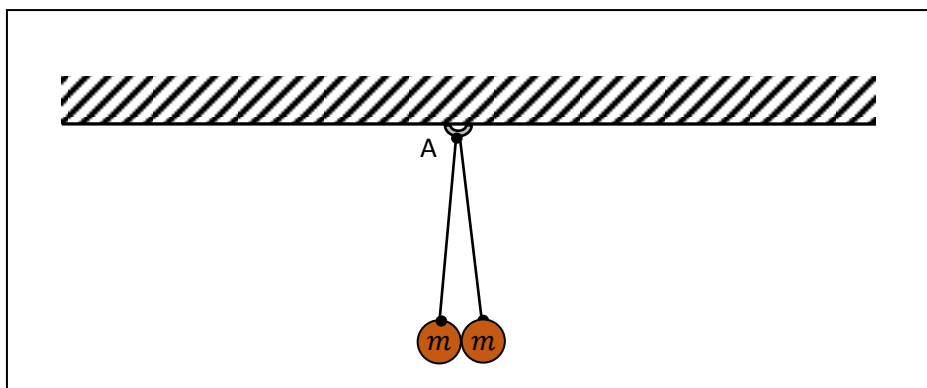
## Προβλήματα

**Πρόβλημα 1.1.** Στο παρακάτω σχήμα, δυο πανομοιότυπα και πολύ ελαφριά λεπτά μεταλλικά ελάσματα αναρτούνται στο κοινό τους σημείο A μέσω αβαρούς νήματος από την οροφή. Τα δυο ελάσματα μπορούν και περιστρέφονται ελεύθερα και ανεξάρτητα γύρω από το A. Επίσης ένα μικρό γυάλινο σφαιρίδιο, τρίβεται επάνω σε μεταξωτό ύφασμα ώστε το χαμηλότερό του σημείο B να ανταλλάξει φορτίο  $4 \mu\text{C}$  με το ύφασμα. Περιγράψτε αναλυτικά τι θα συμβεί εάν μεταφέρουμε το σφαιρίδιο έτσι ώστε το σημείο του B να έρθει σε επαφή με τα ελάσματα στο κοινό τους σημείο A. Ποια ηλεκτρικά φαινόμενα λαμβάνουν χώρα; Σε κάθε φαινόμενο πρέπει η απάντησή σας να συνοδεύεται και από αριθμητικά αποτελέσματα (θυμηθείτε ότι στους μονωτές το επιπλέον φορτίο είναι εγκλωβισμένο ενώ αντίθετα στους αγωγούς μετακινείται ελεύθερα).



**Πρόβλημα 1.2.** Περιγράψτε αναλυτικά τι θα συμβεί στο προηγούμενο πρόβλημα εάν μεταφέρουμε κάπως διαφορετικά το σφαιρίδιο έτσι ώστε το σημείο του B να έρθει σε εγγύτητα με το κοινό σημείο A των ελασμάτων χωρίς όμως να έρθει σε άμεση επαφή μαζί του. Όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα, πρέπει η απάντησή σας να συνοδεύεται και από αριθμητικά αποτελέσματα και να περιγράψετε τα εμφανιζόμενα ηλεκτρικά φαινόμενα. Τι είδους κίνηση θα εκτελέσει το σύστημα των δυο ελασμάτων;

**Πρόβλημα 1.3.** Στο παρακάτω σχήμα, δυο πανομοιότυπα χάλκινα συμπαγή σφαιρίδια πολύ μικρών διαστάσεων και μάζας  $m$  το καθένα, αναρτούνται με ξεχωριστό αβαρές χάλκινο σύρμα το καθένα από τον ίδιο χαλύβδινο μικρό γάντζο A στην οροφή. Τα δυο σύρματα είναι πανομοιότυπα με μήκος  $L$  και απειροελάχιστο πάχος το καθένα. Αρχικά τα δυο σφαιρίδια είναι αφόρτιστα και ένας φοιτητής τοποθετεί με κάποιο τρόπο ένα συνολικό φορτίο  $q$  στο σημείο A και καταγράφει αμέσως μετά την απόσταση  $x$  μεταξύ των δυο σφαιριδίων (από κέντρο σε κέντρο). Να βρείτε μια έκφραση του φορτίου  $q$  συναρτήσει των δεδομένων  $x, L, m$  αλλά και των σταθερών  $g$  (βαρυτική) και  $K$  (ηλεκτρική) της Φυσικής (Σημείωση: μπορείτε να θεωρήσετε κατάσταση ισορροπίας και να λάβετε προσεγγιστικά ότι για μικρές γωνίες ισχύει  $\cos\theta \approx 1$ . Τα σφαιρίδια μπορούν να εκληφθούν ως σημειακά κατά προσέγγιση).



**Πρόβλημα 1.4.** Δυο ετερόσημα σημειακά φορτία  $\pm 3 \mu C$  τοποθετούνται επάνω στον άξονα  $x$  στις σταθερές θέσεις  $x_1 = -1 \text{ mm}$  το αρνητικό και  $x_2 = +3 \text{ mm}$  το θετικό φορτίο αντίστοιχα. Ένα τρίτο σημειακό φορτίο  $1 \mu C$  τοποθετείται στη θέση  $x_3 = -2 \text{ mm}$  και δέχεται μια συνιστάμενη δύναμη μέτρου  $F_3$  από τα δυο φορτία των  $\pm 3 \mu C$ . Να βρεθούν α) πόσο είναι το  $F_3$  και β) σε ποια άλλη θέση επάνω στον άξονα  $x$  πρέπει να τοποθετηθεί το φορτίο των  $1 \mu C$  ώστε η συνιστάμενη δύναμη να έχει επίσης μέτρο  $F_3$ ;

**Πρόβλημα 1.5.** Στο προηγούμενο πρόβλημα να βρεθεί σε ποια θέση επάνω στον άξονα  $x$  πρέπει να τοποθετηθεί το φορτίο των  $1 \mu C$ , έτσι ώστε η συνιστάμενη δύναμη που δέχεται από τα δυο φορτία των  $\pm 3 \mu C$  (τα οποία είναι στερεωμένα σε σταθερές θέσεις) να είναι α) μηδέν και β) μέγιστη.

**Πρόβλημα 1.6.** Μια μεταλλική σφαίρα διαμέτρου  $5 \text{ mm}$  φορτίζεται με θετικό φορτίο  $6 \mu C$ . Ακολούθως έρχεται σε ηλεκτρική επαφή με δεύτερη πανομοιότυπη σφαίρα μέσω ευθύγραμμου αγωγού απειροελάχιστου πάχους και μήκους  $L$  (ο αγωγός βρίσκεται επάνω σε άξονα που περνάει από τα δυο κέντρα των σφαιρών). Εάν η δύναμη μεταξύ των δυο σφαιρών είναι ίση με  $4000 \text{ N}$ , να βρεθεί το μήκος  $L$ .

**Πρόβλημα 1.7.** Δυο πανομοιότυπα φορτία  $+2 \mu C$  το καθένα, τοποθετούνται σε δυο διαδοχικές κορυφές ενός τετραγώνου πλευράς  $5 \text{ mm}$ . Ένα τρίτο σημειακό φορτίο  $4 \mu C$  τοποθετείται στο κέντρο βάρους του τετραγώνου και δέχεται μια συνιστάμενη δύναμη  $F_3$  από τα δυο φορτία των  $+2 \mu C$ . Να βρεθεί το μέτρο και η φορά της  $F_3$ .

**Πρόβλημα 1.8.** Δυο φορτία  $\pm 2 \mu C$  τοποθετούνται στις δυο βάσεις ισόπλευρου τριγώνου πλευράς  $5 \text{ mm}$ . Ένα τρίτο σημειακό φορτίο  $4 \mu C$  τοποθετείται στο κέντρο βάρους του τριγώνου και δέχεται μια συνιστάμενη δύναμη  $F_3$  από τα δυο φορτία των  $\pm 2 \mu C$ . Να βρεθεί το μέτρο και η φορά της  $F_3$ .



## 2. ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

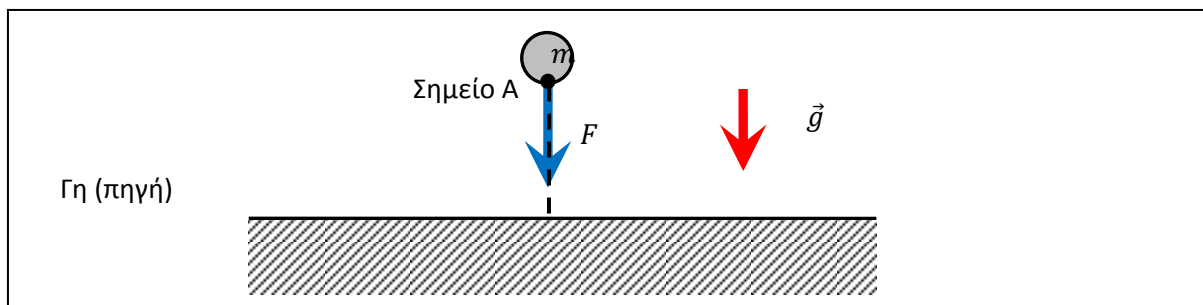
### Ορισμός του Πεδίου

Ονομάζουμε πεδίο φυσική ποσότητα σε κάποιο σημείο του χώρου, η οποία δημιουργείται λόγω μιας μακρινής πηγής. Για παράδειγμα το ξυπνητήρι ρολόι στο παρακάτω Σχήμα 2.1α δημιουργεί ένα “πεδίο ήχου” στο σημείο Α. Εάν τοποθετήσουμε το αυτί μας στο Α θα ακούσουμε τον ήχο. Εάν κλείσουμε τα αυτιά μας δεν ακούμε πλέον αυτόν τον ήχο αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι ο ήχος δεν υπάρχει. Ο ήχος υπάρχει στο Α είτε εμείς είμαστε εκεί είτε όχι. Επομένως το πεδίο είναι μια ιδιότητα του χώρου και γενικά παίρνει διαφορετικές τιμές από σημείο σε σημείο και άρα είναι μια συνάρτηση των συντεταγμένων του χώρου. Παρόμοιο παράδειγμα είναι ο ηλεκτρικός λαμπτήρας στο Σχήμα 2.1β ο οποίος δημιουργεί “πεδίο φωτός” στο Α. Το φως υπάρχει εκεί είτε το κοιτάξουμε είτε όχι. Μπορούμε να έχουμε ταυτόχρονα και τα δυο πεδία στο Α. Επίσης μπορούμε να έχουμε και δυο πεδία της ίδιας φύσης ταυτόχρονα σε ένα σημείο π.χ. ο ήχος από ένα αυτοκίνητο και από μια τηλεόραση μπορούν να ακούγονται ταυτόχρονα στο αυτί μας.



Σχήμα 2.1

Κλασική περίπτωση πεδίου είναι η βαρύτητα όπου η γη δρα ως πηγή και έλκει αντικείμενα προς τα κάτω όπως η μάζα στο σημείο Α στο Σχήμα 2.2. Επομένως στο Α υπάρχει “πεδίο βαρύτητας” και  $F$  είναι η βαρυτική δύναμη.



Σχήμα 2.2

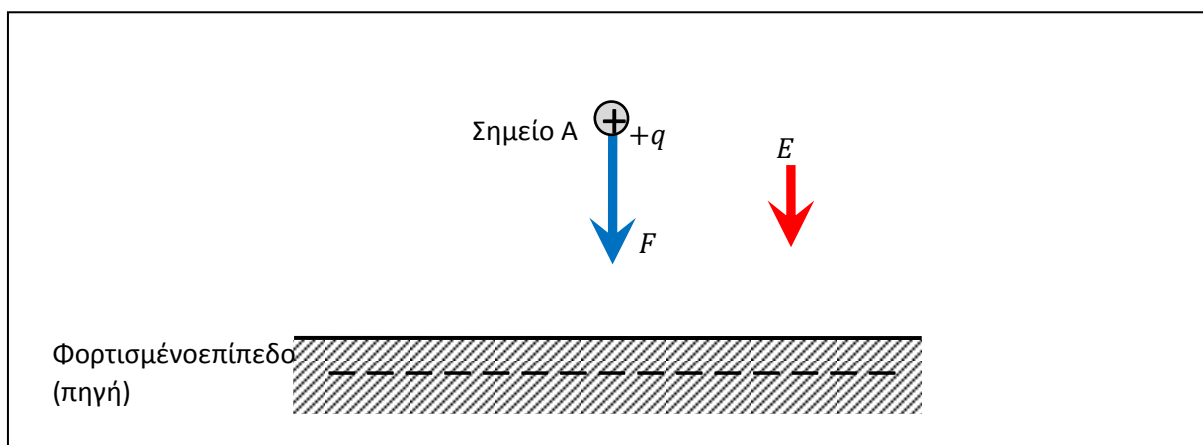
Για να ποσοτικοποιήσουμε το πεδίο βαρύτητας, ορίζουμε την ποσότητα

$$g = \frac{F}{m}$$

η οποία είναι η γνωστή μας σταθερά της βαρύτητας, το μέγεθος της οποίας χαρακτηρίζει το πεδίο, π.χ. για την γη  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  ενώ για την σελήνη  $g = 1.6 \text{ m/s}^2$ , ένα σημαντικά ασθενέστερο πεδίο από αυτό της γης.

## Ηλεκτρικό Πεδίο

Παρόμοια με την βαρύτητα, μια αρνητικά φορτισμένη οριζόντια πλάκα όπως αυτή που εικονίζεται στο Σχήμα 2.3, δημιουργεί ένα ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο Α έτσι ώστε όταν ένα άλλο σημειακό φορτίο τοποθετηθεί εκεί, θα δράσει επάνω του μια δύναμη  $F$ . Δηλαδή εδώ η πλάκα παίζει το ρόλο της γης και το σημειακό φορτίο παίζει το ρόλο της σημειακής μάζας. Το ηλεκτρικό πεδίο της φορτισμένης πλάκας υπάρχει στο σημείο Α είτε εμείς τοποθετήσουμε εκεί το σημειακό φορτίο είτε όχι.



Σχήμα 2.3

Παρόμοια με το βαρυτικό πεδίο, ορίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο  $E$  ως

$E = \frac{F}{ q }$	Ηλεκτρικό Πεδίο	2.1
---------------------	-----------------	-----

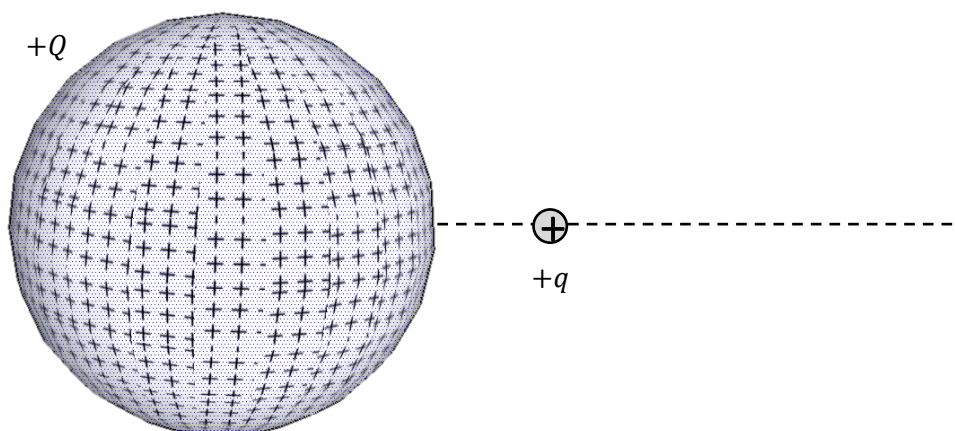
Οι μονάδες του  $E$  σύμφωνα με την παραπάνω ορισμό είναι τα  $N/C$  και η φυσική σημασία του είναι ότι όσο μεγαλύτερο είναι το  $E$ , τόσο πιο ισχυρή είναι η πηγή που το παράγει (για δεδομένη απόσταση από την πηγή). Το σημειακό φορτίο που χρησιμοποιούμε για να μετρήσουμε το ηλεκτρικό πεδίο μέσω της Εξίσωσης 2.1 ονομάζεται "υποθετικό" ή "δοκιμαστικό" φορτίο επειδή μπορούμε να το απομακρύνουμε μετά τον προσδιορισμό του πεδίου, δηλαδή δεν χρειάζεται να είναι παρόν στο σημείο  $A$  για να υπάρχει το πεδίο. Το χρησιμοποιούμε δηλαδή μόνο για τη μέτρηση του  $E$ . Ο μόνος περιορισμός του σημειακού φορτίου είναι ότι α) πρέπει να είναι σημειακό και β) το φορτίο του πρέπει να είναι μικρό σε σχέση με το φορτίο της πηγής ώστε να μην διαταράξει το πεδίο της. Π.χ. εάν γνωρίζουμε ότι το φορτίο της πλάκας στο Σχήμα 2.3 είναι ίσο με  $20 \mu C$  και οι διαστάσεις της πλάκας αλλά και η απόσταση του  $A$  από την πλάκα είναι μερικά μέτρα, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιούσαμε ως "δοκιμαστικό φορτίο" ένα μικρό φορτισμένο σφαιρίδιο διαμέτρου  $1 mm$  (κατά προσέγγιση σημειακό αφού οι διαστάσεις του είναι μικρές σε σχέση με τις διαστάσεις του προβλήματος) και με φορτίο  $0.1 \mu C$  (μικρό σχετικά με το φορτίο της πηγής).

Το  $E$  είναι ένα διάνυσμα που δίνεται από τον κανόνα που φαίνεται στον Πίνακα 2.1.: Όταν δηλαδή το δοκιμαστικό φορτίο είναι θετικό, η δύναμη και το πεδίο έχουν την ίδια φορά ενώ όταν το δοκιμαστικό φορτίο είναι αρνητικό, η δύναμη και το πεδίο έχουν αντίθετη φορά.

$q: +$	$\vec{E}$ παράλληλα με την $\vec{F}$
$q: -$	$\vec{E}$ αντι-παράλληλα με την $\vec{F}$

Πίνακας 2.1

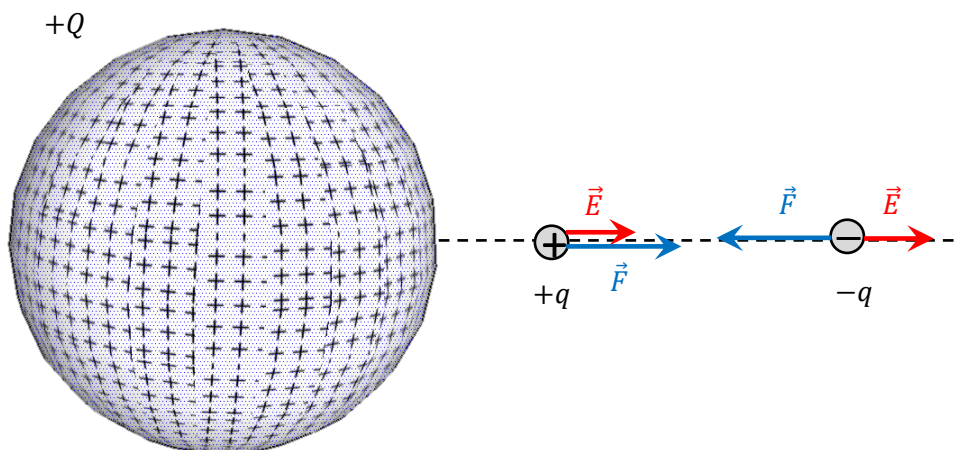
**Παράδειγμα 2.1:** Στο παρακάτω σχήμα η μεγάλη σφαίρα φέρει μεγάλο θετικό φορτίο  $+Q$ . Βρείτε την φορά του  $\vec{E}$  που δημιουργεί η σφαίρα αυτή στην περιοχή που βρίσκεται το σημειακό φορτίο  $+q$ . Πως θα άλλαζε η απάντησή σας εάν αντικαθιστούσαμε το θετικό σημειακό φορτίο με ένα αρνητικό σημειακό φορτίο  $-q$  και σε διπλάσια απόσταση από τη σφαίρα; Πως θα άλλαζε η απάντησή σας εάν η σφαίρα ήταν αρνητικά φορτισμένη;



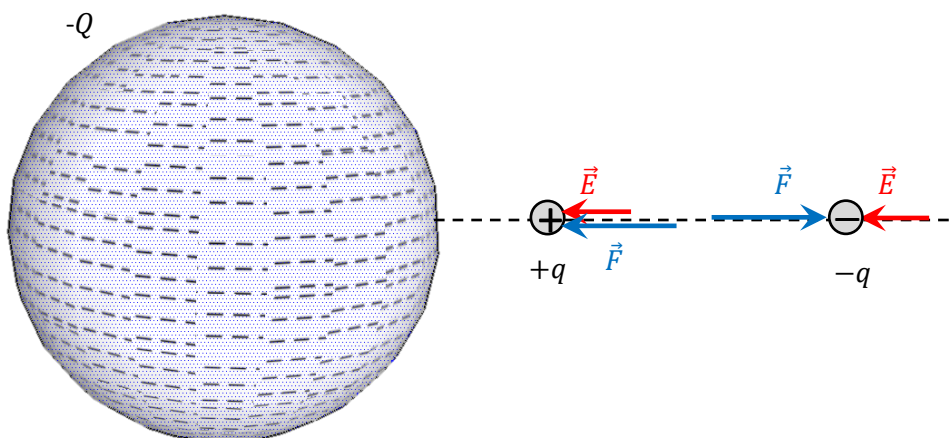
**Λύση:**

Η φορά των δυνάμεων  $F$  και των ηλεκτρικών πεδίων  $E$  φαίνονται στο παρακάτω σχήμα με την μορφή διανυσμάτων και για τα δυο φορτία  $\pm q$  (υποθέτοντας ότι είναι παρόν μόνο το ένα την κάθε φορά). Η φορά των δυνάμεων εξηγείται με τον απλό κανόνα έλξης – άπωσης του κάθε φορτίου με τη σφαίρα. Η φορά των ηλεκτρικών πεδίων είναι η ίδια με την φορά των δυνάμεων στην περίπτωση του θετικού δοκιμαστικού φορτίου  $+q$  και αντίθετη στην περίπτωση του αρνητικού δοκιμαστικού φορτίου  $-q$ .

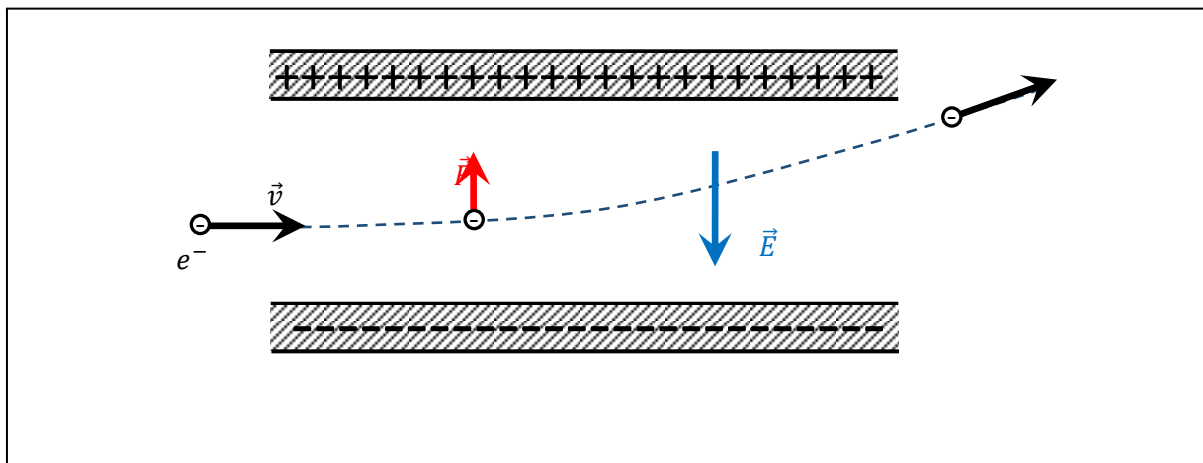
Παρατηρήστε ότι η φορά του ηλεκτρικού πεδίου εξαρτάται μόνο από την πηγή, π.χ. κατευθύνεται μακριά από την πηγή (σφαίρα) σε αυτό το σχήμα. Έτσι το  $\vec{E}$  είναι όντως μια ποσότητα που χαρακτηρίζει πλήρως το πεδίο στο χώρο ανεξαρτήτως της φύσης του δοκιμαστικού φορτίου που χρησιμοποιούμε.



Όταν η σφαίρα φορτιστεί αρνητικά, όπως στο παρακάτω σχήμα, η φορά των δυο δυνάμεων αλλά και του πεδίου αλλάζει. Και πάλι η φορά του ηλεκτρικού πεδίου εξαρτάται μόνο από την πηγή, π.χ. κατευθύνεται προς αυτήν (σφαίρα).



**Παράδειγμα 2.2:** Το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των δυο αντίθετα φορτισμένων πλακών του παρακάτω σχήματος είναι σταθερό με ένταση  $5 \times 10^4 \text{ N/C}$  προς τα κάτω. Ποιο είναι το μέγεθος και η φορά της ηλεκτρικής δύναμης που ασκείται σε ένα ηλεκτρόνιο το οποίο εισέρχεται οριζόντια μεταξύ των πλακών;



**Λύση:**

Από την Εξ2.1, η δύναμη ισούται με

$$F = |q|E = 1.6 \times 10^{-19} \times 5 \times 10^4 = 8.0 \times 10^{-15} \text{ N}$$

Για την φορά γνωρίζουμε ότι η φορά της  $\vec{F}$  για αρνητικό φορτίο είναι αντίθετη από την φορά του  $\vec{E}$  και έτσι η δύναμη είναι προς τα πάνω.

**Παράδειγμα 2.3.**

Ένα σημειακό φορτίο  $+2 \mu\text{C}$  τοποθετείται σε ένα σημείο Ρ μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο και του ασκείται μια δύναμη  $8 \times 10^{-4} \text{ N}$  προς τα κάτω. Ποια είναι η φορά και το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε αυτό το σημείο;

**Λύση:**

Από την Εξ 2.1, το πεδίο ισούται με

$$E = \frac{F}{|q|} = \frac{8 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-6}} = 400 \text{ N/C}$$

Αφού το σημειακό φορτίο είναι θετικό τότε το πεδίο και η δύναμη έχουν την ίδια φορά και έτσι η ένταση είναι και αυτή προς τα κάτω.

**Παράδειγμα 2.4.** Ένα σημειακό φορτίο  $-5 \text{ nC}$  τοποθετείται στο ίδιο σημείο Ρ του προηγούμενου προβλήματος. Ποια είναι η φορά και το μέτρο της δύναμης σε αυτό το φορτίο των  $-5 \text{ nC}$ ;

**Λύση:** Το πεδίο δημιουργείται από την πηγή (η οποία είναι άγνωστη σε αυτά τα δυο παραδείγματα) και όχι από τα σημειακά φορτία που φέρουμε σε κάποιο σημείο (όπως και το βαρυτικό πεδίο σε κάποιο σημείο δεν εξαρτάται από την μάζα που φέρουμε στο συγκεκριμένο σημείο). Όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, το πεδίο είναι προς τα κάτω με μέτρο  $E = 400 \text{ N/C}$ . Αφού όμως το



φορτίο  $q'$  αυτού του προβλήματος είναι αρνητικό, η δύναμη  $F'$  που δρα πάνω του είναι αντίθετη από το πεδίο  $E$  και έτσι είναι προς τα πάνω και με μέτρο που δίνεται από την Εξ. 2.1

$$F' = |q'|E = 5 \times 10^{-9} \times 400 = 2 \times 10^{-6} \text{ N}$$

Παράδειγμα 2.5: Σε κάποιο σημείο του χώρου, το ηλεκτρικό πεδίο έχει μέτρο  $40 \text{ N/C}$  και φορά προς τα αριστερά. Ένα άγνωστο φορτίο σε αυτό το σημείο δέχεται μια δύναμη  $5 \times 10^{-5} \text{ N}$  προς τα δεξιά. Ποιο είναι το πρόσημο και η τιμή αυτού του φορτίου;

Λύση: Αφού η φορά του  $\vec{E}$  είναι αντίθετη της φοράς της  $\vec{F}$  τότε το φορτίο  $q$  είναι αρνητικό. Από την Εξίσωση 2.1 έχουμε:

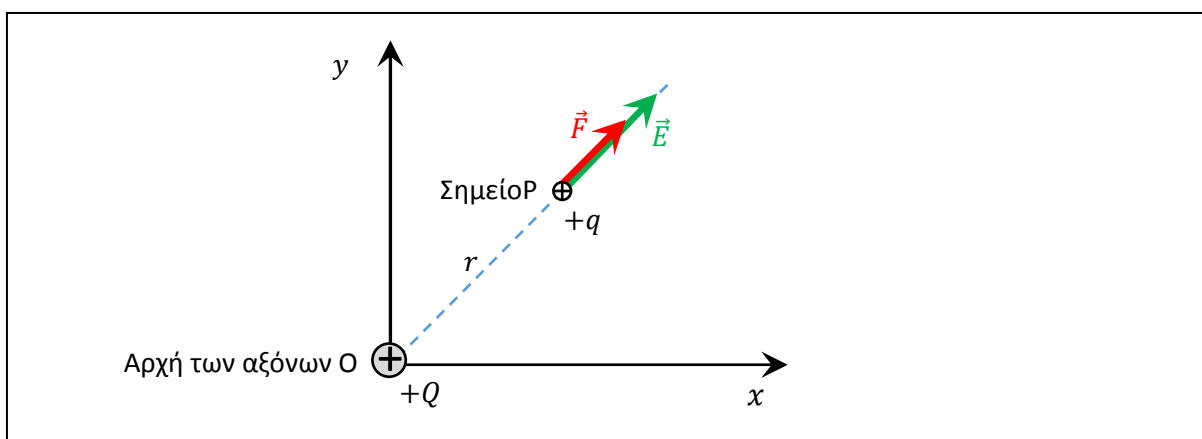
$$|q| = \frac{F}{E} = \frac{5 \times 10^{-5}}{40} = 1.25 \times 10^{-6} \text{ C}$$

## Υπολογισμός του Ηλεκτρικού Πεδίου – ΜΟΝΟ ΤΥΠΟΥΣ

Γενικά ο υπολογισμός του  $E$  για φορτισμένες πηγές τυχαίου σχήματος είναι δύσκολος. Υπάρχουν όμως κάποιες απλές περιπτώσεις με γεωμετρική συμμετρία στις οποίες ο υπολογισμός είναι εφικτός. Υπάρχουν αρκετές τέτοιες περιπτώσεις και θα εξετασθούν μόνο κάποιες από αυτές εδώ. Οι υπόλοιπες θα δοθούν ως προβλήματα στο τέλος του κεφαλαίου. Θα ξεκινήσουμε από την πιο τετριμμένη περίπτωση που είναι το σημείο, δηλαδή η πηγή θα είναι σημειακή. Αυτό γίνεται επειδή ο υπολογισμός είναι πολύ εύκολος αλλά και γιατί το αποτέλεσμα θα αποτελέσει βάση για πιο πολύπλοκους υπολογισμούς με κατανομές φορτίου σε στερεά.

### α) Ένταση σημειακού φορτίου

Στο παρακάτω Σχήμα 2.4, έστω ότι στην αρχή των αξόνων  $O$  υπάρχει ένα μεγάλο σημειακό φορτίο  $Q$  το οποίο δρα ως πηγή και ότι παράγει πεδίο  $\vec{E}$  σε κάποιο τυχαίο σημείο  $P$  του χώρου σε απόσταση  $r$  από αυτό.



Σχήμα 2.4

Εάν φέρουμε ένα δεύτερο μικρό δοκιμαστικό φορτίο  $q$  στο σημείο  $P$ , τότε λόγω αλληλεπίδρασης με το  $Q$ , θα δράσει επάνω του δύναμη  $F$  η οποία σύμφωνα με τον νόμο του Coulomb ισούται με:

$$F = k \frac{|Q||q|}{r^2}$$

Το πεδίο εξ'ορισμού ισούται με  $E = F/|q|$  και άρα:

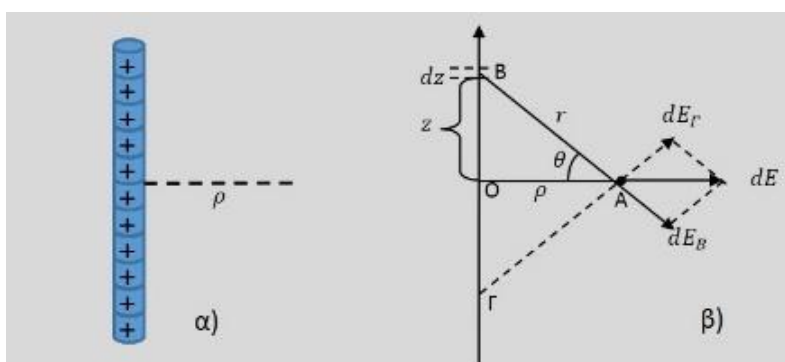
$E = k \frac{ Q }{r^2}$	Ηλεκτρικό Πεδίο Σημειακού Φορτίου $Q$	2.2
-------------------------	---------------------------------------	-----

### β) Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένης γραμμής απείρου μήκους

Σε αυτό το εδάφιο θα υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο μιας ομοιόμορφα φορτισμένης γραμμής απείρου μήκους με γραμμική πυκνότητα φορτίου  $\lambda$  (φορτίο ανά μήκος) σε απόσταση  $\rho$  από τη γραμμή, όπως φαίνεται στο αριστερό μέρος του Σχήματος 2.5. Εάν "τεμαχίσουμε" τη γραμμή φορτίου σε πολύ μικρά κομμάτια, τότε το καθένα από αυτά θα δρα ως σημειακή πηγή και έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. 2.2 η οποία ισχύει για σημειακό φορτίο. Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιούμε το σύστημα συντεταγμένων που φαίνεται στο δεξί μέρος του Σχήματος 2.5. με τη γραμμή φορτίου να βρίσκεται επάνω στον άξονα  $z$ . Επιλέγουμε τυχαία ένα σημείο  $A$  και φέρουμε από αυτό τη κάθετο προς τη γραμμή φορτίου. Το σημείο  $O$  όπου η κάθετος τέμνει τη γραμμή, το παίρνουμε ως την αρχή των συντεταγμένων. Από τα δεδομένα, η απόσταση  $OA$  είναι ίση με  $\rho$ . Χωρίζουμε την γραμμή φορτίου σε μικρά ίσα απειροστά τμήματα μήκους  $dz$  το καθένα. Έστω ένα τέτοιο τμήμα στο σημείο  $B$  το οποίο απέχει απόσταση  $z$  από το  $O$ . Από τον ορισμό του  $\lambda$ , το στοιχειώδες τμήμα  $dz$  περιέχει φορτίο  $dq = \lambda dz$ . Σύμφωνα με την Εξ. 2.2, το σημειακό φορτίο  $dq$  δημιουργεί στο σημείο  $A$  ένα απειροστό πεδίο ίσο με:

$$dE_B = k \frac{dq}{r^2} = k \frac{\lambda dz}{r^2}$$

Η φορά αυτού του πεδίου φαίνεται στο σχήμα. Θυμηθείτε ότι για θετικό σημειακό φορτίο το πεδίο απομακρύνεται από το φορτίο.



Σχήμα 2.5

Λόγω συμμετρίας (άπειρο μήκος) για κάθε σημείο όπως το  $B$ , υπάρχει και το αντίστοιχο συμμετρικό του  $\Gamma$  ως προς την αρχή  $O$ , το οποίο ισαπέχει από το  $B$  και δημιουργεί πεδίο  $dE_\Gamma$  το οποίο φαίνεται στο Σχήμα 2.4. Επειδή το φορτίο  $dq'$  του  $\Gamma$  είναι ίσο με το  $dq$  του  $B$  (ομοιόμορφη κατανομή) και

επειδή τα Β και Γ ισαπέχουν, τότε αναγκαστικά  $dE_G = dE_B$  κατά μέτρο και έτσι το συνιστάμενο  $d\vec{E}$  έχει μόνο οριζόντια συνιστώσα, κάθετη στη γραμμή φορτίου. Επομένως θα θεωρήσουμε μόνο αυτή την συνιστώσα του  $dE_B$  η οποία ισούται με  $dE_B \cos\theta$  για τον υπολογισμό του ολικού πεδίου στο Α. Για να βρούμε το ολικό πεδίο  $E$  ολοκληρώνουμε σε όλη τη γραμμή φορτίου (ΓΦ):

$$E = \int_{\Gamma\Phi} dE_B \cos\theta = k\lambda \int_{\Gamma\Phi} \frac{dz}{r^2} \cos\theta$$

Εκφράζουμε όλες τις μεταβλητές μέσα στο ολοκλήρωμα συναρτήσει του  $\theta$  και της δεδομένης απόστασης  $\rho$ . Από απλή γεωμετρία έχουμε  $z = \rho \tan\theta$  οπότε

$$dz = \frac{\rho}{\cos^2\theta} d\theta$$

Επίσης  $r \cos\theta = \rho$  οπότε  $r = \rho / \cos\theta$ . Τα όρια του  $\theta$  είναι από  $\theta = -\pi/2$  έως  $\theta = \pi/2$  (για να σαρώσουμε όλη τη γραμμή). Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω

$$E = k\lambda \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^2\theta}{\rho^2} \cos\theta \frac{\rho}{\cos^2\theta} d\theta = \frac{k\lambda}{\rho} \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\theta = \frac{k\lambda}{\rho} [\sin\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

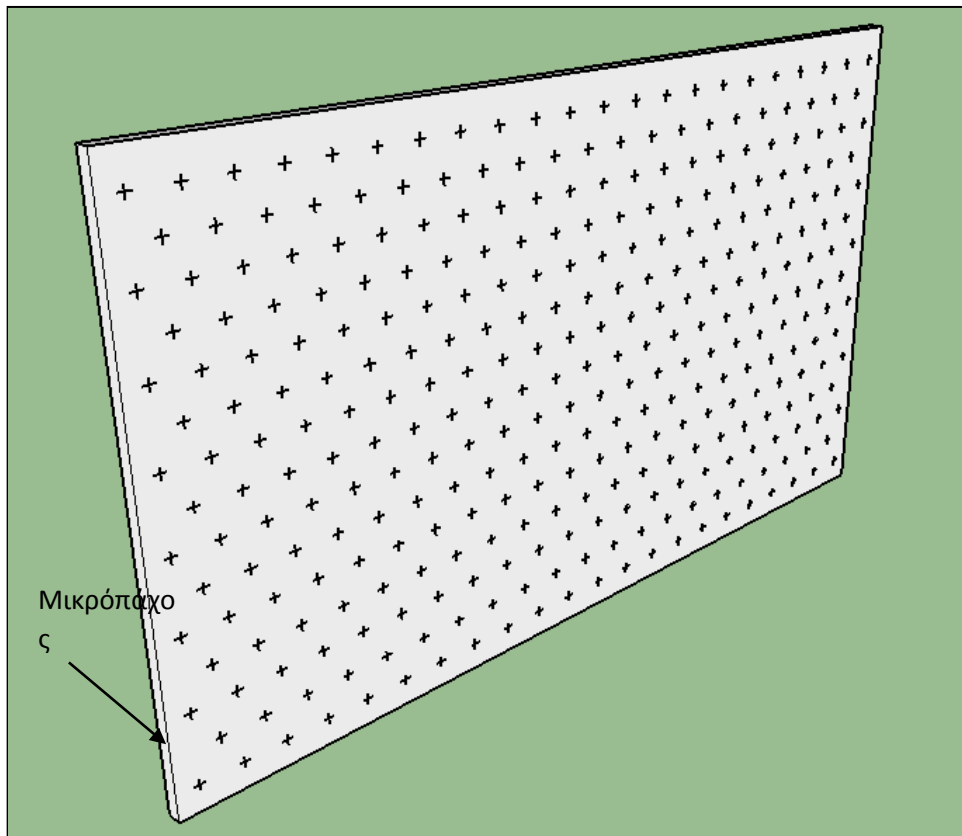
Το τελικό αποτέλεσμα είναι

$E = \frac{2k\lambda}{\rho}$	Ηλεκτρικό Πεδίο Άπειρης Γραμμής Φορτίου	2.4
------------------------------	--	-----

Όσον αφορά την φορά του  $E$ , αυτή καθορίζεται από το πρόσημο του  $\lambda$ . Όταν είναι θετικό, το  $\vec{E}$  απομακρύνεται από την γραμμή (έχει φορά προς το άπειρο) ενώ όταν το  $\lambda$  είναι αρνητικό, το  $\vec{E}$  είναι προς την γραμμή.

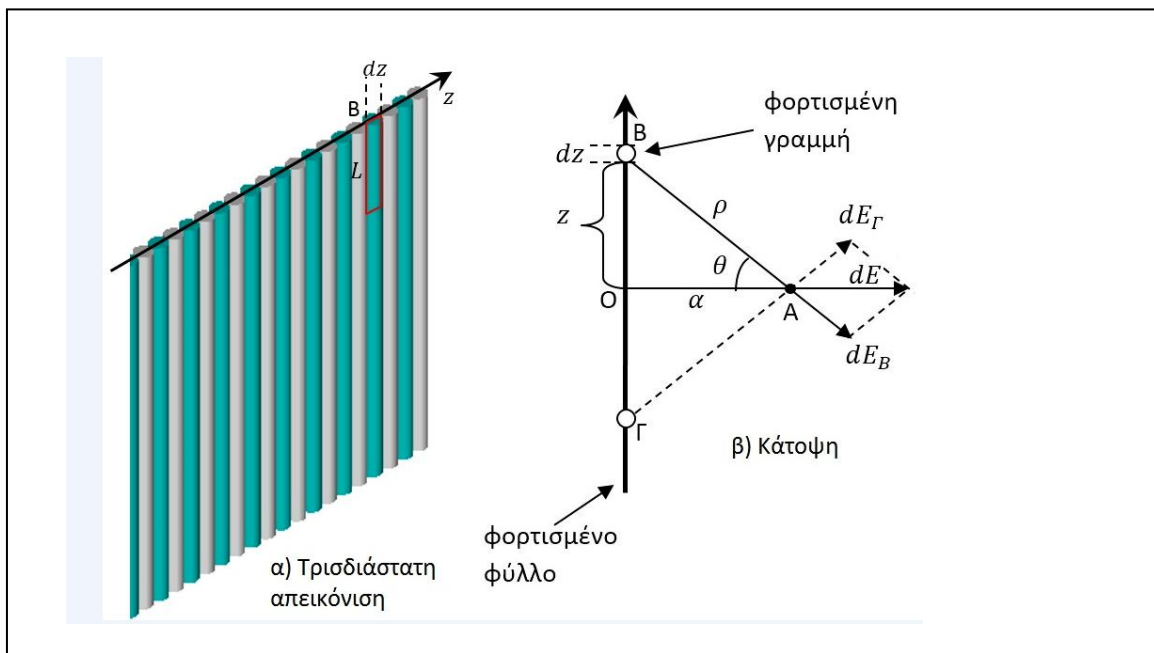
#### γ) Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένου φύλλου απείρων διαστάσεων

Σε αυτό το εδάφιο θα υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο στο χώρο ενός φορτισμένου λεπτού φύλλου απείρων διαστάσεων και αμελητέου πάχους όπως αυτό που εικονίζεται στο Σχήμα 2.6 παρακάτω, το οποίο έχει επιφανειακή πυκνότητα φορτίου  $\sigma$  (φορτίο ανά μονάδα επιφάνειας).



Σχήμα 2.6

Θα χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα του προηγούμενου εδαφίου. Για το σκοπό αυτό, θα "τεμαχίσουμε" το φύλλο σε ένα άπειρο πλήθος λεπτών στύλων απειροστού πάχους  $dz$  καθένας, όπως στο Σχήμα 2.7α παρακάτω, οπότε μπορούν να θεωρηθούν προσεγγιστικά ως γραμμές φορτίου.



## Σχήμα 2.7

Για να χρησιμοποιήσουμε όμως την Εξ. 2.4, πρέπει να υπολογίσουμε την γραμμική πυκνότητα της κάθε γραμμής αφού στο παρόν πρόβλημα μας δίνεται μόνο η επιφανειακή πυκνότητα. Για το σκοπό αυτό θεωρήστε ένα μικρό τμήμα μήκους  $L$  μιας γραμμής φορτίου στο σημείο Β του Σχήματος 2.7α (στα αριστερά). Το στοιχειώδες εμβαδό (κάθετα προς το φύλλο) αυτού του τμήματος είναι ίσο με  $dA = Ldz$  (μήκος  $\times$  πλάτος) και άρα από τον ορισμό του σπεριέχει φορτίο  $dq = \sigma dA = \sigma Ldz$ . Επομένως η γραμμική πυκνότητα φορτίου (φορτίο ανά μήκος) είναι ίση με

$$d\lambda = \frac{dq}{L} = \sigma dz$$

Θεωρήστε τώρα την κάτοψη στο Σχήμα 2.7β (στα δεξιά). Επιλέγουμε σύστημα συντεταγμένων ώστε ο άξονας  $z$  να διαπερνάει το φύλλο, κάθετα προς τις γραμμές φορτίου που το τεμαχίσαμε. Έστω ένα τυχαίο σημείο Α στο χώρο το οποίο απέχει απόσταση  $\alpha$  από το φύλλο. Φέρουμε κάθετη από το Α προς το φύλλο. Το σημείο Ο όπου η κάθετος τέμνει τη γραμμή, το παίρνουμε ως την αρχή των συντεταγμένων. Η γραμμή φορτίου στο σημείο Β δημιουργεί στο σημείο Α ένα πεδίο το οποίο σύμφωνα με την Εξ. 2.4 δίνεται από την

$$dE_B = \frac{2k}{\rho} d\lambda$$

όπου  $\rho$  είναι η απόσταση ΒΑ (από τη γραμμή φορτίου στο Β έως το σημείο παρατήρησης). Το  $d\vec{E}_B$  είναι κάθετο στη γραμμή φορτίου και άρα είναι όπως φαίνεται στο σχήμα. Θα χρησιμοποιήσουμε εδώ τα ίδια βήματα της απόδειξης του προηγούμενου εδαφίου, δηλαδή θα θεωρήσουμε την γραμμή φορτίου στο σημείο Γ το οποίο ισαπέχει από το σημείο Β ως προς την αρχή Ο. Συγκρίνοντας τα Σχήματα 2.5β και 2.7β βλέπουμε ότι οι γεωμετρικές είναι οι ίδιες για τα δυο προβλήματα, με την μόνη διαφορά ότι εδώ έχουμε άλλο τύπο για το  $dE_B$  και ότι το  $r$  έχει αντικατασταθεί από το  $\rho$ . Έτσι όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα, μπορούμε να γράψουμε τις εξής απλές τριγωνομετρικές εκφράσεις

$$\rho \cos\theta = \alpha$$

$$z = \alpha \tan\theta \Rightarrow dz = \alpha d\theta / \cos^2\theta$$

και η ολοκλήρωση γίνεται:

$$E = \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} dE_B \cos\theta = \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2k}{\rho} \cos\theta d\lambda = 2k\sigma \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\rho} dz$$

ή

$$E = 2k\sigma \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\alpha} \cos\theta \frac{\alpha}{\cos^2\theta} d\theta = 2k\sigma \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = 2k\pi\sigma$$

Σημείωση: Σε πολλές εφαρμογές χρησιμοποιείται μια άλλη σταθερά  $\epsilon_0$  του ηλεκτρισμού αντί της  $k$  που είχαμε μέχρι τώρα, η οποία ονομάζεται "διηλεκτρική σταθερά του κενού" και η οποία σχετίζεται με την σταθερά  $k$  ως εξής

$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.85 \times 10^{-12} \text{ S.I.}$	Διηλεκτρική σταθερά του κενού	2.6
---	-------------------------------	-----

Συναρτήσει αυτής της σταθεράς, το παραπάνω αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης γράφεται πιο απλά και ως

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

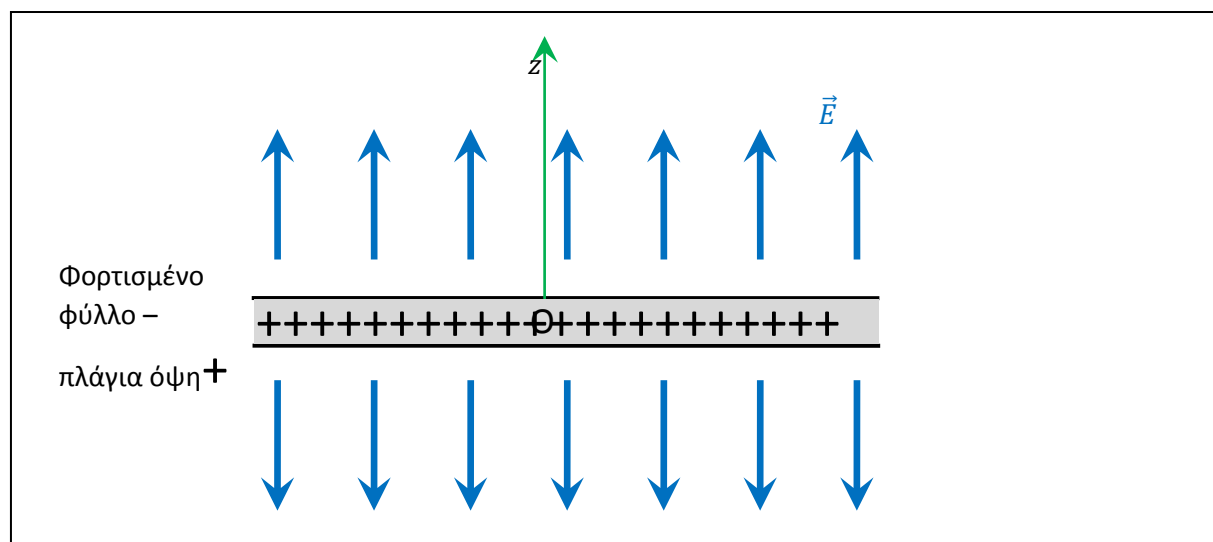
Στην παραπάνω ανάλυση, θεωρήσαμε το  $\vec{E}$  μόνο από την δεξιά μεριά του φύλλου. Εάν εργαζόμασταν και στην αριστερή μεριά του, τότε το αποτέλεσμα θα ήταν το ίδιο αλλά με την αντίθετη φορά δηλαδή το  $\vec{E}$  θα ήταν προς τα αριστερά. Αυτό σημαίνει ότι το  $E$  αλλάζει φορά εκατέρωθεν του φύλλου όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.8 όπου το φύλλο είναι οριζόντιο. Επομένως είναι πιο σωστό να γράψουμε ότι

$ E  = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$	Ηλεκτρικό πεδίο λεπτού φύλλου απείρων διαστάσεων	2.7
---------------------------------------	--	-----

θεωρώντας βέβαια ότι  $\sigma > 0$ . Μπορούμε να γράψουμε το  $\vec{E}$  και διανυσματικώς. Εάν π.χ. ο άξονας  $z$  στο Σχήμα 2.7 είναι κάθετος στο φύλλο με την αρχή των συντεταγμένων  $O$  επάνω στο φύλλο τότε:

$\vec{E} = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z, & z < 0 \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z, & z > 0 \end{cases}$	Ηλεκτρικό πεδίο λεπτού φύλλου απείρων διαστάσεων	2.8
---	--	-----

Το παραπάνω αποτέλεσμα έχει μια ιδιαιτερότητα, δεν εξαρτάται από την απόσταση, μόνο από την πυκνότητα του φορτίου. Αυτό σημαίνει ότι είναι παντού σταθερό. Αυτό είναι απόρροια του γεγονότος ότι το φύλλο είναι απείρων διαστάσεων. Σε πραγματικές περιπτώσεις όπου ένα φορτισμένο φύλλο έχει πεπερασμένες διαστάσεις, το πεδίο είναι όντως πολύ σταθερό κοντά στο φύλλο, αλλά φυσικά φθίνει με την απόσταση μακριά από αυτό. Η κατεύθυνση του  $E$  είναι κάθετη στο φύλλο, απομακρυνόμενο από αυτό για θετικό σενώ τείνει προς αυτό για αρνητικό  $\sigma$ . Σε κάθε πλευρά το  $E$  είναι αρκετά ομοιογενές όταν οι διαστάσεις του φύλλου είναι μεγάλες (δείτε το παρακάτω Σχήμα 2.8).



Σχήμα 2.8

**Παράδειγμα:** Ένα φορτισμένο φύλλο διαστάσεων  $6\text{ cm} \times 5\text{ cm}$  έχει φορτίο  $+12\mu\text{C}$ . Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση  $2\text{ mm}$  από το φύλλο.

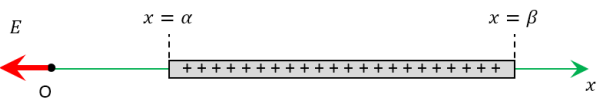
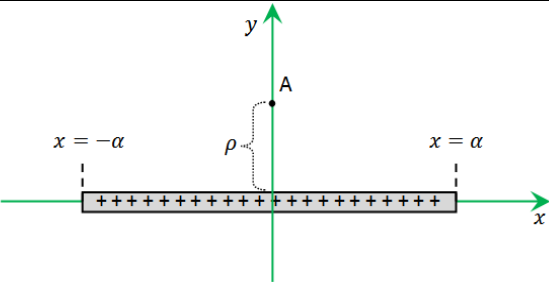
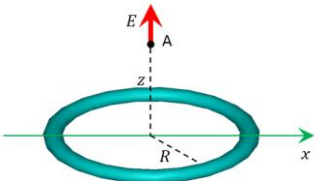
**Λύση:** Η απόσταση των  $2\text{ mm}$  είναι σχετικά μικρή συγκρινόμενη με τις διαστάσεις του φύλλου και άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. 2.7 που ισχύει για φύλλο απείρων διαστάσεων αφού όταν είμαστε πολύ κοντά στο φύλλο, αυτό μας φαίνεται ως τεράστιο. Η πυκνότητα φορτίου ισούται εξ' ορισμού με το φορτίο  $Q$  του φύλλου προς το εμβαδό του  $A$  και έτσι η Εξ. 2.7 γίνεται:

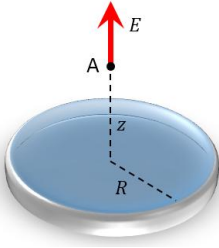
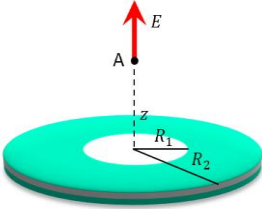
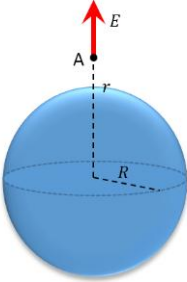
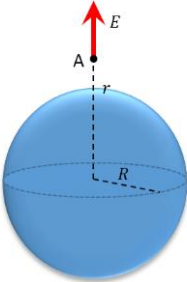
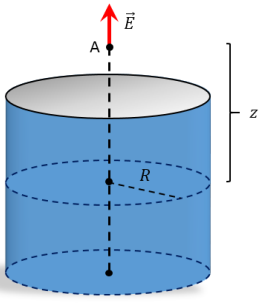
$$E = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Q}{A}$$

Το εμβαδό ισούται με  $A = 0.06 \times 0.05 = 3 \times 10^{-3}\text{ m}^2$  ενώ το φορτίο ισούται με  $Q = 12 \times 10^{-6}\text{ C}$  και η σταθερά με  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\text{ S.I.}$  Επομένως

$$E = \frac{1}{2 \times 8.85 \times 10^{-12}} \times \frac{12 \times 10^{-6}}{3 \times 10^{-3}} = 2.25 \times 10^8\text{ N/C}$$

Στην επόμενη ενότητα δίνονται διάφορα άλματα προβλήματα ως άσκηση, με μια ποικιλία γεωμετριών τα οποία λύνονται με ολοκλήρωση. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω Πίνακα 2.2:

Σχήμα	Περιγραφή	Πεδίο $E$
	<p>Λεπτή ράβδος μεταξύ <math>x = \alpha</math> και <math>x = \beta</math>, γραμμική πυκνότητα φορτίου <math>\lambda</math>, πεδίο στο <math>x = 0</math>.</p>	$k\lambda \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right)$
	<p>Λεπτή ράβδος μεταξύ <math>x = -\alpha</math> και <math>x = \alpha</math>, γραμμική πυκνότητα φορτίου <math>\lambda</math>, πεδίο στο <math>y = \rho</math>.</p>	$\frac{2k\lambda}{\sqrt{\rho^2 + \alpha^2}}$
	<p>Λεπτός δακτύλιος ακτίνας <math>R</math>, φορτίο <math>Q</math>, πεδίο στη μεσοκάθετο, ύψος <math>z</math></p>	$\frac{kQz}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$

	<p>Λεπτός δίσκος ακτίνας <math>R</math>, φορτίο <math>Q</math>, πεδίο στη μεσοκάθετο, ύψος <math>z</math></p>	$\frac{2kQ}{R^2} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right)$
	<p>Δακτύλιος, ακτίνες <math>R_1, R_2</math>, φορτίο <math>Q</math>, πεδίο στη μεσοκάθετο, ύψος <math>z</math></p>	$\frac{2kQ}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \times \left( \frac{z}{\sqrt{z^2 + R_1^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R_2^2}} \right)$
	<p>Συμπαγής σφαίρα ακτίνας <math>R</math>, φορτίο <math>Q</math> στον όγκο της, πεδίο σε απόσταση <math>r &gt; R</math></p>	$k \frac{Q}{R^2}$
	<p>Σφαιρικό κέλυφος ακτίνας <math>R</math>, φορτίο <math>Q</math> στον όγκο της, πεδίο σε απόσταση <math>r</math></p>	$\begin{cases} kQ/r^2 & r > R \\ 0 & r < R \end{cases}$
	<p>Σωλήνας ακτίνας <math>R</math>, μήκους <math>L</math> φορτίο <math>Q</math> στην επιφάνεια, πεδίο σε απόσταση <math>z</math></p>	$\frac{kQ}{3L} \left[ \frac{1}{\sqrt{(z - L/2)^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z + L/2)^2 + R^2}} \right]$

Πίνακας 2.2

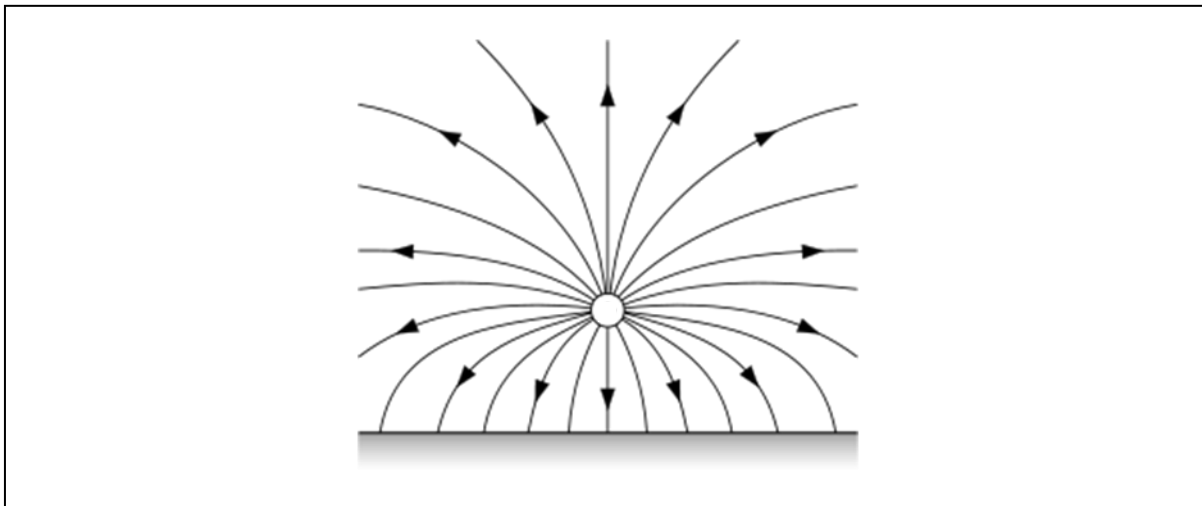
## Προβλήματα

Πρόβλημα 1. Να σχεδιασθούν οι δυναμικές γραμμές ενός συστήματος δυο ίσων σημειακών φορτίων με αντίθετο πρόσημο σε κοντινή απόσταση μεταξύ τους.



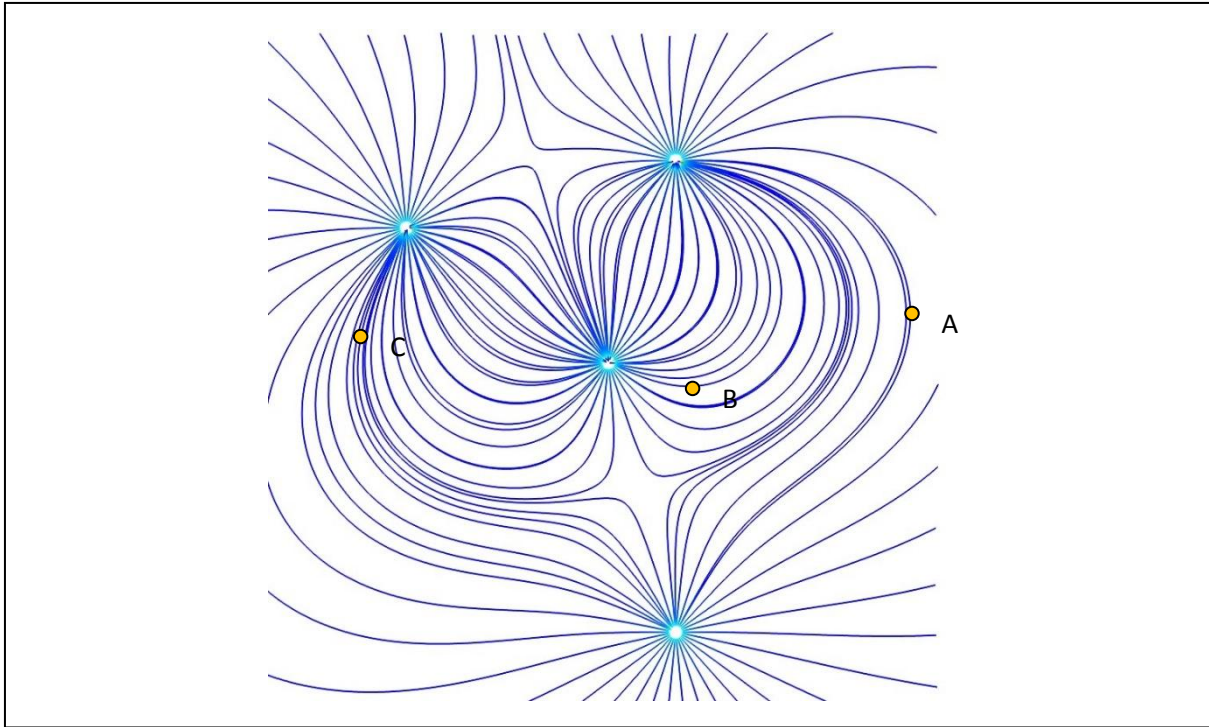
**Πρόβλημα 2.** Να σχεδιασθούν οι δυναμικές γραμμές ενός συστήματος δυο ίσων θετικών σημειακών φορτίων σε κοντινή απόσταση μεταξύ τους.

**Πρόβλημα 3** Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι δυναμικές γραμμές ενός συστήματος φορτίων. Να συζητηθεί ποιοτικώς η φύση του συστήματος αυτού (πρόσημο φορτίων, κατανομή κ.τ.λ.)



<http://physics.stackexchange.com/questions/37572/are-the-field-lines-the-same-as-the-trajectories-of-a-particle-with-initial-velo>

**Πρόβλημα 4.** Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι δυναμικές γραμμές ενός συστήματος φορτίων. α) Να σημειωθούν επάνω στο σχήμα οι τοποθεσίες όπου υπάρχουν φορτία κατά τη γνώμη σας. β) Να συζητηθεί το είδος των φορτίων αυτών εάν γνωρίζετε ότι το χαμηλότερο από αυτά στο σχήμα είναι θετικό. γ) Να σημειωθούν επάνω στο σχήμα δυο σημεία όπου περιμένετε το ηλεκτρικό πεδίο να είναι πρακτικώς μηδέν. δ) Σε ποιο από τα τρία σημεία A, B και C του σχήματος εάν τοποθετηθεί ένα πέμπτο υποθετικό σημειακό φορτίο (πολύ μικρότερου μεγέθους από τα φορτία του συστήματος) θα του ασκηθεί μεγαλύτερη δύναμη; ε) Σχεδιάστε τα διανύσματα του πεδίου  $\vec{E}$  σε καθένα από τα παραπάνω τρία σημεία με το μήκος του διανύσματος να αντιπροσωπεύει ποιοτικώς το μέτρο του (δηλαδή σχεδιάστε ένα μεγαλύτερο διάνυσμα εκεί που πιστεύετε ότι το πεδίο είναι ισχυρότερο κ.ό.κ.) και τον προσανατολισμό του διανύσματος να αντιπροσωπεύει τη γωνία του  $\vec{E}$ . στ) Ποιο από τα παραπάνω τρία σημεία A, B και C του σχήματος βρίσκεται εγγύτερα σε φορτίο; Είναι το ίδιο σημείο που βρήκατε στο υποερώτημα δ παραπάνω; Σχολιάστε



<http://elektromagnetisme.no/2010/09/25/using-mayavi-to-visualize-electric-fields/>

Πρόβλημα 5. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί λεπτό μονωτικό σφαιρικό κέλυφος διαμέτρου  $34\text{ mm}$  με ομοιόμορφα κατανομημένο φορτίο  $6\text{ }\mu\text{C}$  σε απόσταση  $10\text{ mm}$  από την επιφάνειά του.

Πρόβλημα 6. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί λεπτό μονωτικό σφαιρικό κέλυφος διαμέτρου  $34\text{ mm}$  με ομοιόμορφα κατανομημένο φορτίο επιφανειακής πυκνότητας  $2\text{ }\mu\text{C}/\text{cm}^2$  σε απόσταση  $30\text{ mm}$  από το κέντρο του κελύφους.

Πρόβλημα 7. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στο μέσο μεταξύ δυο παράλληλων άπειρων γραμμών φορτίου οι οποίες απέχουν  $10\text{ cm}$  μεταξύ τους και έχουν γραμμικές πυκνότητες φορτίου  $2\text{ }\mu\text{C}/\text{cm}$  και  $4\text{ }\mu\text{C}/\text{cm}$  αντίστοιχα.

Πρόβλημα 8. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στα  $1/3$  της απόστασης μεταξύ μιας θετικής φορτισμένης λεπτής πλάκας απείρων διαστάσεων και μιας αντίστοιχης αρνητικής που είναι παράλληλη με την πρώτη και σε απόσταση  $10\text{ cm}$  από αυτήν, εάν οι επιφανειακές πυκνότητες των φορτίων τους είναι  $2\text{ }\mu\text{C}/\text{cm}^2$  και  $-4\text{ }\mu\text{C}/\text{cm}^2$ .

Πρόβλημα 9. Σημειακό φορτίο  $+Q$  βρίσκεται στο κέντρο σφαιρικού αγωγικού φλοιού εσωτερικής ακτίνας  $R_1$  και εξωτερικής  $R_2$ . α) Περιγράψτε την κατανομή του επαγόμενου φορτίου στο κέλυφος β) Να βρεθεί το παραγόμενο ηλεκτρικό πεδίο παντού στο χώρο (εντός, εκτός και στο εσωτερικό του κελύφους) με τη βοήθεια της αρχής της επαλληλίας.



### 3. Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ GAUSS

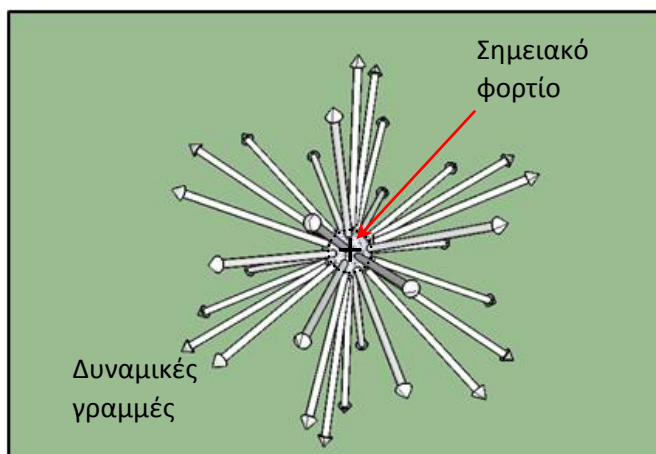
#### Δυναμικές Γραμμές

Ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο στην κατανόηση του Ηλεκτρομαγνητισμού είναι οι λεγόμενες "Δυναμικές Γραμμές" του ηλεκτρικού πεδίου. Οι δυναμικές γραμμές (Δ.Γ.) είναι νοητές (φανταστικές) καμπύλες που σχεδιάζουμε στον χώρο, οι οποίες μας βοηθούν να απεικονίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$  σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου αυτού. Οι Δ.Γ. σχεδιάζονται σύμφωνα με τους εξής τέσσερις κανόνες:

1. Ξεκινούν από τα θετικά φορτία και καταλήγουν στα αρνητικά. Έχουν δηλαδή φορά και για αυτό τις σχεδιάζουμε με ένα βέλος
2. Δεν τέμνονται ποτέ μεταξύ τους
3. Το ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$  σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου είναι εφαπτόμενο στη Δ.Γ. που περνά από αυτό το σημείο
4. Η πυκνότητα των δυναμικών γραμμών σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου είναι ανάλογη του μέτρου  $|\vec{E}|$  σε αυτό το σημείο

#### Παράδειγμα 3.1. Δυναμικές Γραμμές Σημειακού Φορτίου

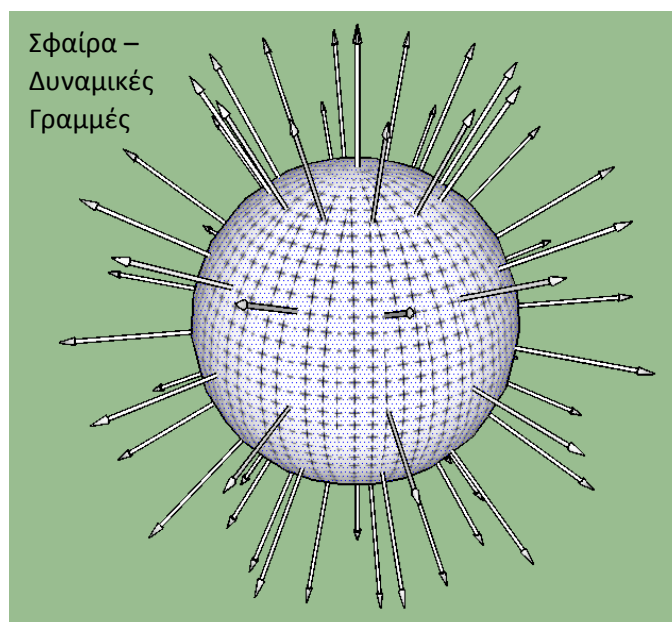
Στο παρακάτω Σχήμα 3.1 φαίνονται οι δυναμικές γραμμές ενός θετικού σημειακού φορτίου. Εδώ θεωρούμε ότι τα αρνητικά φορτία βρίσκονται στο άπειρο οπότε όλες οι δυναμικές πηγάζουν από το θετικό σημειακό φορτίο και κατευθύνονται προς όλες τις κατευθύνσεις προς το άπειρο. Είναι δηλαδή σαν τις φωτεινές ακτίνες του ήλιου και προς τις τρεις διαστάσεις (ή σαν τις ακτίνες του αχινού). Οι Δ.Γ. στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι ευθείες γραμμές έτσι ώστε να μην τέμνονται μεταξύ τους αλλά και επειδή πρέπει να είναι εφαπτόμενες προς το  $\vec{E}$  το οποίο είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι είναι ακτινικό. Επίσης οι γραμμές απομακρύνονται συνεχώς μεταξύ τους και άρα η πυκνότητά τους φθίνει όσο απομακρυνόμαστε από το φορτίο. Αυτό είναι σε πλήρη συμφωνία με την Εξ. 2.2 που δείχνει ότι το  $E$  ελαττώνεται με την απόσταση  $r$ . Στην περίπτωση ενός αρνητικού σημειακού φορτίου, οι δυναμικές γραμμές θα ήταν ακριβώς οι ίδιες αλλά με φορά από το άπειρο προς το φορτίο (τα βέλη δηλαδή στο σχήμα θα άλλαζαν φορά).



Σχήμα 3.1

**Παράδειγμα 3.2.** Δυναμικές Γραμμές Φορτισμένης Σφαίρας

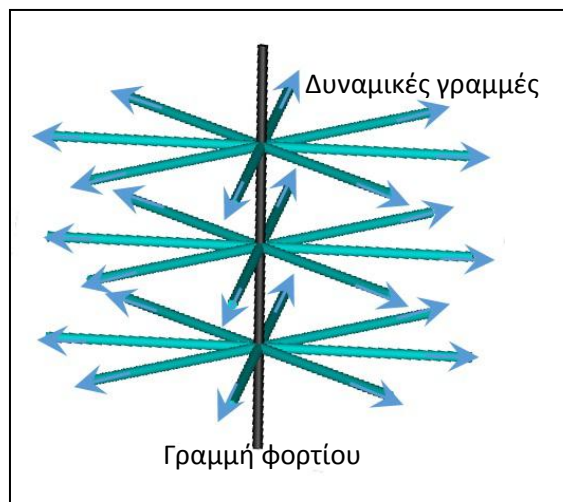
Παρόμοιες με τις Δ.Γ. του σημειακού φορτίου είναι και οι δυναμικές γραμμές μιας θετικά ομοιόμορφης φορτισμένης σφαίρας στον εξωτερικό της χώρο. Για παράδειγμα στο Σχήμα 3.2 φαίνεται μια φορτισμένη σφαίρα με συνολικό φορτίο  $Q$  στο εσωτερικό της, κατανεμημένο ομοιόμορφα είτε στην επιφάνειά της εάν πρόκειται για κοίλη σφαίρα, είτε στο εσωτερικό της εάν πρόκειται για συμπαγή σφαίρα. Όπως και στο σημειακό φορτίο, έτσι και εδώ οι Δ.Γ. τείνουν προς το άπειρο ώστε να καταλήξουν σε πιθανά αρνητικά φορτία εκεί. Στην προσπάθειά τους να μη τέμνονται μεταξύ τους, ταξιδεύουν ευθύγραμμα προς όλες τις κατευθύνσεις και έτσι η κατανομή τους είναι ακτινική (σαν τις ακτίνες του ήλιου και προς τις τρεις διαστάσεις), ακριβώς όπως οι Δ.Γ. ενός σημειακού φορτίου. Έτσι δεν είναι τυχαίο που στα αποτελέσματα των Προβλημάτων 2.6 και 2.8 τα οποία εμφανίζονται στον Πίνακα 2.2, το ηλεκτρικό πεδίο στο εξωτερικό μιας σφαίρας ταυτίζεται με αυτό ενός σημειακού φορτίου.



Σχήμα 3.2

**Παράδειγμα 3.3.** Δυναμικές Γραμμές Φορτισμένης Γραμμής Απείρου Μήκους

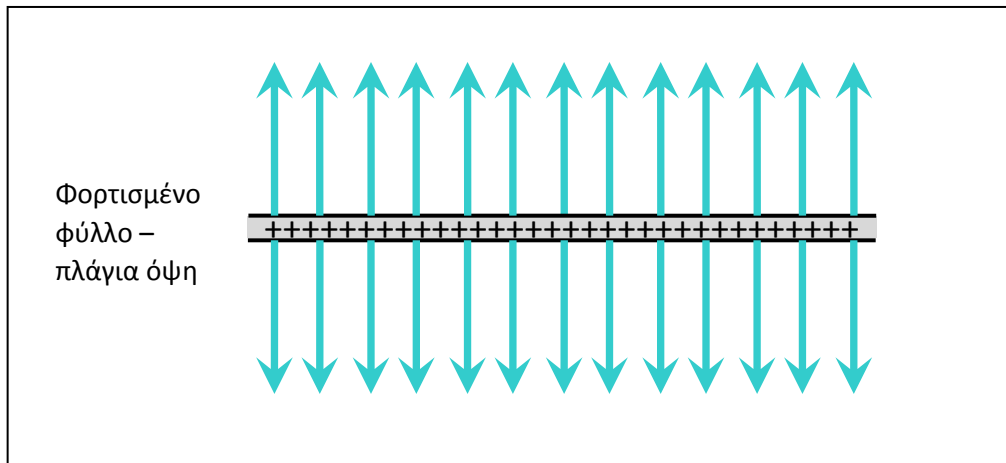
Στο Σχήμα 3.3 φαίνονται οι δυναμικές γραμμές μιας θετικά φορτισμένης γραμμής άπειρου μήκους. Είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο ότι το παραγόμενο  $\vec{E}$  είναι κάθετο προς τη γραμμή και άρα οι δυναμικές γραμμές πρέπει να είναι και αυτές κάθετες στη γραμμή. Πηγάζουν από την γραμμή φορτίου με κατεύθυνση προς το άπειρο και έχουν επίπεδη ακτινική κατανομή, σαν τις ακτίνες της ρόδας του ποδηλάτου. Και σε αυτή την περίπτωση οι Δ.Γ. απομακρύνονται μεταξύ τους όσο τείνουν στο άπειρο που σημαίνει ότι η πυκνότητά τους ελαττώνεται όσο απομακρυνόμαστε από την γραμμή, σε πλήρη συμφωνία με την Εξ. 2.4



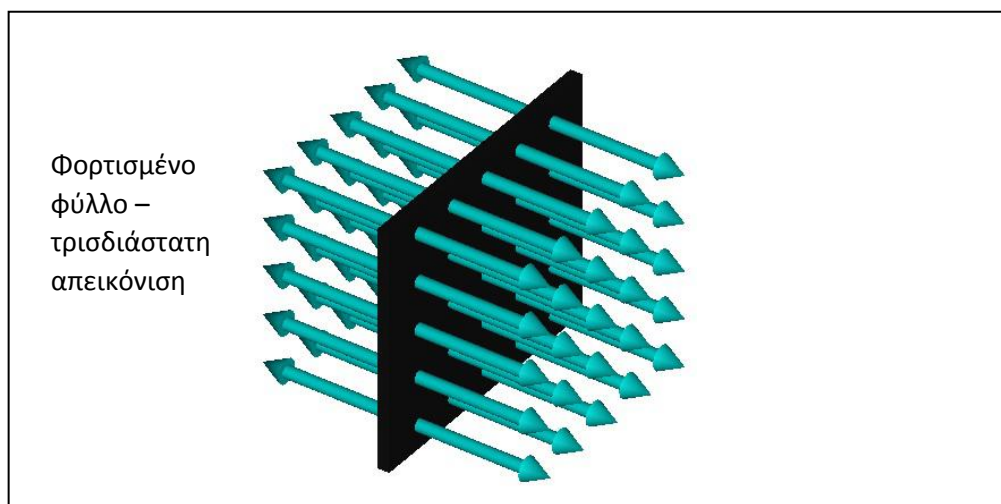
Σχήμα 3.3

#### Παράδειγμα 3.4. Δυναμικές Γραμμές Φορτισμένου Φύλλου Απείρων Διαστάσεων

Στα Σχήματα 3.4 και 3.5 φαίνονται οι δυναμικές γραμμές ενός θετικά φορτισμένου λεπτού φύλλου απείρων διαστάσεων. Είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο ότι το παραγόμενο  $\vec{E}$  είναι κάθετο προς το φύλλο και άρα οι δυναμικές γραμμές πρέπει να είναι και αυτές κάθετες στο φύλλο. Πηγάζουν από το φύλλο με κατεύθυνση προς το άπειρο. Επειδή το φύλλο χωρίζει τον περιβάλλοντα χώρο του σε δυο μέρη, οι μισές Δ.Γ. στο Σχήμα 3.4 έχουν φορά προς τα πάνω και οι άλλες μισές προς τα κάτω. Στην προσπάθειά τους να μη τέμνονται, είναι παράλληλες μεταξύ τους. Εφόσον η κατανομή φορτίου είναι ομοιόμορφη, τότε αναγκαστικά και η πυκνότητά των Δ.Γ. είναι σταθερή που σημαίνει ότι το μέτρο του  $\vec{E}$  είναι παντού σταθερό δηλαδή το πεδίο είναι ομοιογενές (σταθερό στο χώρο). Αυτό είναι σε πλήρη συμφωνία με την Εξ. 2.7 όπου βλέπουμε ότι το  $E$  δεν εξαρτάται από την απόσταση από την πηγή (σε αντίθεση με τα προηγούμενα παραδείγματα).



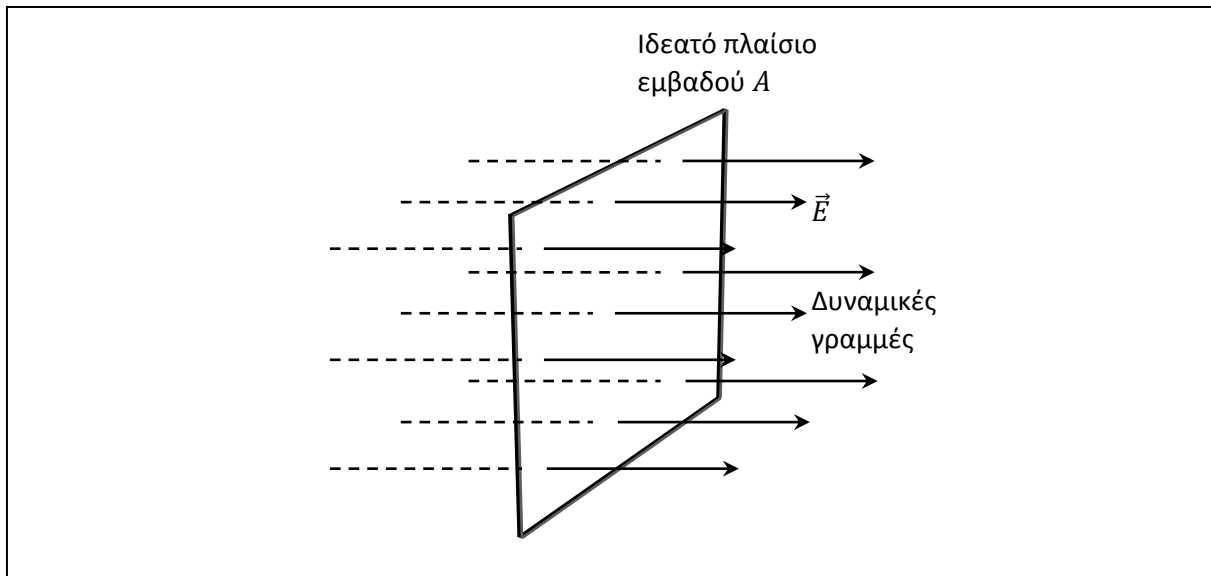
Σχήμα 3.4



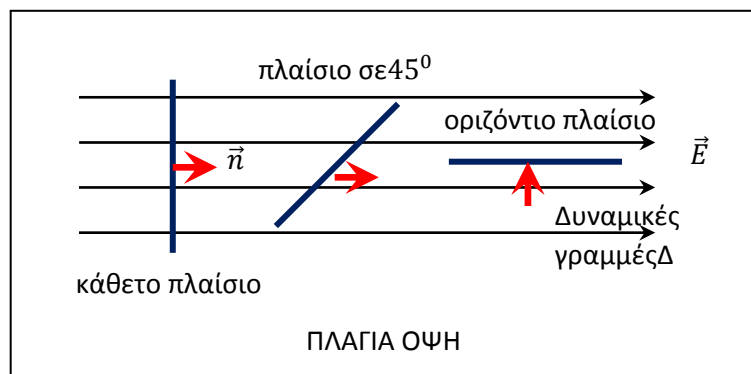
Σχήμα 3.5

## Ηλεκτρική Ροή- ΟΧΙ

Θεωρήστε στο Σχήμα 3.6 μια περιοχή του χώρου όπου το ηλεκτρικό πεδίο είναι σταθερό και ομοιογενές και οι δυναμικές γραμμές είναι ευθύγραμμες και ισαπέχουσες. Θεωρήστε επίσης ένα ιδεατό ορθογώνιο πλαίσιο το οποίο τέμνει κάθετα τις δυναμικές γραμμές. Η **ηλεκτρική ροή**  $\Phi_E$  ορίζεται ποιοτικώς ως ο αριθμός των δυναμικών γραμμών που διαπερνούν το πλαίσιο. Βάσει του παραπάνω ορισμού, καταλαβαίνει κανείς ότι τρεις κυρίως παράγοντες επηρεάζουν την ηλεκτρική ροή: α) Το εμβαδό  $A$  του πλαισίου, αφού μεγαλύτερο εμβαδό θα "συλλαμβάνει" περισσότερες γραμμές, β) η πυκνότητα των Δ.Γ. που από τις ιδιότητές τους γνωρίζουμε ότι είναι ανάλογη του  $E$  και γ) ο προσανατολισμός του πλαισίου όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.7. όπου το ίδιο πλαίσιο έχει τοποθετηθεί με τρεις διαφορετικούς προσανατολισμούς. Για παράδειγμα το κάθετο πλαίσιο φαίνεται να "συλλαμβάνει" διπλάσιο αριθμό δυναμικών γραμμών σε σχέση με το πλαίσιο με προσανατολισμό  $45^\circ$  μοιρών (η αναλογία είναι εικονική) ενώ καμία Δ.Γ. δεν διαπερνά το οριζόντιο πλαίσιο όπως αναμένεται.



Σχήμα 3.6



Σχήμα 3.7

Ποσοτικώς η ηλεκτρική ροή ορίζεται ως

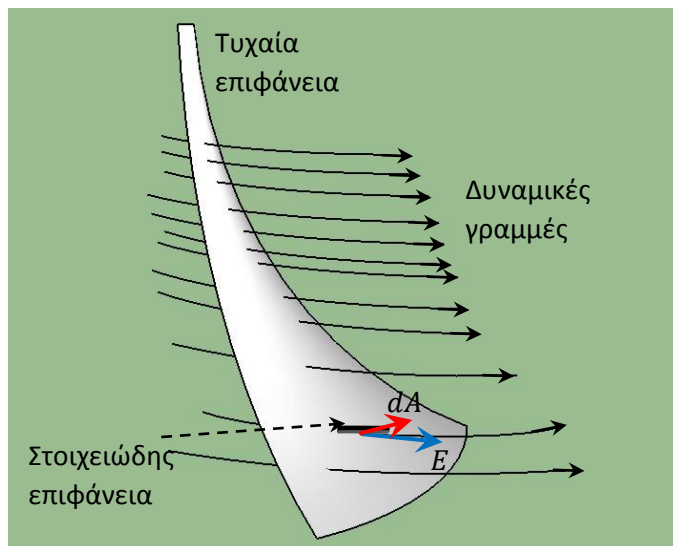
$\Phi_E = EA \cos \theta$	Ηλεκτρική ροή	3.1
---------------------------	---------------	-----

όπου  $\theta$  είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα  $\vec{E}$  με το διάνυσμα  $\vec{n}$  το οποίο είναι ένα μοναδιαίο και αδιάστατο διάνυσμα (χωρίς μονάδες) κάθετο στην επιφάνεια του πλαισίου (περιστρέφεται μαζί με το πλαίσιο). Η παραπάνω σχέση συνοψίζει όλες τις παραπάνω ποιοτικές παρατηρήσεις και μπορεί να γραφτεί σε διανυσματική μορφή εάν ορίσουμε ένα νέο διάνυσμα με μονάδες εμβαδού, το  $\vec{A} = A\vec{n}$  το οποίο είναι επίσης κάθετο στην επιφάνεια του πλαισίου. Κάνοντας χρήση του εσωτερικού γινομένου, μπορούμε να γράψουμε

$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}$	Ηλεκτρική ροή	3.2
----------------------------------	---------------	-----



Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.8, μπορούμε να ορίσουμε την ροή μέσω οποιασδήποτε τυχαίας επιφάνειας και όχι μόνο μέσω ενός ορθογωνίου πλαισίου. Σε αυτή την περίπτωση, "τεμαχίζουμε" την επιφάνεια σε ένα σύνολο μικροσκοπικών πλαισίων απειροστού εμβαδού  $dA$  το καθένα, και ορίζουμε το κάθετο διάνυσμα  $d\vec{A} = dA\vec{n}$  στο πλαίσιο, ακριβώς όπως κάναμε παραπάνω. Γενικά οι δυναμικές γραμμές θα τέμνουν το πλαίσιο υπό τυχαία γωνία και έτσι το διάνυσμα  $\vec{E}$  θα σχηματίζει κάποια γωνία  $\theta$  ως προς το κάθετο διάνυσμα  $d\vec{A}$ .



Σχήμα 3.8

Η στοιχειώδης ροή διαμέσου αυτού του πλαισίου θα είναι σύμφωνα με την Εξ. 3.2 ίση με  $d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A}$  και άρα η συνολική ροή ισούται με

$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$	Ηλεκτρική ροή	3.3
--	---------------	-----

όπου η ολοκλήρωση λαμβάνει χώρα σε όλη την επιφάνεια  $S$ .

## Ο Νόμος του Gauss

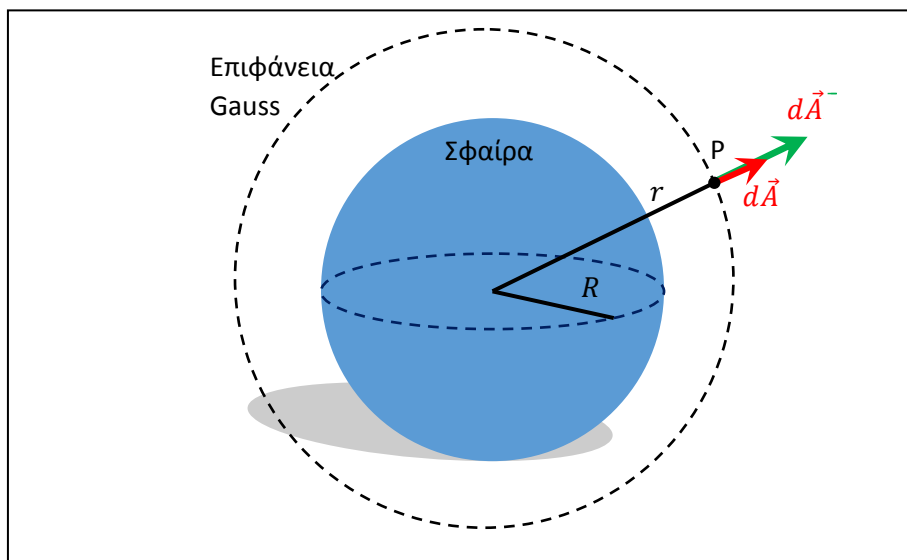
Ο νόμος του Gauss είναι ένα χρήσιμο Μαθηματικό εργαλείο για τον υπολογισμό του  $\vec{E}$  σε περιπτώσεις όπου υπάρχει κάποια γεωμετρική συμμετρία. Είναι όμως πέραν του σκοπού του παρόντος μαθήματος. Θα δοθούν όμως παρακάτω διάφορα αποτελέσματα χωρίς απόδειξη που υπολογίζονται με την βοήθεια του νόμου του Gauss.

α) Φορτισμένη συμπαγής σφαίρα

Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο παντού στο χώρο που δημιουργεί μια φορτισμένη συμπαγής σφαίρα ακτίνας  $R$  με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο  $Q$  παντού στον όγκο της.

Λύση:

Κατ' αρχάς θα πρέπει να συνειδητοποιήσουμε ότι η σφαίρα σε αυτό το πρόβλημα είναι υποχρεωτικά μονωτής. Όπως είχαμε δει στο Κεφάλαιο 1, σε ένα αγωγό τα επιπλέον φορτία δεν μπορούν να παραμείνουν στο εσωτερικό του αλλά απωθούνται μεταξύ τους έως ότου καταλήξουν στην επιφάνεια του αγωγού. Όσον αφορά στην λύση του παρόντος προβλήματος στο εξωτερικό της σφαίρας, αυτή μπορεί να βρεθεί με ολοκλήρωση σύμφωνα με τις οδηγίες του Προβλήματος 2.6 του προηγούμενου κεφαλαίου. Στο εσωτερικό της σφαίρας, τα πράγματα γίνονται πιο δύσκολα με την ολοκλήρωση. Θα δούμε πως μπορούμε να βρούμε και τα δυο αποτελέσματα σχετικά εύκολα με την βοήθεια του νόμου του Gauss.



Σχήμα 3.9

Το τελικό αποτέλεσμα είναι:

$E = \begin{cases} k \frac{Q}{R^3} r, & r < R \\ k \frac{Q}{r^2}, & r \geq R \end{cases}$	Συμπαγής μονωτική σφαίρα	3.5
---	--------------------------	-----

### β) Φορτισμένη κοίλη σφαίρα

Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο παντού στο χώρο που δημιουργεί μια φορτισμένη κοίλη σφαίρα ακτίνας  $R$  με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο  $Q$  παντού στην επιφάνειά της.

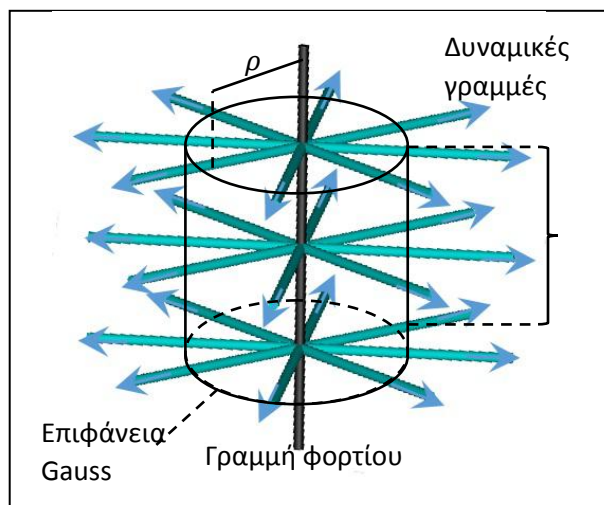
Λύση: Όσον αφορά το υλικό, η σφαίρα μπορεί να είναι είτε μονωτής στην επιφάνεια της οποίας έχει τοποθετηθεί ομοιόμορφο φορτίο, είτε αγωγός στον οποίο έχει τοποθετηθεί φορτίο οπουδήποτε, αφού έτσι και αλλιώς αυτό καταλήγει στην επιφάνεια, όπως συζητήθηκε στο Κεφάλαιο 1.

Το τελικό αποτέλεσμα είναι:

$E = \begin{cases} 0, & r < R \\ k \frac{Q}{r^2}, & r \geq R \end{cases}$	Κοίλη σφαίρα	3.6
---	--------------	-----

### γ) Φορτισμένη γραμμή απείρων διαστάσεων

Η Εξ. 2.4 που περιγράφει το ηλεκτρικό πεδίο μιας άπειρης γραμμής με γραμμική πυκνότητα φορτίου  $\lambda$ , μπορεί να αποδειχθεί και με τη βοήθεια του νόμου του Gauss.

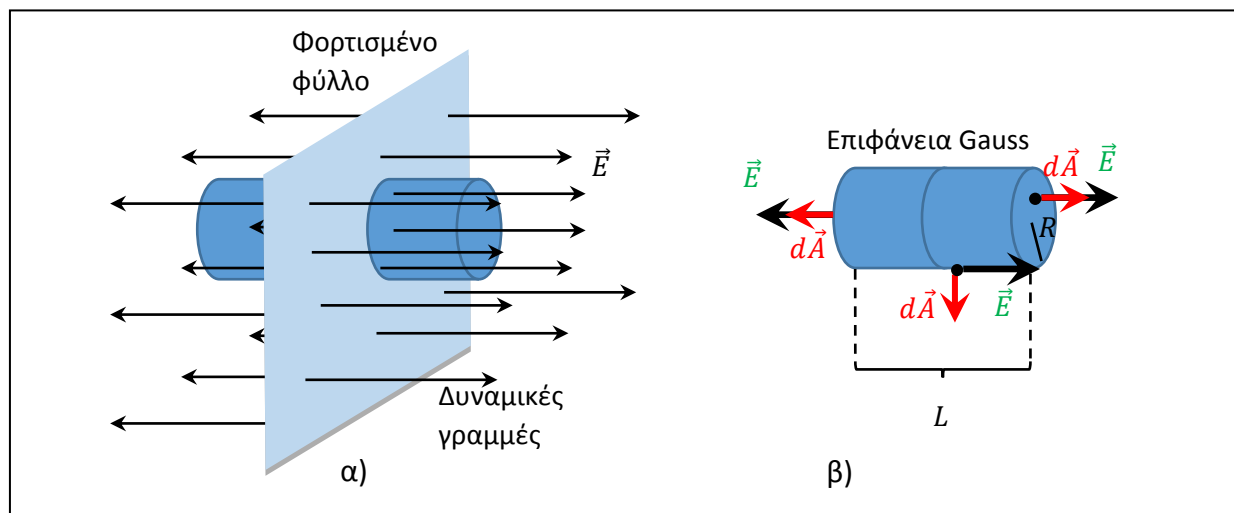


Σχήμα 3.11

Παραθέτουμε εδώ ξανά την Εξίσωση 2.4 για λόγους πληρότητας.

### δ) Φορτισμένο φύλλο απείρων διαστάσεων

Ομοίως η Εξ. 2.7 μπορεί να αποδειχθεί και με τη βοήθεια του νόμου του Gauss, που περιγράφει το ηλεκτρικό πεδίο ενός λεπτού φύλλου απείρων διαστάσεων με πυκνότητα φορτίου  $\sigma$ .



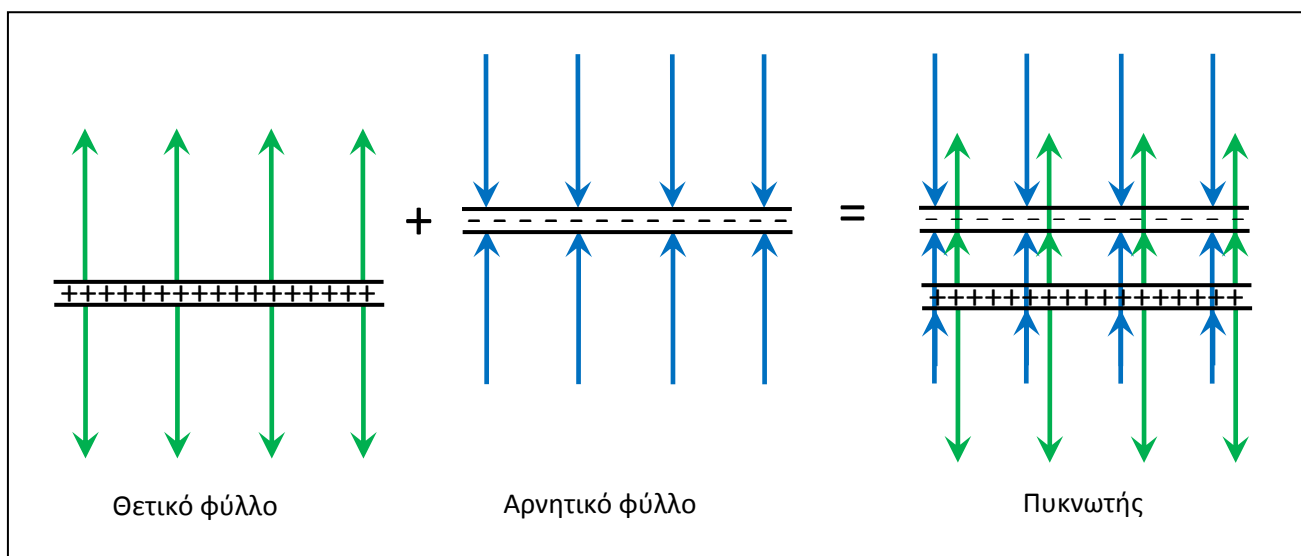
## Σχήμα 3.12

Παραθέτουμε εδώ ξανά την Εξίσωση 2.7 για λόγους πληρότητας.

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

## ε) Επίπεδος Πυκνωτής

Στο Σχήμα 3.13 φαίνεται μια διάταξη, γνωστή ως *επίπεδος πυκνωτής*, η οποία αποτελείται από δυο όμοια επίπεδα φύλλα με ίσα και αντίθετα φορτία, τοποθετημένα παράλληλα και σε μικρή απόσταση μεταξύ τους. Βλέπουμε ότι οι δυναμικές γραμμές έχουν την ίδια φορά ανάμεσα στα δυο φύλλα ενώ έχουν αντίθετη φορά στον χώρο εκτός.



Σχήμα 3.13

Εάν  $\sigma$  είναι η επιφανειακή πυκνότητα του φορτίου στα δυο φύλλα, τότε το κάθε φύλλο σύμφωνα με αυτά που είδαμε στο προηγούμενο υπο-εδάφιο, δημιουργεί ομοιόμορφο πεδίο μέτρου

$$\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Στον εξωτερικό χώρο του πυκνωτή, τα δυο  $E$  έχουν αντίθετη φορά και έτσι το συνιστάμενο πεδίο μηδενίζεται:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = 0$$

Αντίθετα στον εσωτερικό χώρο, τα δυο  $E$  έχουν ίδια φορά (προς τα πάνω) και έτσι το συνιστάμενο πεδίο ισούται με

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

το οποίο είναι επίσης ομοιογενές. Συνοπτικά το ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή ισούται με

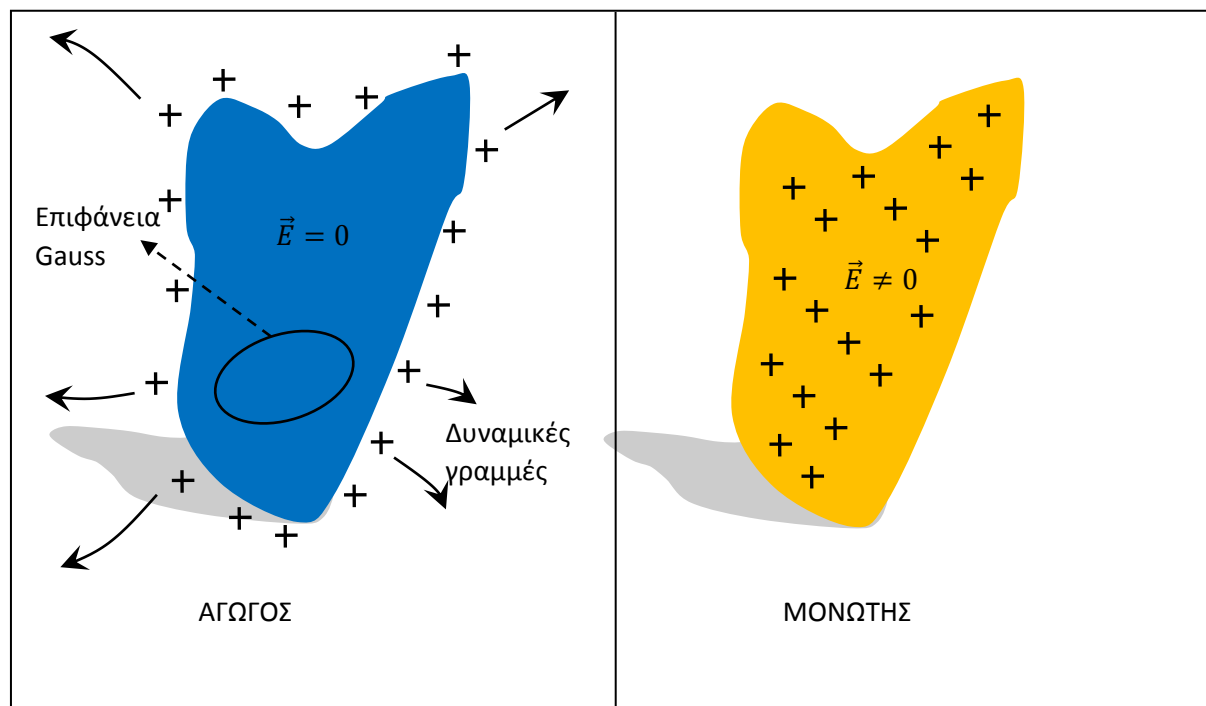
$E = \begin{cases} 0, & \text{εκτός} \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0}, & \text{εντός} \end{cases}$	Πυκνωτής	3.7
--	----------	-----

## Ένταση Ηλεκτρικού Πεδίου στο εσωτερικό των Αγωγών

Ο νόμος του Gauss οδηγεί σε ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα για το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό των φορτισμένων αγωγών. Όπως είδαμε, όταν επιπλέον φορτίο μεταφερθεί σε ένα σώμα, τότε εάν αυτό είναι αγωγίμο, το φορτίο αυτό θα κατανεμηθεί εξ' ολοκλήρου στην επιφάνεια του αγωγού. Έτσι εάν θεωρήσουμε ένα μονωτή και ένα αγωγό του ίδιου ακριβώς σχήματος όπως στο παρακάτω Σχήμα 3.14, τότε στον μεν μονωτή μπορεί και να υπάρχει φορτίο στο εσωτερικό του, ανάλογα με το πως τον φορτίσαμε, ενώ στον αγωγό δεν υπάρχει καθόλου φορτίο στο εσωτερικό του. Από τον νόμο του Gauss αποδεικνύεται ότι και το **μέτρο του πεδίου είναι μηδέν παντού στο εσωτερικό του αγωγού**, ανεξαρτήτως σχήματος.

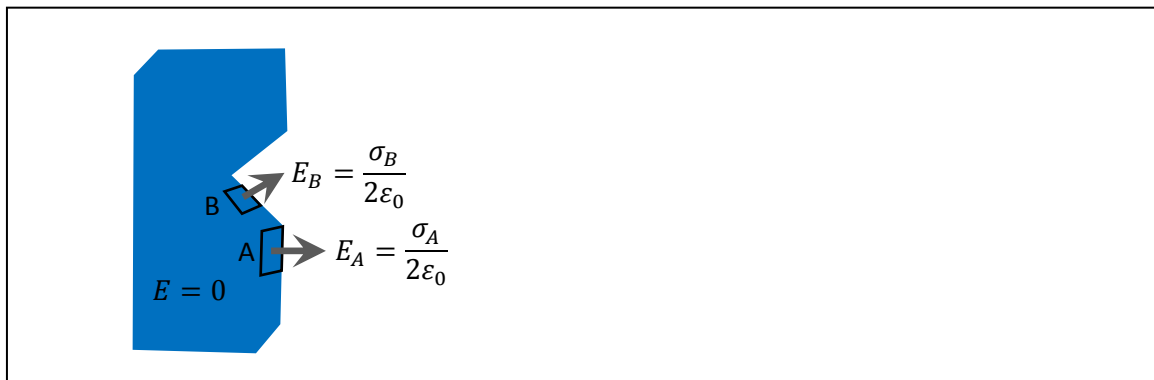
Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορούμε να το δούμε ποιοτικά και με τη βοήθεια των Δ.Γ. Εφόσον όλα τα φορτία είναι στην επιφάνεια, έστω θετικά, τότε οι δυναμικές γραμμές θα ξεκινούν από εκεί με κατεύθυνση το άπειρο ώστε να τερματίσουν στα εκεί αρνητικά φορτία. Επομένως δεν υπάρχουν Δ.Γ. στο εσωτερικό του αγωγού και έτσι η πυκνότητά τους και άρα και το  $E$  είναι μηδέν.

Στον δε μονωτή, το φορτίο παγιδεύεται εκεί που αρχικά είχε τοποθετηθεί, συνήθως στην επιφάνεια επαφής εάν τον φορτίσαμε με τριβή. Γενικά όμως το  $E$  είναι διάφορο του μηδενός στο εσωτερικό του.



Σχήμα 3.14

Όσον αφορά στο εξωτερικό του αγωγού, είδαμε παραπάνω πως μπορούμε να υπολογίσουμε το  $E$  σε περιπτώσεις όπου υπάρχει συμμετρία. Σε αγωγούς τυχαίου σχήματος, τα πράγματα γίνονται πολύ δύσκολα και πρέπει να καταφύγουμε σε αριθμητικές λύσεις. Παρόλα αυτά, όταν πλησιάσουμε πολύ κοντά σε μια επιφάνεια, αυτή μας φαίνεται τοπικά ως επίπεδη, όση καμπυλότητα και εάν έχει. Π.χ. ένας αγρότης θα ισχυρίζεται ότι το χωράφι του είναι τελείως επίπεδο ενώ ο αστροναύτης στο διάστημα βλέπει τη γη σφαιρική. Επομένως, πολύ κοντά στην επιφάνεια ενός αγωγού, ή και ακριβώς επάνω σε αυτή, ένας αγωγός μπορεί να προσομοιαστεί τοπικά από ένα λεπτό φύλλο αφού είναι προσεγγιστικά επίπεδος και όλο το φορτίο είναι κατανομημένο στην επιφάνειά του και έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Εξίσωση 2.6 με  $\sigma$  την τοπική πυκνότητα φορτίου της επιφάνειας. Έτσι για παράδειγμα στο Σχήμα 3.15, το ηλεκτρικό πεδίο στα σημεία A και B ισούται με  $\sigma_A/2\varepsilon_0$  και  $\sigma_B/2\varepsilon_0$  όπου  $\sigma_A$  και  $\sigma_B$  είναι οι αντίστοιχες πυκνότητες φορτίου στα δυο σημεία, οι οποίες εν γένει είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Θυμηθείτε ότι το  $\vec{E}$  είναι κάθετο στο φύλλο και επομένως θα είναι κάθετο και στην επιφάνεια του αγωγού. Επίσης μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα και από πλευράς δυναμικής. Εάν υπήρχε συνιστώσα παράλληλη στην επιφάνεια του αγωγού, τότε θα υπήρχε και δύναμη επάνω στο φορτίο και έτσι θα το επιτάχυνε και θα του άλλαζε θέση. Εφόσον μιλάμε για ηλεκτροστατική, το σύστημα πρέπει να είναι σε ισορροπία και άρα δεν πρέπει να υπάρχει συνιστώσα του  $\vec{E}$  παράλληλη στην επιφάνεια, μόνο κάθετη. Όντως, και σε άλλες εφαρμογές που τις μελετήσαμε όπως η σφαίρα και ο δίσκος, βρήκαμε τις Δ.Γ. να ξεκινούν κάθετα από την επιφάνεια.



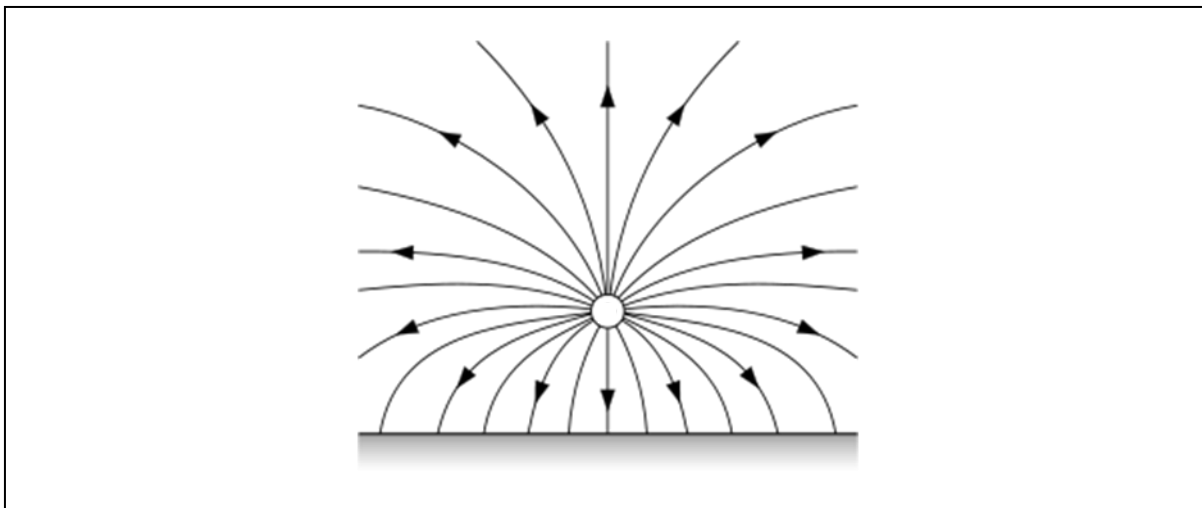
Σχήμα 3.15

## Προβλήματα

**Πρόβλημα 3.1.** Να σχεδιασθούν οι δυναμικές γραμμές ενός συστήματος δυο ίσων σημειακών φορτίων με αντίθετο πρόσημο σε κοντινή απόσταση μεταξύ τους.

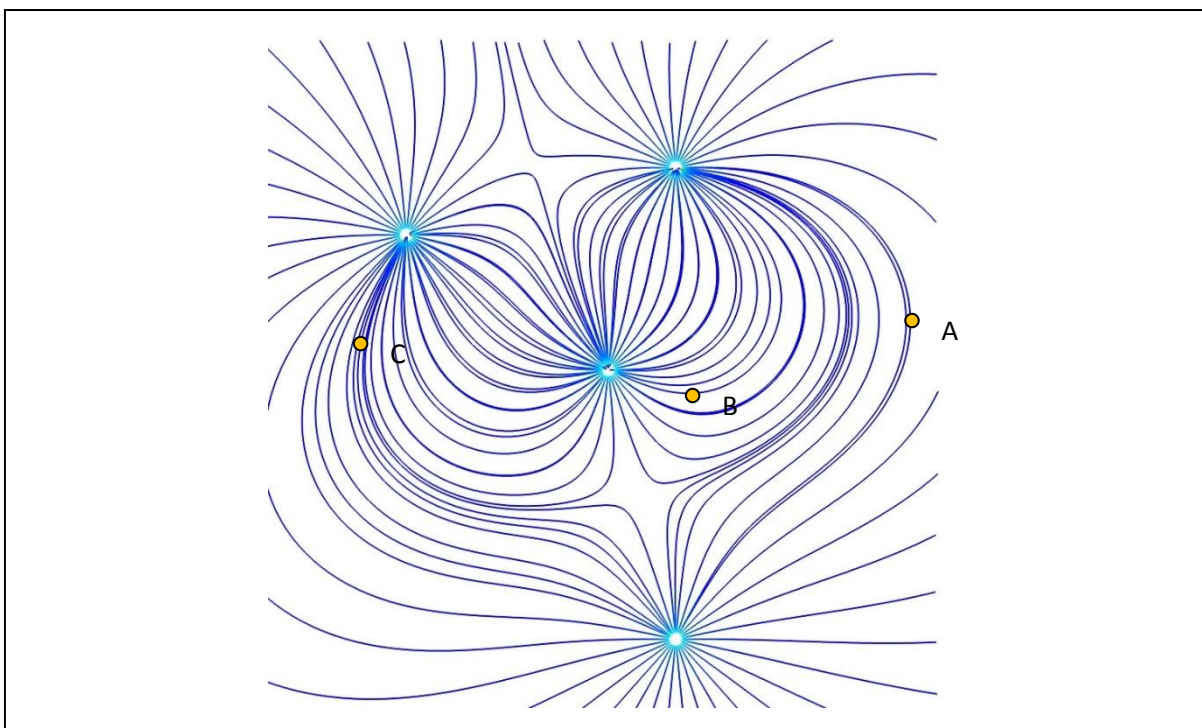
**Πρόβλημα 3.2.** Να σχεδιασθούν οι δυναμικές γραμμές ενός συστήματος δυο ίσων θετικών σημειακών φορτίων σε κοντινή απόσταση μεταξύ τους.

**Πρόβλημα 3.3.** Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι δυναμικές γραμμές ενός συστήματος φορτίων. Να συζητηθεί ποιοτικώς η φύση του συστήματος αυτού (πρόσημο φορτίων, κατανομή κ.τ.λ.)



<http://physics.stackexchange.com/questions/37572/are-the-field-lines-the-same-as-the-trajectories-of-a-particle-with-initial-velo>

**Πρόβλημα 3.4.** Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι δυναμικές γραμμές ενός συστήματος φορτίων. α) Να σημειωθούν επάνω στο σχήμα οι τοποθεσίες όπου υπάρχουν φορτία κατά τη γνώμη σας. β) Να συζητηθεί το είδος των φορτίων αυτών εάν γνωρίζετε ότι το χαμηλότερο από αυτά στο σχήμα είναι θετικό. γ) Να σημειωθούν επάνω στο σχήμα δυο σημεία όπου περιμένετε το ηλεκτρικό πεδίο να είναι πρακτικώς μηδέν. δ) Σε ποιο από τα τρία σημεία A, B και C του σχήματος, θα ασκηθεί μεγαλύτερη δύναμη σε ένα τέταρτο υποθετικό σημειακό φορτίο (πολύ μικρότερου μεγέθους από τα φορτία του συστήματος); ε) Σχεδιάστε τα διανύσματα του πεδίου  $\vec{E}$  σε καθένα από τα παραπάνω τρία σημεία με το μήκος του διανύσματος να αντιπροσωπεύει ποιοτικώς το μέτρο του (δηλαδή σχεδιάστε ένα μεγαλύτερο διάνυσμα εκεί που πιστεύετε ότι το πεδίο είναι ισχυρότερο κ.ό.κ.) και τον προσανατολισμό του διανύσματος να αντιπροσωπεύει τη γωνία του  $\vec{E}$ . στ) Ποιο από τα παραπάνω τρία σημεία A, B και C του σχήματος βρίσκετε εγγύτερα σε φορτίο; Είναι το ίδιο σημείο που βρήκατε στο υποερώτημα δ παραπάνω; Σχολιάστε



<http://elektromagnetisme.no/2010/09/25/using-mayavi-to-visualize-electric-fields/>

Πρόβλημα 3.5. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο παντού στο χώρο που δημιουργεί λεπτό μονωτικό σφαιρικό κέλυφος διαμέτρου  $34\text{ mm}$  με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο  $6\text{ }\mu\text{C}$  σε απόσταση  $10\text{ mm}$  από την επιφάνειά του.

Πρόβλημα 3.6. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο παντού στο χώρο που δημιουργεί λεπτό μονωτικό σφαιρικό κέλυφος διαμέτρου  $34\text{ mm}$  με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο επιφανειακής πυκνότητας  $2\text{ }\mu\text{C}/\text{cm}^2$  σε απόσταση  $30\text{ mm}$  από το κέντρο του κελύφους.

Πρόβλημα 3.7. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στο μέσο μεταξύ δυο παράλληλων άπειρων γραμμών φορτίου οι οποίοι έχουν γραμμικές πυκνότητες φορτίου  $2\text{ }\mu\text{C}/\text{cm}$  και  $4\text{ }\mu\text{C}/\text{cm}$  αντίστοιχα.

Πρόβλημα 3.8. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στα  $2/3$  της απόστασης μεταξύ μιας θετικής φορτισμένης λεπτής πλάκας απείρων διαστάσεων και μιας αντίστοιχης αρνητικής εάν οι επιφανειακές πυκνότητες φορτίων τους είναι  $2\text{ }\mu\text{C}/\text{cm}^2$  και  $-4\text{ }\mu\text{C}/\text{cm}^2$ .

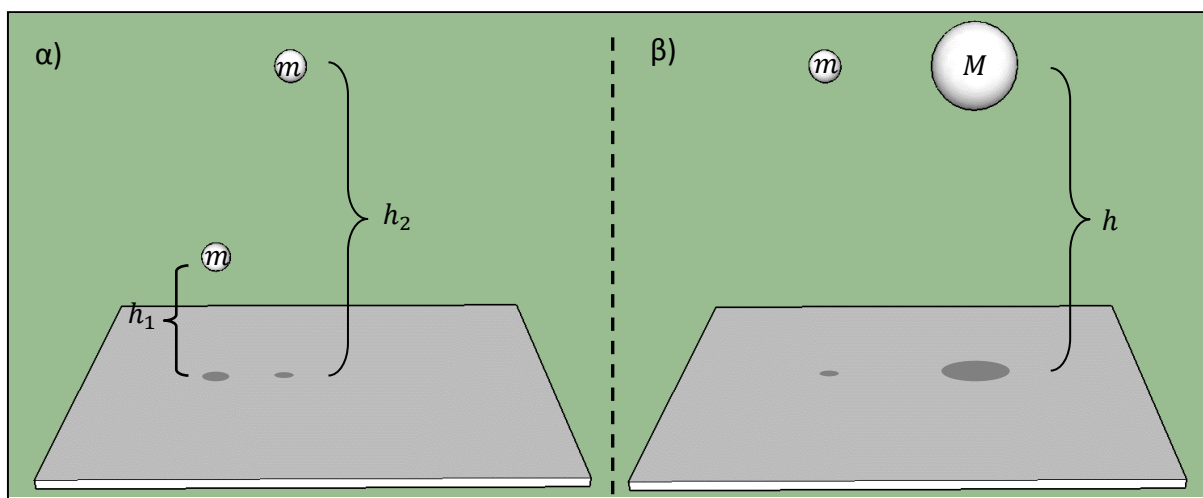
Πρόβλημα 3.9. Σημειακό φορτίο  $+Q$  βρίσκεται στο κέντρο σφαιρικού αγωγίμου κελύφους εσωτερικής ακτίνας  $R_1$  και εξωτερικής  $R_2$ . α) Περιγράψτε την κατανομή του επαγόμενου φορτίου στο κέλυφος β) Να βρεθεί το παραγόμενο ηλεκτρικό πεδίο παντού στο χώρο (εντός, εκτός και στο εσωτερικό του κελύφους) με τα βοήθεια της αρχής της επαλληλίας.



## 4. ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ – ΔΥΝΑΜΙΚΟ

### Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια

Θεωρήστε το παρακάτω Σχήμα 4.1 όπου εικονίζονται δυο διαφορετικές περιπτώσεις δυο μαζών μέσα στο βαρυτικό πεδίο της γης, σε κάποιο ύψος από την επιφάνεια της γης. Ποια από αυτές τις πέτρες μπορεί να προκαλέσει μεγαλύτερη ζημιά εάν αφεθεί ελεύθερη; Η απάντηση σύμφωνα με τη Φυσική Ι είναι ότι μεγαλύτερη ζημιά θα προκαλέσει η πέτρα με τη μεγαλύτερη δυναμική ενέργεια. Από ποιους παράγοντες όμως εξαρτάται η βαρυτική δυναμική ενέργεια; Ας εξετάσουμε τις δυο διαφορετικές περιπτώσεις ξεχωριστά. Στο Σχήμα 4.1 (στα αριστερά) εικονίζονται δυο όμοιες μάζες  $m$  οι οποίες βρίσκονται σε διαφορετικό ύψος  $h_1$  και  $h_2 > h_1$ . Προφανώς η πέτρα στο μεγαλύτερο ύψος  $h_2$  θα προκαλέσει μεγαλύτερη ζημιά και άρα η βαρυτική δυναμική ενέργεια πρέπει να εξαρτάται από το ύψος. Στην περίπτωση του Σχήματος 4.1β (στα δεξιά), εικονίζονται δυο μάζες στο ίδιο ύψος  $h$  αλλά με την μάζα  $M$  να είναι κατά πολύ μεγαλύτερη από την άλλη μάζα  $m$ . Εάν αφήσουμε τις μάζες ελεύθερες, η  $M$  σίγουρα θα προκαλέσει μεγαλύτερη ζημιά και άρα η βαρυτική δυναμική ενέργεια πρέπει να εξαρτάται και από τη μάζα. Τέλος εάν εκτελέσουμε το ίδιο πείραμα πτώσης στη γη και στη σελήνη, περιμένουμε στη γη να έχουμε μεγαλύτερη ζημιά από ότι στη σελήνη και άρα η βαρυτική δυναμική ενέργεια πρέπει να εξαρτάται και από το  $g$  (η σταθερά της βαρύτητας) αφού στην γη είναι μεγαλύτερο.



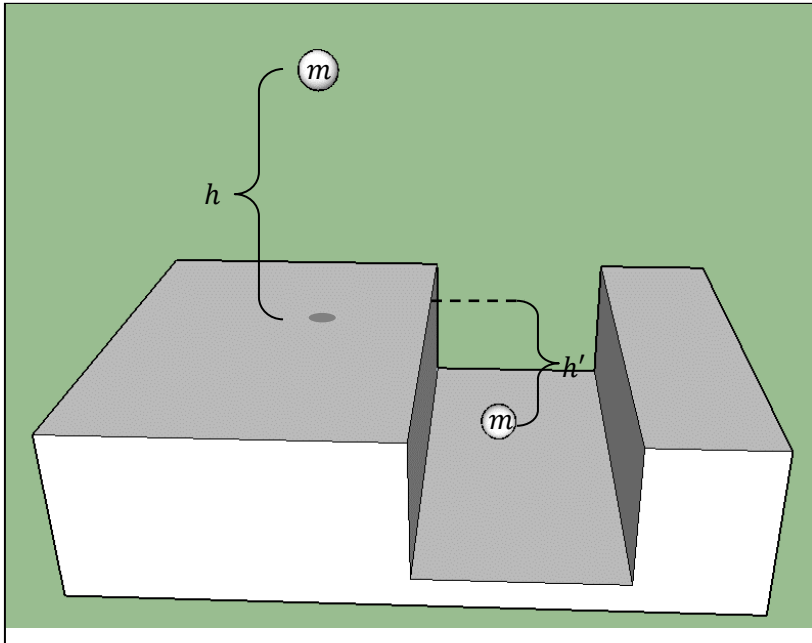
Σχήμα 4.1

Όπως τα αποτελέσματα του παραπάνω πειράματος είναι σε συνέπεια με αυτά που γνωρίζουμε από την Μηχανική αφού σύμφωνα με αυτή, η βαρυτική δυναμική ενέργεια  $U$  κοντά στην επιφάνεια της γης δίνεται από την παρακάτω έκφραση

$U = mgh$	Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια	4.1
-----------	----------------------------	-----

Οι μονάδες της δυναμικής ενέργειας είναι τα *Joules* που συμβολίζονται με το γράμμα  $J$ . Προσέξτε ότι η δυναμική ενέργεια μπορεί να είναι τόσο θετική, όπως στα προηγούμενα παραδείγματα, που σημαίνει ότι οι πέτρες μπορούν να προκαλέσουν έργο κατά την πτώση τους (υδροηλεκτρικά εργοστάσια με πτώση νερού) αλλά και αρνητική επειδή το ύψος μπορεί να είναι αρνητικό όπως για

μαμάζα  $m$  μέσα στο αυλάκι του παρακάτω Σχήματος 4.2 με ύψος  $h' < 0$ . Στη δεύτερη περίπτωση η πέτρα όχι μόνο δεν μπορεί να προκαλέσει έργο αλλά αντιθέτως απαιτείται έργο για να την επαναφέρουμε στην επιφάνεια της γης.



Σχήμα 4.2

Βέβαια ο αναγνώστης πρέπει να συνειδητοποιήσει ότι το ύψος  $h$  είναι μια σχετική ποσότητα και το μηδέν του λαμβάνεται αυθόρμητα. Συνήθως παίρνουμε  $h = 0$  στην επιφάνεια της γης αλλά και η γη δεν είναι τελείως επίπεδη. Έτσι π.χ. για ανθρώπους που ζουν σε κάποιο υψόμετρο όπως ένα χωριό στα 235 μέτρα από την επιφάνεια της γης, φαίνεται λογικό να θεωρούν ότι οι πέτρες που είναι επάνω στο χώμα της γης έχουν ύψος  $h = 0$  και άρα και δυναμική ενέργεια  $U = 0$ . Για κάποιον άλλον όμως παρατηρητή που βρίσκεται στην ακτή της θάλασσας, αυτές οι πέτρες φαίνονται να έχουν ύψος  $h = 235 \text{ m}$  και άρα και δυναμική ενέργεια  $U \neq 0$ . Ποιος από τους δυο έχει δίκιο; Κανένας από τους δυο, δεν υπάρχει απόλυτη τιμή του  $h$  και κατ' αναλογία και απόλυτη τιμή του  $U$ . Ο κάθε παρατηρητής ορίζει το μηδέν του ύψους του με κάποιο πρακτικό τρόπο ώστε να είναι ευκολότερη η μέτρησή του. Για παράδειγμα για τον άνθρωπο του χωριού είναι λογικό να πάρει κατά σύμβαση  $h = 0$  στο έδαφος του χωριού του γιατί έτσι διευκολύνει την ζωή του. Ομοίως για τον άνθρωπο στην ακτή, είναι λογικό να επιλέξει το  $h = 0$  στο επίπεδο της θάλασσας. Παρόλο που οι δυο παρατηρητές διαφωνούν στις απόλυτες μετρήσεις τους, εντούτοις συμφωνούν απόλυτα στις διαφορές ύψους. Έτσι εάν ένας άνθρωπος στο χωριό ανυψώσει μια κοτρώνα από το έδαφος στα  $1.5 \text{ m}$ , τότε ο παρατηρητής στην ακτή θα καταγράψει μια μεταβολή από  $h = 235$  έως τα  $h = 236.5 \text{ m}$  δηλαδή διαφορά  $\Delta h = 236.5 - 235 = 1.5 \text{ m}$ , ακριβώς όση παρατηρεί και ο άνθρωπος του χωριού. Επομένως καταλήγουμε στο εξής σημαντικό αποτέλεσμα:

Οι διαφορές ύψους αλλά και οι διαφορές δυναμικής ενέργειας, είναι ανεξάρτητες από την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων του κάθε παρατηρητή. Επομένως διαφορετικοί παρατηρητές καταγράφουν τις ίδιες διαφορές παρότι που μπορεί να διαφωνούν στις επιμέρους τιμές που καταγράφουν για ένα συγκεκριμένο σημείο.

## Μηχανικό Έργο

Όπως προαναφέρθηκε, μια μάζα η οποία αφήνεται ελεύθερη από κάποιο θετικό ύψος, παράγει έργο κατά την πτώση αυτή. Το ύψος, άρα και η δυναμική ενέργεια, ελαττώνεται κατά την πτώση αυτή ενώ το παραγόμενο έργο είναι θετικό. Αυτός είναι ο λόγος που εμφανίζεται το μείον στην σχέση έργου – δυναμικής ενέργειας που είδαμε στην μηχανική:

$W = -\Delta U$	Έργο παραγόμενο από το πεδίο	4.2
-----------------	------------------------------	-----

Η ποσότητα  $\Delta U = U_{\text{τελ}} - U_{\text{αρχ}}$  είναι η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας για την συγκεκριμένη μετατόπιση (θυμηθείτε ότι πάντοτε οι μεταβολές στην Φυσική λαμβάνονται ως η τελική μείον την αρχική ιδιότητα). Δηλαδή το έργο στην παραπάνω σχέση, είναι το έργο που παράγει η δύναμη του πεδίου. Επίσης πρέπει να καταλάβουμε ότι ένα φυσικό σύστημα όπως μια μάζα στα προηγούμενα παραδείγματα, τείνει αυθόρμητα από καταστάσεις υψηλής προς καταστάσεις χαμηλής δυναμικής ενέργειας. Αντιστρόφως, εάν προσπαθήσουμε να βγάλουμε την μάζα από τον πυθμένα του πηγαδιού στο Σχήμα 4.2, τότε πρέπει να προσφέρουμε έργο και επομένως το έργο είναι αρνητικό, δηλαδή το έργο που παράγει η δύναμη του πεδίου ως δύναμη  $\times$  μετατόπιση είναι αρνητικό αφού η βαρύτητα είναι αντίθετη στη μετατόπιση. Από την παραπάνω Εξίσωση 4.2, βλέπουμε ότι η αντίστοιχη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας σε αυτή τη μετακίνηση είναι θετική, δηλαδή η δυναμική ενέργεια της μάζας αυξάνεται.

Επομένως έχουμε το εξής σημαντικό αποτέλεσμα:

Όταν ένα σύστημα αφεθεί ελεύθερο, τότε αυτό θα κινηθεί αυθόρμητα από περιοχές υψηλότερης προς περιοχές χαμηλότερης δυναμικής ενέργειας και κατά την μετακίνησή του αυτή, η δύναμη του πεδίου παράγει έργο. Αντιστρόφως, για να μετακινηθεί ένα σώμα από περιοχές χαμηλότερης προς περιοχές υψηλότερης δυναμικής ενέργειας, απαιτείται εξωτερικό έργο αφού το έργο του πεδίου είναι αρνητικό.

Παρατηρήστε ότι η έννοια της χαμηλότερης δυναμικής ενέργειας δεν σημαίνει αναγκαστικά μηδενική ή και αρνητική τιμή, απλά μικρότερη αλγεβρική τιμή. Για παράδειγμα μια πέτρα με δυναμική ενέργεια 1000 J κυλάει αργά επάνω σε μια πλαγιά στην προσπάθειά της να πέσει στο έδαφος. Στην πορεία όμως συναντά ένα θάμνο και παγιδεύεται σε τέτοιο ύψος ώστε η νέα της δυναμική ενέργεια να είναι 400 J. Η κίνησή της έγινε αυθόρμητα αφού μετέβη σε χαμηλότερη δυναμική ενέργεια. Ομοίως ένα αντικείμενο που είναι πεσμένο στο δρόμο έχει δυναμική ενέργεια μηδέν (κατά σύμβαση όπως το συζητήσαμε παραπάνω). Εάν κατά λάθος πέσει από ένα παραθύρι ενός υπογείου, θα βρεθεί κάτω από το έδαφος με αρνητική τελική δυναμική ενέργεια έστω  $-200 J$ . Και πάλι η κίνηση έγινε αυθόρμητα επειδή αλγεβρικός η τελική δυναμική του ενέργεια είναι μικρότερη από την αρχική. Και βέβαια το συγκεκριμένο αντικείμενο μπορεί να πέσει ακόμα χαμηλότερα, π.χ. από το τραπέζι ενός υπογείου στο πάτωμα του υπογείου και να μειώσει αλγεβρικός την δυναμική του ενέργεια ακόμα περισσότερο, δηλαδή να την κάνει περισσότερο αρνητική. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις, αυτό που μετράει είναι η διαφορά της δυναμικής ενέργειας  $\Delta U$  που είναι αρνητική και έτσι η κίνηση γίνεται αυθόρμητα και επιπλέον η βαρύτητα παράγει έργο σύμφωνα με την Εξ. 4.2. Αντιθέτως, εάν κάποιος θέλει να ανυψώσει ένα αντικείμενο από το πάτωμα του υπογείου γκαράζ του με δυναμική ενέργεια έστω  $-400 J$  και να το φέρει κατά

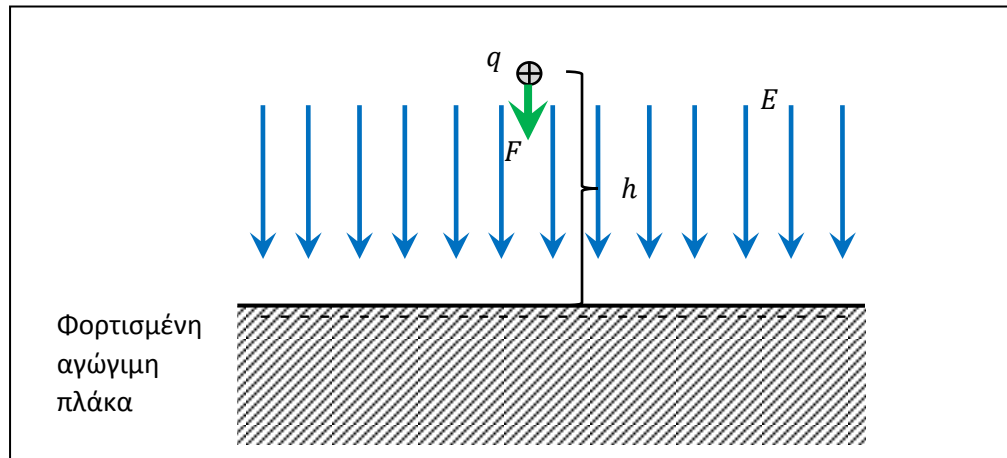
ένα μέτρο υψηλότερα, έστω στα  $-150 \text{ J}$ , αλγεβρικός η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι θετική  $\Delta U = U_{\text{τελ}} - U_{\text{αρχ}} = -150 - (-400) = 250$  παρόλο που και οι δυο ενδιάμεσες τιμές της  $U$  είναι αρνητικές. Σε αυτή τη περίπτωση το έργο της βαρύτητας είναι αρνητικό αφού αυτή αντιτίθεται στη μετακίνηση.

## Ηλεκτρική Δυναμική Ενέργεια – Ομοιογενές $E$

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, μπορούμε να προσομοιώσουμε το βαρυτικό πεδίο με τη βοήθεια των ηλεκτρικών δυνάμεων. Το αντίστοιχο πεδίο βέβαια είναι το ηλεκτρικό πεδίο. Εφόσον το  $g$  είναι αρκετά σταθερό κοντά στην επιφάνεια της γης, αρκεί να δημιουργήσουμε ένα ομοιογενές ηλεκτρικό πεδίο. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε μια ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου όπως αυτή στην φορτισμένη πλάκα του Σχήματος 4.3, η οποία είναι αρνητική και έτσι το πεδίο  $E$  είναι προς τα κάτω, όπως και η βαρύτητα. Εάν φέρουμε στο χώρο επάνω από την πλάκα ένα θετικό σημειακό φορτίο  $q$ , τότε θα ασκηθεί επάνω του μια δύναμη  $F$  και θα κινηθεί προς τα κάτω τείνοντας προς την αρνητική πλάκα η οποία είναι το ανάλογο της επιφάνειας της γης στη βαρύτητα. Άρα αυτό το φορτίο μπορεί να παράξει έργο και άρα διαθέτει δυναμική ενέργεια η οποία σε αναλογία με την Εξ. 4.1 ισούται με:

$U = q E h$	Ηλεκτρική Δυναμική Ενέργεια, ομοιογενές $E$	4.3
-------------	--	-----

Προσέξτε ότι η μάζα  $m$  έχει αντικατασταθεί από το φορτίο  $q$  και το  $g$  από το  $|E|$ .



Σχήμα 4.3

Η παραπάνω Εξίσωση μπορεί να αποδειχθεί και από αυτά που γνωρίζουμε από την Μηχανική. Η δυναμική ενέργεια στην μια διάσταση ορίζεται ως η συνάρτηση  $U(x)$  που ικανοποιεί την σχέση

$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$	Δυναμική Ενέργεια - Δύναμη	4.4
----------------------------	----------------------------	-----

ή

$U(x) = -\int F(x)dx$	Δυναμική Ενέργεια - Δύναμη	4.5
-----------------------	----------------------------	-----

όπου η  $F(x)$  είναι η δύναμη του πεδίου που ασκείται στο σώμα. Στον ηλεκτρισμό  $F = qE$  και οπότε με ολοκλήρωση παίρνουμε  $U = -qEx$ . Η σταθερά ολοκλήρωσης είναι μηδέν εάν δεχθούμε κατά σύμβαση ότι στο  $x = 0$  έχουμε και  $U = 0$ . Το πεδίο είναι προς τα κάτω οπότε είναι αρνητικό και έτσι  $E = -|E|$  που οδηγεί στο  $U = q|E|x$ . Αυτή η εξίσωση είναι η ίδια με την Εξ. 4.3 με το ύψος  $h$  να γράφεται ως  $x$ .

## Ηλεκτρική Δυναμική Ενέργεια - Σημειακά Φορτία

Στη γενική περίπτωση όπου το  $E(x)$  δεν είναι σταθερό (μη ομοιογενές) τότε και ηλεκτρική δύναμη  $F(x) = qE(x)$  δεν είναι σταθερή και πρέπει να καταφύγουμε στην Εξ. 4.5 για να υπολογίσουμε τη δυναμική ενέργεια η οποία θα δίνεται γενικά από την εξίσωση

$U(x) = -q \int E(x) dx$	Ηλεκτρική Δυναμική Ενέργεια	4.6
--------------------------	-----------------------------	-----

Παρόλο που μπορούμε να εξετάσουμε πολλά προβλήματα με μη ομοιογενές  $E$ , σε αυτό το εδάφιο θα ασχοληθούμε μόνο με την περίπτωση του  $E$  που παράγεται από σημειακή πηγή φορτίου  $Q$  που φαίνεται στα Σχήματα 2.4 και 3.1 και περιγράφεται από την Εξ. 2.2. Θα υπολογίσουμε τη δυναμική ενέργεια ενός υποθετικού θετικού δοκιμαστικού φορτίου  $q$  όταν αυτό τοποθετηθεί σε απόσταση  $r$  από το  $Q$ . Το ηλεκτρικό πεδίο που παράγει το  $Q$  σε απόσταση  $r$  από αυτό σύμφωνα με την Εξ. 2.2 ισούται με:

$$E = k \frac{Q}{r^2}$$

Η απόσταση  $r$  από το φορτίο παίζει τον ρόλο του  $x$  στην Εξ. 4.6 επομένως

$$U(r) = -q \int E(r) dr = -q \int k \frac{Q}{r^2} dr = k \frac{Qq}{r} + c$$

όπου το  $c$  είναι η σταθερά ολοκλήρωσης. Όπως προαναφέρθηκε, το μηδέν της δυναμικής ενέργειας ορίζεται κάπως αυθαίρετα και αυτό ακριβώς εκφράζει αυτή η σταθερά  $c$ . Ρυθμίζοντας αυτή τη σταθερά, μπορούμε να πετύχουμε μηδενισμό της  $U$  σε οποιοδήποτε βολικό σημείο. Επειδή το  $1/r$  τείνει στο μηδέν όταν  $r \rightarrow \infty$ , ένα βολικό σημείο αναφοράς είναι το άπειρο. Έτσι επιλέγουμε ως το μηδέν της δυναμικής ενέργειας, δηλαδή  $U(\infty) \rightarrow 0$ . Αυτό οδηγεί στο  $c = 0$  που απλουστεύει πάρα πολύ την παραπάνω έκφραση  $U(r)$ . Επομένως :

$U = k \frac{Qq}{r}$	Δυναμική Ενέργεια δυο Σημειακών Φορτίων	4.7
----------------------	--	-----

Παρότι που στην απόδειξη χρησιμοποιήθηκαν μόνο θετικά φορτία, η παραπάνω σχέση έχει γενική ισχύ εάν χρησιμοποιήσουμε και αρνητικά φορτία. Για παράδειγμα, έστω ότι ένα από τα δυο φορτία είναι αρνητικό. Τότε η παραπάνω εξίσωση προβλέπει αρνητική δυναμική ενέργεια. Εάν αφήσουμε ελεύθερα αυτά τα δυο φορτία, τότε αυτά θα πλησιάσουν αυθόρμητα μεταξύ τους λόγω αμοιβαίας

έλξης και έτσι το  $r$  θα μειωθεί, το  $1/r$  θα αυξηθεί αλλά το  $U$  ως αρνητικό θα μειωθεί (θα γίνει περισσότερο αρνητικό). Επομένως η Εξ. 4.7 οδηγεί στην ορθή πρόβλεψη ότι το σύστημα των δυο φορτίων θα κινηθούν αυθόρμητα προς περιοχές χαμηλότερης δυναμικής ενέργειας. Αντιθέτως όταν τα δυο φορτία είναι ομόσημα (π.χ. και τα δυο αρνητικά), τότε η Εξ. 4.7 προβλέπει αρνητική δυναμική ενέργεια η οποία μειώνεται όταν τα δυο φορτία απομακρύνονται μεταξύ τους, η οποία είναι και πάλι σε συμφωνία με την αυθόρμητη κίνηση των φορτίων λόγω αμοιβαίας άπωσης. Από τις παραπάνω παρατηρήσεις προκύπτει ότι α) αρνητική δυναμική ενέργεια μεταξύ δυο φορτίων σημαίνει έλξη ενώ β) θετική δυναμική ενέργεια μεταξύ δυο φορτίων σημαίνει άπωση.

### Παράδειγμα 4.3.

Να υπολογισθεί η δυναμική ενέργεια ενός συστήματος τριών σημειακών φορτίων  $q_1 = 4 \mu\text{C}$ ,  $q_2 = -2 \mu\text{C}$  και  $q_3 = -1 \mu\text{C}$  που βρίσκονται στις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου με πλευρά  $2 \text{ cm}$ . Να ερμηνευτεί το πρόσημο της απάντησής σας.

#### Λύση:

Πρέπει να εφαρμόσουμε την Εξ. 4.7 για κάθε ζεύγος φορτίων. Λόγω επαλληλίας, η συνολική δυναμική ενέργεια ισούται με:

$$U = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + k \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + k \frac{q_2 q_3}{r_{23}} = 9 \times 10^9 \left( \frac{4 \times (-2)}{2} + \frac{4 \times (-1)}{2} + \frac{(-2) \times (-1)}{2} \right) \times \frac{10^{-12}}{10^{-2}}$$

ή

$$U = -4.5 \text{ Joules}$$

Όπως προαναφέρθηκε παραπάνω, το αρνητικό πρόσημο σημαίνει γενικά έλξη οπότε το σύστημα εάν αφεθεί ελεύθερο, θα μειώσει την δυναμική του ενέργεια συμπυκνώνοντας τα τρία φορτία μαζί. Αυτό γίνεται επειδή έχουμε ένα μεγάλο θετικό φορτίο (το  $q_1$ ) το οποίο έλκει τα δυο μικρότερα αρνητικά και παρόλο που τα δυο τελευταία απωθούνται μεταξύ τους, η έλξη προς το θετικό φορτίο υπερνικά τελικά. Αντιθέτως εάν και τα τρία φορτία ήταν θετικά (ή αρνητικά) τότε θα παίρναμε  $U > 0$  και τα τρία φορτία θα απομακρύνονταν αυθόρμητα μεταξύ τους έως το άπειρο.

## Ηλεκτρικό Δυναμικό— Ορισμός

Θυμηθείτε ότι το  $q$  είναι ένα δοκιμαστικό φορτίο το οποίο το φέρνουμε σε ένα χώρο όπου υπάρχει πεδίο που δημιουργείται από κάποια μακρινή πηγή. Συνήθως μας ενδιαφέρει το πεδίο της πηγής, που περιγράφεται από το  $E$  και όχι το δοκιμαστικό φορτίο. Για παράδειγμα, το  $E$  σε ένα σημείο του χώρου όπου μια πηγή έχει σταθερό φορτίο, θα είναι και αυτό σταθερό, έστω  $100 \text{ N/C}$ . Αντιθέτως, για να μετρήσουμε αυτή τη τιμή, θα μπορούσαμε να έχουμε χρησιμοποιήσει ένα αριθμό διαφορετικών υποθετικών φορτίων, π.χ.  $2 \text{ nC}$ ,  $4 \text{ nC}$ ,  $6 \text{ nC}$  κ.ό.κ. Όλες οι μετρήσεις θα κατέληγαν

στην ίδια τιμή του  $E$  αλλά βέβαια θα έδιναν διαφορετική τιμή για την δύναμη αφού αυτή είναι ανάλογη του  $q$ . Αυτός είναι και ο λόγος που διαιρούμε τη δύναμη  $F$  με το  $q$  για να πάρουμε το  $E$ . Εντελώς παρομοίως, η δυναμική ενέργεια  $U$  εξαρτάται τόσο από την πηγή όσο και από το  $q$  (π.χ. δείτε τα Παραδείγματα 4.1 και 4.2 ή και την Εξίσωση 4.3 παραπάνω) και μάλιστα είναι ευθέως ανάλογη του  $q$  σύμφωνα με την Εξ. 4.6. Επομένως η ποσότητα  $V = U/q$  δεν εξαρτάται από το  $q$  αλλά μόνο από την πηγή. Αυτή η ποσότητα ονομάζεται "**Ηλεκτρικό Δυναμικό**" και είναι μια πολύ σημαντική ποσότητα στον ηλεκτισμό.

$V(x) = \frac{U(x)}{q}$	Ηλεκτρικό Δυναμικό	4.8
-------------------------	--------------------	-----

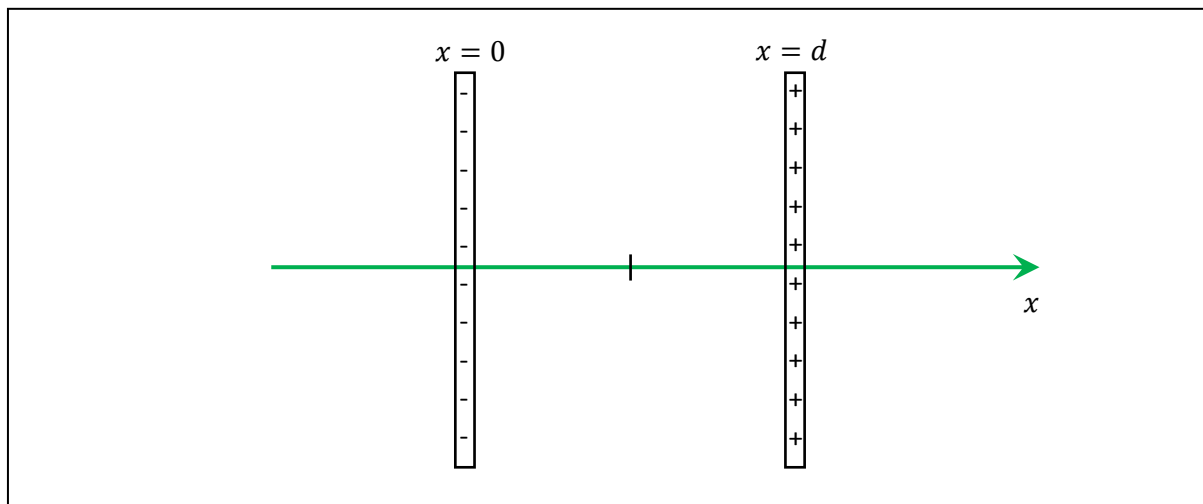
Οι μονάδες του Δυναμικού είναι το 1 *Volt* που ισούται με 1 *Joule/C*.

#### Παράδειγμα 4.4.

Επίπεδος πυκνωτής αποτελείται από δυο ορθογώνιες πλάκες (γνωστές και ως "οπλισμοί" του πυκνωτή) με ομοιόμορφο ηλεκτρικό πεδίο μέτρου  $E$  στο εσωτερικό του και μηδέν εκτός. Οι πλάκες βρίσκονται κάθετα στον άξονα  $x$  στις συντεταγμένες  $x = 0$  και  $x = d$ . α) Να βρεθεί το ηλεκτρικό δυναμικό παντού στο χώρο εάν είναι μηδέν στο  $x = 0$ . β) Να βρεθεί μια σχέση μεταξύ του  $E$  και της διαφοράς δυναμικού  $\Delta V$  μεταξύ των πλακών.

Λύση:

α) Θα εξετάσουμε ξεχωριστά τον εσωτερικό και τον εξωτερικό χώρο του πυκνωτή.



Το ηλεκτρικό πεδίο στον εσωτερικό χώρο είναι ίσο με  $E$  με φορά προς τα αριστερά επειδή οι δυναμικές γραμμές τείνουν από τα θετικά προς τα αρνητικά φορτία. Εάν τοποθετήσουμε ένα υποθετικό σημειακό φορτίο  $+q$  στο εσωτερικό του πυκνωτή σε κάποια απόσταση  $x$  από την αρνητική πλάκα, τότε αυτή θα παίζει το ρόλο της γης επειδή το σημειακό φορτίο τείνει να καταλήξει σε αυτήν λόγω έλξης. Επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. 4.3 που περιγράφει την Ηλεκτρική Δυναμική Ενέργεια μέσα σε ομοιογενές πεδίο  $E$ :

$$U = q|E|x = qEx$$

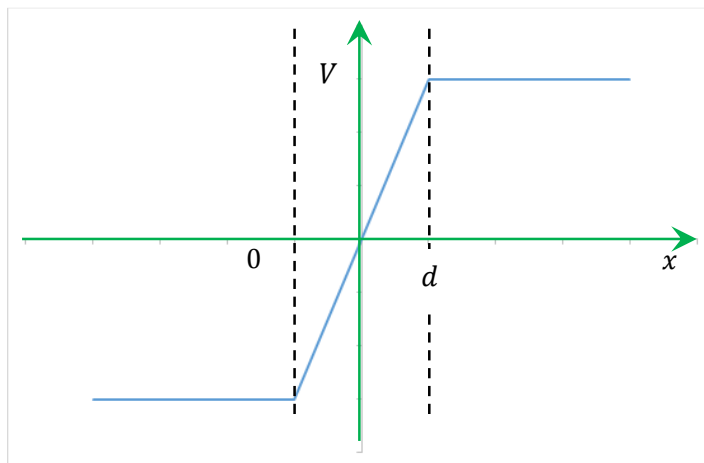
(τον ρόλο του ύψους  $h$  παίζει εδώ η απόσταση  $x$ ). Η δυναμική ενέργεια γίνεται μηδέν στο  $x = 0$  όπως αναμένεται αφού όπως αναφέρθηκε, η αρνητική πλάκα είναι το ανάλογο της γης στον ηλεκτρισμό. Στην άλλη πλάκα όπου  $x = d$ , η δυναμική ενέργεια ισούται με  $qEd$ . Στον εξωτερικό χώρο του πυκνωτή έχουμε  $E = 0$  οπότε θα περιμέναμε και  $U = 0$ . Αυτό είναι συνεπές στα αριστερά του πυκνωτή εφόσον δεχθήκαμε ότι  $U = 0$  επάνω στην αρνητική πλάκα και έτσι η  $U$  είναι μια συνεχής συνάρτηση. Όμως επάνω στην θετική πλάκα είδαμε ότι η δυναμική ενέργεια ισούται με  $qEd$ , μια σταθερή τιμή. Θυμηθείτε όμως ότι μπορούμε πάντοτε να προσθέσουμε μια σταθερά στη δυναμική ενέργεια αφού μόνο οι μεταβολές της έχουν νόημα και όχι οι απόλυτες τιμές της και έτσι στα δεξιά του πυκνωτή παρόλο που η Εξ. 4.3 προβλέπει  $U = 0$ , πρέπει να προσθέσουμε σε αυτό το αποτέλεσμα την τιμή  $qEd$  ώστε και πάλι η  $U$  να είναι μια συνεχής συνάρτηση επάνω στο σύνορο  $x = d$ . Επομένως η  $U$  είναι μια τρικλαδική συνάρτηση:

$$U = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ qEx & 0 \leq x \leq d \\ qEd & x > d \end{cases}$$

Από τον ορισμό του Ηλεκτρικού Δυναμικού, Εξ. 4.8, έχουμε μια αντίστοιχη τρικλαδική συνάρτηση για το δυναμικό:

$$V = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ Ex & 0 \leq x \leq d \\ Ed & x > d \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση του  $V$  φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



β) Στο  $x = 0$  έχουμε  $V_1 = 0$  ενώ στο  $x = d$  έχουμε  $V_2 = Ed$  και έτσι  $\Delta V = V_2 - V_1 = Ed$  ή

$$E = \frac{\Delta V}{d}$$

η γνωστή σχέση για το ηλεκτρικό πεδίο ενός πυκνωτή συναρτήσει της διαφοράς δυναμικού και της απόστασης μεταξύ των οπλισμών του.



Παράδειγμα 4.5.

Στο προηγούμενο παράδειγμα έστω ότι υπάρχει ομοιόμορφο φορτίο  $\pm Q$  στις δυο πλάκες και ότι η κάθε μία έχει εμβαδό  $A$ . Να δοθεί μια σχέση μεταξύ του φορτίου  $Q$  και της διαφοράς δυναμικού μεταξύ των πλακών. Από αυτή να υπολογισθεί ο λόγος  $C = Q/\Delta V$  που είναι γνωστός ως "**η χωρητικότητα**" του πυκνωτή, μια πολύ σημαντική παράμετρος του πυκνωτή στις εφαρμογές.

Λύση:

Όπως είδαμε παραπάνω, η διαφορά δυναμικού μεταξύ των πλακών δίνεται από την έκφραση

$$\Delta V = Ed$$

Από την Εξ. 3.7 το ηλεκτρικό πεδίο στον εσωτερικό χώρο του πυκνωτή είναι σταθερό και ίσο με:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου είναι εξ' ορισμού ίση με φορτίο ανά μονάδα επιφάνειας και επομένως

$$\sigma = Q/A$$

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω:

$$\Delta V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{Q}{\epsilon_0 A} d$$

Έτσι

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

**Διαφορές Δυναμικού – Ηλεκτρική Τάση**

Σε πολλές εφαρμογές γνωρίζουμε την διαφορά δυναμικού μεταξύ δυο σημείων A και B. Για παράδειγμα οι ρευματολήπτες της Δ.Ε.Η. βρίσκονται σε διαφορά δυναμικού 220 V (από τον ένα ακροδέκτη στον άλλο). Επίσης οι γνωστές μας μπαταρίες AAA που χρησιμοποιούμε στις περισσότερες ηλεκτρονικές συσκευές μικρής ισχύος, αναγράφουν επάνω τους 1.5 V που σημαίνει ότι μεταξύ των δυο πόλων η διαφορά δυναμικού είναι ίση με 1.5 V.

Έστω ότι μεταφέρουμε ένα σημειακό φορτίο  $q$  μέσα σε κάποιο χώρο όπου υπάρχουν ηλεκτρικά πεδία, από ένα σημείο A σε ένα άλλο B κατά μήκος του άξονα  $x$ . Τότε από την Εξ. 4.8 η διαφορά δυναμικού μεταξύ αυτών των δυο σημείων ισούται με:

$$V_B - V_A = \frac{U_B}{q} - \frac{U_A}{q} = \frac{\Delta U}{q}$$

Όμως από την Εξ. 4.2 γνωρίζουμε ότι στη Μηχανική η διαφορά δυναμικής ενέργειας είναι ίση με το μείον του έργου  $W_{A \rightarrow B}$  που παράγει το πεδίο κατά τη μετακίνηση από το αρχικό έως το τελικό σημείο και επομένως

$$V_B - V_A = -\frac{1}{q}W_{A \rightarrow B}$$

Λύνοντας ως προς το έργο συναρτήσει της διαφοράς δυναμικού, καταλήγουμε στο πολύ σημαντικό αποτέλεσμα

$W_{A \rightarrow B} = q(V_A - V_B)$	Ηλεκτρικό Έργο	4.14
--------------------------------------	----------------	------

#### Παράδειγμα 4.5.

Έστω ότι ο πυκνωτής του Παραδείγματος 4.4 φέρει φορτίο  $Q = 100 \mu C$ , το εμβαδό του κάθε οπλισμού ισούται με  $6 \text{ cm}^2$  και ότι βρίσκονται μεταξύ τους σε απόσταση  $2 \text{ mm}$ . Να βρεθεί το έργο που αποδίδει το πεδίο του πυκνωτή σε ένα θετικό σημειακό φορτίο  $q = 2 \mu C$  εάν το μετακινεί από το  $x = -0.5 \text{ mm}$  έως και το  $x = 0.5 \text{ mm}$

#### Λύση:

Είδαμε ότι στον εσωτερικό χώρο του πυκνωτή το δυναμικό δίνεται από την έκφραση  $V(x) = -Ex$  όπου

$$E = -\frac{Q}{A\epsilon_0} = \frac{-100 \times 10^{-6}}{6 \times 10^{-4} \times 8.85 \times 10^{-12}} = -1.88 \times 10^{10} \text{ N/C}$$

Στα δεδομένα σημεία έχουμε  $x = \mp 0.5 \text{ mm} = \mp 0.5 \times 10^{-3} \text{ m}$  και τα αντίστοιχα δυναμικά είναι ίσα με  $V_A = -Ex_A = 1.88 \times 10^{10}(-0.5 \times 10^{-3}) = -0.94 \times 10^7 \text{ V}$  και  $V_B = -Ex_B = 1.88 \times 10^{10} \times 0.5 \times 10^{-3} = 0.94 \times 10^7 \text{ V}$

Από την Εξ. 4.15

$$W_{A \rightarrow B} = q(V_A - V_B) = 2 \times 10^{-6}(-0.94 \times 10^7 - 0.94 \times 10^7) = -37.6 \text{ J}$$

Το έργο είναι αρνητικό επειδή το  $q$  μετακινήθηκε αντίθετα με το πεδίο και άρα πρέπει να ξοδέψουμε έργο για τη μετακίνηση αυτή (η φυσική του πορεία είναι προς τα αριστερά οπότε και το πεδίο θα παρήγαγε θετικό έργο).

## Προβλήματα

### Πρόβλημα 4.1.

Ένα θετικά φορτισμένο φύλλο βρίσκεται  $40 \text{ mm}$  επάνω από ένα αρνητικά φορτισμένο φύλλο (διάταξη πυκνωτή) και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ τους ισούται με  $5 \times 10^5 \text{ N/C}$ . Βρείτε την δυναμική ενέργεια ενός φορτίου  $+4 \mu C$  εάν αυτό τοποθετηθεί σε μια απόσταση α)  $15 \text{ mm}$  και β)  $30 \text{ mm}$  από το θετικό φύλλο. Πάρτε ως αναφορά του δυναμικού το αρνητικό φύλλο.

### Πρόβλημα 4.2.

Στο προηγούμενο Πρόβλημα α) πόση δύναμη  $F_E$  ασκείται στο φορτίο όταν αυτό βρίσκεται στην αρχική του θέση; β) πόση δύναμη  $F$  πρέπει να του ασκηθεί για να το φέρουμε πολύ αργά από τη γείωση (αρνητικό φύλλο) στην αρχική του θέση; γ) Υπολογίστε το έργο στο προηγούμενο

Φυσική ΙΙ – Δ. Κουζούδης – Π. Πετρίδης

υποερώτημα χρησιμοποιώντας τον ορισμό του έργου από την Μηχανική και δ) Υπολογίστε το έργο από την Εξ. 4.2.

Πρόβλημα 4.3.

Ένα θετικά φορτισμένο φύλλο με φορτίο  $25 \mu C$  και διαστάσεις  $20 \times 12 \text{ mm}^2$  βρίσκεται  $50 \text{ mm}$  επάνω από ένα άλλο όμοιο φύλλο με ίσο και αντίθετο φορτίο (διάταξη πυκνωτή). Βρείτε την δυναμική ενέργεια ενός σημειακού φορτίου  $+5 \mu C$  εάν είναι τοποθετημένο  $15 \text{ mm}$  από το αρνητικό φύλλο

Πρόβλημα 4.4.

Σε ποια απόσταση από ένα φορτίο  $-7 \mu C$  ένα άλλο μικρότερο φορτίο  $-3 \text{ nC}$  θα έχει δυναμική ενέργεια  $60 \text{ mJ}$ ; Ποια θα είναι η αρχική δύναμη που θα ασκηθεί στο φορτίο των  $-3 \text{ nC}$ ;

Πρόβλημα 4.5.

Ένα φορτίο  $+6 \mu C$  βρίσκεται  $30 \text{ mm}$  από ένα άλλο φορτίο  $16 \mu C$ . Ποια είναι η δυναμική ενέργεια του συστήματος;

Πρόβλημα 4.6.

Οι σπλισμοί ενός πυκνωτή έχουν φορτίο  $\pm 25 \mu C$  και διαστάσεις  $20 \times 12 \text{ mm}^2$  και βρίσκονται σε απόσταση  $50 \text{ mm}$  μεταξύ τους. Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό σε σημείο P που απέχει απόσταση ίση με α)  $15 \text{ mm}$  και β)  $20 \text{ mm}$  από τον αρνητικό σπλισμό.

Πρόβλημα 4.7.

Στο προηγούμενο πρόβλημα, πόση είναι η δυναμική ενέργεια ενός φορτίου  $+4 \mu C$  εάν τοποθετηθεί στις δυο θέσεις (α) και (β) παραπάνω;

Πρόβλημα 4.8.

Ποιο είναι το ηλεκτρικό δυναμικό σε ένα σημείο A που βρίσκεται  $6 \text{ cm}$  από ένα φορτίο  $8.40 \mu C$ ; Ποια είναι η δυναμική ενέργεια ενός φορτίου  $2 \text{ nC}$  που έχει τοποθετηθεί σε αυτό το σημείο;

Πρόβλημα 4.9.

Να βρεθεί το δυναμικό  $V(x)$  παντού στο χώρο ενός θετικά φορτισμένου φύλλου απείρων διαστάσεων με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου  $\sigma$ . Πάρτε τον άξονα  $x$  κάθετα στο φύλλο και θεωρήστε ότι το φύλλο έχει δυναμικό μηδέν.

Πρόβλημα 4.10.

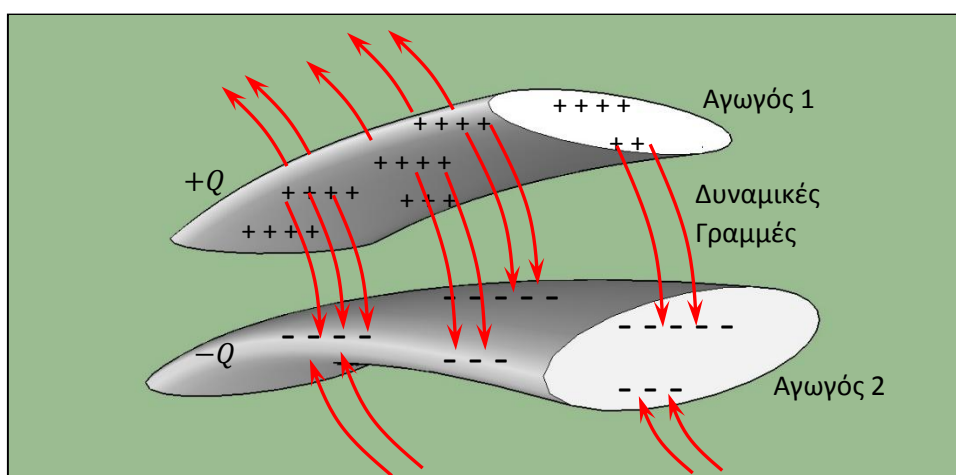
Να βρεθεί α) το ηλεκτρικό πεδίο  $E(x)$  στη μια διάσταση παντού στον άξονα  $x$  που παράγεται εξαιτίας δυο ίσων και αντίθετων σημειακών φορτίων  $\pm q$  που βρίσκονται στις θέσεις  $x = \pm a$  αντίστοιχα β) το αντίστοιχο δυναμικό  $V(x)$  χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του πρώτου υποερωτήματος.

## 6. ΠΥΚΝΩΤΕΣ - ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ

### Ορισμός Χωρητικότητας

Μέχρι τώρα έχουμε εξετάσει τον πυκνωτή με παράλληλους οπλισμούς. Γενικά όμως μια οποιαδήποτε διάταξη, όπως αυτή που εικονίζεται στο Σχήμα 6.1, η οποία αποτελείται από δυο αγωγούς που βρίσκονται σε εγγύτητα μεταξύ τους και φέρουν ίσο και αντίθετο φορτίο  $\pm Q$ , ονομάζεται επίσης **πυκνωτής**. Οι δυο αγωγοί ονομάζονται "**οπλισμοί**" του πυκνωτή.

Θυμηθείτε ότι στο εσωτερικό ενός αγωγού ισχύει πάντα  $E = 0$  και άρα από την Εξ. 4.13 έχουμε  $V = \text{σταθερό παντού στον αγωγό}$ , δηλαδή οι αγωγοί είναι ισοδυναμικές επιφάνειες (στην ουσία ισοδυναμικοί όγκοι αλλά συνήθως μας ενδιαφέρει η εξωτερική τους επιφάνεια). Έστω  $V_+$  και  $V_-$  το δυναμικό του θετικού και του αρνητικού οπλισμού αντίστοιχα. Τότε γράφουμε  $\Delta V = V_+ - V_-$  για τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών.



Σχήμα 6.1

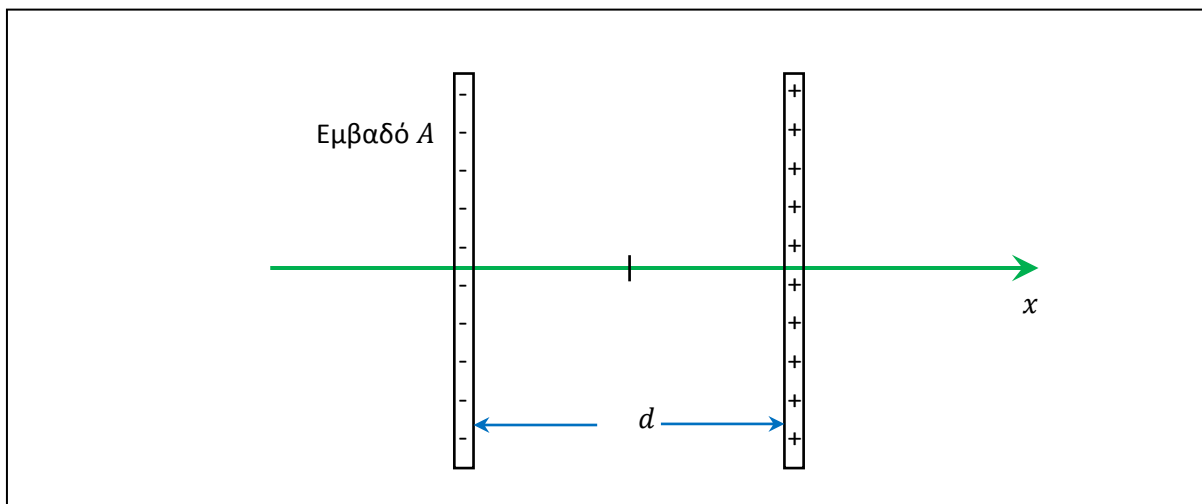
Έχει παρατηρηθεί πειραματικά ότι η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών είναι ανάλογη του φορτίου  $Q$ . Η σταθερά αναλογίας

$C = \frac{Q}{\Delta V}$	Ορισμός χωρητικότητας πυκνωτή	6.1
--------------------------	----------------------------------	-----

ονομάζεται "**χωρητικότητα**" του πυκνωτή και οι μονάδες της είναι τα **Farad**  $F$  τα οποία ισούνται από την παραπάνω σχέση με  $F = C/V$ . Όπως προαναφέρθηκε, το *Coulomb* είναι μια μεγάλη μονάδα και κατ' αναλογία και το *Farad* για αυτό και στην πράξη συναντάμε μόνο τα  $\mu F = 10^{-6} F$  ή και τα  $nF = 10^{-9} F$ . Η χωρητικότητα συνήθως εξαρτάται μόνο από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των οπλισμών αλλά και του υλικού που βρίσκεται ανάμεσα στους οπλισμούς όπως θα δούμε παρακάτω.

## Επίπεδος πυκνωτής

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένας επίπεδος πυκνωτής ο οποίος αποτελείται από δυο ορθογώνιες πλάκες με εμβαδό  $A$  η καθεμία, οι οποίες βρίσκονται σε απόσταση  $d$  μεταξύ τους και τοποθετημένες κάθετα στον άξονα  $x$ .



Σχήμα 6.2

Από την Εξ. 3.7 το ηλεκτρικό πεδίο στον εσωτερικό χώρο είναι σταθερό και ίσο με:

$$E = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} = -\frac{Q}{A\epsilon_0}$$

Το μείον προκύπτει επειδή το πεδίο είναι προς τα αριστερά στο παραπάνω σχήμα. Από τον ορισμό της επιφανειακής πυκνότητας φορτίου έχουμε  $\sigma = Q/A$  και έτσι το ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή παντού στο χώρο γράφεται ως

$E = \begin{cases} 0, & \text{εκτός} \\ -\frac{Q}{A\epsilon_0}, & \text{εντός} \end{cases}$	Ηλεκτρικό πεδίο επίπεδου πυκνωτή	6.2
---	----------------------------------	-----

Η Εξίσωση 4.11 περιγράφει τη σχέση μεταξύ του πεδίου στο εσωτερικό του πυκνωτή και της διαφοράς δυναμικού  $V$  στα άκρα του και για λόγους πληρότητας θα την παραθέσουμε και εδώ:

$\Delta V =  E d$	Διαφορά δυναμικού – επίπεδου πυκνωτή	6.3
-------------------	--------------------------------------	-----

Συνδυάζοντας τις Εξισώσεις 6.2 και 6.3 προκύπτει ότι

$$\Delta V = \frac{Q}{A\epsilon_0} d$$

και επομένως από τον ορισμό της Εξ. 6.1, η χωρητικότητα αυτού του πυκνωτή ισούται με

$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$	Χωρητικότητα επίπεδου πυκνωτή	6.4
------------------------------	----------------------------------	-----

όπου η διηλεκτρική σταθερά του κενού, όπως είδαμε, ισούται με  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ S. I.}$

### Παράδειγμα 6.1:

Ο επίπεδος πυκνωτής του Σχήματος 6.2 έχει χωρητικότητα  $12 \text{ nF}$  με απόσταση οπλισμών  $1 \text{ mm}$  μεταξύ τους. Εάν ο αρνητικός οπλισμός είναι γειωμένος και ο θετικός φέρει φορτίο  $0.2 \text{ } \mu\text{C}$ , να βρεθεί η τιμή του δυναμικού στο εσωτερικό του πυκνωτή σε απόσταση  $0.25 \text{ mm}$  από τον αρνητικό οπλισμό.

### Λύση:

Από την Εξ. 6.4 μπορούμε να βρούμε το εμβαδό των οπλισμών του πυκνωτή:

$$A = \frac{Cd}{\epsilon_0} = \frac{12 \times 10^{-9} \times 10^{-3}}{8.85 \times 10^{-12}} = 1.36 \text{ m}^2$$

Από την Εξ. 6.2 το ηλεκτρικό πεδίο στον εσωτερικό χώρο του πυκνωτή ισούται με:

$$E = -\frac{Q}{A\epsilon_0} = -\frac{0.2 \times 10^{-6}}{1.36 \times 8.85 \times 10^{-12}} = -1.66 \times 10^4 \text{ N/C}$$

Από την Εξ. 4.9 έχουμε

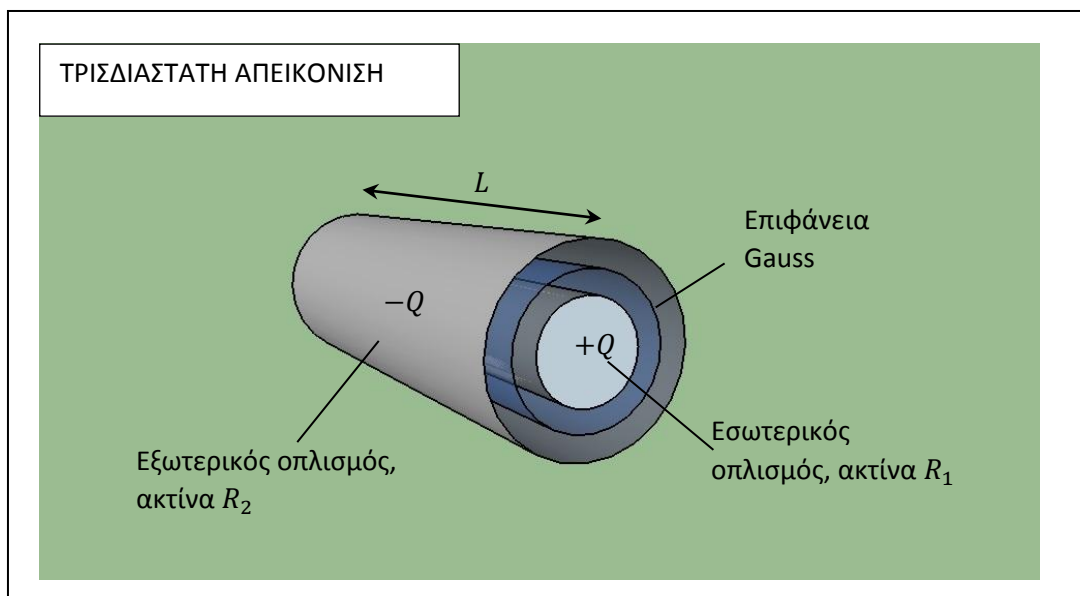
$$V(x) = -\int E dx = -E \int dx = -Ex + c$$

Για ευκολία παίρνουμε την αρχή των συντεταγμένων επάνω στον αρνητικό οπλισμό. Από την συνοριακή συνθήκη  $V(0) = 0$  προκύπτει  $c = 0$  και έτσι  $V(x) = -Ex$ . Στη δεδομένη απόσταση των  $x = 0.25 \text{ mm}$  έχουμε

$$V = -(-1.66 \times 10^4) \times 0.25 \times 10^{-3} = 4.15 \text{ V}$$

## Άλλες Γεωμετρίες

Στην πράξη στους πυκνωτές συναντιούνται και άλλες γεωμετρίες με την πιο συνήθη αυτή του κυλινδρικού πυκνωτή. Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 6.3, αυτός ο πυκνωτής αποτελείται από έναν κυλινδρικό οπλισμό ακτίνας  $R_1$  και μήκους  $L$  ο οποίος περιβάλλεται από εξωτερικό λεπτό κυλινδρικό κέλυφος ακτίνας  $R_2 > R_1$ , ομοαξονικό με τον εσωτερικό οπλισμό και ίσου μήκους με αυτόν. Οι δυο οπλισμοί φέρουν φορτίο  $\pm Q$  με τον εσωτερικό οπλισμό να είναι ο θετικός



Σχήμα 6.3

## Διηλεκτρικά

Μέχρι τώρα θεωρούσαμε ότι υπήρχε κενό μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή. Υπάρχει μια κατηγορία υλικών που ονομάζονται **διηλεκτρικά** τα οποία όταν γεμίσουν τον χώρο μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή, αυξάνουν την χωρητικότητά του. Έτσι εάν  $C_0$  είναι η χωρητικότητα του πυκνωτή χωρίς διηλεκτρικό, τότε αυξάνεται σε  $C = \kappa C_0$ , όπου  $\kappa > 1$  με την προσθήκη του διηλεκτρικού. Το  $\kappa$  ονομάζεται "**σχετική διηλεκτρική σταθερά**" του υλικού και παίρνει τυπικές τιμές από 5 έως 20. Συνήθη υλικά που χρησιμοποιούνται στην πράξη είναι η μίκα και το χαρτί εμβαπτισμένο σε λάδι. Στον Πίνακα 6.1 παρακάτω δίνονται διάφορες τιμές αυτής της σταθεράς για διάφορα υλικά. Το γινόμενο  $\epsilon = \kappa \epsilon_0$  είναι γνωστό και ως "**διηλεκτρική σταθερά**" του υλικού. Επειδή οι εκφράσεις του  $C_0$  για τις διάφορες γεωμετρίες είναι ανάλογες του  $\epsilon_0$  (δες π.χ. Εξ. 6.4 και 6.5), όταν τις πολλαπλασιάζουμε με  $\kappa$  είναι απλά σαν να πολλαπλασιάζουμε το  $\epsilon_0$  με  $\kappa$  και επομένως μπορούμε απλά να αντικαθιστούμε το  $\epsilon_0$  με το αντίστοιχο  $\epsilon$ .

Υλικό	$\kappa$	Υλικό	$\kappa$
Κενό	1 (εξ' ορισμού)	Καουτσούκ	7
Αέρας	1	Διαμάντι	5.5–10
Τεφλόν	2.1	Αλάτι	3–15
Πολυαιθυλένιο	2.25	Γραφίτης	10–15
Χαρτί	3.85	Πυρίτιο	11.68

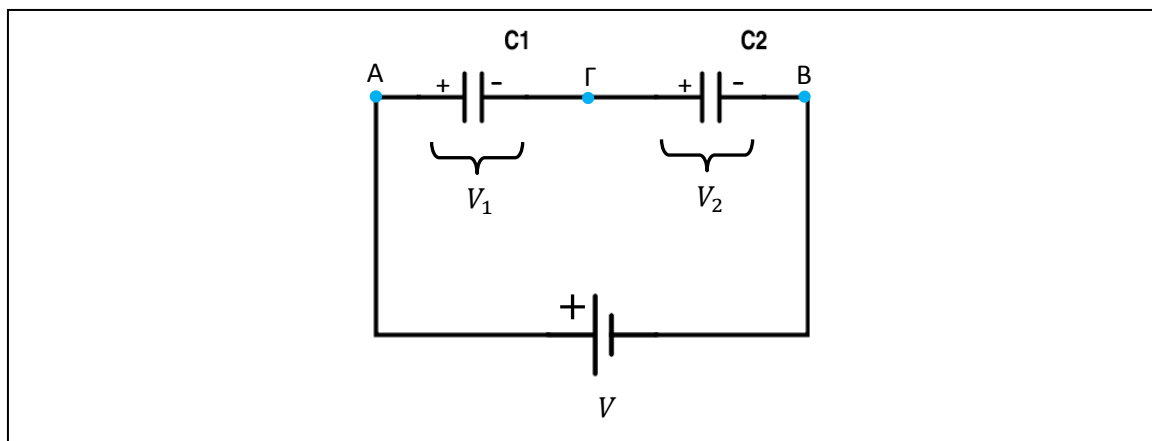
Μίκα	3-6	Μεθανόλη	30
Διοξείδιο του Πυριτίου	3.9	Νερό	80
Μπετόν	4.5	Διοξείδιο του Τιτανίου	86–173
Pyrex	4.7 (3.7–10)	Barium titanate	1200

Πίνακας 6.1. Σχετική διηλεκτρική σταθερά  $\kappa$  διαφόρων υλικών

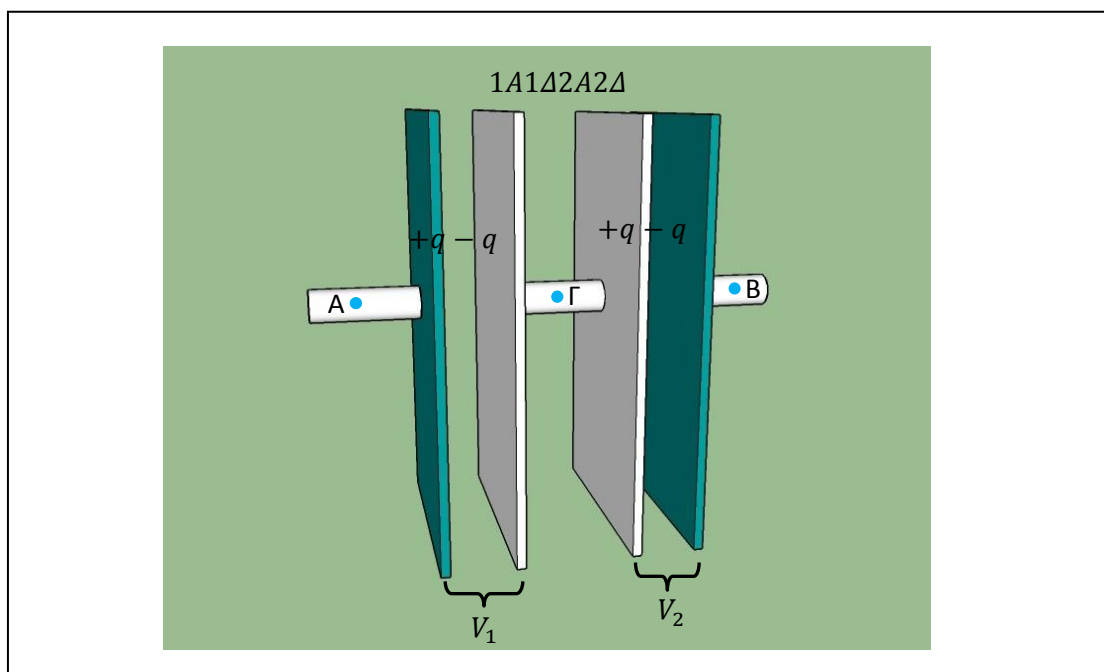
## Πυκνωτές σε Σειρά

Οι πυκνωτές είναι βασικά στοιχεία των μοντέρνων ηλεκτρονικών κυκλωμάτων και απαντιούνται σχεδόν παντού σε αυτά. Επάνω τους αναγράφεται η τιμή της χωρητικότητας τους, π.χ.  $2 \mu F$ . Καμιά φορά εμφανίζονται σε διάφορους συνδυασμούς με τους πιο απλούς να είναι η σύνδεση σε σειρά και η σύνδεση παράλληλα. Στο σχήμα 6.5 φαίνεται ο συνδυασμός δυο πυκνωτών με χωρητικότητες  $C_1$  και  $C_2$  σε σειρά που σημαίνει ότι έχουν ένα κοινό άκρο το Γ, ενώ τα άλλα δυο ελεύθερα άκρα τους Α και Β συνδέονται στο υπόλοιπο κύκλωμα που εδώ είναι απλά μια πηγή τάσης  $V$ . Ο συμβολισμός που εικονίζεται στο σχήμα για τον πυκνωτή και την πηγή είναι αυτός που χρησιμοποιείται στα ηλεκτρικά κυκλώματα. Θα θέλαμε να αντικαταστήσουμε τους δυο πυκνωτές με ένα ισοδύναμο πυκνωτή, δηλαδή με ένα τέτοιο πυκνωτή ο οποίος να μην αλλάξει τα ηλεκτρικά χαρακτηριστικά του κυκλώματος. Κατ' αρχάς ας μελετήσουμε αναλυτικά τη λειτουργία των δυο πυκνωτών. Για το σκοπό αυτό χρειαζόμαστε κάποια ονοματολογία. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.6, ονομάσαμε  $1A$  και  $1\Delta$  τον αριστερό και δεξιό οπλισμό αντίστοιχα του 1ου πυκνωτή, ενώ  $2A$  και  $2\Delta$  το αριστερό και δεξιό οπλισμό αντίστοιχα του 2ου πυκνωτή. Έστω ότι αρχικά οι δυο πυκνωτές ήταν αφόρτιστοι. Μόλις τους συνδέσουμε στην πηγή τάσης, κάποιο φορτίο  $+q$  θα μεταφερθεί από τον θετικό πόλο της πηγής στον αριστερό οπλισμό του πυκνωτή  $C_1$ , δηλαδή τον  $1A$ . Τότε θα λάβει χώρα το φαινόμενο της επαγωγής, σύμφωνα με την οποία, όταν κάποιο εξωτερικό φορτίο πλησιάσει σε ένα ουδέτερο αγωγό, τότε προσελκύνονται αντίθετα φορτία στην πλησιέστερη προς το εξωτερικό φορτίο επιφάνεια του και ίσα και αντίθετα φορτία στην πιο απομακρυσμένη επιφάνειά του. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.6, στην προκειμένη περίπτωση ο αγωγός αποτελείται από τρία μέρη τα οποία εικονίζονται με ανοιχτό χρώμα, τον οπλισμό  $1\Delta$ , τον λεπτό συρμάτινο αγωγό που συνδέει τους δυο πυκνωτές (αυτός που περιέχει το σημείο Γ) και τον οπλισμό  $2A$ . Η πλησιέστερη επιφάνεια προς το φορτίο  $+q$  στα αριστερά που μόλις έφτασε από την πηγή, είναι η  $1\Delta$  ενώ η πιο απομακρυσμένη είναι η  $2A$  επομένως σε αυτές θα εμφανισθούν επαγωγικά φορτία  $-q$  και  $+q$  αντίστοιχα. Το νέο-εμφανισθέν φορτίο  $+q$  στον  $2A$  θα προκαλέσει εκ νέου ένα φαινόμενο επαγωγής, αναγκάζοντας τον οπλισμό  $2\Delta$  να αναπτύξει αντίθετο φορτίο  $-q$  ενώ ένα ίσο και αντίθετο φορτίο  $+q$  θα απωθηθεί στο πιο απομακρυσμένο σημείο που δεν είναι άλλο από τον αρνητικό πόλο της πηγής. Με αυτόν τον τρόπο οι πυκνωτές "κλείνουν κύκλωμα" όπως λέμε, φαίνεται δηλαδή σαν να μεταφέρεται φορτίο από την πηγή διαμέσου των πυκνωτών και πάλι πίσω στην πηγή, το οποίο μοιάζει εκ πρώτης όψης ως παράδοξο αφού ανάμεσα από τους οπλισμούς υπάρχει κενό το οποίο είναι ένας εξαιρετικός μονωτής σε συνηθισμένες τάσεις. Βέβαια η άρση του παραδόξου είναι ότι μπορούμε να έχουμε μεταφορά φορτίου και μέσω επαγωγής και όχι μόνο μέσω αγωγιμότητας.





Σχήμα 6.5



Σχήμα 6.6

Συμπερασματικά, όταν συνδέουμε πυκνωτές σε σειρά, όλοι αποκτούν το ίδιο φορτίο  $q$ . Από την Εξ. 6.1 μπορούμε να γράψουμε για τις τάσεις στα άκρα των δυο πυκνωτών ότι  $V_1 = q/C_1$  και  $V_2 = q/C_2$ . Όταν αντικαταστήσουμε τους δυο πυκνωτές με έναν άλλο ισοδύναμο με χωρητικότητα  $C$ , τότε δεν αλλάζουν τα ηλεκτρικά μεγέθη του κυκλώματος και άρα η πηγή και πάλι θα μεταφέρει ποσό φορτίου  $q$ , όπως και προηγουμένως και έτσι η χωρητικότητα του πυκνωτή αυτού σύμφωνα με την Εξ. 6.1 θα ισούται με

$$C = \frac{q}{V}$$

όπου  $V$  η τάση της πηγής η οποία είναι ίση με τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των δυο σημείων A και B στο Σχήμα 6.5. Από την Εξ. 4.12, μπορούμε να γράψουμε για αυτή τη διαφορά δυναμικού ότι

$$V = V_A - V_B = - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα όμως είναι επικαμπύλιο επάνω στη διαδρομή ΒΑ και έτσι μπορούμε να το σπάσουμε σε δυο διαδρομές, την ΒΓ και την ΓΑ και να γράψουμε:

$$V = - \int_B^{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} - \int_{\Gamma}^A \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Όμως τα προκύπτοντα ολοκληρώματα δεν είναι άλλα από τις διαφορές δυναμικού  $V_{\Gamma} - V_B$  μεταξύ των σημείων Γ και Β, και  $V_A - V_{\Gamma}$  μεταξύ των σημείων Α και Γ οι οποίες φυσικά είναι ίσες με  $V_2$  και  $V_1$  αντίστοιχα. Επομένως

$$V = V_1 + V_2$$

Αυτός είναι ένας γενικός κανόνας που θα χρησιμοποιήσουμε στα κυκλώματα:

Όταν συνδέουμε διάφορα στοιχεία ενός κυκλώματος σε σειρά, τότε η ολική τάση στα άκρα τους ισούται με το άθροισμα των επιμέρους τάσεων του κάθε στοιχείου.

Εν συντομία λέμε ότι "οι τάσεις σε σειρά αθροίζονται". Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$\frac{q}{C} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2}$$

Απαλείφοντας το φορτίο  $q$  οδηγεί στο τελικό αποτέλεσμα

$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$	Χωρητικότητα πυκνωτών σε σειρά	6.6
---	--------------------------------	-----

## Πυκνωτές σε Παράλληλη διάταξη

Στο παρακάτω Σχήμα 6.7 εικονίζονται δυο πυκνωτές με χωρητικότητες  $C_1$  και  $C_2$  αντίστοιχα οι οποίοι είναι τοποθετημένοι παράλληλα που σημαίνει ότι το κάθε άκρο τους είναι συνδεδεμένο με το αντίστοιχο άκρο του άλλου πυκνωτή. Επίσης τα κοινά άκρα τους είναι συνδεδεμένα με το υπόλοιπο κύκλωμα, στην συγκεκριμένη περίπτωση σε μια απλή πηγή τάσης  $V$ . Έστω ότι αρχικά οι δυο πυκνωτές ήταν αφόρτιστοι. Τότε μόλις τους συνδέσουμε στην πηγή τάσης, κάποιο φορτίο  $+q$  θα μεταφερθεί από τον θετικό πόλο της πηγής στον αριστερό κόμβο Α. Εκεί θα χωριστεί σε δυο μέρη, το  $q_1$  που θα καταλήξει στον αριστερό οπλισμό του  $C_1$  και το  $q_2$  που θα καταλήξει στον αριστερό οπλισμό του  $C_2$ , εν γένει άνισα μεταξύ τους. Από την διατήρηση του φορτίου

$$q = q_1 + q_2$$

Λόγω επαγωγής, στον δεξιό οπλισμό του κάθε πυκνωτή, θα αναπτυχθούν ίσα και αντίθετα φορτία  $-q_1$  για τον  $C_1$  και  $-q_2$  για τον  $C_2$ . Έτσι λοιπόν μπορούμε να γράψουμε σύμφωνα με την Εξ. 6.1 ότι

$$C_1 = \frac{q_1}{V}$$

και

$$C_2 = \frac{q_2}{V}$$

Όσον αφορά την διαφορά δυναμικού, ο ηλεκτρισμός είναι συντηρητικό πεδίο και έτσι η διαφορά δυναμικού δεν εξαρτάται από τη διαδρομή αλλά από το αρχικό και το τελικό σημείο. Έτσι η διαφορά δυναμικού

$$V_A - V_B = - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

είναι η ίδια είτε ακολουθήσουμε την διαδρομή μέσω του  $C_1$  είτε μέσω του  $C_2$  είτε μέσω της πηγής. Επομένως

$$V = V_1 = V_2$$

Αυτός είναι ένας γενικός κανόνας που θα χρησιμοποιήσουμε στα κυκλώματα:

Όταν συνδέουμε διάφορα στοιχεία ενός κυκλώματος σε παράλληλη διάταξη, τότε η τάση στα άκρα τους είναι ίσες

Όπως και στο προηγούμενο εδάφιο, θα θέλαμε να αντικαταστήσουμε τους δυο πυκνωτές με ένα ισοδύναμο πυκνωτή στα σημεία A και B, τέτοιον ώστε να μην αλλάξουν τα ηλεκτρικά μεγέθη του κυκλώματος. Επομένως η πηγή και πάλι θα μεταφέρει ποσό φορτίου  $q$  υπό τάση  $V$  και άρα η χωρητικότητα του πυκνωτή αυτού θα ισούται με

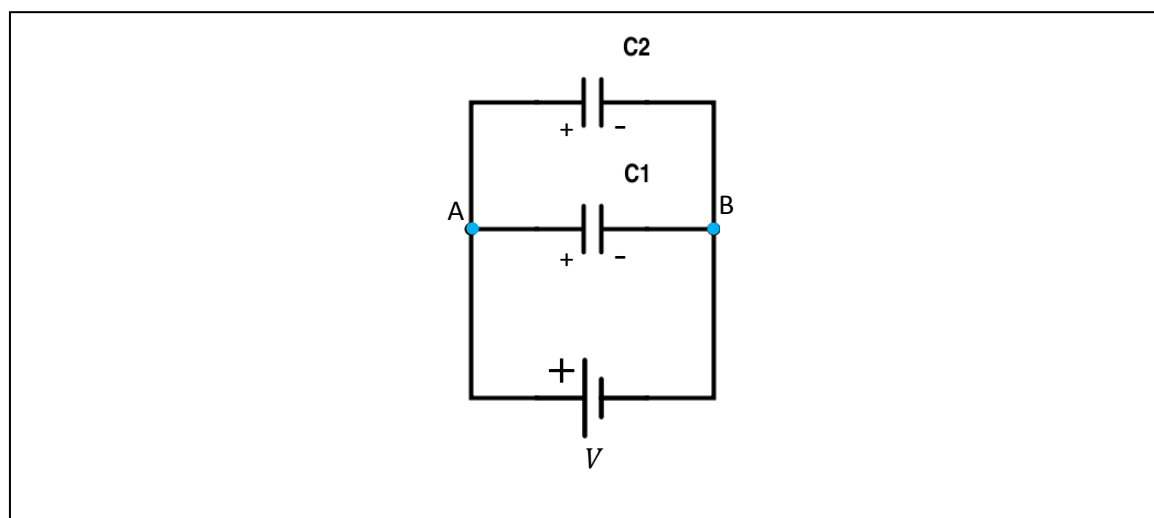
$$C = \frac{q}{V}$$

όπου  $V$  η τάση της πηγής. Από τη διατήρηση του φορτίου παραπάνω και τον ορισμό των χωρητικότητων  $C_1$  και  $C_2$  οδηγούμαστε στο αποτέλεσμα

$$q = q_1 + q_2 \Rightarrow CV = C_1V_1 + C_2V_2$$

Απαλείφοντας την κοινή τάση  $V$  οδηγούμαστε στο τελικό αποτέλεσμα

$C = C_1 + C_2$	Χωρητικότητα πυκνωτών σε παράλληλη διάταξη	6.7
-----------------	--	-----

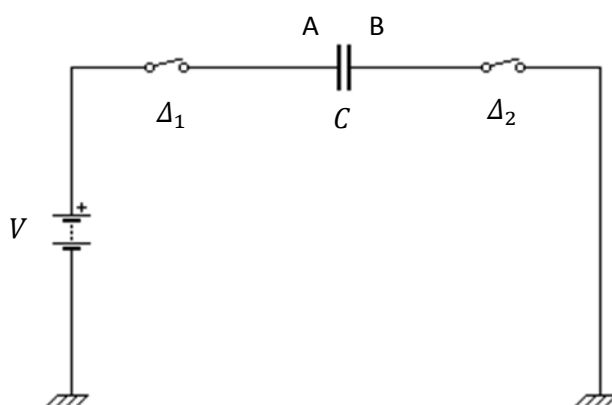


Σχήμα 6.7

Παράδειγμα 6.2. Ο πυκνωτής του επόμενου σχήματος συνδέεται μέσω του διακόπτη  $\Delta_1$  με ηλεκτρική πηγή και μέσω του διακόπτη  $\Delta_2$  είναι γειωμένος. Ο πυκνωτής είναι αρχικά αφόρτιστος και έχει χωρητικότητα  $C = 5 \mu F$ , ενώ η ηλεκτρική πηγή έχει διαφορά δυναμικού στα άκρα της  $V = 12 \text{ Volts}$ .

α) Εάν κλείσουμε τον διακόπτη  $\Delta_1$ , να βρείτε το δυναμικό κάθε οπλισμού στον πυκνωτή και το φορτίο του πυκνωτή.

β) Εάν κλείσουμε ταυτόχρονα και τον διακόπτη  $\Delta_1$  και τον διακόπτη  $\Delta_2$  να βρείτε πάλι το δυναμικό κάθε οπλισμού στον πυκνωτή και πόσο θα γίνει το φορτίο του πυκνωτή.



Λύση:

α) Γνωρίζουμε ότι το δυναμικό της Γης είναι μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι το δυναμικό του αρνητικού πόλου της πηγής είναι και αυτό μηδέν, οπότε το δυναμικό του θετικού πόλου της πηγής είναι  $V = 12 \text{ V}$ . Όταν ο οπλισμός A συνδεθεί με τον θετικό πόλο της πηγής μέσω του διακόπτη  $\Delta_1$ , τότε κάποιο ποσό θετικού φορτίου  $+q_1$  από την πηγή, θα μεταβεί σε αυτόν τον οπλισμό μέχρι να επέλθει ισορροπία η οποία συνεπάγεται σταθερόδυναμικό, όπως είδαμε σε προηγούμενα κεφάλαια. Επομένως το δυναμικό θα είναι το ίδιο κατά μήκος του αγωγού που συνδέει τον θετικό πόλο της πηγής με τον οπλισμό και επομένως και ο οπλισμός A θα βρίσκεται σε δυναμικό  $V_A = 12 \text{ V}$ . Το θετικό φορτίο στον οπλισμό A, λόγω επαγωγής, θα προσελκύσει ίσο και αντίθετο φορτίο στον οπλισμό B που σημαίνει ότι ίσο και αντίθετο φορτίο θα φύγει από εκεί και θα καταλήξει στην άλλη άκρη του αγωγού που συνδέεται με τον οπλισμό αυτό, δηλαδή στην άκρη του που συνδέεται στον διακόπτη  $\Delta_2$ . Από την Εξ. 6.1, η διαφορά δυναμικού στα άκρα του πυκνωτή είναι ίση με  $\Delta V = q_1/C$ . Το μέγεθος αυτής της διαφοράς δυναμικού εξαρτάται από το μέγεθος του φορτίου  $q_1$  το οποίο είναι άγνωστο. Το δυναμικό του οπλισμού B είναι ίσο με  $V_B = 12 - \Delta V$ .

β) Κλείνοντας και τον διακόπτη  $\Delta_2$ , δημιουργούμε ένα κλειστό κύκλωμα. Το επιπλέον θετικό φορτίο  $+q_1$  που είχε εγκλωβιστεί στην αριστερή μεριά του διακόπτη αυτού, μεταφέρεται στη γείωση και από εκεί στον αρνητικό πόλο της πηγής. Εφόσον τώρα ο οπλισμός B του αγωγού είναι συνδεδεμένος στη γη, το δυναμικό του θα γίνει αυτομάτως  $V_B = 0$  και έτσι η διαφορά δυναμικού στα άκρα του

πυκνωτή θα ισούται με  $\Delta V = V_A - V_B = 12 - 0 = 12 \text{ V}$ . Από την Εξ. 6.1, το φορτίο του πυκνωτή θα είναι ίσο με  $q_2 = C\Delta V = 5 \times 10^{-6} \times 12 = 60 \mu\text{C}$  που είναι και το τελικό φορτίο.

## Ενέργεια Πυκνωτή

Για να φέρουμε δυο ομόσημα φορτία κοντά μεταξύ τους, απαιτείται έργο λόγω της αμοιβαίας άπωσης τους. Το ίδιο γίνεται και με τη φόρτιση ενός πυκνωτή αφού κατά τη διαδικασία αυτή συσσωρεύεται ένας μεγάλος αριθμός ομόσημων φορτίων μέσα στους οπλισμούς του. Αυτότο έργο συνήθως παρέχεται από μια εξωτερική πηγή (π.χ. μπαταρία) και αποθηκεύεται στον πυκνωτή ως ηλεκτρική δυναμική ενέργεια. Π.χ. εάν τα φορτία αυτά αφεθούν ελεύθερα, θα τείνουν να απομακρυνθούν μεταξύ τους παράγοντας έτσι έργο σε ένα εξωτερικό κύκλωμα. Επομένως ο πυκνωτής (όπως και το πηνίο που θα μελετήσουμε στον μαγνητισμό) είναι μια ηλεκτρική διάταξη αποθήκευσης ενέργειας. Στο παρόν εδάφιο θα υπολογίσουμε πόση ενέργεια αποθηκεύεται σε έναν αρχικά αφόρτιστο πυκνωτή χωρητικότητας  $C$  εάν φορτιστεί σε τελικό φορτίο  $Q$ . Όπως θα δούμε σε μεταγενέστερα κεφάλαια, ο πυκνωτής σε ένα κύκλωμα δεν φορτίζεται ακαριαία αλλά απαιτεί κάποιο χρόνο. Στο Σχήμα 6.8 εικονίζεται ο πυκνωτής σε κάποια τυχαία χρονική στιγμή  $t$  από τη έναρξη της φόρτισης, με στιγμιαίο φορτίο  $q(t)$  και αντίστοιχη στιγμιαία τάση η οποία σύμφωνα με την Εξίσωση 6.1 είναι ίση με  $V(t) = q(t)/C$ . Η συνάρτηση  $q(t)$  παίρνει οριακές τιμές  $q(0) = 0$  και  $q(\infty) \rightarrow Q$  (όπως θα δούμε στο Κεφ. 11, ο πυκνωτής φορτίζεται στο μέγιστο φορτίο του οριακά). Εφόσον ο πυκνωτής στο Σχήμα 6.8 έχει ήδη κάποιο φορτίο στους οπλισμούς του, τότε απαιτείται από την πηγή του κυκλώματος επιπλέον έργο για να αφαιρέσει ένα θετικό φορτίο  $dq$  από κάποιο σημείο Α του αρνητικού οπλισμού και να το μεταφέρει σε κάποιο άλλο σημείο Β του θετικού οπλισμού. Αυτό το έργο μεταφράζεται ως αύξηση της δυναμικής ενέργειας αυτού του φορτίου κατά  $dU = U_B - U_A$  (όπως όταν ανυψώνουμε ένα αντικείμενο, το έργο μας καταναλώνεται για την αύξηση της δυναμικής ενέργειας του αντικειμένου). Θα θέλαμε να εκφράσουμε το  $dU$  συναρτήσει της διαφοράς δυναμικού  $V_B - V_A$  μεταξύ των σημείων Α και Β η οποία βέβαια είναι η  $V(t)$  που είδαμε παραπάνω. Θεωρώντας το στοιχειώδες φορτίο  $dq$  ως το δοκιμαστικό φορτίο που χρησιμοποιούμε για τον ορισμό του δυναμικού, μπορούμε να γράψουμε με την βοήθεια της Εξίσωσης 4.8 το εξής

$$V_B - V_A = \frac{1}{dq}(U_B - U_A)$$

ή ισοδύναμα

$$dU = dqV(t) = \frac{q}{C}dq$$

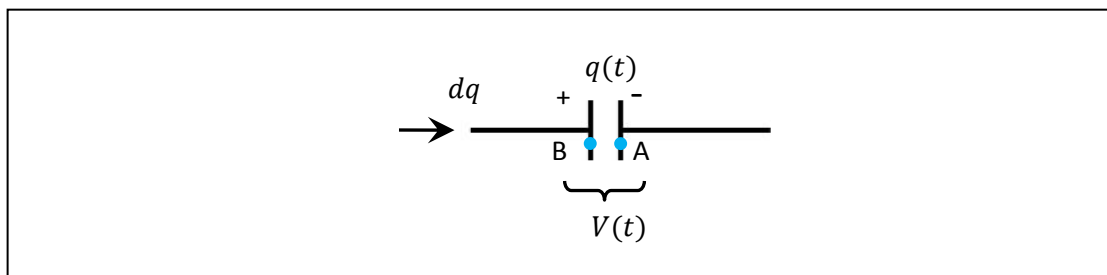
Μπορούμε εύκολα να ολοκληρώσουμε την παραπάνω έκφραση αφού η χωρητικότητα  $C$  είναι μια σταθερά

$$U = \int_{q=0}^Q dU = \frac{1}{C} \int_{q=0}^Q qdq$$

δηλαδή

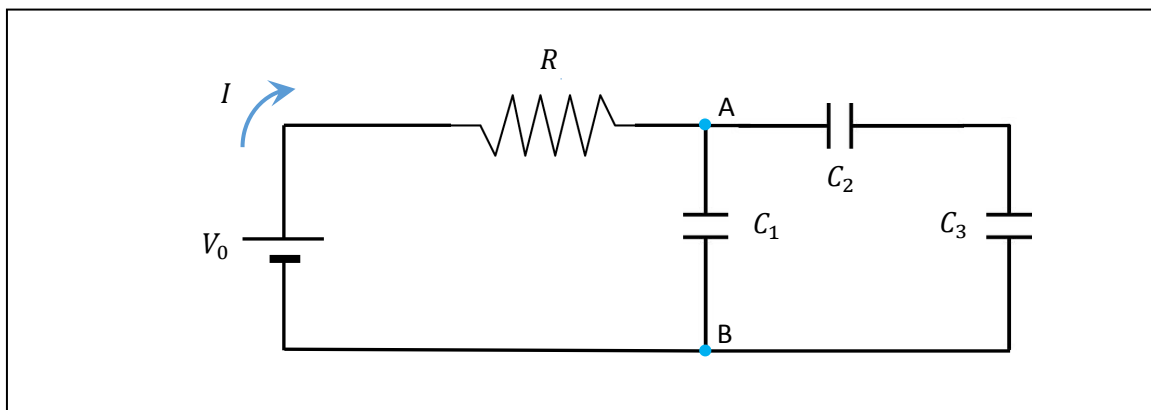
$U = \frac{1}{2C}Q^2 = \frac{1}{2}CV^2$	Ενέργεια πυκνωτή	6.8
---	------------------	-----

Το δεύτερο μέλος προκύπτει από τον ορισμό Εξ. 6.1 της χωρητικότητας του πυκνωτή  $Q = CV$ , όπου  $V$  είναι η τελική του τάση.



Σχήμα 6.8

**Παράδειγμα 6.3.** Να βρεθεί η μέγιστη ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα των τριών πυκνωτών στο παρακάτω σχήμα εάν σε άπειρο χρόνο η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων A και B φτάνει οριακά στην τάση της πηγής  $V_0 = 12\text{ V}$ . Δίνονται  $C_1 = 2\ \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 1\ \mu\text{F}$  και  $C_3 = 4\ \mu\text{F}$ . Να βρεθεί το οριακό φορτίο του κάθε πυκνωτή (το σύμβολο στο κύκλωμα με την ένδειξη "R" είναι μια αντίσταση, θα μελετήσουμε διεξοδικά τα ηλεκτρικά κυκλώματα στο Κεφ. 11).

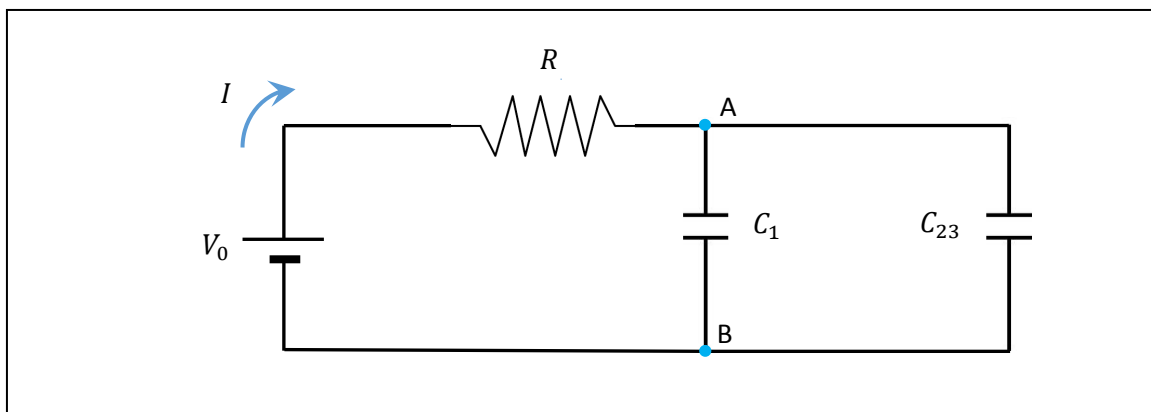


Λύση:

Κατ' αρχάς πρέπει να απλοποιήσουμε το κύκλωμα αντικαθιστώντας τους τρεις πυκνωτές με ένα ισοδύναμο. Αυτό θα γίνει σε δυο στάδια. Πρώτα θα αντικαταστήσουμε με έναν ισοδύναμο πυκνωτή  $C_{23}$  τους δυο πυκνωτές  $C_2$  και  $C_3$  σε σειρά. Σύμφωνα με την Εξ. 6.4 έχουμε

$$\frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow C_{23} = 0.8\ \mu\text{F}$$

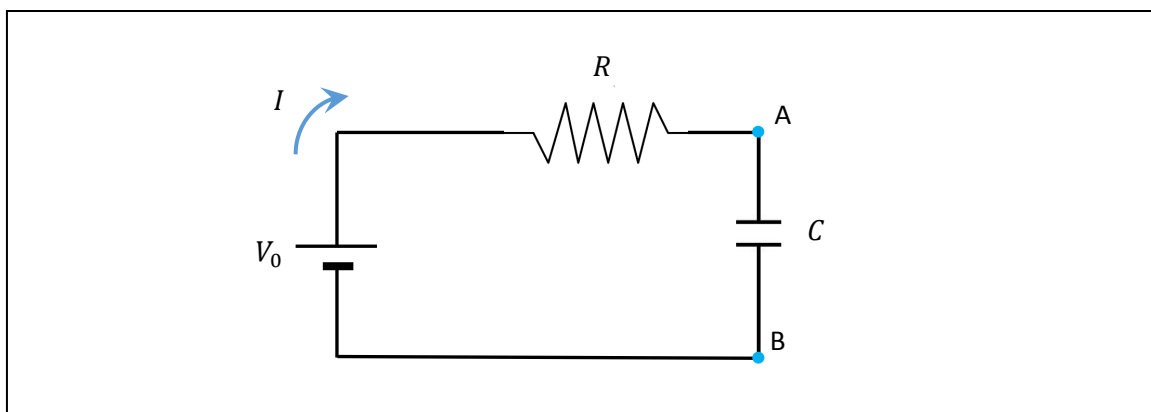
Το κύκλωμα αλλάζει στο παρακάτω



Τώρα οι  $C_1$  και  $C_{23}$  βρίσκονται σε παράλληλη διάταξη και έτσι μπορούμε να τους αντικαταστήσουμε με ένα ισοδύναμο πυκνωτή χωρητικότητας  $C$  η οποία από την Εξ. 6.5 δίνεται από την

$$C = C_1 + C_{23} = 2 + 0.8 = 2.8 \mu F$$

Το κύκλωμα απλοποιείται στο εξής



Ο τάση  $V_{AB}$  που είναι στην ουσία η τάση  $V$  του πυκνωτή, φτάνει οριακά σε άπειρο χρόνο στην τάση της πηγής  $V_0 = 12 V$  και έτσι η αντίστοιχη ενέργεια του πυκνωτή σύμφωνα με την Εξ. 6.6 ισούται με

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \times 2.8 \times 10^{-6} \times 12^2 = 2.02 \times 10^{-4} J$$

Στην ουσία ο ισοδύναμος πυκνωτής δεν υπάρχει στην πραγματικότητα αλλά αντιπροσωπεύει το σύστημα των τριών πυκνωτών και επομένως το παραπάνω αποτέλεσμα είναι η ολική ενέργεια τους. Με την ίδια φιλοσοφία, το ολικό φορτίο που μεταφέρθηκε από την πηγή στο σύστημα των τριών πυκνωτών, ισούται με το φορτίο του ισοδύναμου πυκνωτή

$$Q = CV = 2.8 \times 10^{-6} \times 12 = 3.36 \times 10^{-5} C = 33.6 \mu C$$

Για να βρούμε το φορτίο του κάθε πυκνωτή, εξετάζουμε πρώτα τους  $C_1$  και  $C_{23}$  οι οποίοι επειδή είναι τοποθετημένοι παράλληλα, βρίσκονται υπό την ίδια τάση  $V = V_{AB} = 12 V$  και έτσι το φορτίο τους ισούται με

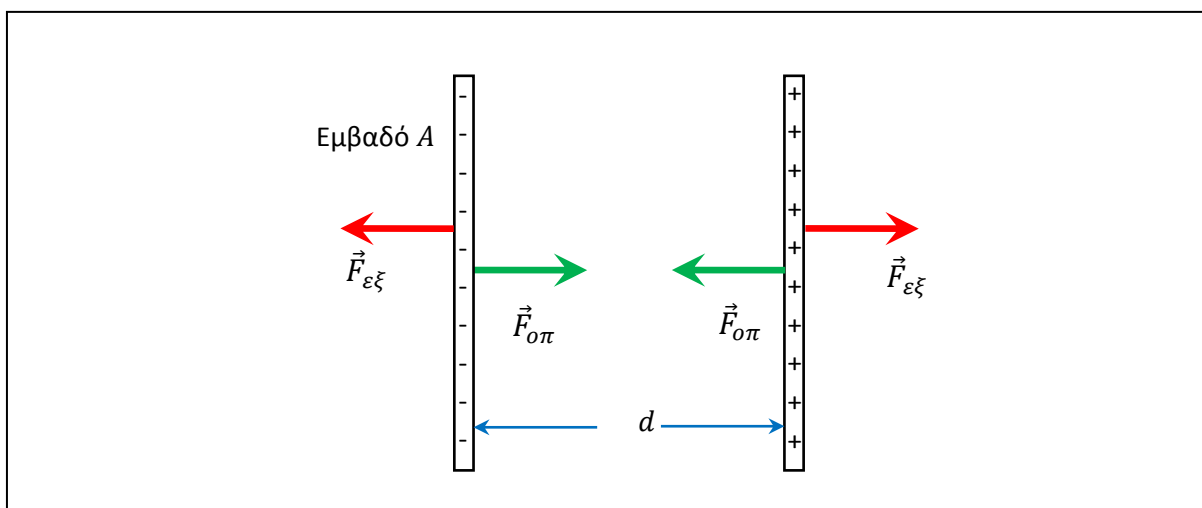
$$Q_1 = C_1 V = 2.0 \times 10^{-6} \times 12 = 24 \mu C$$

$$Q_{23} = C_{23} V = 0.8 \times 10^{-6} \times 12 = 9.6 \mu C$$

Επαληθεύστε ότι το άθροισμα αυτών των δυο φορτίων ισούται με το ολικό φορτίο  $Q$  που βρήκαμε παραπάνω. Οι πυκνωτές  $C_1$  και  $C_2$  είναι σε σειρά και άρα έχουν το ίδιο φορτίο το οποίο είναι ίσο με αυτό του ισοδύναμου συνδυασμού τους, δηλαδή

$$Q_2 = Q_3 = 9.6 \mu C$$

**Παράδειγμα 6.4.** Ένας επίπεδος πυκνωτής με χωρητικότητα  $C = 5 \mu F$ , φορτίζεται με φορτίο  $Q = 0.2 mC$  και στην συνέχεια αποσυνδέεται από την πηγή που τον φόρτισε. Η απόσταση των οπλισμών του πυκνωτή είναι  $d = 0.1 mm$ . Εφόσον οι οπλισμοί φέρουν αντίθετα φορτία, άρα έλκονται μεταξύ τους με δυνάμεις  $\vec{F}_{οπ}$  (ζεύγος ίσων και αντίθετων δυνάμεων). Θέλουμε να απομακρύνουμε τους οπλισμούς έτσι ώστε η απόσταση μεταξύ τους να διπλασιασθεί εφαρμόζοντας εξωτερικές δυνάμεις  $\vec{F}_{εξ}$ . α) Πόσο έργο απαιτείται για αυτή την διεργασία; Η ενέργεια που καταναλώνουμε σε τι μορφή ενέργειας μετατρέπεται; β) Πόσο έργο απαιτείται γι' αυτή την διεργασία αν η πηγή φόρτισης παρέμενε συνεχώς συνδεδεμένη στα άκρα του πυκνωτή;



**Λύση:**

α) Αρχικά υπολογίζουμε την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στον πυκνωτή όταν οι οπλισμοί του απέχουν απόσταση  $0.1 mm$ . Χρησιμοποιούμε την Εξ. 6.8 οπότε έχουμε:

$$U_{APX} = \frac{1}{2C} Q^2 = \frac{1}{2 \times 5 \times 10^{-6}} (0.2 \times 10^{-3})^2 = 4 mJ$$

Εφόσον η πηγή αποσυνδέεται από τα άκρα του πυκνωτή, το φορτίο σε κάθε οπλισμό του πυκνωτή παραμένει σταθερό. Χρησιμοποιώντας την Εξ. 6.4 που ισχύει για επίπεδο πυκνωτή και γνωρίζοντας ότι διπλασιάζεται η απόσταση μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή, υπολογίζουμε την νέα χωρητικότητα

$$C_{TEA} = \frac{C}{2} = 2.5 \mu F$$

η οποία μέσω της Εξ. 6.8 οδηγεί σε τελική ηλεκτρική δυναμική ενέργεια  $U_{TEA} = 8 mJ$ . Άρα το έργο που απαιτείται γι' αυτή την διεργασία ισούται με:



$$W = U_{TE\Lambda} - U_{APX} = 4 \text{ mJ}$$

Η ενέργεια που καταναλώνουμε μετατρέπεται σε ηλεκτρική δυναμική ενέργεια.

β) Αν η πηγή φόρτισης παραμένει συνεχώς συνδεδεμένη στα άκρα του πυκνωτή τότε η διαφορά δυναμικού στα άκρα του είναι ίση με την διαφορά δυναμικού, δηλαδή σταθερή. Η μεταβολή της χωρητικότητας του πυκνωτή που είδαμε στο προηγούμενο υποερώτημα κατά την απομάκρυνση των οπλισμών του, θα έχει ως αποτέλεσμα σύμφωνα με την Εξ. 6.1, την αντίστοιχη μεταβολή του φορτίου στους οπλισμούς. Επειδή η χωρητικότητα υποδιπλασιάζεται κατά τη διεργασία αυτή, τότε για να παραμείνει σταθερό το  $\Delta V$  στην Εξ. 6.1, θα πρέπει και το φορτίο αντίστοιχα να υποδιπλασιάζεται, δηλαδή

$$Q_{TE\Lambda} = \frac{Q}{2} = 0.2 \text{ mC}$$

Χρησιμοποιούμε και πάλι την Εξ. 6.8 για να υπολογίσουμε την τελική ηλεκτρική δυναμική ενέργεια  $U_{TE\Lambda} = 2 \text{ mJ}$  η οποία βλέπουμε ότι είναι μικρότερη από την αρχική και άρα το αντίστοιχο έργο

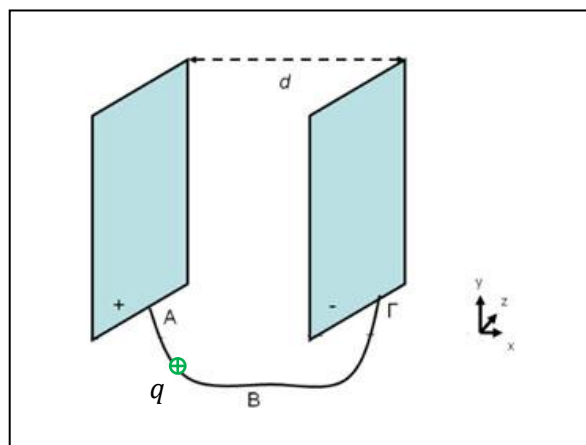
$$W = U_{TE\Lambda} - U_{APX} = -2 \text{ mJ}$$

είναι αρνητικό! Αυτό σημαίνει ότι αντί για να ξοδέψουμε ενέργεια για την αύξηση της απόστασης μεταξύ των οπλισμών, κερδίζουμε ενέργεια σε αυτή την περίπτωση. Αυτό φαίνεται παράδοξο εκ πρώτης όψews, εφόσον η εξωτερική δύναμη  $\vec{F}_{\xi}$  που εφαρμόζουμε, πρέπει να υπερνικήσει την εσωτερική έλξη μεταξύ των οπλισμών. Προφανώς σε αυτή την περίπτωση, η πηγή παρέχει την επιπλέον ενέργεια για να διατηρηθεί το δυναμικό σταθερό.

## Προβλήματα

### Πρόβλημα 6.1.

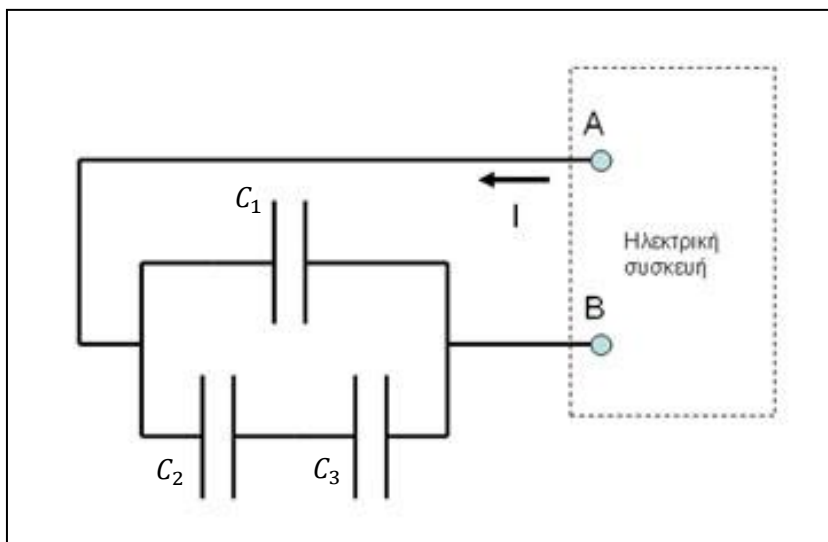
Στο παρακάτω σχήμα, ένα θετικό σημειακό φορτίο  $q = 2 \mu\text{C}$  μεταφέρεται από τον θετικό οπλισμό προς τον αρνητικό οπλισμό ενός πυκνωτή μέσω του συρμάτινου αγωγού ΑΒΓ. Ο πυκνωτής έχει εμβαδό οπλισμών  $A = 0.5 \text{ cm}^2$ , απόσταση οπλισμών μεταξύ τους  $d = 2 \text{ mm}$  και διαθέτει φορτίο  $Q = 0.02 \text{ C}$ . Να βρεθεί η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του φορτίου.



Απάντηση:  $- 181 \text{ kJ}$

Πρόβλημα 6.2.

Στο παρακάτω σχήμα, το σύστημα των τριών πυκνωτών με  $C_1 = 2 \mu F$ ,  $C_2 = 4 \mu F$  και  $C_3 = 5 \mu F$  συνδέεται στα σημεία A και B μιας ηλεκτρικής συσκευής η οποία βρίσκεται υπό διαφορά δυναμικού  $V_{AB} = 1.5 V$ . Να βρεθεί η ενέργεια του πυκνωτή  $C_3$ .



Απάντηση:  $1.11 \mu J$

Πρόβλημα 6.3.

Ένας φοιτητής κατασκευάζει ένα επίπεδο πυκνωτή χρησιμοποιώντας δυο ορθογώνια μεταλλικά φύλλα διαστάσεων  $0.5 m \times 0.25 m$  τα οποία τα τοποθετεί επάνω σε μια ειδική ευθύγραμμη τροχιά από πλαστικό υλικό ώστε να μπορεί να μεταβάλλει συνεχόμενα την απόσταση χμεταξύ των πυκνωτών από μια ελάχιστη τιμή  $0.5 mm$  έως μια μέγιστη τιμή  $5 mm$ . α) Να γίνει η γραφική παράσταση της χωρητικότητας συναρτήσει του  $x$  για 10 ενδιάμεσες τιμές αυτού. β) Να επαναληφθεί το προηγούμενο βήμα εάν ο φοιτητής τοποθετεί σακουλάκια συσκευασίας πολυαιθυλενίου πάχους  $0.5 mm$  το καθένα, κολλητά μεταξύ τους μεταξύ των οπλισμών ώστε αυτά να γεμίζουν πλήρως τον χώρο μεταξύ των οπλισμών. γ) Τώρα ο φοιτητής συνδέει μια σταθερή πηγή τάσης  $24 V$  στα άκρα του πυκνωτή. Να γίνει η γραφική παράσταση του φορτίου  $Q$  του θετικού οπλισμού συναρτήσει του  $x$  για τα δυο παραπάνω βήματα α και β. δ) Σε διαφορετικό πείραμα, ο φοιτητής τοποθετεί φορτίο  $\pm 2 \mu C$  στους δυο οπλισμούς και ακολούθως αφήνει τα άκρα του πυκνωτή ελεύθερα. Να γίνει η γραφική παράσταση της διαφοράς δυναμικού  $V$  μεταξύ των οπλισμών συναρτήσει του  $x$  για τα δυο παραπάνω βήματα α και β.

Πρόβλημα 6.4.

Ένας φοιτητής κατασκευάζει ένα επίπεδο πυκνωτή χρησιμοποιώντας δυο ορθογώνια μεταλλικά φύλλα διαστάσεων  $0.5 m \times 0.25 m$  σε απόσταση  $0.5 mm$  μεταξύ τους. Εάν δεχθούμε ότι το σημείο αναφοράς του δυναμικού είναι το ιδεατό επίπεδο που ισαπέχει από τους δυο οπλισμούς (το επίπεδο συμμετρίας που διχοτομεί τον πυκνωτή), να υπολογισθεί το δυναμικό για τις εξής

περιπτώσεις: α) Σε σημεία τα οποία απέχουν  $0.1 \text{ mm}$  και  $0.25 \text{ mm}$  από τον θετικό οπλισμό, τόσο στο εσωτερικό όσο και στο εξωτερικό του πυκνωτή. β) Σε σημεία τα οποία απέχουν  $0.1 \text{ mm}$  και  $0.25 \text{ mm}$  από τον αρνητικό οπλισμό, τόσο στο εσωτερικό όσο και στο εξωτερικό του πυκνωτή.

Πρόβλημα 6.5. Ένας πυκνωτής αποτελείται από έναν σφαιρικό εσωτερικό οπλισμό ακτίνας  $R_1$  ο οποίος περιβάλλεται από εξωτερικό λεπτό σφαιρικό κέλυφος ακτίνας  $R_2 > R_1$ , ομόκεντρο με τον εσωτερικό οπλισμό. Να υπολογισθεί η χωρητικότητά του (Σημείωση: Ακολουθήστε παρόμοια βήματα με αυτά του κυλινδρικού πυκνωτή που μελετήσαμε στο εδάφιο "Άλλες Γεωμετρίες" του παρόντος κεφαλαίου και θεωρήστε π.χ. ότι ο θετικός οπλισμός είναι ο εσωτερικός).

Πρόβλημα 6.6. Ένας φοιτητής συνδέει πέντε πυκνωτές σε σειρά σε μπαταρία που παρέχει διαφορά δυναμικού  $V$ . Η χωρητικότητά του πρώτου πυκνωτή (του πλησιέστερου προς τον θετικό πόλο της πηγής) είναι  $C_0 = C$ , ενώ οι υπόλοιποι πυκνωτές έχουν χωρητικότητες οι οποίες είναι η μισή του προηγούμενου πυκνωτή σε σειρά δηλαδή  $C_1 = C_0/2$ ,  $C_2 = C_1/2$  κ.ό.κ. Να βρεθούν α) Το φορτίο του κάθε πυκνωτή, β) η διαφορά δυναμικού στα άκρα του κάθε πυκνωτή, γ) Η ενέργεια του κάθε πυκνωτή.

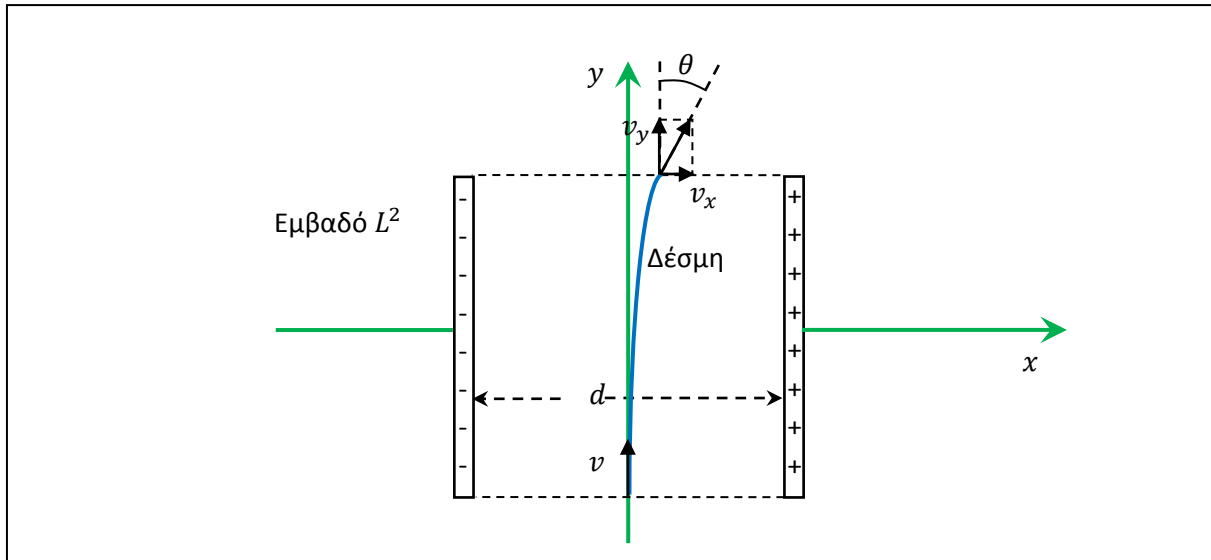
Πρόβλημα 6.7. Να γενικευτεί το προηγούμενο πρόβλημα για ένα αριθμό  $N$  πυκνωτών με την ιδιότητα  $C_n = C_{n+1}/2$  με τον πρώτο να έχει χωρητικότητα  $C_0 = C$  και να είναι όλοι τοποθετημένοι σε σειρά και σε πηγή τάσης  $V$ . Να βρεθούν α) Το φορτίο του κάθε πυκνωτή, β) η διαφορά δυναμικού στα άκρα του κάθε πυκνωτή, γ) Η ενέργεια του κάθε πυκνωτή (Σημείωση: Θα πρέπει να γίνει χρήση μιας γνωστής σειράς ακολουθίας από τα μαθηματικά).

Πρόβλημα 6.8. Ένας φοιτητής συνδέει πέντε πυκνωτές παράλληλα και φορτίζει το όλο σύστημα με συνολικό φορτίο  $\pm Q$ . Η χωρητικότητά του πρώτου πυκνωτή είναι  $C_0 = C$ , ενώ οι υπόλοιποι πυκνωτές έχουν χωρητικότητες οι οποίες είναι η μισή του προηγούμενου πυκνωτή σε σειρά δηλαδή  $C_1 = C_0/2$ ,  $C_2 = C_1/2$  κ.ό.κ. Να βρεθούν α) Το φορτίο του κάθε πυκνωτή, β) η διαφορά δυναμικού στα άκρα του κάθε πυκνωτή, γ) Η ενέργεια του κάθε πυκνωτή.

Πρόβλημα 6.9. Να γενικευτεί το προηγούμενο πρόβλημα για ένα αριθμό  $N$  πυκνωτών με την ιδιότητα  $C_n = C_{n+1}/2$  με τον πρώτο να έχει χωρητικότητα  $C_0 = C$  και να είναι όλοι τοποθετημένοι παράλληλα και να έχουν φορτιστεί με συνολικό φορτίο  $\pm Q$ . Να βρεθούν α) Το φορτίο του κάθε πυκνωτή, β) η διαφορά δυναμικού στα άκρα του κάθε πυκνωτή, γ) Η ενέργεια του κάθε πυκνωτή (Σημείωση: Θα πρέπει να γίνει χρήση μιας γνωστής σειράς ακολουθίας από τα μαθηματικά).

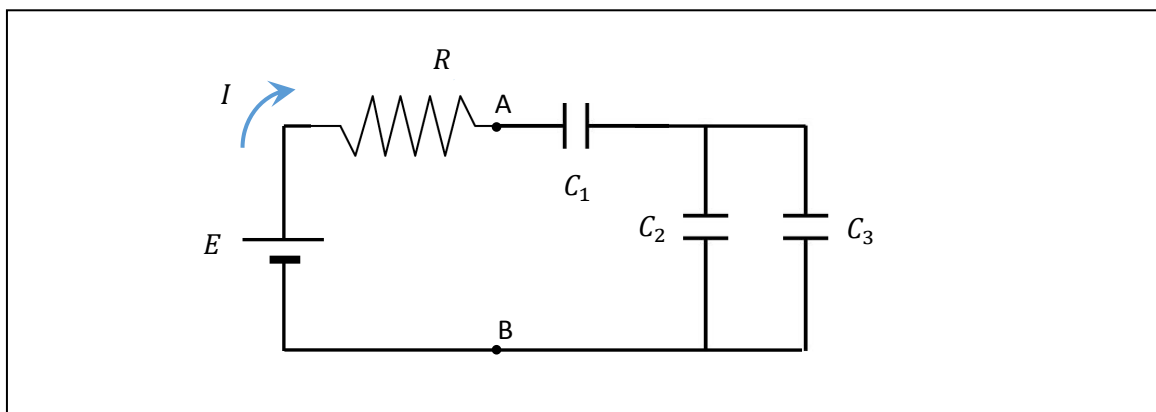
Πρόβλημα 6.10. Στο παρακάτω σχήμα μια δέσμη ηλεκτρονίων που αρχικά κινείται με μεγάλη ταχύτητα  $v$  επάνω στον άξονα  $y$ , εισέρχεται στον εσωτερικό χώρο ενός πυκνωτή ο οποίος έχει τους οπλισμούς του κάθετα στον άξονα  $x$  και συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων. Όπως φαίνεται και στο σχήμα, η δέσμη αποκλίνει κατά γωνία  $\theta$  η οποία μπορεί να υπολογισθεί από τις συνιστώσες της ταχύτητας των ηλεκτρονίων κατά την έξοδό τους από τον πυκνωτή, κάνοντας τις εξής παραδοχές: α) η απόκλιση είναι μικρή και άρα  $\theta \approx \sin\theta \approx \tan\theta$ , β) για τον ίδιο λόγο η  $v_x$

είναι μικρή και έτσι προσεγγιστικά  $v_y \approx v$ ,  $\gamma$ ) το ηλεκτρικό πεδίο είναι παντού ομοιόμορφο και σταθερό στο εσωτερικό του πυκνωτή, σαν οι οπλισμοί του να ήταν απείρου επιφανείας. Δίνονται τα χαρακτηριστικά των οπλισμών του πυκνωτή: Τετραγωνικού σχήματος διαστάσεων  $L^2$  σε απόσταση  $d$  μεταξύ τους και με φορτίο  $\pm Q$ . Θεωρήστε δεδομένο το φορτίο  $q_e$  και τη μάζα  $m_e$  του ηλεκτρονίου. Πως θα άλλαζε η απάντησή σας εάν αντί για δέσμη ηλεκτρονίων είχαμε δέσμη πρωτονίων ή δέσμη νετρονίων;



**Πρόβλημα 6.11.** Ένας φοιτητής θέλει να κατασκευάσει ένα πυκνωτή με τους εξής γεωμετρικούς περιορισμούς: Ορθογώνιοι οπλισμοί με τον καθένα να έχει σταθερή περιφέρεια (άθροισμα πλευρών)  $4 \text{ cm}$  και απόσταση μεταξύ τους από  $0.4$  έως  $0.6 \text{ mm}$ . Με βάση τους δεδομένους περιορισμούς, ποια είναι η μέγιστη χωρητικότητα που μπορεί να έχει ο φοιτητής, σχεδιάζοντας κατάλληλα τον πυκνωτή του; Εάν τον συνδέσει σε μπαταρία  $12 \text{ V}$ , πόσο θα είναι το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του; Πόσο το φορτίο του;

**Πρόβλημα 6.12.** Στο παρακάτω κύκλωμα, να εξηγηθεί πως ρέει το ρεύμα στο κύκλωμα στην αρχή του χρόνου, όπου όλοι οι πυκνωτές είναι αφόρτιστοι, όταν ένα αρχικό φορτίο  $dq$  ωθείται από τον θετικό πόλο της πηγής, στον αριστερό οπλισμό του 1<sup>ου</sup> πυκνωτή  $C_1$ . Πόσο θα είναι το φορτίο στα υπόλοιπα μέρη του κυκλώματος εάν  $C_3 = 3C_2$ ;



Πρόβλημα 6.13. Στο σχήμα του προηγούμενου προβλήματος, να βρεθεί η μέγιστη ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα των τριών πυκνωτών εάν σε άπειρο χρόνο η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων Α και Β φτάνει οριακά στην τάση της πηγής  $V_0 = 12 \text{ V}$ . Δίνονται  $C_1 = 4 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 1 \mu\text{F}$  και  $C_3 = 3 \mu\text{F}$ . Να βρεθεί το οριακό φορτίο του κάθε πυκνωτή.

Πρόβλημα 6.14. Για τον πυκνωτή του Σχήματος 6.3 ο οποίος αποτελείται από έναν κυλινδρικό οπλισμό ακτίνας  $R_1$  και μήκους  $L$  και ο οποίος περιβάλλεται από εξωτερικό λεπτό κυλινδρικό κέλυφος ακτίνας  $R_2 > R_1$ , ομοαξονικό με τον εσωτερικό οπλισμό και ίσου μήκους με αυτόν, να βρεθούν οι ισοδυναμικές επιφάνειες στο εσωτερικό του. Θεωρήστε ότι οι δυο οπλισμοί φέρουν φορτίο  $\pm Q$  με τον εσωτερικό οπλισμό να είναι ο θετικός.

Πρόβλημα 6.15. Να γίνει το ίδιο και για τον πυκνωτή του Προβλήματος 6.3 ο οποίος αποτελείται από έναν σφαιρικό εσωτερικό οπλισμό ακτίνας  $R_1$  ο οποίος περιβάλλεται από εξωτερικό λεπτό σφαιρικό κέλυφος ακτίνας  $R_2 > R_1$ , ομόκεντρο με τον εσωτερικό οπλισμό. Θεωρήστε ότι ο θετικός οπλισμός είναι ο εσωτερικός.

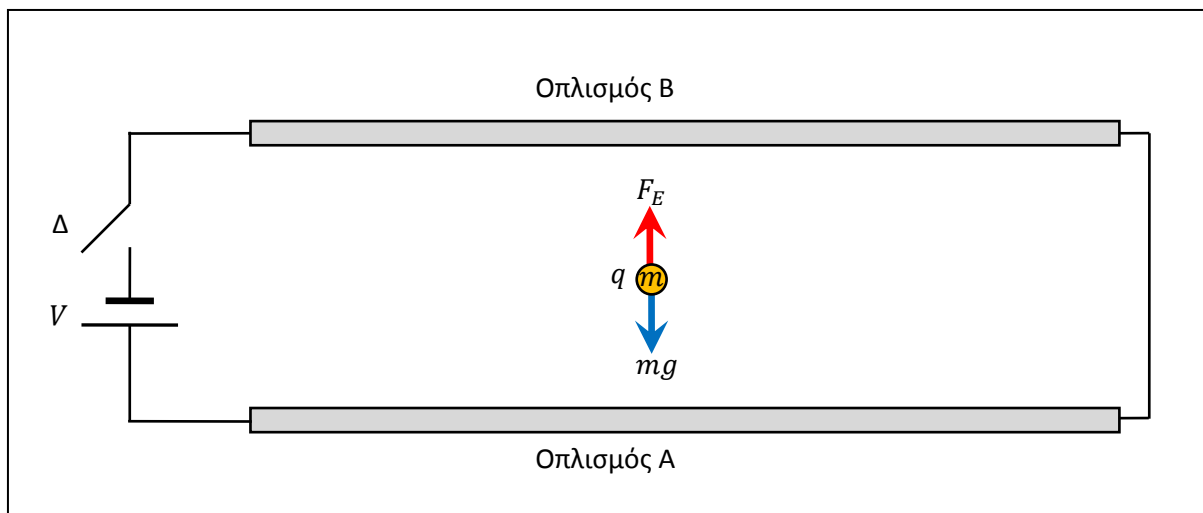
Πρόβλημα 6.16. Στο παρακάτω σχήμα εικονίζεται ένας επίπεδος πυκνωτής με οριζόντιους οπλισμούς ο οποίος συνδέεται μέσω διακόπτη Δ με ηλεκτρική πηγή τάσης  $V = 100 \text{ Volt}$ . Μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή ισορροπεί φορτισμένο σωματίδιο μάζας  $m$  ενός μιλιγραμμαρίου με ηλεκτρικό φορτίο  $q = 1 \text{ nC}$ . Ο θετικός πόλος της πηγής συνδέεται με τον οπλισμό Α του πυκνωτή που βρίσκεται κάτω από το φορτισμένο σωματίδιο, ενώ ο αρνητικός πόλος της πηγής συνδέεται με τον διακόπτη και στην συνέχεια με τον οπλισμό Β του πυκνωτή που βρίσκεται πάνω από το φορτισμένο σωματίδιο.

α) Με κλειστό τον διακόπτη Δ, να βρείτε το πρόσημο του φορτίου του σωματιδίου και την απόσταση  $d$  μεταξύ των οπλισμών.

β) Εάν ανοίξουμε τον διακόπτη να βρείτε την μεταβολή του φορτίου του πυκνωτή. Θα συνεχίζει να ισορροπεί το φορτισμένο σωματίδιο;

γ) Κλείνουμε ξανά τον διακόπτη και εισάγουμε ακαριαία κάποιο αέριο μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή με διπλάσια διηλεκτρική σταθερά από αυτή του αέρα. Θα συνεχίζει να ισορροπεί το φορτισμένο σωματίδιο; Ποια είναι η μεταβολή της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή σε σχέση με την αρχική της τιμή;

δ) Με κλειστό τον διακόπτη διπλασιάζουμε ακαριαία την απόσταση μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή. Τι θα συμβεί στο φορτισμένο σωματίδιο; Πως θα μεταβληθεί η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή;



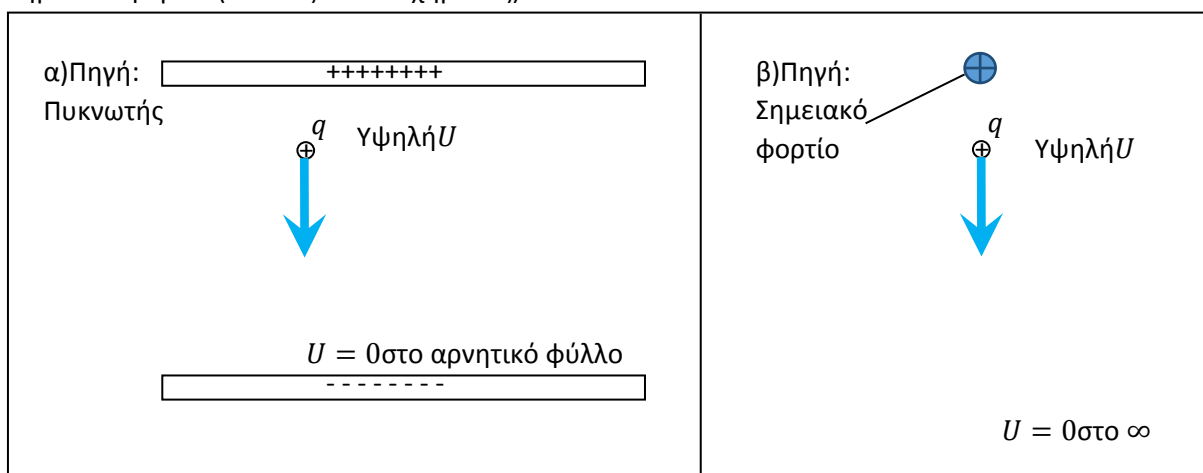
Πρόβλημα 6.17. Αν θεωρήσουμε ότι το ομοαξονικό καλώδιο που μεταφέρει το σήμα της καλωδιακής τηλεόρασης στο σπίτι μας είναι ένας κυλινδρικός πυκνωτής με εξωτερική ακτίνα  $1\text{ cm}$  και είναι γεμισμένο με πολυαιθυλένιο, υλικό που όπως φαίνεται από τον πίνακα 6.1 έχει σχετική διηλεκτρική σταθερά  $2.25$ , να υπολογίσετε την εσωτερική ακτίνα αν γνωρίζετε ότι η χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους του καλωδίου είναι  $40\text{ pF/m}$ .

Απάντηση:  $0.249\text{ cm}$

## 7. ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΡΕΥΜΑ και ο ΝΟΜΟΣ του ΟΗΜ

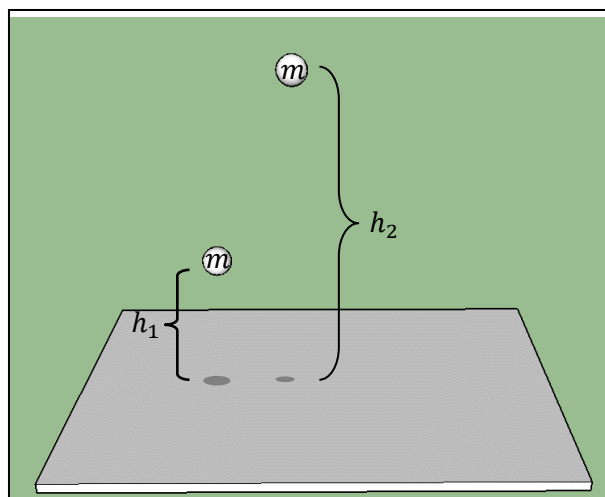
### Ηλεκτρικό Ρεύμα

Όπως είδαμε σε προηγούμενα κεφάλαια, η δυναμική ενέργεια  $U$  ενός θετικού δοκιμαστικού φορτίου  $q$  είναι υψηλή κοντά σε θετικές πηγές και μειώνεται όσο απομακρυνόμαστε από αυτές. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.1, εάν αφήσουμε ένα δοκιμαστικό φορτίο  $q$  ελεύθερο, τότε αυτό εντελώς αυθόρμητα θα μεταβεί από περιοχές με υψηλή δυναμική ενέργεια σε περιοχές με χαμηλή δυναμική ενέργεια (π.χ. εκεί όπου είναι μηδέν), τόσο στην περίπτωση όπου η πηγή είναι ένας πυκνωτής (στα αριστερά του σχήματος) όσο και στην περίπτωση όπου η πηγή είναι ένα άλλο σημειακό φορτίο (στα δεξιά του σχήματος).



Σχήμα 7.1: Δυο περιπτώσεις όπου δοκιμαστικό φορτίο κινείται φυσιολογικά από περιοχές υψηλής σε περιοχές χαμηλής δυναμικής ενέργειας.

Αυτό είναι γενικό φαινόμενο στη Φυσική. Όπως φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα 7.2, μια μάζα σε υψηλό ύψος  $h_2$  όπου η δυναμική ενέργεια είναι υψηλή, θα μετακινηθεί αυθόρμητα προς χαμηλότερα ύψη  $h_1$  όπου η δυναμική ενέργεια είναι χαμηλότερη.

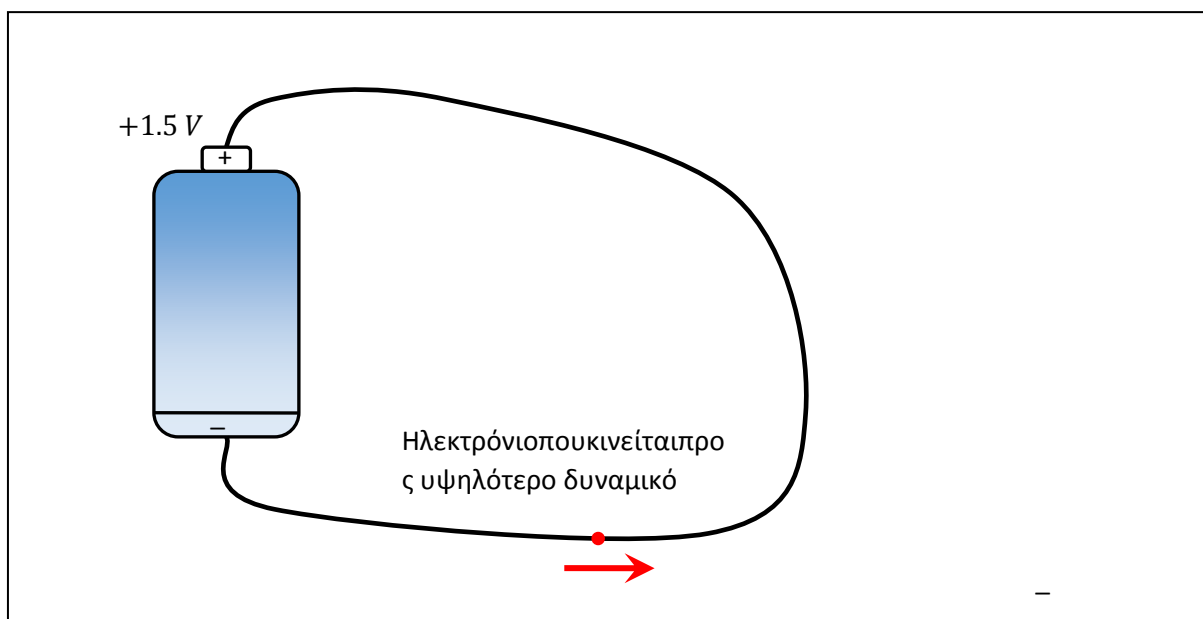


Σχήμα 7.2

Από την Εξ. 4.8 έχουμε  $U = qV$  και άρα τα  $U$  και  $V$  έχουν το ίδιο πρόσημο για θετικό φορτίο και έτσι ο ίδιος νόμος ισχύει και για το δυναμικό: Εάν αφήσουμε ένα θετικό φορτίο ελεύθερο, θα μετακινηθεί αυθόρμητα προς περιοχές με χαμηλότερο  $V$ . Για αρνητικό φορτίο  $q$  ισχύει ακριβώς το αντίθετο, δηλαδή από την  $U = qV$  δυναμική του ενέργεια μειώνεται όταν αυξάνει το δυναμικό του. Έτσι έχουμε τον εξής κανόνα:

- Τα θετικά φορτία (+) κινούνται από υψηλά σε χαμηλά δυναμικά  $V$
- Τα αρνητικά φορτία (-) κινούνται από χαμηλά σε υψηλά δυναμικά  $V$

Έτσι όταν συνδέουμε ένα μεταλλικό σύρμα στους πόλους μιας μικρής μπαταρίας AAA στο Σχήμα 7.3 παρακάτω, τα ηλεκτρόνια κινούνται από τον αρνητικό πόλο με δυναμικό μηδέν (κατά σύμβαση), προς τον θετικό πόλο με δυναμικό  $+1.5\text{ V}$ . Γιατί κινούνται μόνο τα ηλεκτρόνια; Επειδή όπως είδαμε στο Κεφ. 1, είναι κατά πολύ ελαφρύτερα από τα πρωτόνια και επίσης επειδή τα δεύτερα βρίσκονται μέσα στον πυρήνα του ατόμου όπου έλκονται με ισχυρές πυρηνικές δυνάμεις μεταξύ τους.

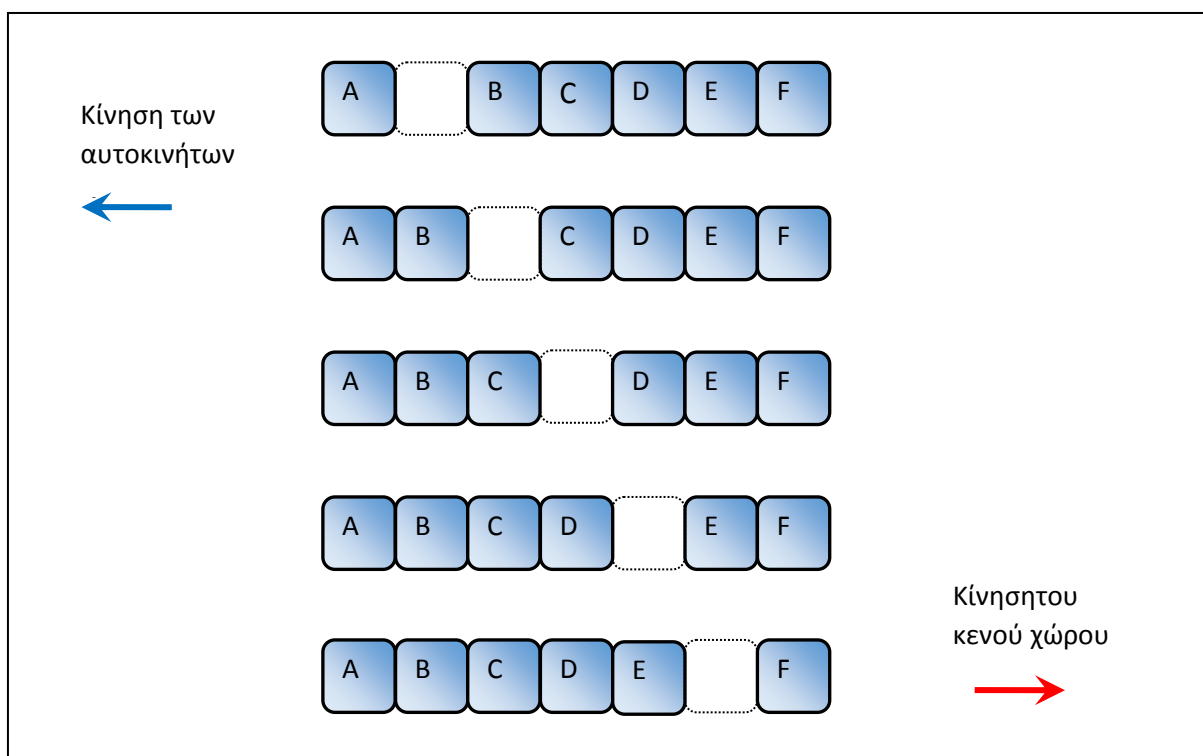


Σχήμα 7.3



Γιατί απαιτείται μεταλλικό σύρμα για την κίνηση των ηλεκτρονίων; Επειδή μόνο μέσα σε αγωγούς μπορούν τα φορτία να κινηθούν ελεύθερα. Εάν αντί για μεταλλικό σύρμα συνδέαμε τους πόλους μεταξύ τους π.χ. με μια πλαστική χορδή, τότε δεν θα βλέπαμε καμία κίνηση φορτίου στη χορδή.

Η εξαναγκασμένη κίνηση φορτίων διαμέσου ενός αγωγού εξαιτίας της εφαρμογής μιας διαφοράς δυναμικού στα άκρα του ονομάζεται **Ηλεκτρικό Ρεύμα**. Παρότι που το ρεύμα έχει να κάνει με την κίνηση των αρνητικά φορτισμένων ηλεκτρονίων, ιστορικά οι Φυσικοί μελέτησαν το ηλεκτρικό ρεύμα πολλά χρόνια πριν να ανακαλύψουν το ηλεκτρόνιο και το πρωτόνιο και έτσι αρχικά πίστεψαν ότι το ρεύμα προκαλείται από την κίνηση κάποιων άγνωστων θετικών φορτίων. Αυτό βέβαια δεν είναι τελείως λάθος αρκεί να αναλογισθούμε ότι η κίνηση των θετικών φορτίων προς τα αριστερά ισοδυναμεί με την κίνηση ίσων και αντίθετων φορτίων προς τα δεξιά. Για να δούμε πρακτικά γιατί ισχύει αυτό, θεωρήστε το παρακάτω Σχήμα 7.4 όπου απεικονίζει εικονικά έξι αυτοκίνητα A, B, C, D, E και F που περιμένουν στην σειρά στο σηματοδότη. Έστω ότι το πρώτο αυτοκίνητο μετακινείται λίγο προς τα αριστερά, αφήνοντας ένα κενό πίσω του ίσου μεγέθους. Έστω ότι διαδοχικά, ένα-ένα τα αυτοκίνητα που ακολουθούν, προσπαθούν να πληρώσουν το κενό. Όπως φαίνεται και στο σχήμα, παρόλο που τα αυτοκίνητα κινούνται προς τα αριστερά, ο κενός χώρος φαίνεται να κινείται προς τα δεξιά.

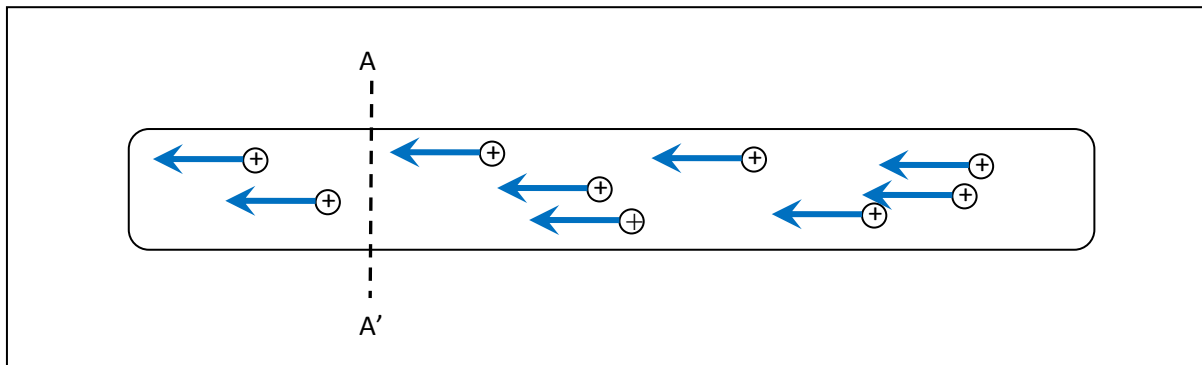


Σχήμα 7.4

Το ίδιο γίνεται και με τα ηλεκτρόνια στους αγωγούς. Όταν π.χ. κινούνται προς τα αριστερά, αφήνουν πίσω τους κενά τα οποία φυσικά περιέχουν πρωτόνια και είναι φορτισμένα θετικά. Όσο συνεχίζεται αυτή η κίνηση των ηλεκτρονίων, αυτά τα "θετικά κενά" φαίνονται σαν να κινούνται αντίθετα από τα ηλεκτρόνια. Αυτή είναι η λεγόμενη "συμβατική φορά" του ρεύματος η οποία είναι αντίθετη από την πραγματική φορά του ρεύματος που είναι αυτή των ηλεκτρονίων. Από δω και στο

εξής, όταν αναφερόμαστε σε ρεύματα, θα εννοούμε τα συμβατικά ρεύματα δηλαδή την κίνηση θετικών φορτίων.

Θεωρήστε τώρα το παρακάτω Σχήμα 7.5 όπου εικονίζονται τα φανταστικά θετικά φορτία να κινούνται προς τα αριστερά (φυσικά στην πραγματικότητα τα ηλεκτρόνια κινούνται προς τα δεξιά) μέσα σε ένα μεταλλικό σύρμα. Σε κάποια μικρή χρονική διάρκεια  $dt$ , μια ποσότητα φορτίου  $dq$  θα διέλθει από την διατομή  $AA'$  του σύρματος.



Σχήμα 7.5

Ορίζουμε ως ηλεκτρικό ρεύμα  $I$  το λόγο του φορτίου  $dq$  που διέρχεται από την διατομή  $AA'$  του σύρματος μέσα σε απειροστόχρονο  $dt$ , δια του χρόνου αυτού  $dt$ :

$I = \frac{dq}{dt}$	Ορισμός Ρεύματος	7.1
---------------------	------------------	-----

Σε πολλές περιπτώσεις το ηλεκτρικό ρεύμα  $I$  είναι σταθερό με το χρόνο και έτσι παίρνοντας απλές αναλογίες, ο λόγος των απειροστών ποσοτήτων στην Εξ. 7.1 ισούται με το λόγο των αντίστοιχων συνολικών ποσοτήτων, δηλαδή του φορτίου  $q$  που διέρχεται από τη διατομή  $AA'$  σε κάποιο χρόνο  $t$  δια τον χρόνο αυτό  $t$ :

$I = \frac{q}{t}$	Ορισμός Ρεύματος – Σταθερό Ρεύμα	7.2
-------------------	----------------------------------	-----

Οι μονάδες του ρεύματος είναι τα  $C/s$  στα οποία είναι γνωστά ως “Ampere” ή “A”. Όπως προαναφέρθηκε, η φορά του ρεύματος είναι αυτή της κίνησης των θετικών φορτίων.

**Παράδειγμα 7.1.** Βρείτε το ρεύμα  $I$  όταν ένα συνολικό φορτίο  $5.0 \times 10^{-4} C$  μεταφέρεται διαμέσου ενός σύρματος μέσα σε χρόνο  $2 ms$  (milliseconds)

**Λύση:** Από την Εξ. 7.2

$$I = \frac{q}{t} = \frac{5 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-3}} = 0.25 C/s = 0.25 A$$

**Παράδειγμα 7.2.** Ένας συνολικός αριθμός  $6.25 \times 10^{14}$  ηλεκτρονίων μεταφέρονται από την αριστερή προς την δεξιά μεριά ενός σύρματος μέσα σε χρόνο  $0.04s$ . Βρείτε το ρεύμα  $I$  μέσω του σύρματος.

Λύση: Πρώτα πρέπει να μετατρέψουμε τον αριθμό των ηλεκτρονίων σε φορτίο. Γνωρίζουμε ότι κάθε ηλεκτρόνιο φέρει φορτίο  $1.6 \times 10^{-19} C$  και έτσι το συνολικό φορτίο  $q$  που μεταφέρεται μέσα στο σύρμα ισούται με:

$$q = 6.25 \times 10^{14} \times 1.6 \times 10^{-19} = 1.0 \times 10^{-4} C$$

ΑπότηνΕξ. 7.2

$$I = \frac{q}{t} = \frac{1.0 \times 10^{-4}}{0.04} = 2.5 mA$$

Η κατεύθυνση του συμβατικού ρεύματος είναι προς τα αριστερά, αντίθετα από την κίνηση των ηλεκτρονίων.

Παράδειγμα 7.3. Βρείτε το συνολικό φορτίο που μεταφέρεται σε 3 δευτερόλεπτα από ένα ρεύμα  $5.5 mA$ .

Λύση: ΑπότηνΕξ. 7.2

$$I = \frac{q}{t} \Rightarrow q = It = 5.5 \times 10^{-3} \times 3 = 0.0165 C$$

Παράδειγμα 7.6. Πόσα ηλεκτρόνια μεταφέρονται από ρεύμα  $0.5 A$  μέσα σε χρόνο  $0.2 sec$ ;

Λύση: ΑπότηνΕξ. 7.2

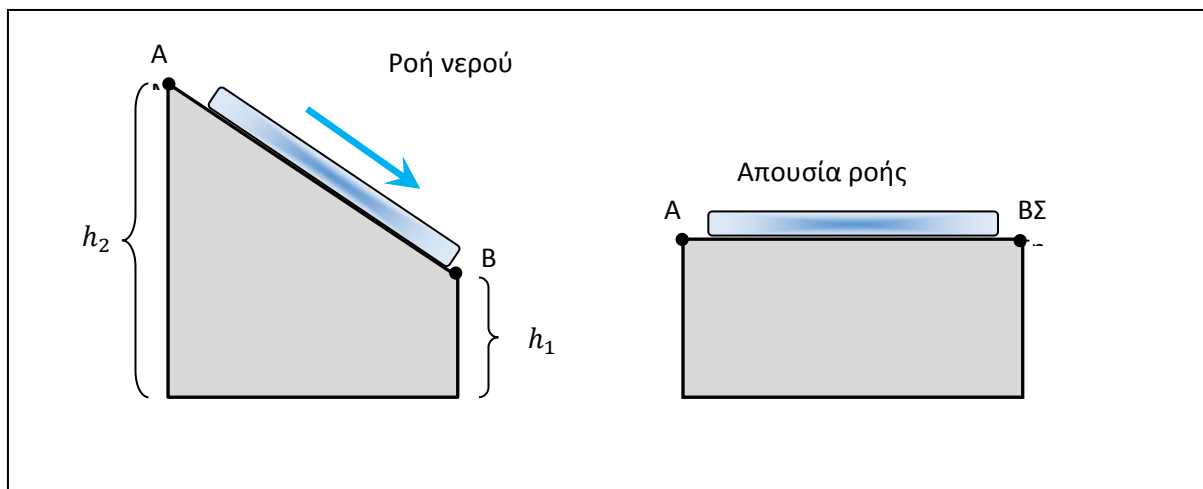
$$I = \frac{q}{t} \Rightarrow q = It = 0.5 \times 0.2 = 0.1 C$$

Ένα ηλεκτρόνιο αντιστοιχεί σε φορτίο  $q_e = 1.6 \times 10^{-19} C$  οπότε το φορτίο  $q$  αντιστοιχεί σε έναν αριθμό ηλεκτρονίων ίσο με:

$$n = \frac{0.1 C}{1.6 \times 10^{-19} C} = 6.25 \times 10^{17}$$

## Ο νόμος του Ohm – Ηλεκτρική Αντίσταση

Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο εδάφιο, τα θετικά φορτία κινούνται από περιοχές υψηλού δυναμικού προς περιοχές χαμηλού δυναμικού. Αυτό είναι ανάλογο στη Μηχανική με την ροή νερού από ένα σημείο A σε ένα άλλο σημείο B εάν το A βρίσκεται ψηλότερα από το B, όπως φαίνεται και στο παρακάτω Σχήμα 7.6:



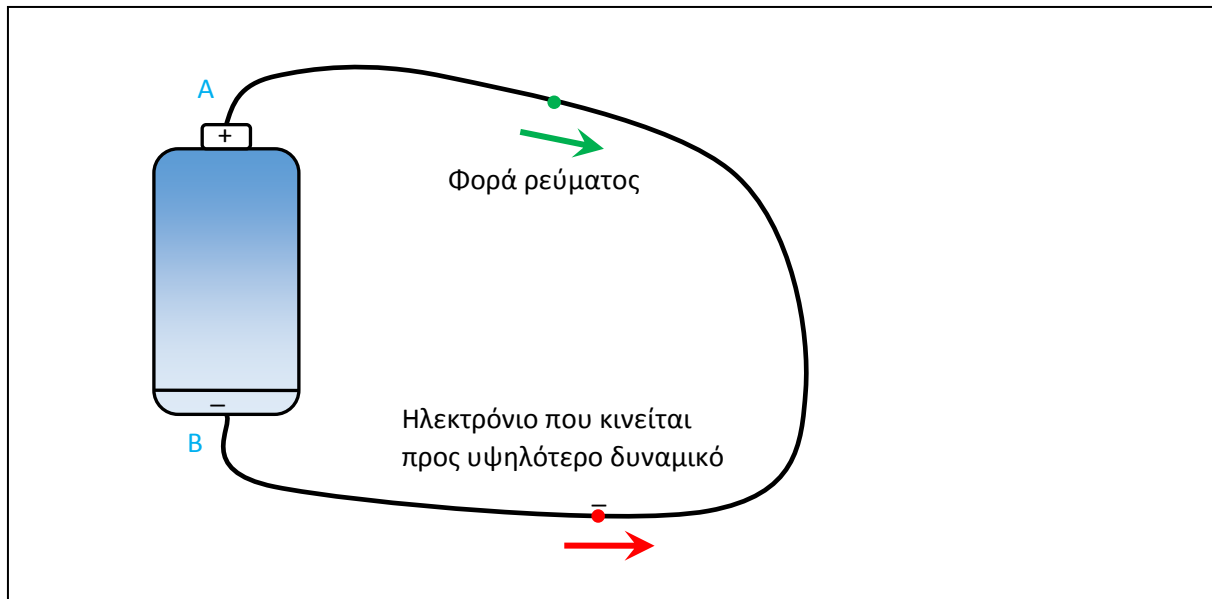
Σχήμα 7.6

Η ταχύτητα του νερού είναι μεγάλη όταν η υψομετρική διαφορά  $h_2 - h_1$  είναι μεγάλη. Παρομοίως, σε ένα συρμάτινο αγωγό το ρεύμα  $I$  είναι τόσο μεγαλύτερο όσο μεγαλύτερη είναι η διαφορά δυναμικού (γνωστή και ως "τάση")  $\Delta V = V_2 - V_1$  στα άκρα του αγωγού. Αυτό το φαινόμενο είναι γνωστό ως ο **νόμος του Ohm**: Το ρεύμα σε ένα αγωγό είναι ανάλογο της διαφοράς δυναμικού:

$I = \frac{\Delta V}{R}$	Νόμος του Ohm	7.3
--------------------------	---------------	-----

Η σταθερά  $R$  είναι γνωστή ως "Αντίσταση" και είναι ένα μέτρο της δυσκολίας που συναντούν τα φορτία για να διέλθουν από ένα συγκεκριμένο υλικό. Το αντίστοιχο φαινόμενο στο Σχήμα 7.6 είναι η αντίσταση στη ροή διαφορετικών ρευστών, π.χ. ένα παχύρευστο ρευστό όπως το μέλι ρέει πιο αργά από ότι μια ίση ποσότητα νερού για την ίδια κλίση. Ομοίως τα ηλεκτρόνια διέρχονται πιο δύσκολα από ένα κομμάτι σιδήρου από ότι ένα κομμάτι χαλκού των ίδιων διαστάσεων. Έτσι η αντίσταση  $R$  εξαρτάται από το υλικό και τη γεωμετρία του σύρματος (μήκος και διατομή). Οι μονάδες της είναι το  $\Omega$  που ισούται με  $1 \text{ Volt/Ampere}$  και συμβολίζεται με  $\Omega$ .

**Παράδειγμα 7.4.** Ένα κομμάτι σύρματος  $500\Omega$  είναι συνδεδεμένο σε μπαταρία  $1.5 \text{ V}$  για συνολικό χρόνο  $4 \text{ s}$ . α) Βρείτε το ρεύμα διάμεσου του σύρματος και β) το συνολικό φορτίο που μετακινήθηκε και γ) το συνολικό έργο της μπαταρίας που προσφέρεται σε αυτό το φορτίο.



Λύση. α) Η διαφορά δυναμικού είναι μεταξύ του θετικού (+) πόλου Α και του αρνητικού (-) πόλου Β της μπαταρίας  $\Delta V = V_A - V_B = 1.5 \text{ V}$ . Από την Εξ. 7.3

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{1.5}{500} = 3 \text{ mA}$$

β) Από την Εξ. 7.2

$$I = \frac{q}{t} \Rightarrow q = It = 3 \times 10^{-3} \times 4 = 0.012 \text{ C}$$

γ) Από την Εξ. 4.14, το έργο που προσφέρεται από το πεδίο στο φορτίο  $q$  ισούται με

$$W_{A \rightarrow B} = q(V_A - V_B) = 0.012 \times 1.5 = 0.018 \text{ J}$$

Το έργο είναι θετικό γιατί τα θετικά φορτία μετακινούνται κατά μήκος του πεδίου.

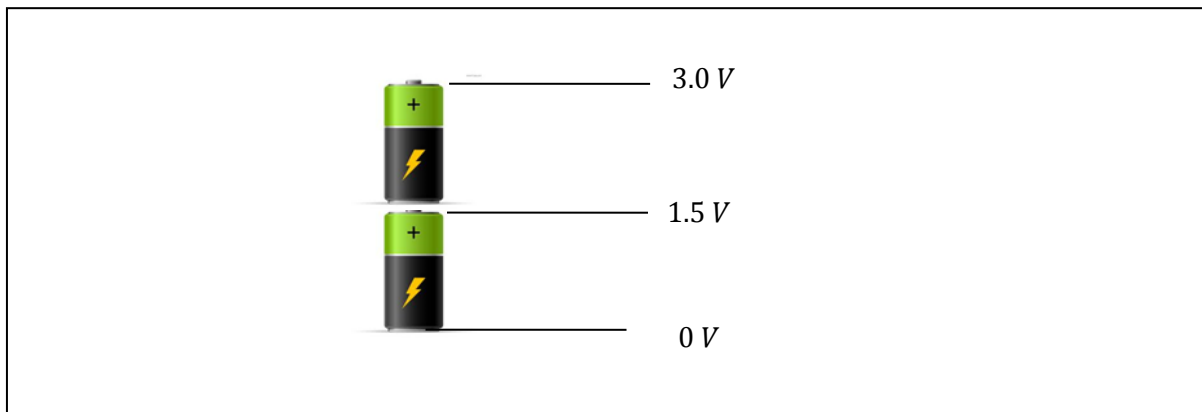
Παράδειγμα 7.5. Βρείτε την αντίσταση ενός ρεοστάτη (μεταβλητής αντίστασης) εάν η πτώση δυναμικού στα άκρα του είναι  $48 \text{ V}$  και το ρεύμα που τον διαρρέει είναι  $4 \text{ A}$ .

Λύση: Από την Εξ. 7.3

$$I = \frac{\Delta V}{R} \Rightarrow R = \frac{48}{4} = 12 \text{ Ohms}$$

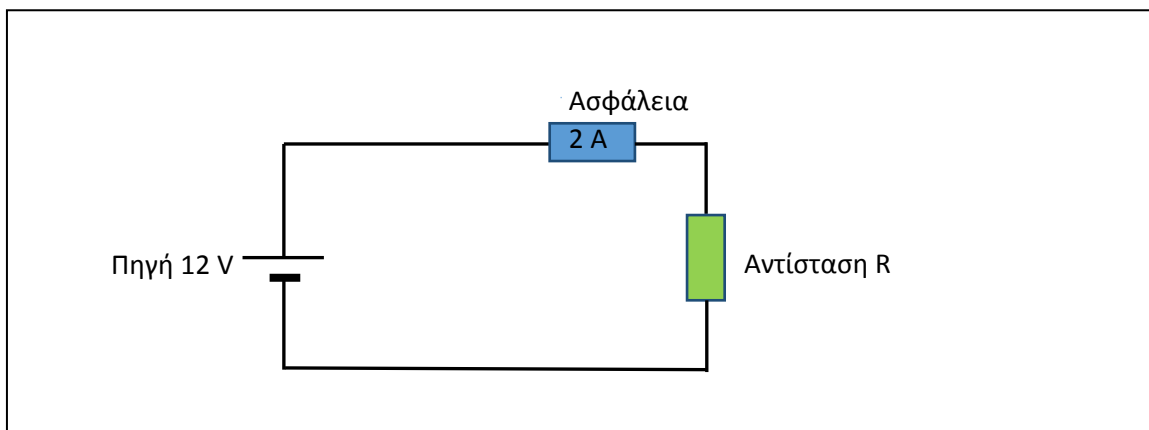
Σημείωση: Σε πολλές εφαρμογές συνδέουμε δυο μπαταρίες  $1.5 \text{ V}$  σε σειρά για να επιτύχουμε υψηλότερο δυναμικό ως εξής: Η δουλειά της μπαταρίας είναι να ανυψώνει την τάση μεταξύ των δυο πόλων της, του θετικού (+) και του αρνητικού, (-) με τον θετικό πόλο να είναι σε υψηλότερο δυναμικό, στο συγκεκριμένο παράδειγμα  $1.5 \text{ V}$ . Όπως είδαμε στο Κεφ. 4, το μηδέν της δυναμικής ενέργειας μπορεί να οριστεί αυθαίρετα και κατ' αναλογία και το μηδέν του δυναμικού. Αυτό μπορεί να γίνει για ένα μόνο σημείο (ή μια επιφάνεια πιο γενικά) το οποίο το ορίζουμε ως το σημείο αναφοράς. Επειδή τα καλώδια συνδέονται στο χαμηλότερο άκρο (-) της κάτω μπαταρίας και στο

υψηλότερο άκρο (+) της πάνω, παίρνουμε συμβατικά το (-) της κάτω μπαταρίας ως το 0 του δυναμικού. Αυτό αυτομάτως θέτει την κοινή επαφή των δυο μπαταριών σε δυναμικό  $+1.5\text{ V}$  λόγω της κάτω μπαταρίας και αναλόγως το δυναμικό του (+) άκρου της πάνω μπαταρίας σε δυναμικό  $1.5 + 1.5 = 3\text{ V}$ . Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να προσθέσουμε περισσότερες μπαταρίες σε σειρά ώστε να επιτύχουμε το επιθυμητό δυναμικό.



#### Παράδειγμα 7.6.

Μια ασφάλεια 2Αμπερετοποθετείται στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος με μπαταρία 12 V. α) Ποια είναι η ελάχιστη αντίσταση που μπορεί να μπει σε σειρά με την ασφάλεια; β) Να γίνει μια γραφική παράσταση  $I - R$  για αντιστάσεις  $R = 2, 4, 6, 8, 10\ \Omega$



#### Λύση:

α) Οι ασφάλειες είναι ηλεκτρικά στοιχεία που προστατεύουν ένα κύκλωμα από απότομες αυξήσεις του ρεύματος οι οποίες μπορούν να βλάψουν ευαίσθητα και ακριβά ηλεκτρονικά εξαρτήματα. Οι ασφάλειες είναι στην ουσία ηλεκτρικές αντιστάσεις οι οποίες ιδανικά παρουσιάζουν μηδενική αντίσταση όσο το ρεύμα που τις διαρρέει είναι μικρότερο από την αναγραφόμενη τιμή (στο συγκεκριμένο παράδειγμα 2 A), ενώ η αντίσταση γίνεται άπειρη (η ασφάλεια καίγεται ή διακόπτεται) όταν το ρεύμα ξεπεράσει αυτή την τιμή. Έτσι όταν η ασφάλεια τοποθετηθεί σε ένα κύκλωμα, δεν μεταβάλλει το ρεύμα του κυκλώματος κατά την κανονική λειτουργία της. Η συνολική αντίσταση δηλαδή στο παραπάνω σχήμα είναι  $R + 0 = R$  και από τον νόμο του Ohm:

$$I = \frac{\Delta V}{R}$$

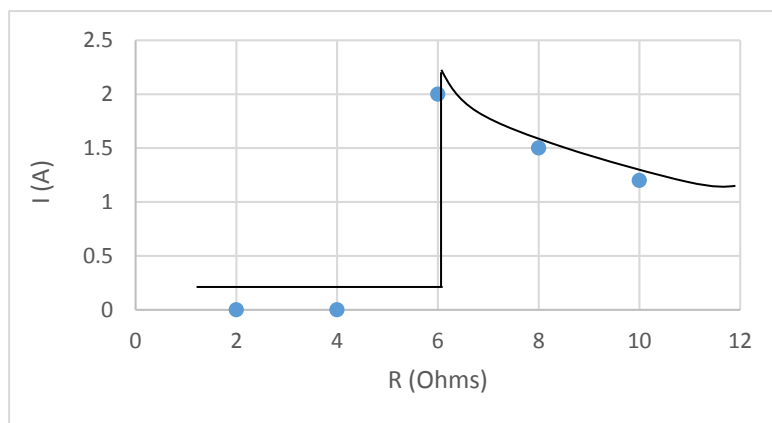
Βλέπουμε ότι η  $R$  είναι αντιστρόφως ανάλογη με το  $I$ . Έτσι το ελάχιστο της  $R$  αντιστοιχεί στο μέγιστο του ρεύματος το οποίο είναι στην ουσία η αναγραφόμενη τιμή της ασφάλειας, δηλαδή  $I_{max} = 2 \text{ A}$ . Λύνοντας ως προς  $R$

$$I_{max} = \frac{\Delta V}{R_{min}} \Rightarrow R_{min} = \frac{\Delta V}{I_{max}} = \frac{12 \text{ V}}{2 \text{ A}} = 6 \Omega$$

β) Φτιάχνουμε ένα πίνακα με τις δεδομένες τιμές της  $R$ . Η δεύτερη στήλη είναι το ρεύμα που υπολογίζεται από τον νόμο του Ohm απουσία της ασφάλειας. Όμως η ασφάλεια καίγεται στα 2 Α και έτσι τα ρεύματα που είναι μεγαλύτερα από αυτή την τιμή πέφτουν στο μηδέν, όπως φαίνεται στην τρίτη στήλη που παρουσιάζει το πραγματικό ρεύμα.

$R$ (Ohms)	$I_{\text{Ohm}} \text{ (A)} = \Delta V/R$	$I$ (A)
2	6	0
4	3	0
6	2	2
8	1.5	1.5
10	1.2	1.2

Η γραφική παράσταση φαίνεται παρακάτω:



## Φορτία με ρευματοφόρους αγωγούς

Είδαμε ότι όταν φορτίζουμε ένα αγωγό, π.χ. μέσω τριβής, τότε συμβαίνουν μια σειρά από αξιοσημείωτα φαινόμενα σε αυτόν:

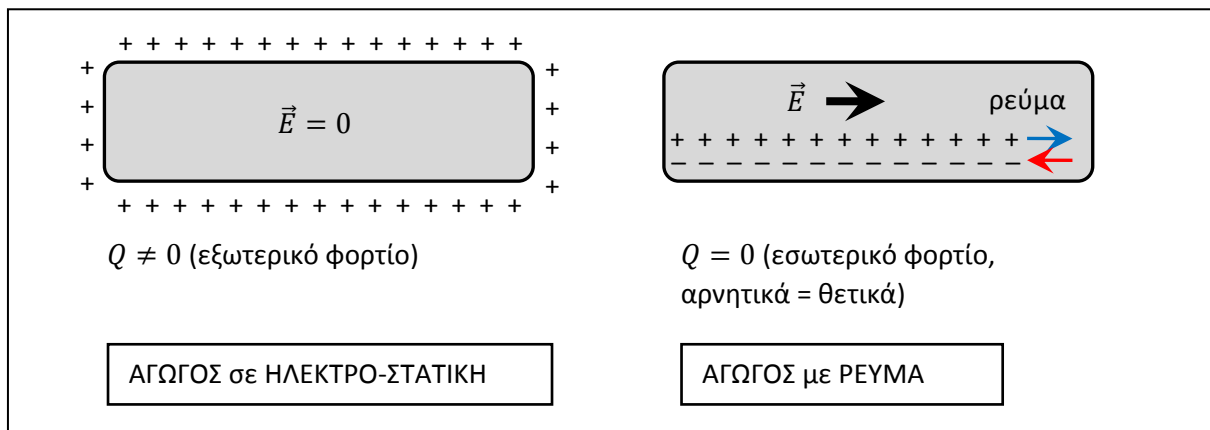
- Το επιπλέον φορτίο κατανέμεται όλο στην επιφάνεια του αγωγού
- Στο εσωτερικό του αγωγού ισχύει παντού  $E = 0$

- Στην επιφάνεια του αγωγού και μόνο, ισχύει  $E = \sigma/2\epsilon_0 \neq 0$  και το  $\vec{E}$  είναι παντού κάθετο στην επιφάνεια.
- Απόρροια των δυο παραπάνω φαινομένων είναι και ο κανόνας ότι  $V =$  σταθερό παντού στον αγωγό. Αυτό αποδεικνύεται μέσω της Εξίσωσης 4.13 εάν επιλέξουμε δυο τυχαία σημεία A και B του αγωγού επειδή μηδενίζεται το ολοκλήρωμα (δες παρακάτω) και έτσι  $V_B - V_A = 0 \Rightarrow V_B = V_A$  και άρα το δυναμικό είναι παντού το ίδιο. Το ολοκλήρωμα μηδενίζεται επειδή α) στο εσωτερικό του αγωγού  $E = 0$  και β) στην επιφάνεια του αγωγού το  $\vec{E}$  είναι κάθετο σε αυτή και άρα κάθετο σε οποιαδήποτε στοιχειώδη διαδρομή  $d\vec{r}$  που ενώνει τα τυχαία σημεία A και B και άρα το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{E} \cdot d\vec{r}$  μηδενίζεται ταυτοτικά

Αυτή η κατάσταση ενός αγωγού ονομάζεται ηλεκτροστατική επειδή το συνολικό φορτίο βρίσκεται σε πλήρη ισορροπία και εικονίζεται στο αριστερό τμήμα τους Σχήματος 7.7. Αντιθέτως κατά την διέλευση ρεύματος μέσω ενός αγωγού, η κατάσταση είναι τελείως διαφορετική:

- Αναγκαστικά υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο  $E \neq 0$  στο εσωτερικό του αγωγού το οποίο προέρχεται από την επιβολή μιας διαφοράς δυναμικού στα άκρα του αγωγού εξαιτίας μιας εξωτερικής πηγής. Στο εσωτερικό του αγωγού, το δυναμικό πέφτει με την απόσταση όπως τα ηλεκτρόνια κινούνται από τον θετικό προς τον αρνητικό πόλο της πηγής μέσω του αγωγού. Π.χ. εάν  $E =$  σταθ. κατά μήκος ενός καλωδίου, τότε από την Εξ. 4.10 έχουμε  $V = -Ex + c$ . Αυτό το φαινόμενο είναι γνωστό ως "πτώση τάσης" στους αγωγούς.
- Το ρεύμα έχει να κάνει με την κίνηση του ήδη υπάρχοντος φυσικού φορτίου του αγωγού, που όπως είδαμε είναι εξ' ορισμού εξισορροπημένο μεταξύ ηλεκτρονίων και πρωτονίων. Η κίνηση πραγματοποιείται κυρίως από τα ηλεκτρόνια και η πηγή του κυκλώματος αναπληρώνει αυτά που χάνει ο αγωγός και έτσι πάντα αυτός παραμένει ηλεκτρικά ουδέτερος. Το θετικό φορτίο των πρωτονίων φαίνεται εικονικά να κινείται αντίθετα από τα ηλεκτρόνια με την λογική του Σχήματος 7.4. Επίσης η κίνηση των ηλεκτρονίων λαμβάνει χώρα σε όλον τον όγκο του αγωγού και όχι μόνο στην επιφάνειά του
- Η διέλευση του ρεύματος δεν είναι μια κατάσταση ισορροπίας. Λόγω της αντίστασης στο εσωτερικό του αγωγού, μια δύναμη  $F = qE$  πρέπει συνεχώς να εφαρμόζεται στα ηλεκτρόνια, αλλιώς τα ηλεκτρόνια θα επιβραδύνονταν και τελικά θα σταματούσαν την κίνησή τους. Αυτό το έχουμε δει όλοι μας στην πράξη αφού όταν αφαιρούμε από μια συσκευή την πηγή της (μπαταρία ή ρευματολήπτης) τότε η συσκευή ηρεμεί τελείως.

Η περίπτωση της διέλευσης του ρεύματος εικονίζεται στο δεξιό τμήμα τους Σχήματος 7.7.



Σχήμα 7.7

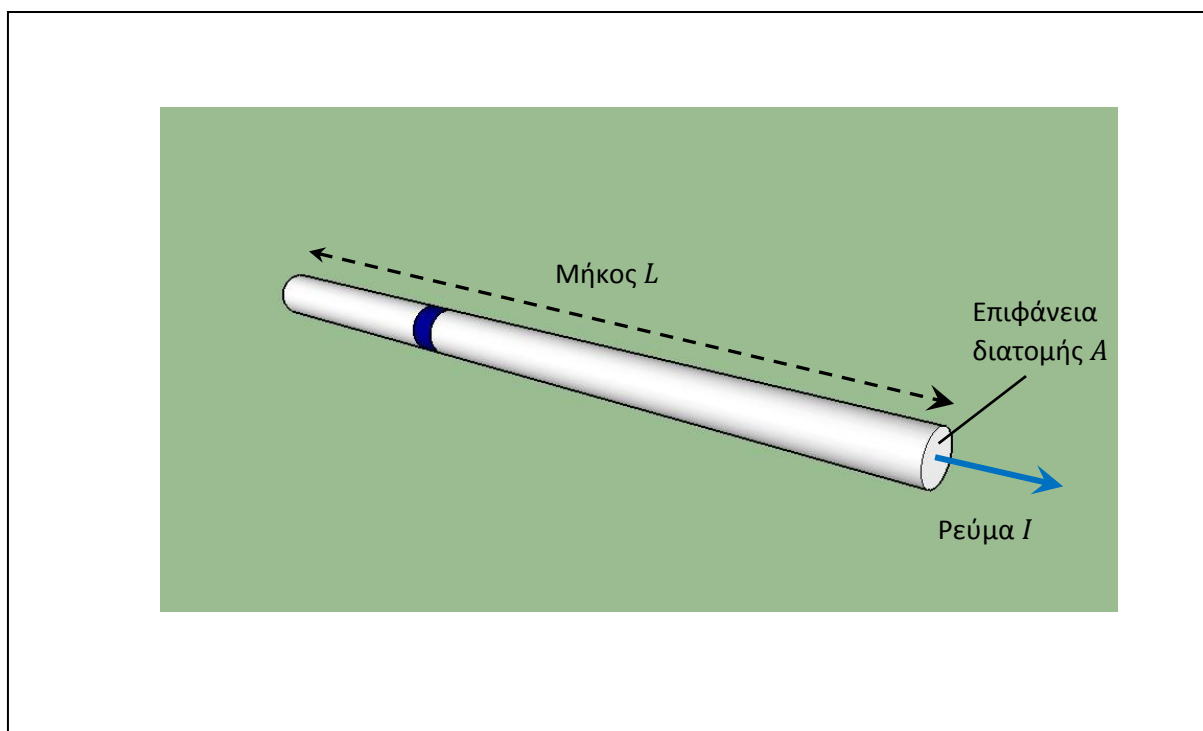


## Ειδική Αντίσταση

Όπως προαναφέρθηκε, η αντίσταση  $R$  ενός αγωγού εξαρτάται τόσο από το υλικό όσο και από την γεωμετρία του. Π.χ. για ένα αγωγικό καλώδιο όπως αυτό του Σχήματος 7.8 το οποίο έχει μήκος  $L$  και εμβαδό διατομής  $A$ , τότε αποδεικνύεται πειραματικά ότι ισχύει η σχέση

$R = \rho \frac{L}{A}$	Ειδική Αντίσταση	7.4
------------------------	------------------	-----

όπου το  $\rho$  είναι μια σταθερά υλικού γνωστή ως "**ειδική αντίσταση**" σε μονάδες  $\Omega m$ , τιμές της οποίας δίνονται στον Πίνακα 7.1. Όσο υψηλότερη είναι αυτή η τιμή, τόσο περισσότερο το υλικό αντιστέκεται στην κίνηση των φορτίων στο εσωτερικό του και άρα δεν είναι αγωγικό. Για σύγκριση, δείτε πόσο υψηλή είναι η τιμή του άνθρακα ο οποίος ως γνωστόν δεν είναι μέταλλο. Παρόμοια όλοι οι μονωτές έχουν υψηλές τιμές ειδικής αγωγιμότητας. Αντιθέτως τα συνήθη μέταλλα όπως ο χαλκός, το αλουμίνιο, ο σίδηρος κτλ., έχουν χαμηλές τιμές αυτής της σταθεράς.



Σχήμα 7.8

Υλικό	$\rho \times 10^{-8} \Omega m$
Άργυρος	1.63
Χαλκός	1.75
Χρυσός	2.44
Αλουμίνιο	2.82
Βολφράμιο	5.65

Ψευδάργυρος	7.00
Πλατίνα	10.6
Χάλυβας	15.9
Μόλυβδος	22.0
Υδράργυρος	98.0
Άνθρακας (Γραφίτης)	3000

Πίνακας 7.1. Ειδική αντίσταση διαφόρων μετάλλων.

Παράδειγμα 7.7.

Στο παράδειγμα 7.4 το κομμάτι σύρματος που χρησιμοποιήσαμε είχε αντίσταση  $500 \Omega$ . Εάν το σύρμα αυτό είναι κατασκευασμένο από χαλκό με διάμετρο  $0.5 \text{ mm}$ , να βρεθεί το μήκος του.

Λύση:

Από την Εξ. 7.4 λύνοντας ως προς το μήκος οδηγεί στο

$$L = \frac{RA}{\rho}$$

Το εμβαδό της κυκλικής διατομής επιφάνειάς της ισούται με

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(0.5 \times 10^{-3})^2}{4} = 1.96 \times 10^{-7}$$

Από τον Πίνακα 7.1 για τον χαλκό έχουμε  $\rho = 1.75 \times 10^{-8} \Omega m$  οπότε

$$L = \frac{RA}{\rho} = \frac{500 \times 1.96 \times 10^{-7}}{1.75 \times 10^{-8}} = 5600 \text{ m}$$

ή  $5.6 \text{ km}$ ! Βλέπουμε δηλαδή ότι για να έχουμε μια λογική τιμή αντίστασης, απαιτούνται μερικά χιλιόμετρα μήκους! Επομένως τα μικρά μήκη καλωδίων που χρησιμοποιούνται στα εργαστήρια ηλεκτρονικής ή των λεπτών αγωγών που χρησιμοποιούνται για συνδέσεις στα ηλεκτρικά κυκλώματα, θα τα λαμβάνουμε πρακτικά ότι έχουν αντίσταση  $R \approx 0 \Omega$  και από την Εξ. 7.3 αντίστοιχη πτώση τάσης  $\Delta V \approx 0 \text{ V}$ .

Το αντίθετο της ειδικής αντίστασης ονομάζεται "αγωγιμότητα" και φυσικά είναι και αυτή μια σταθερά ενός υλικού και εκφράζει το πόσο εύκολα διέρχεται το ρεύμα από το συγκεκριμένο υλικό.

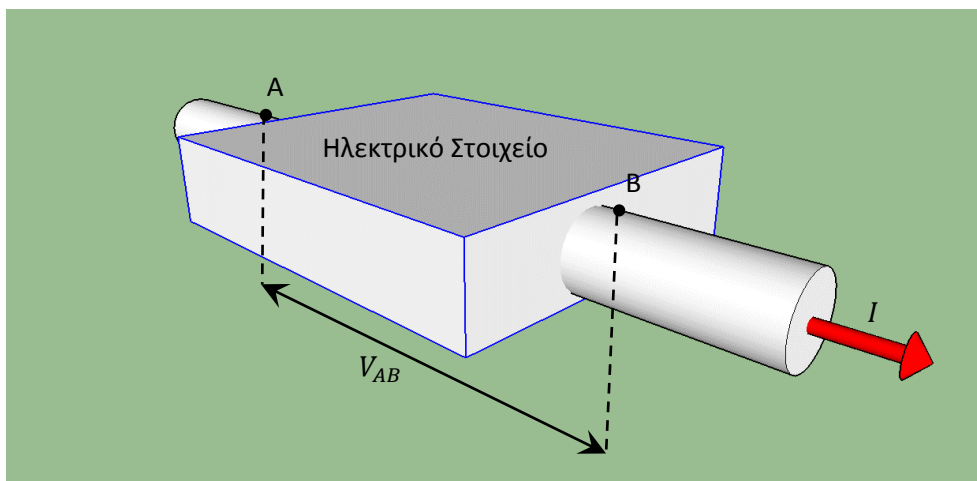
$\sigma = \frac{1}{\rho}$	Αγωγιμότητα	7.5
---------------------------	-------------	-----

Μια άλλη χρήσιμη ποσότητα στον Ηλεκτρομαγνητισμό είναι η "**πυκνότητα ρεύματος**"  $J$  η οποία ορίζεται ως το ρεύμα  $I$  που διέρχεται από μια διατομή του αγωγού, όπως η κυκλική διατομή του Σχήματος 7.8, δια την επιφάνεια της διατομής αυτής:

$J = \frac{I}{A}$	Πυκνότητα Ρεύματος	7.6
-------------------	--------------------	-----

## Ηλεκτρική Ισχύς

Έστω ένα ηλεκτρικό στοιχείο τοποθετημένο σε κάποιο κύκλωμα, όπως αυτό που φαίνεται στο Σχήμα 7.9, το οποίο βρίσκεται υπό διαφορά δυναμικού  $V_{AB}$  μεταξύ των δυο άκρων του A και B. Εάν κάποιο φορτίο  $dq$  μεταφέρεται από το A στο B του στοιχείου μέσα σε χρόνο  $dt$ , τότε το στοιχείο διαρρέεται από ρεύμα  $I = dq/dt$ .



Σχήμα 7.9

Σύμφωνα με την Εξ. 4.14, για αυτή τη μεταφορά του φορτίου απαιτείται έργο

$$dW_{AB} = dqV_{AB}$$

Διαιρώντας με τον χρόνο  $dt$  έχουμε

$$\frac{dW_{AB}}{dt} = V_{AB} \frac{dq}{dt}$$

Από την Φυσική Ι γνωρίζουμε ότι ο λόγος του έργου προς το χρόνο είναι εξ' ορισμού η ισχύς την οποία την συμβολίζουμε με το γράμμα  $P$  και την μετράμε σε μονάδες  $Watt = Joules/s$ . Αντικαθιστώντας το ρεύμα  $I = dq/dt$ , η ηλεκτρική ισχύς γράφεται ως

$P = VI$	Ηλεκτρική Ισχύς	7.7
----------	-----------------	-----

όπου αφαιρέσαμε τους δείκτες AB για ευκολία. Στην ειδική περίπτωση όπου το ηλεκτρικό στοιχείο είναι μια ηλεκτρική αντίσταση, τότε επιπλέον ισχύει και ο νόμος του Ohm  $V = IR$  και μπορούμε να γράψουμε:

$P = I^2R = \frac{V^2}{R}$	Ηλεκτρική Ισχύς Αντίστασης	7.8
----------------------------	----------------------------	-----

Εάν η ισχύς αυτή είναι σταθερή τότε η αντίστοιχη ενέργεια  $U$  που καταναλώνει η αντίσταση σε χρόνο  $t$  ισούται με:

$U = Pt = I^2Rt$	Απώλεια Ενέργειας σε Αντίσταση	7.9
------------------	--------------------------------	-----

Παράδειγμα 7.8.

Μια ηλεκτρική συσκευή που είναι συνδεδεμένη σε ένα φορτιστή 12 V απορροφάει φορτίο 3.3 C στη διάρκεια του εικοσαλέπτου που φορτίστηκε. Να υπολογισθεί η μέση ισχύς που κατανάλωσε η συσκευή.

Λύση:

Το μέσο ρεύμα που διήλθε από τη συσκευή είναι ίσο με

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{3.3 \text{ C}}{20 \text{ min}} = \frac{3.3 \text{ C}}{20 \times 60 \text{ s}} = 2.75 \text{ mA}$$

Από την Εξ. 7.7 η μέση ισχύς που κατανάλωσε η συσκευή ισούται με:

$$P = VI = 12 \times 2.75 \times 10^{-3} = 0.033 \text{ Watt} = 33 \text{ mW}$$

## Εναλλασσόμενα Ρεύματα

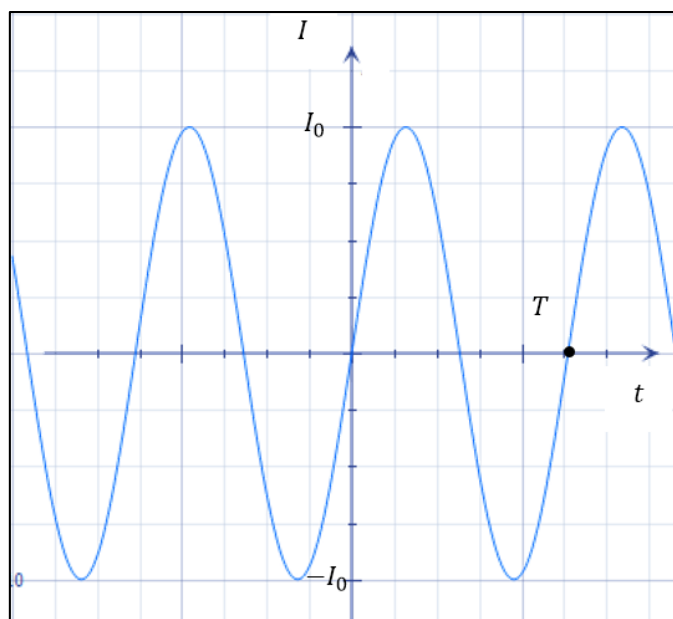
Σε πολλές πρακτικές εφαρμογές χρησιμοποιούνται ρεύματα των οποίων η φορά εναλλάσσεται περιοδικά με το χρόνο. Αυτά τα ρεύματα ονομάζονται **εναλλασσόμενα** (AC στα Αγγλικά σε αντιπαράθεση με τα συνεχή ρεύματα που είναι γνωστά ως DC). Τα ρεύματα αυτά για κάποιο λόγο μεταφέρονται ευκολότερα σε μεγάλες αποστάσεις σε σχέση με τα συνεχή ρεύματα τα οποία έχουν μεγαλύτερες απώλειες και για αυτό όλο το δίκτυο της Δ.Ε.Η. διαρρέεται από εναλλασσόμενα ρεύματα τα οποία περιγράφονται από την εξίσωση

$I(t) = I_0 \sin \omega t$	Εναλλασσόμενο Ρεύμα	7.10
----------------------------	---------------------	------

όπου  $I_0$  είναι το πλάτος του ρεύματος και  $\omega$  είναι η κυκλική συχνότητα. Θυμηθείτε από τη Φυσική I ότι η κυκλική συχνότητα ισούται με

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$	Κυκλική συχνότητα	7.11
------------------------------------	-------------------	------

όπου  $T$  είναι η περίοδος και  $f = 1/T$  η συχνότητα του εναλλασσόμενου ρεύματος. Η γραφική παράσταση του ρεύματος  $I(t)$  φαίνεται στο Σχήμα 7.10.



Σχήμα 7.10

Τα εναλλασσόμενα ρεύματα σε ένα κύκλωμα συνοδεύονται και από αντίστοιχες εναλλασσόμενες τάσεις. Για παράδειγμα στα άκρα μιας αντίστασης  $R$ , η τάση της δίνεται από τον νόμο του Οhm ως

$$V(t) = I(t)R = RI_0 \sin \omega t = V_0 \sin \omega t$$

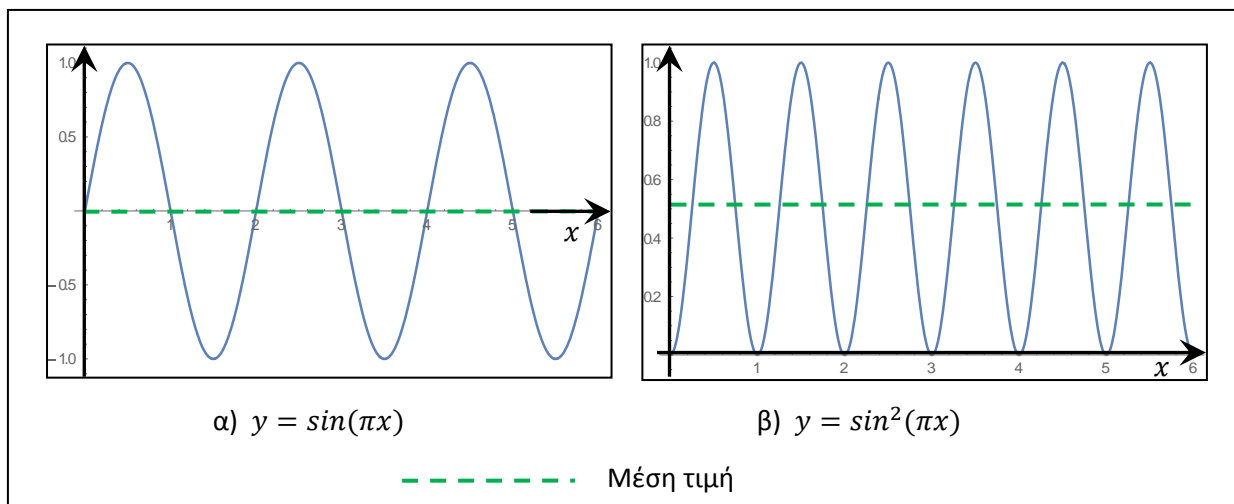
όπου  $V_0 = IR_0$  είναι το πλάτος της τάσης.

### Ενεργός τιμή

Συνήθως οι στιγμιαίες τιμές  $I(t)$  και  $V(t)$  στα εναλλασσόμενα ρεύματα δεν έχουν και πολύ πρακτικό ενδιαφέρον αφού μεταβάλλονται ταχέως με τον χρόνο. Αντιθέτως το πλάτος τους ή η μέση τιμή τους έχει περισσότερο νόημα και είναι ευκολότερα στη χρήση. Οι ημιτονοειδείς συναρτήσεις όπως π.χ. το  $y = \sin(\pi x)$  που φαίνεται στο Σχήμα 7.11α, είναι φραγμένες στον κατακόρυφο άξονα μεταξύ της τιμής  $\pm 1$  και έτσι ο μέσος τους όρος κατά τη διάρκεια ενός πλήρους κύκλου είναι μηδέν. Για το λόγο αυτό όταν χρειαζόμαστε μια μέση τιμή σε εναλλασσόμενα μεγέθη, παίρνουμε το τετράγωνό τους, όπως η συνάρτηση  $y = \sin^2(\pi x)$  στο Σχήμα 7.11β, η οποία είναι περιορισμένη συμμετρικά μεταξύ του 0 και του 1 στον κατακόρυφο άξονα και έτσι η μέση της τιμή είναι το  $1/2$ . Αυτό μπορούμε να το δούμε πολύ εύκολα και με τη χρήση της τριγωνομετρικής ταυτότητας του διπλάσιου τόξου:

$$\sin^2(\pi x) = \frac{1 - \cos(2\pi x)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2\pi x)}{2}$$

Εάν πάρουμε τη μέση τιμή, το συνημίτονο όπως και το ημίτονο μηδενίζεται όπως είδαμε και έτσι μένει μόνο το  $1/2$ .



Σχήμα 7.11

Θεωρήστε τώρα ένα εναλλασσόμενο μέγεθος, όπως π.χ. η τάση της αντίστασης  $V(t) = V_0 \sin \omega t$ . Η μέση τιμή του τετραγώνου της  $V^2$  θα είναι σύμφωνα με τα παραπάνω

$$\langle V^2 \rangle = \frac{1}{2} V_0^2$$

(οι τρίγωνες αγκύλες συμβολίζουν μέσες τιμές). Η τετραγωνική ρίζα αυτής της ποσότητας ονομάζεται "**ενεργός τιμή**" και συμβολίζεται με τον δείκτη *rms* (rootmeansquare)

$V_{rms} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$	Ενεργός τιμή Τάσης	7.12
----------------------------------	--------------------	------

Ομοίως για το ρεύμα

$I_{rms} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$	Ενεργός τιμή Ρεύματος	7.13
----------------------------------	-----------------------	------

Δηλαδή η ενεργός τιμή ενός εναλλασσόμενου μεγέθους είναι ίσο με το  $1/\sqrt{2}$  του πλάτους του.

Η στιγμιαία ισχύς που καταναλώνει ένα ηλεκτρικό στοιχείο που διαρρέεται από εναλλασσόμενα ρεύματα είναι ίση σύμφωνα με την Εξίσωση 7.7 με  $P(t) = V(t)I(t)$ . Έχει νόημα και εδώ να λάβουμε μέσες τιμές για πρακτικούς λόγους. Για την περίπτωση που το στοιχείο είναι μια αντίσταση  $R$ , τότε ισχύει ο νόμος του Ohm και μπορούμε να γράψουμε μέσω των Εξισώσεων 7.3 και 7.10 το ακόλουθο αποτέλεσμα

$$P(t) = I^2(t)R = I_0^2 R \sin^2(\omega t)$$

Αφού η μέση τιμή του τετραγώνου του ημιτόνου είναι  $1/2$ , τότε η μέση τιμή της παραπάνω έκφρασης ισούται με

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} I_0^2 R$$

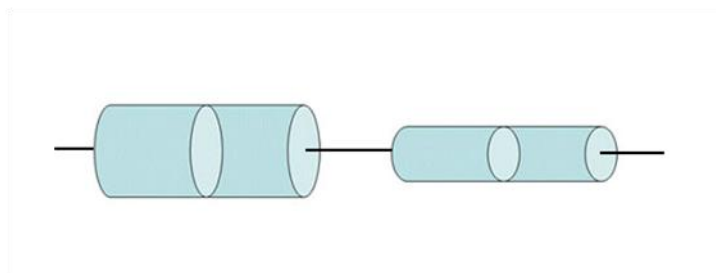
η οποία με την βοήθεια της Εξ. 7.13 μπορεί να γραφτεί και ως

$\langle P(t) \rangle = I_{rms}^2 R$	Μέση Ηλεκτρική Ισχύς σε Αντίσταση –ρεύμα AC	7.14
--------------------------------------	--	------

Σύμφωνα με την Εξ. 7.8 αυτή είναι ακριβώς η ισχύς που θα καταλάωνε η ίδια αντίσταση  $R$  εάν διαρρέοταν από συνεχές ρεύμα με τιμή  $I = I_{rms}$ . Από αυτή τη σχέση φαίνεται η σημασία της ενεργού τιμής στα εναλλασσόμενα ρεύματα. Επίσης τα περισσότερα όργανα ηλεκτρισμού όπως τα βολτόμετρα και τα αμπερόμετρα μετρούν πάντα την ενεργό τιμή.

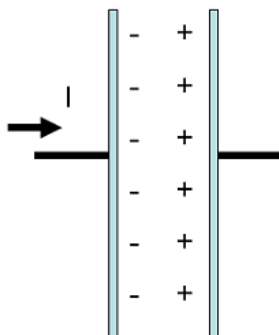
## Προβλήματα

**Πρόβλημα 7.1.** Δυο κυλινδρικοί αγωγοί αλουμινίου μήκους  $L = 2.5 \text{ m}$  έχουν διάμετρο  $d_1 = 1.6 \text{ mm}$ , και  $d_2$  αντίστοιχα. Όταν τους συνδέουμε σε σειρά έχουν αντίσταση  $R = 0.1 \Omega$ . Εάν η ειδική αντίσταση του αλουμινίου είναι  $2.65 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$ , να βρεθεί η διάμετρος  $d_1$  σε  $m$ . Δίνονται τα  $L$ ,  $R$  και  $d_2$  (σε αντιστοιχία):



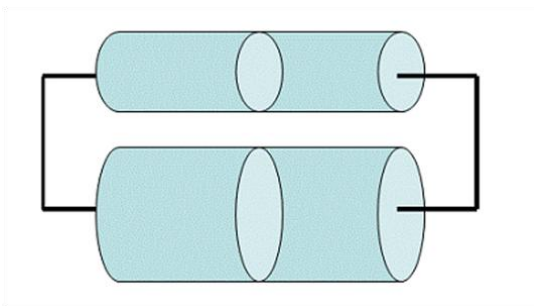
**Απάντηση:**  $1.12 \text{ mm}$

**Πρόβλημα 7.2.** Στον πυκνωτή του παρακάτω σχήματος υπάρχει αρχικά αποθηκευμένο φορτίο  $q = 2 \mu\text{C}$  με την πολικότητα που δείχνεται. Ξαφνικά εφαρμόζεται για συνολικό χρόνο  $\Delta t = 1.4 \text{ ms}$  ένα σταθερό ρεύμα  $I = 1.5 \text{ mA}$  με τη φορά που φαίνεται στο σχήμα. Βρείτε το τελικό φορτίο του πυκνωτή.



Απάντηση:  $Q(t) = 0.1 \mu C$

Πρόβλημα 7.3. Στο παρακάτω σχήμα ένας φοιτητής συνδέει παράλληλα δυο συρμάτινους κυλινδρικούς αγωγούς του ίδιου υλικού και του ίδιου μήκους αλλά με διαφορετικές διαμέτρους  $d_1$  και  $d_2 = \kappa d_1$  όπου  $\kappa > 1$ . Εάν η αντίσταση του λεπτού αγωγού είναι ίση με  $R$ , να βρεθεί η ολική αντίσταση σε  $\Omega$ . Δίνονται τα  $\kappa$  και  $R$ :



Απάντηση:  $R/(\kappa^2 + 1)$

Πρόβλημα 7.4.

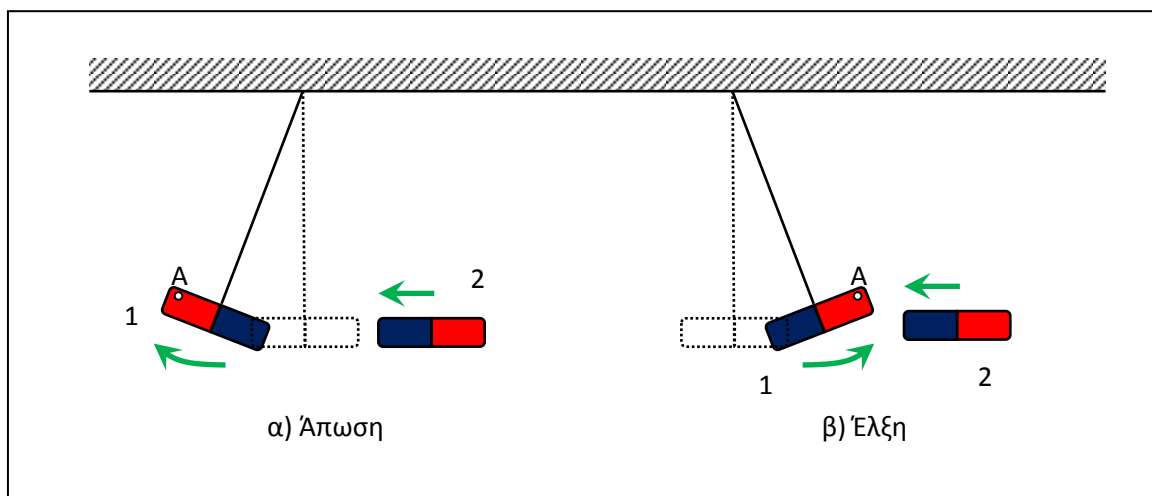
Ένας φοιτητής συνδέει παράλληλα δυο συρμάτινους κυλινδρικούς αγωγούς του ίδιου μήκους  $L = 2 \text{ cm}$  αλλά διαφορετικού υλικού, έστω  $\nu_1$  και  $\nu_2$  και με διαφορετικές ακτίνες  $\alpha_1 = 0.4 \text{ mm}$  και  $\alpha_2 = 2\alpha_1$  αντίστοιχα και μετράει την αντίστασή τους ίση με  $R_\pi = 2 \Omega$ . Όταν τους συνδέει σε σειρά βρίσκει αντίστασή  $R_\sigma = 10 \Omega$ . Να βρεθεί η ειδική αντίσταση του κάθε αγωγού.



## 8. ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

### Εισαγωγή

Ορισμένα υλικά στη φύση που είναι γνωστά ως μαγνήτες, παρατηρούνται να έλκονται ή να απωθούνται αυθόρμητα μεταξύ τους χωρίς αναγκαστικά να χρειάζονται κάποια προεργασία (όπως π.χ. το τρίψιμο στον ηλεκτρισμό). Συνήθως έχουν την μορφή μακρόστενων ράβδων. Για να μελετήσουμε τις ιδιότητες των μαγνητών, εκτελούμε το ιδεατό πείραμα του Σχήματος 8.1, όπου έχουμε αναρτήσει μια τέτοια ράβδο (μαγνήτη 1) από οροφή μέσω αβαρούς νήματος ώστε να μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα εκτελώντας κίνηση εκκρεμούς και φέρουμε σε εγγύτητα σε αυτήν μια δεύτερη πανομοιότυπη ράβδο (μαγνήτη 2).



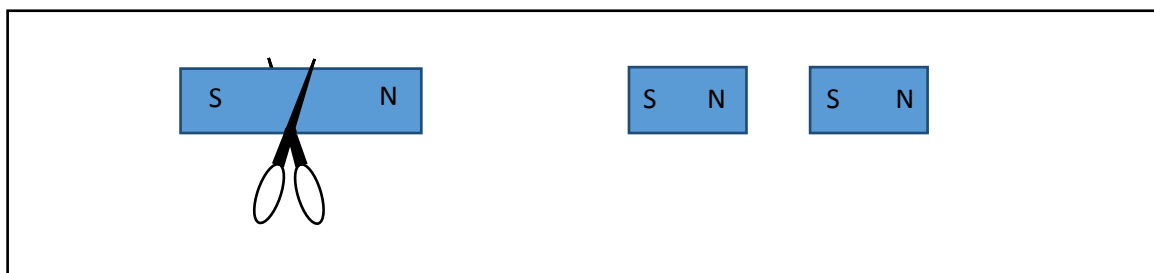
Σχήμα 8.1

Τα αποτελέσματα του πειράματος συνοψίζονται παρακάτω:

- Όταν πλησιάσουμε τον μαγνήτη 2 στον μαγνήτη 1, τότε αυτός εκτελεί κίνηση εκκρεμούς είτε αποκλίνοντας από τον μαγνήτη 1 είτε συγκλίνοντας προς αυτόν. Επομένως εμφανίζεται δύναμη μεταξύ των δυο μαγνητών η οποία μπορεί να είναι είτε α) άπωση είτε β) έλξη.
- Ποιοτικά περιμένουμε το μέτρο της δύναμης αυτής να είναι ανάλογο με την γωνία που σχηματίζει το νήμα με την κατακόρυφο. Παρατηρούμε ότι η γωνία αυτή μειώνεται όσο απομακρύνουμε τον μαγνήτη 2 από τον μαγνήτη 1 και άρα συμπεραίνουμε ότι όπως και με τον ηλεκτρισμό, το μέτρο της δύναμης σχετίζεται με μια αντίστροφη σχέση με την απόσταση μεταξύ των δυο μαγνητών
- Εάν μια από τις δυο μαγνητικές ράβδους αλλάξει προσανατολισμό έτσι ώστε τα δυο άκρα της να ανταλλάξουν θέσεις (όπως το σημείο A στον μαγνήτη 1 στο σχήμα), τότε η άπωση αλλάζει σε έλξη και αντιστρόφως.
- Τέλος, εάν και οι δυο ράβδοι αλλάξουν προσανατολισμό, τότε η δύναμη μεταξύ τους δεν αλλάζει χαρακτήρα δηλαδή η άπωση παραμένει άπωση και η έλξη παραμένει έλξη.

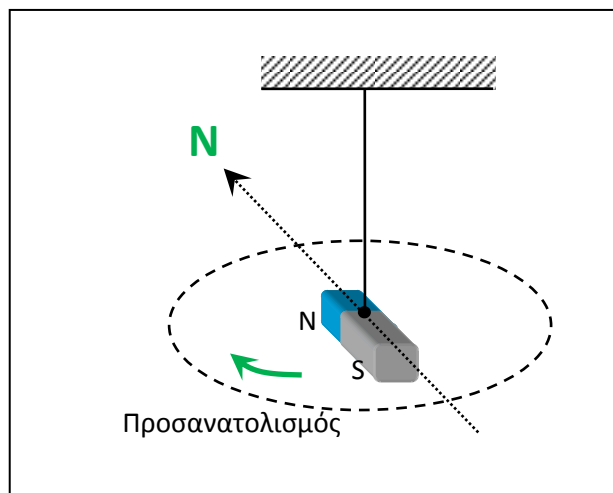
Μπορούμε να εξηγήσουμε αυτά τα φαινόμενα εάν δανειστούμε την εμπειρία που αποκτήσαμε στον ηλεκτρισμό. Κατ' αρχάς αφού συναντάμε τόσο άπωση όσο και έλξη, θα κάνουμε και εδώ την παραδοχή ότι και στο μαγνητισμό υπάρχουν δυο ειδών φορτία με τα ετερόσημαφορτία να έλκονται και τα ομόσημα να απωθούνται. Στον μαγνητισμό όμως αντί να ονομάζουμε τα φορτία αυτά θετικά (+) και αρνητικά (-), τα ονομάζουμε βόρειους (N) και νότιους (S) πόλους (από το North και South στα Αγγλικά). Εφόσον με αλλαγή του προσανατολισμού η δύναμη αλλάζει χαρακτήρα, πρέπει να δεχθούμε ότι στους μαγνήτες είναι παρόντες και οι δυο πόλοι, δηλαδή η μια πλευρά του μαγνήτη είναι τύπου N και η άλλη τύπου S. Αυτός είναι και ο λόγος που στο Σχήμα 8.1 σχεδιάσαμε τους μαγνήτες με δυο χρώματα. Έτσι έστω ότι το σκούρο χρώμα αντιστοιχεί σε N και το ανοιχτό χρώμα σε S. Τότε στην περίπτωση στα αριστερά του Σχήματος 8.1, όταν πλησιάζουμε τους δυο μαγνήτες με τον προσανατολισμό που φαίνεται, έρχονται οι δυο πόλοι N κοντά και έτσι έχουμε ισχυρή άπωση. Βέβαια υπάρχει και έλξη μεταξύ των ετερόσημων ζευγαριών N-S των δυο μαγνητών αλλά η απόσταση των αντίστοιχων πόλων N και S είναι μεγαλύτερη από την απόσταση των πόλων N και N και έτσι υπερσχύει η δεύτερη αλληλεπίδραση (θυμηθείτε την εξάρτηση της δύναμης με την απόσταση που είδαμε στο πείραμα). Εάν τώρα αλλάξουμε ταυτόχρονα των προσανατολισμό και των δυο μαγνητών π.χ. στην περίπτωση της άπωσης του Σχήματος 8.1α, τότε οι δυο πόλοι N-N θα αντικατασταθούν από του πόλους S-S και έτσι και πάλι θα έχουμε άπωση.

Επομένως οι μαγνήτες εμφανίζονται να έχουν επάνω τους δυο αντίθετους πόλους και μάλιστα ίσου μέτρου (π.χ. η δύναμη μεταξύ N-N και μεταξύ N-S στο πείραμα του Σχήματος 8.1 είναι ίση κατά μέτρο εάν οι σχετικές αποστάσεις των πόλων είναι ίσες μεταξύ τους). Οι μαγνήτες δηλαδή συμπεριφέρονται ως "δίπολα". Γιατί όμως να χρησιμοποιούμε δίπολα στο πείραμά μας; Καλό θα ήταν να απομονώναμε τον ένα πόλο και να τον χρησιμοποιούσαμε ως μαγνητικό δοκιμαστικό φορτίο. Για κάποιο μυστηριώδη τρόπο όμως, η φύση δεν μας αφήνει να απομονώσουμε ένα πόλο N από ένα πόλο S. Πάντα εμφανίζονται σε ζεύγη N-S, ακόμα και εάν κόψουμε ένα μαγνήτη στη μέση, νέοι πόλοι τύπου N και S εμφανίζονται μαζί όπως φαίνεται και στο παρακάτω Σχήμα 8.2.



Σχήμα 8.2

Ένα άλλο γνωστό φαινόμενο των μαγνητών είναι ότι προσανατολίζονται γεωγραφικά. Ο πόλος N ονομάζεται Βόρειος (North) επειδή στρέφεται πάντοτε προς τον γεωγραφικό βορρά. Έτσι εάν έχουμε έναν αιωρούμενο μαγνήτη όπως στο Σχήμα 8.3 (για την αποφυγή τριβών), τότε απουσία άλλων μαγνητών τριγύρω του, ο μαγνήτης θα περιστραφεί έτσι ώστε ο πόλος του N να δείχνει προς τον βορρά.

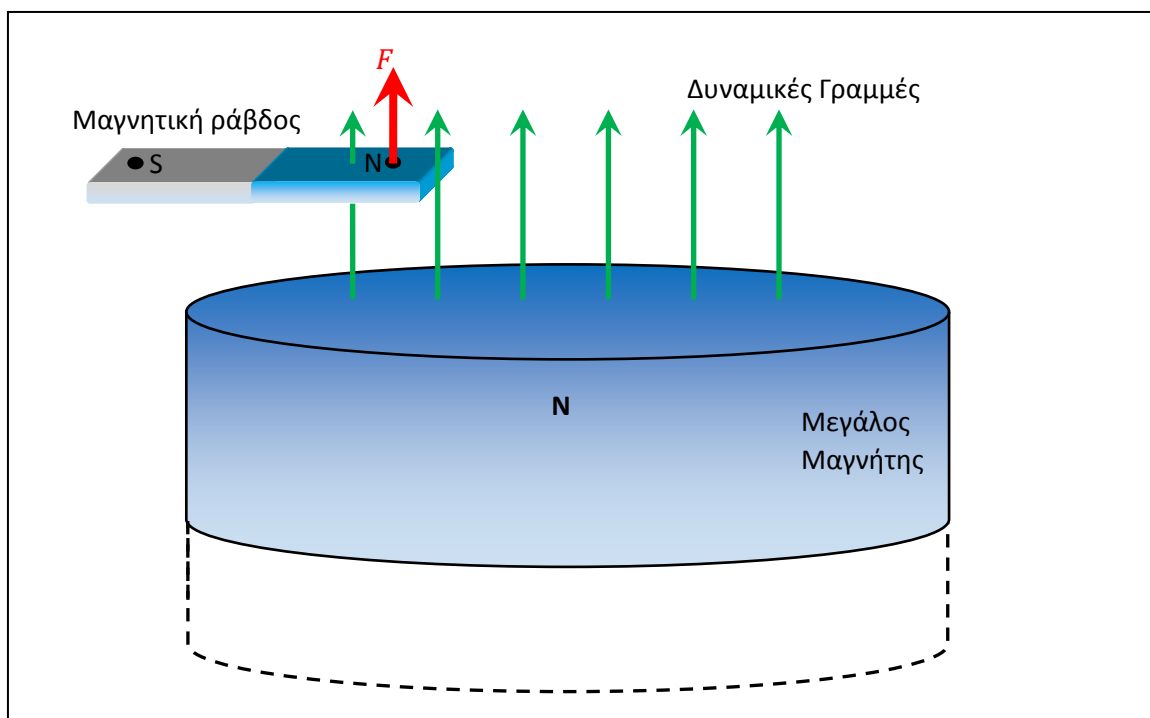


Σχήμα 8.3

## Μαγνητικό Πεδίο

Παρόλο που δεν μπορούμε να ξεχωρίσουμε τους βόρειους με τους νότιους πόλους στον ίδιο μαγνήτη, το πείραμα δείχνει ότι όταν χρησιμοποιούμε στενόμακρες ράβδους, οι πόλοι εντοπίζονται στις άκρες των ράβδων και συμπεριφέρονται ως σημειακοί. Έτσι εάν φέρουμε τον βόρειο πόλο μιας τέτοιας ράβδου κοντά σε έναν άλλο βόρειο πόλο ενός μεγάλου μαγνήτη, όπως στο Σχήμα 8.4, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο πόλος αυτός παίζει το ρόλο του "δοκιμαστικού πόλου", δηλαδή ρόλου ανάλογου με του δοκιμαστικού φορτίου στον ηλεκτρισμό και δέχεται μια δύναμη  $\vec{F}$  από το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ο μεγάλος μαγνήτης. Μπορούμε έτσι να ορίσουμε το μαγνητικό πεδίο  $\vec{B}$  του μεγάλου μαγνήτη να ισούται με την δύναμη  $\vec{F}$  που δρα στον δοκιμαστικό πόλο δια το μαγνητικό φορτίο του πόλου, το οποίο βέβαια δεν το έχουμε ορίσει ακόμα και δεν του έχουμε δώσει μονάδες. Παρότι που υπάρχει τέτοιος ορισμός στον μαγνητισμό, θα τον χρησιμοποιήσουμε μόνο ποιοτικά για να ορίσουμε τις δυναμικές γραμμές (Δ.Γ.) του  $\vec{B}$ , ακριβώς όπως κάναμε και στον ηλεκτρισμό. Οι κανόνες για τον σχεδιασμό των μαγνητικών δυναμικών γραμμών είναι εντελώς παρόμοιοι με αυτούς των ηλεκτρικών δυναμικών γραμμών, συγκεκριμένα:

1. Ξεκινούν από τους βόρειους πόλους και καταλήγουν στους νότιους πόλους. Έχουν δηλαδή φορά και για αυτό τις σχεδιάζουμε με ένα βέλος
2. Δεν τέμνονται πουθενά μεταξύ τους
3. Το μαγνητικό πεδίο  $\vec{B}$  σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου είναι εφαπτόμενο στη Δ.Γ. που περνά από αυτό το σημείο
4. Η πυκνότητα των δυναμικών γραμμών σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου είναι ανάλογη του μέτρου  $|\vec{B}|$  σε αυτό το σημείο

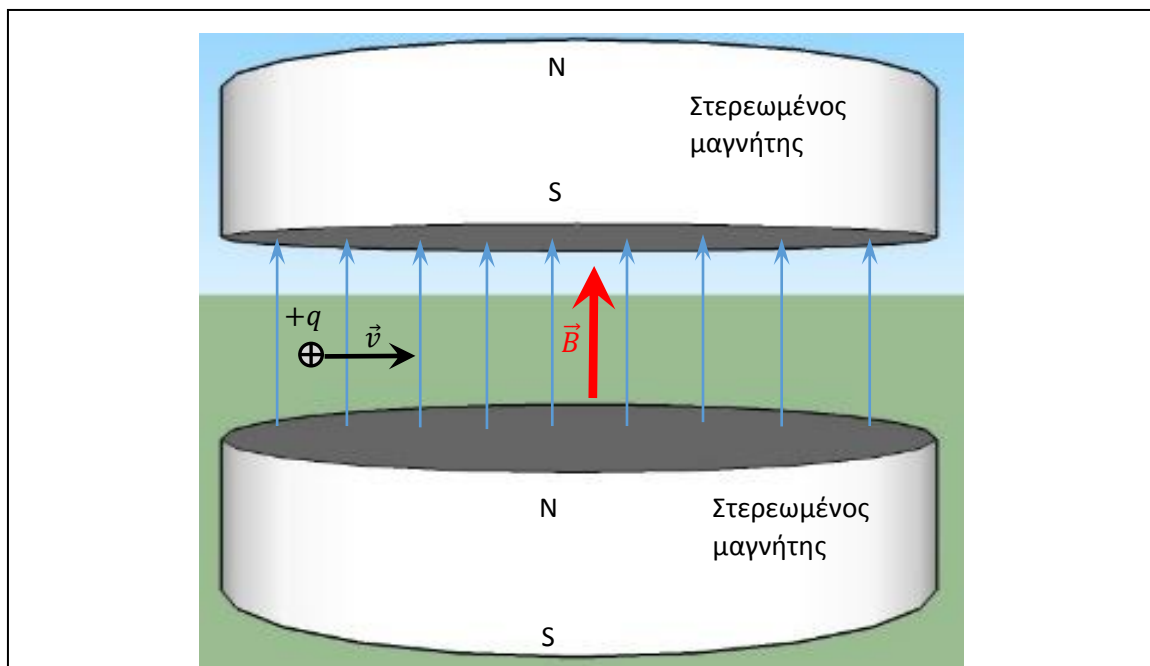


Σχήμα 8.4

Σε αναλογία με τον ηλεκτρισμό, τα  $\vec{B}$  και  $\vec{F}$  έχουν την ίδια φορά για "θετικό" δοκιμαστικό πόλο N, όπως στο Σχήμα 8.4. (και αντίθετη για S δοκιμαστικό πόλο). Έτσι μπορούμε να εξηγήσουμε εύκολα τη φορά των δυναμικών γραμμών στο σχήμα. Αφού ο βόρειος πόλος της μαγνητικής ράβδου θα απωθηθεί προς τα πάνω από τον βόρειο πόλο του μεγάλου μαγνήτη, οι δυναμικές γραμμές θα είναι ευθείες με φορά προς τα πάνω και κάθετες στην επιφάνειά του μεγάλου μαγνήτη. Επιπλέον, εάν υποθέσουμε ότι οι μαγνητικές ιδιότητες του μεγάλου μαγνήτη είναι ομοιόμορφα καταναμημένες επάνω στην επιφάνειά του (πράγμα το οποίο ισχύει αφού ο μαγνητισμός είναι ατομικό φαινόμενο), τότε περιμένουμε οι δυναμικές γραμμές να είναι και ισαπέχουσες μεταξύ τους (ομοιογενές πεδίο). Ποσοτικά θα ορίσουμε το  $\vec{B}$  στο επόμενο εδάφιο γιατί υπάρχει ευκολότερος τρόπος.

## Δύναμη σε κινούμενο φορτίο μέσα σε μαγνητικό πεδίο

Υπάρχει σύνδεση μεταξύ του μαγνητισμού και του ηλεκτρισμού; Για να εξετάσουμε αυτό το ερώτημα θα φέρουμε ένα θετικό ηλεκτρικό φορτίο  $+q$  μέσα σε χώρο όπου υπάρχει μαγνητικό πεδίο, όπως στο Σχήμα 8.5 στον χώρο μεταξύ των δυο αντίθετων πόλων δυο μεγάλων κυλινδρικών μαγνητών. Το πείραμα δείχνει ότι εάν απλά τοποθετήσουμε το φορτίο σε οποιοδήποτε σημείο αυτού του χώρου, το φορτίο δεν φαίνεται να αλληλεπιδρά με το μαγνητικό πεδίο, παρότι που αυτό είναι αρκετά ισχυρό. Εάν όμως προσδώσουμε στο φορτίο  $+q$  κάποια ταχύτητα  $v$ , τότε τα πράγματα αλλάζουν και εμφανίζεται μια δύναμη  $F$  επάνω στο φορτίο. Επομένως υπάρχει σύνδεση μεταξύ του μαγνητισμού και του ηλεκτρισμού με την προϋπόθεση ότι το φορτίο πρέπει να είναι κινούμενο.



Σχήμα 8.5

Για να μελετήσουμε διεξοδικά αυτή τη νέα δύναμη, εκτοξεύουμε το φορτίο κάθετα στις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου, οι οποίες όπως εξηγήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, περιμένουμε να είναι κάθετες στις επιφάνειες των δυο μαγνητών, ισαπέχουσες και με φορά από τον βόρειο πόλο N του ενός μαγνήτη προς τον νότιο πόλο S του άλλου μαγνήτη. Ποσοτικώς μπορούμε να μετρήσουμε την δύναμη από την αλλαγή της κινητικής κατάστασης του φορτίου. Το πείραμα αναδεικνύει ότι η δύναμη που ασκείται στο φορτίο έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

- Είναι ανάλογη της ταχύτητας  $v$  του φορτίου
- Είναι ανάλογη του φορτίου  $q$
- Είναι ανάλογη του μαγνητικού πεδίου  $B$  δηλαδή ισχυρότεροι μαγνήτες προκαλούν μεγαλύτερες αποκλίσεις στην τροχιά του φορτίου.

Όσον αφορά τη φορά της δύναμης, στο συγκεκριμένο πείραμα είναι κάθετη στη σελίδα με φορά προς τα έξω της σελίδας (θα συζητήσουμε παρακάτω πιο αναλυτικά για τη φορά της δύναμης). Συγκεντρώνοντας όλα τα παραπάνω στοιχεία, μπορούμε να γράψουμε για το μέτρο της δύναμης την παρακάτω σχέση:

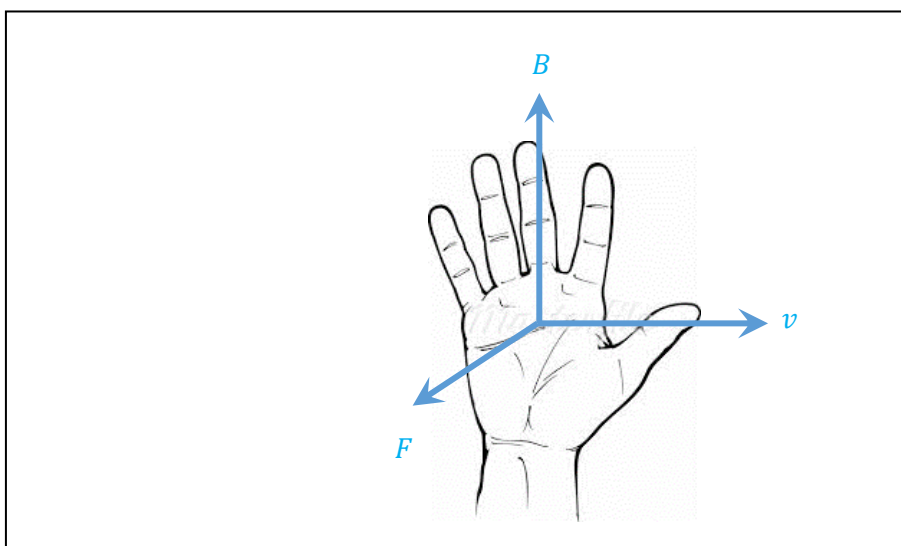
$F = qvB$	Δύναμη σε κινούμενο φορτίο μέσα σε πεδίο $B$	8.1
-----------	---	-----

Προσέξτε ότι στην παραπάνω σχέση το  $B$  το έχουμε ορίσει στο προηγούμενο εδάφιο μόνο ποιοτικώς, δεν του έχουμε δηλαδή αναθέσει μονάδες και ούτε και τρόπο μέτρησής του. Επειδή στην παραπάνω σχέση, όλα τα άλλα μεγέθη  $F$ ,  $q$  και  $v$  είναι άμεσα μετρήσιμα, την χρησιμοποιούμε ως τον ορισμό του μαγνητικού πεδίου  $B$  αριθμητικώς. Οι μονάδες του είναι το *Tesla* το οποίο από την Εξ. 8.1 ισούται με:

$$1 T = \frac{N \cdot s}{C \cdot m}$$

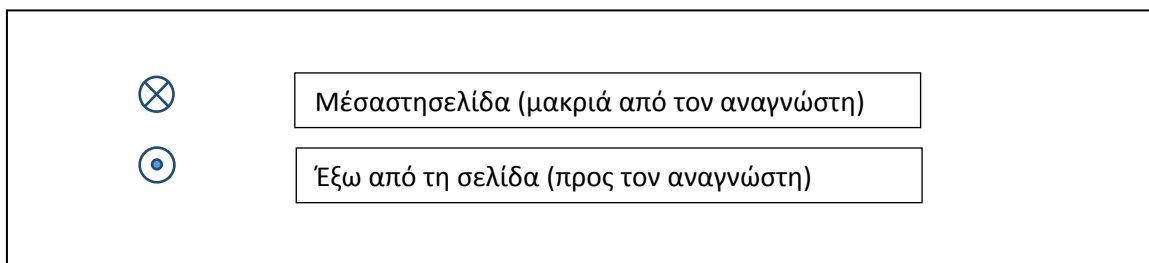
Δηλαδή το ένα *Tesla* είναι το μέτρο εκείνου του μαγνητικού πεδίου το οποίο ασκεί δύναμη ενός *Newton* σε ένα φορτίο ενός *Coulomb* όταν αυτό εισέλθει κάθετα προς τις δυναμικές του γραμμές με ταχύτητα ίση με  $1 \text{ m/s}$ .

Η φορά της δύναμης παρουσιάζει επίσης ενδιαφέρον. Μεταβάλλοντας στο παραπάνω πείραμα τον προσανατολισμό των δυο μαγνητών ώστε να αλλάξει ο προσανατολισμός του  $\vec{B}$  αλλά συνεχίζοντας να εκτοξεύουμε το φορτίο πάντα κάθετα στις δυναμικές γραμμές του πεδίου, αντιλαμβανόμαστε πειραματικώς ότι η δύναμη παραμένει πάντα κάθετη τόσο στο διάνυσμα της ταχύτητας  $\vec{v}$  όσο και στο πεδίο  $\vec{B}$ . Η ακριβής φορά της δύναμης για θετικό σημειακό φορτίο δίνεται από τον "κανόνα του δεξιού χεριού" που εικονίζεται στο Σχήμα 8.6: Τοποθετούμε την ταχύτητα κατά μήκος του αντίχειρά μας ο οποίος πρέπει να είναι ανοικτός όπως στο σχήμα και το μαγνητικό πεδίο κατά μήκος των άλλων τεσσάρων δακτύλων. Η δύναμη τότε είναι κάθετη στην παλάμη, με την φορά που "τείνει η παλάμη να σπρώξει κάποιο αντικείμενο". Για αρνητικόκινούμενο φορτίο, ο κανόνας είναι ο ίδιος αλλά πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το αριστερό μας χέρι.

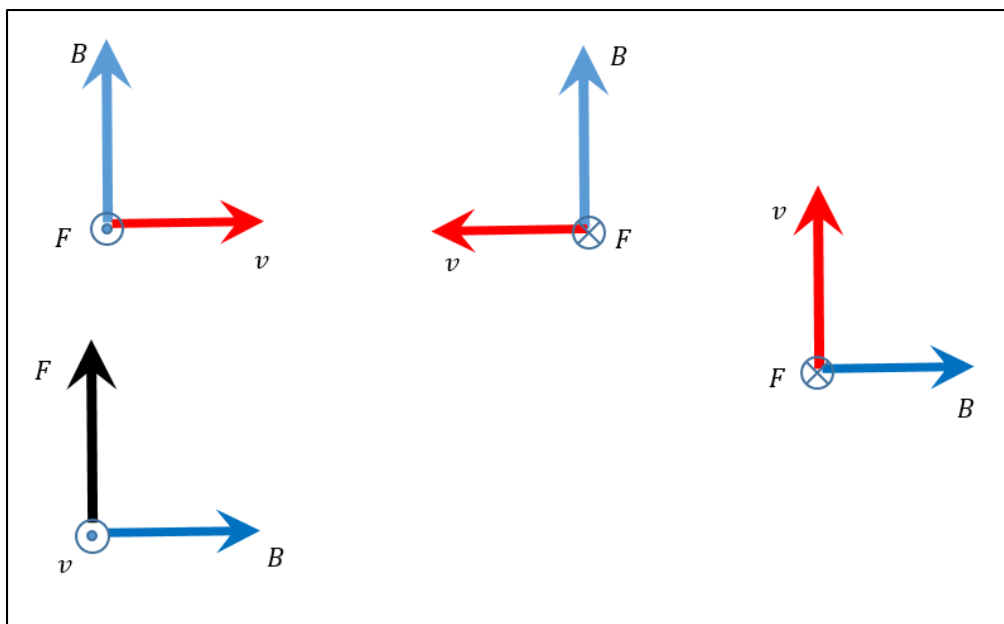


Σχήμα 8.6

Ο μαγνητισμός είναι τρισδιάστατο φαινόμενο με τα 3 διανύσματα σε ξεχωριστούς άξονες. Για την ευκολία απεικόνισης θα χρησιμοποιηθεί ο παρακάτω συμβολισμός:



Στο παρακάτω Σχήμα 8.7 φαίνονται διάφορα παραδείγματα όπου με τη χρήση του κανόνα του δεξιού χεριού μπορούμε να βρούμε τη φορά της δύναμης:

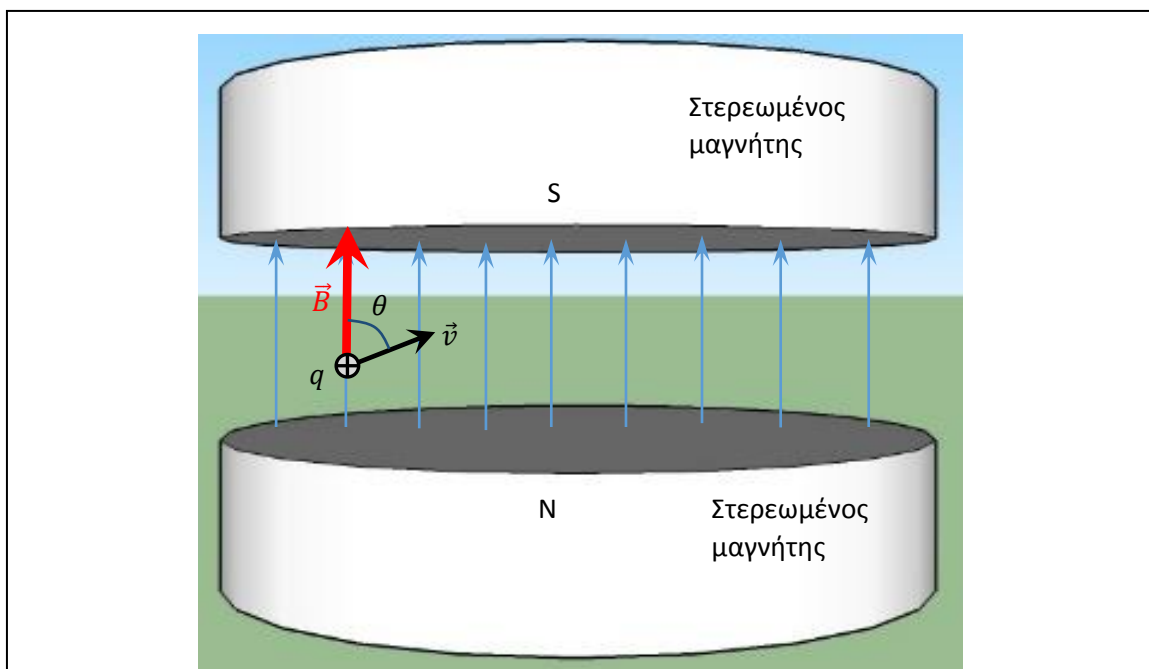


Σχήμα 8.7

Μέχρι τώρα εκτοξεύαμε το φορτίο κάθετα στις δυναμικές γραμμές του πεδίου. Τι γίνεται εάν η ταχύτητα του φορτίου τέμνει το μαγνητικό πεδίο υπό γωνία  $\theta$  όπως στο Σχήμα 8.8; Τότε στην Εξ. 8.1 εμφανίζεται ένας επιπλέον παράγοντας  $\sin\theta$ :

$F = qvB\sin\theta$	Δύναμη σε κινούμενο φορτίο υπό γωνία μέσα σε πεδίο $B$ .	8.2
---------------------	---	-----

Παρατηρήστε ότι  $F = 0$  όταν  $\theta = 0$  ή  $\theta = 180^\circ$ . Η εξήγηση είναι αυτή που δόθηκε παραπάνω, ο μαγνητισμός είναι τρισδιάστατο φαινόμενο και εάν προσπαθήσουμε να τον περιορίσουμε σε δυο διαστάσεις φέρνοντας τους δυο άξονες μαζί (το  $\vec{B}$  και το  $\vec{v}$ ), τότε η δύναμη  $F$  καταρρέει.



Σχήμα 8.8

Για την περίπτωση της Εξίσωσης 8.2, η φορά της δύναμης για θετικό σημειακό φορτίο δίνεται και πάλι από τον "κανόνα του δεξιού χεριού" του Σχήματος 8.6, όπου όμως τώρα ο αντίχειρας αναπαριστά την κάθετη συνιστώσα  $v_{\perp}$  της ταχύτητας  $\vec{v}$  επάνω στο μαγνητικό πεδίο  $\vec{B}$ .

### Παράδειγμα 8.1.

Ένα πρωτόνιο ( $q = +1.6 \times 10^{-19} C$ ) ταξιδεύει προς τα δεξιά μέσα στη σελίδα και εισέρχεται σε περιοχή του χώρου όπου υπάρχει μαγνητικό πεδίο έντασης  $0.4 T$  με φορά προς τα πάνω (επίσης στη σελίδα). Εάν η ταχύτητα του πρωτονίου είναι  $2 \times 10^6 m/s$ , ποια είναι η μαγνητική δύναμη που του ασκείται από το πεδίο;

#### Λύση:

Από τα δεδομένα έχουμε  $v = 2 \times 10^6 m/s$  προς τα δεξιά, φορτίο  $q = 1.6 \times 10^{-19} C$  και μαγνητικό πεδίο  $B = 0.4 T$  προς τα πάνω. Από την Εξ. 8.1

$$F = qvB = 1.6 \times 10^{-19} \times 2 \times 10^6 \times 0.4 = 1.28 \times 10^{-13} N$$

Από τον κανόνα του δεξιού χεριού βρίσκουμε για την κατεύθυνση της δύναμης ότι είναι προς τα έξω της σελίδας

### Παράδειγμα 8.2.

Ένα σωματίδιο α (2 πρωτόνια + 2 νετρόνια) εισέρχεται με ταχύτητα  $3.6 \times 10^6 m/s$  σε περιοχή του χώρου όπου υπάρχει μαγνητικό πεδίο έντασης  $0.12 T$ . Ποια είναι η μαγνητική δύναμη που του ασκείται από το πεδίο εάν η ταχύτητά του σχηματίζει γωνία  $35^\circ$  με το μαγνητικό πεδίο;

#### Λύση:

Τα νετρόνια είναι ουδέτερα οπότε όλο το φορτίο προέρχεται από τα πρωτόνια τα οποία έχουν κατά μέτρο ίσο φορτίο με τα ηλεκτρόνια. Εφόσον υπάρχουν δυο πρωτόνια τότε υπάρχει συνολικό φορτίο

$$q = 2 \times 1.6 \times 10^{-19} = 3.2 \times 10^{-19} C$$

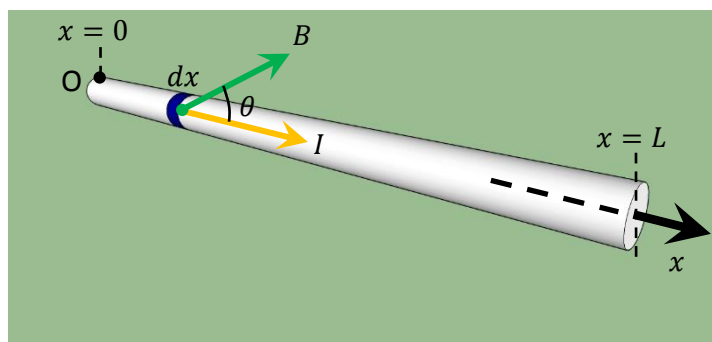
Από τα υπόλοιπα δεδομένα έχουμε  $v = 3.6 \times 10^6 m/s$ ,  $B = 0.12 T$  και  $\theta = 35^\circ$ . Από την Εξ. 8.2

$$F = qvB \sin \theta = 3.2 \times 10^{-19} \times 3.6 \times 10^6 \times 0.12 \times \sin \theta = 7.9 \times 10^{-14} N$$

## Δύναμη σε ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό μέσα σε μαγνητικό πεδίο

Εφόσον μέσα σε ρευματοφόρους αγωγούς υπάρχουν κινούμενα φορτία, τότε όταν οι αγωγοί αυτοί βρεθούν μέσα σε μαγνητικά πεδία, θα ασκηθεί σύμφωνα με την Εξ. 8.6 μια μαγνητική δύναμη επάνω στα φορτία αυτά και επομένως και μια συνολική δύναμη επάνω στον αγωγό. Θεωρήστε στο Σχήμα 8.11 έναν ευθύγραμμο αγωγό μήκους  $L$  ο οποίος κείται επί του άξονα  $x$ , με το ένα άκρο του να συμπίπτει με την αρχή των αξόνων  $O$ . Έστω ένα στοιχειώδες μήκος  $dx$  αυτού του αγωγού μέσα από το οποίο περνάει φορτίο  $dq$  στη διάρκεια του χρόνου  $dt$ .





Σχήμα 8.11

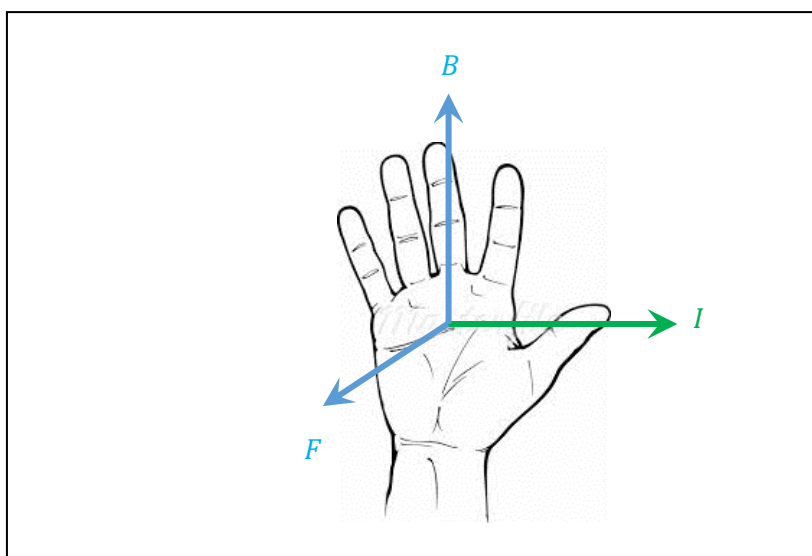
Η ταχύτητα του φορτίου  $dq$  ισούται με  $v = dx/dt$  και εάν αυτό βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο  $B$ , τότε από την Εξ. 8.2θα του ασκηθεί μια δύναμη με μέτρο:

$$dF = dqvB\sin\theta = dq \frac{dx}{dt} B\sin\theta = dx \frac{dq}{dt} B\sin\theta$$

Όπως φαίνεται από το σχήμα, η  $\theta$  είναι η γωνία μεταξύ του πεδίου  $B$  και του αγωγού και άρα και μεταξύ του  $B$  και της ταχύτητας  $v$ . Η ποσότητα  $I = dq/dt$  είναι το ρεύμα που διαπερνάει τον αγωγό και έτσι  $dF = dxIB\sin\theta$ . Εάν περαιτέρω το μαγνητικό πεδίο  $B$  είναι ομοιογενές, τότε η παραπάνω σχέση μπορεί να ολοκληρωθεί εύκολα κατά μήκος του αγωγού από το  $x = 0$  έως  $x = L$ , όπου  $L$  το μήκος του αγωγού, οδηγώντας στην

$F = BIL\sin\theta$	Δύναμη σε ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό μέσα σε ομοιογενές πεδίο $B$	8.7
---------------------	---	-----

Όσον αφορά στην φορά της δύναμης, χρησιμοποιούμε και πάλι τον κανόνα του δεξιού χεριού με το ρεύμα  $I$  να αντικαταστεί την ταχύτητα  $v$ , όπως φαίνεται και στο Σχήμα 8.12:



Σχήμα 8.12

Όπως και με το κινούμενο φορτίο, έχουμε  $F = 0$  όταν  $\theta = 0$  ή  $\theta = 180^\circ$ .

### Παράδειγμα 8.3.

Ένα σύρμα μήκους  $1\text{ mm}$  φέρει ρεύμα  $5.0\text{ A}$  και είναι κάθετο σε μαγνητικό πεδίο έντασης  $0.034\text{ T}$ . Ποια είναι η μαγνητική δύναμη στο σύρμα;

Λύση: Από τα δεδομένα

$$L = 1\text{ mm} = 10^{-3}\text{ m}, I = 5\text{ A}, B = 0.034\text{ T}, \text{γωνία} = 90^\circ \text{ (κάθετο στο πεδίο)} \Rightarrow \sin\theta = 1$$

Από την Εξ. 8.6

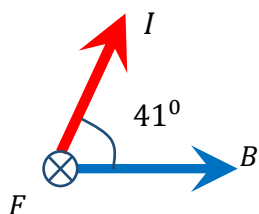
$$F = BIL = 1.7 \times 10^{-4}\text{ N}$$

### Παράδειγμα 8.4.

Ένα τμήμα σύρματος  $12\text{ εκατοστών}$  μεταφέρει ένα ρεύμα  $4.0\text{ A}$  με κατεύθυνση  $41^\circ$  βόρεια από ένα πεδίο  $B$  με φορά προς την ανατολή. Πόσο θα πρέπει να είναι το μέγεθος του πεδίου  $B$ , αν παράγει μια δύναμη  $5\text{ N}$  σε αυτό το τμήμα του σύρματος; Ποια είναι η κατεύθυνση αυτής της δύναμης;

Λύση:

Από τα δεδομένα :  $L = 0.12\text{ m}, I = 4\text{ A}$  βορειο-ανατολικά,  $F = 5\text{ N}, \theta = 41^\circ, B$  : προς ανατολή. Στη παρακάτω εικόνα φαίνεται η σχετική φορά του ρεύματος σε σχέση με το  $B$ .



Από απλή εφαρμογή της Εξ. 8.7 έχουμε

$$F = BIL\sin\theta \Rightarrow B = \frac{F}{IL\sin\theta} = 15.9\text{ T}$$

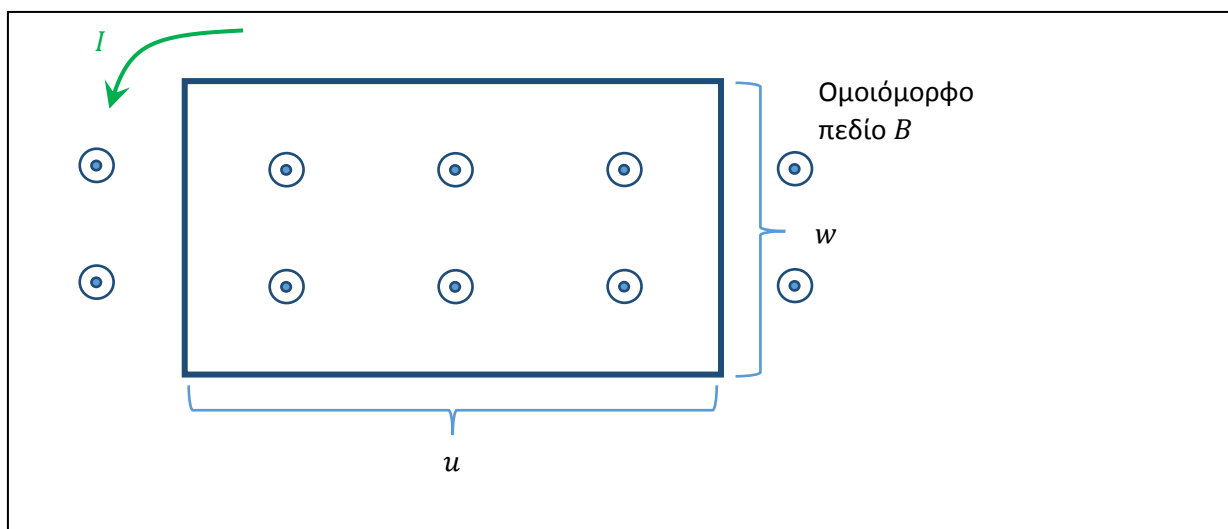
Από τον κανόνα του δεξιού χεριού μπορούμε να δούμε ότι η φορά της δύναμης είναι προς τα μέσα της σελίδας.

## Ροπή σε ρευματοφόρο βρόγχο μέσα σε μαγνητικό πεδίο

Όπως είδαμε στο προηγούμενο εδάφιο, δεν ασκείται καμιά δύναμη σε ένα ρευματοφόρο βρόγχο όταν βρίσκεται μέσα σε ομοιογενές μαγνητικό πεδίο. Παρόλα αυτά, μπορεί να του ασκείται ροπή από το πεδίο όπως θα δούμε παρακάτω. Για ευκολία θα πάρουμε ως βρόγχο ένα επίπεδο ορθογώνιο πλαίσιο μήκους  $u$  και πλάτους  $w$  και θα εξετάσουμε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις, ανάλογα με τον προσανατολισμό του μαγνητικού πεδίου  $B$  ως προς το πλαίσιο:

α) Το μαγνητικό πεδίο  $B$  είναι κάθετο στο επίπεδο του πλαισίου.

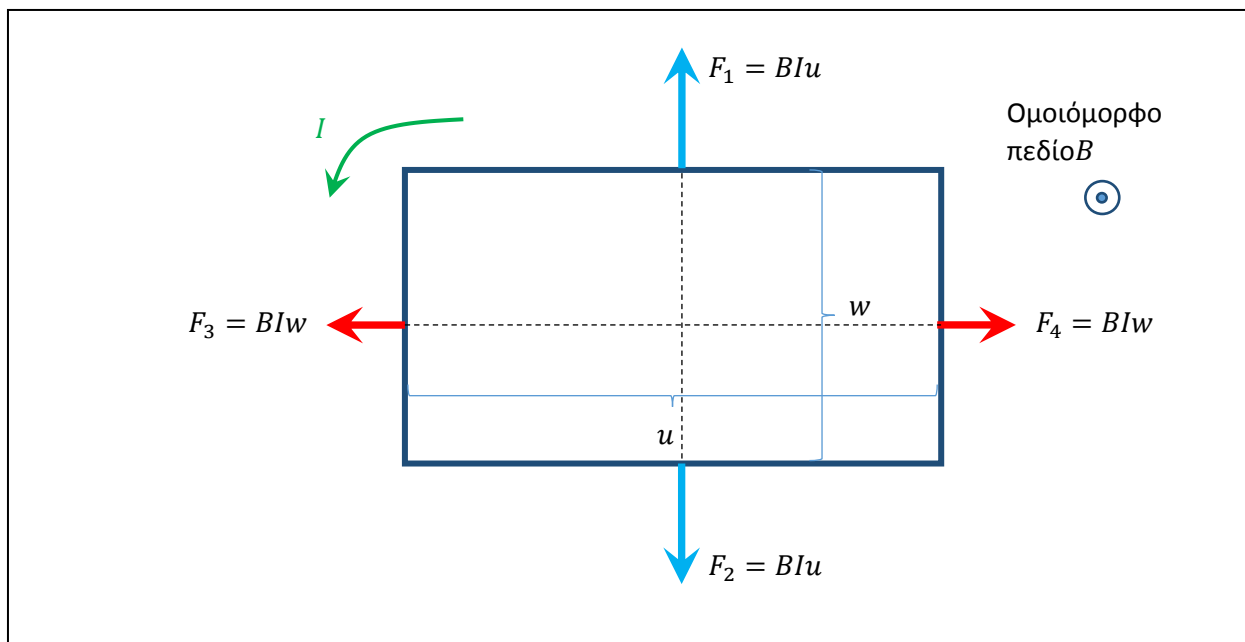
Η κατάσταση αυτή εικονίζεται στο Σχήμα 8.16. Θα θεωρήσουμε το πλαίσιο ως ένα σύνολο τεσσάρων ευθύγραμμων ρευματοφόρων αγωγών και θα εφαρμόσουμε την Εξ. 8.7 για τον καθένα ξεχωριστά. Έτσι υπάρχουν τέσσερις δυνάμεις όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.17, με τις φορές και τα μέτρα που δείχνονται. Σε όλες τις περιπτώσεις  $\theta = 90^\circ$  οπότε  $\sin\theta = 1$ .



Σχήμα 8.16

Παρατηρείστε ότι οι δυνάμεις αλληλοαναιρούνται σε ζεύγη και έτσι το σύνολο των δυνάμεων είναι μηδέν, σε πλήρη συμφωνία με αυτά που είπαμε στο προηγούμενο εδάφιο.

$$\Sigma F = 0$$



Σχήμα 8.17

Τα ζεύγη των ίσων και αντίθετων δυνάμεων όπως οι  $F_1$  και  $F_2$  στο σχήμα, είναι ευθυγραμμισμένες μεταξύ τους και όπως είδαμε στην Φυσική Ι δεν δημιουργούν κάποια ροπή, δηλαδή για το σύνολο των ροπών μπορούμε να γράψουμε:

$$\Sigma \tau = 0$$

Αυτό σημαίνει ότι η περίπτωση α είναι μια κατάσταση πλήρους ισορροπίας.

β) Το μαγνητικό πεδίο  $B$  είναι μέσα στο επίπεδο του πλαισίου.

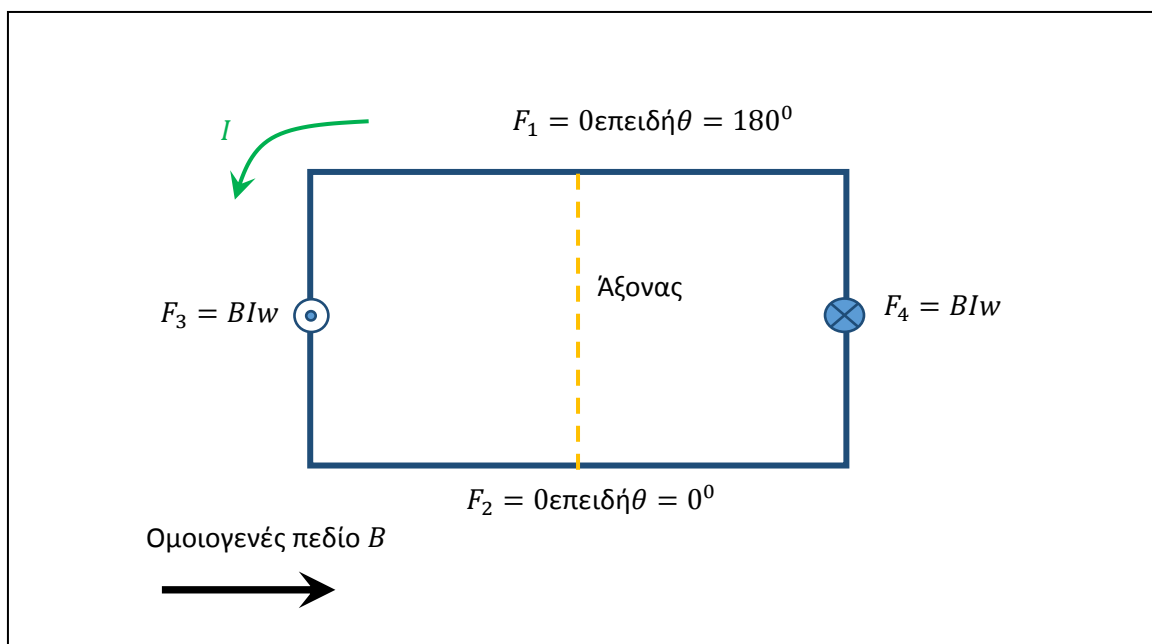
Αναφερόμενοι στο Σχήμα 8.18, θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου το μαγνητικό πεδίο είναι μέσα στο επίπεδο του πλαισίου και χάριν απλότητας θα το προσανατολίσουμε με το ένα ζευγάρι των πλευρών του πλαισίου, έστω των μακρύτερων πλευρών. Εργαζόμαστε όπως και στην περίπτωση α εφαρμόζοντας την Εξ. 8.7 για την κάθε πλευρά του πλαισίου ξεχωριστά. Έτσι υπάρχουν τέσσερις δυνάμεις όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.18 αλλά τώρα οι  $F_1$  και  $F_2$  είναι μηδέν επειδή η γωνία μεταξύ του ρεύματός  $I$  που διαρρέει τις πλευρές που δρουν αυτές οι δυο δυνάμεις και του μαγνητικού πεδίου είναι  $\theta = 0^\circ$  και  $\theta = 180^\circ$  αντίστοιχα. Αντιθέτως για τις άλλες δυο πλευρές  $\theta = 90^\circ$  και τα αντίστοιχα μέτρα των δυνάμεων  $F_3$  και  $F_4$  και οι φορές τους δείχνονται στο σχήμα. Όπως και στην περίπτωση α έχουμε

$$\Sigma F = 0$$

Αντιθέτως όμως με τη περίπτωση α, το ζεύγος των μη μηδενικών δυνάμεων  $F_3$  και  $F_4$  δεν είναι ευθυγραμμισμένες μεταξύ τους και άρα δημιουργούν ροπή γύρω από τον γεωμετρικό άξονα που εμφανίζεται με διακεκομμένη γραμμή στο σχήμα. Η κάθε δύναμη απέχει απόσταση  $u/2$  από τον άξονα και επομένως η συνολική ροπή ισούται με

$$\Sigma \tau = \frac{F_3 u}{2} + \frac{F_4 u}{2} = BIwu = BIA$$

όπου  $A = uw$  είναι το εμβαδό του πλαισίου.



Σχήμα 8.18

γ) Το μαγνητικό πεδίο  $B$  είναι με τυχαία γωνία  $\alpha$  ως προς το επίπεδο του πλαισίου.

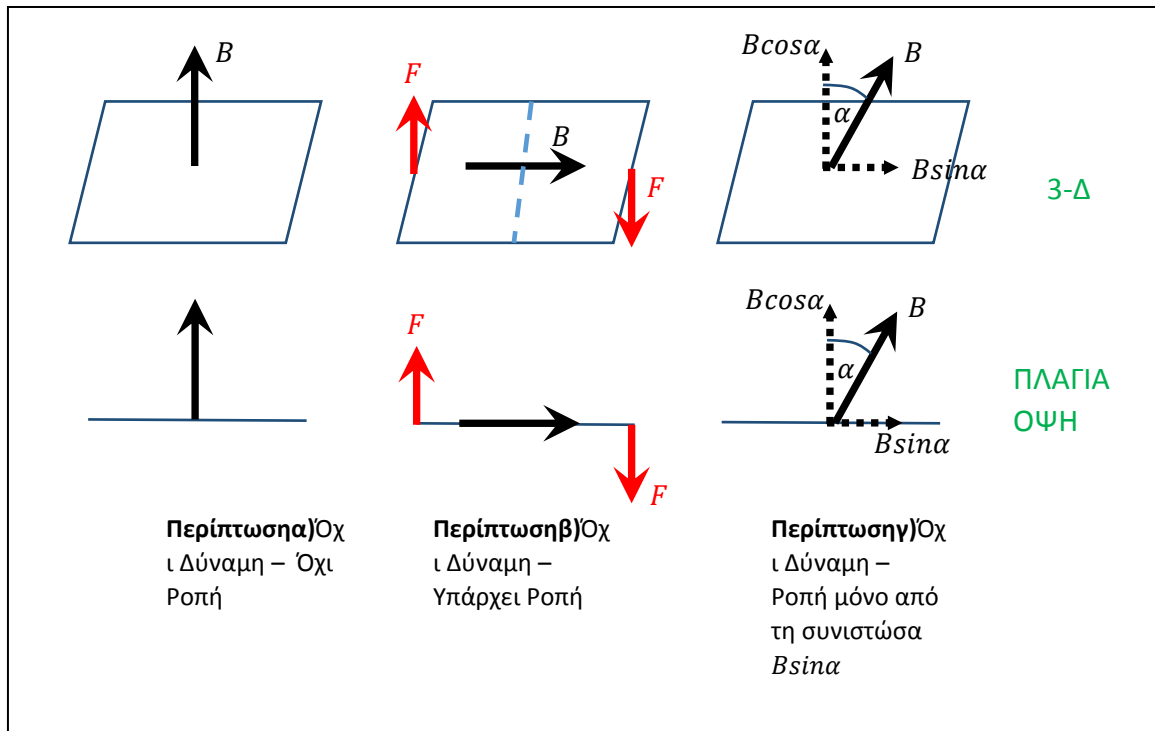
Όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.19, όταν το μαγνητικό πεδίο  $\vec{B}$  είναι ως προς τυχαία γωνία  $\alpha$  με την κάθετο του πλαισίου, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε αυτή τη περίπτωση ως τον συνδυασμό των περιπτώσεων  $\alpha$  και  $\beta$ . Αυτό γίνεται επειδή το  $\vec{B}$  μπορεί να αναλυθεί δυο συνιστώσες, τη  $B\sin\alpha$  κάθετη στο πλαίσιο, η οποία όπως είδαμε δεν επηρεάζει το πλαίσιο, και τη  $B\cos\alpha$  παράλληλη με το πλαίσιο, η οποία σύμφωνα με την περίπτωση  $\beta$  προσδίδει στο πλαίσιο ροπή ίση με  $(B\sin\alpha)IA$ . Εάν επιπλέον υπάρχει συνολικά ένας αριθμός  $N$  από όμοια πλαίσια συνδεδεμένα σε σειρά ώστε να διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα, τότε η ροπή επαυξάνει κατά  $N$  φορές και επομένως δίνεται από την έκφραση:

$\tau = NBIAsina$	Ροπή σε πλαίσιο μέσα σε ομοιογενές πεδίο $B$ με γωνία $\alpha$ ως προς την κάθετο	8.12
-------------------	---	------

Αυτή είναι και η πιο γενική περίπτωση και καλύπτει τις περιπτώσεις  $\alpha$  και  $\beta$  για γωνίες  $\alpha = 0$  και  $\alpha = 90^\circ$  αντίστοιχα. Προσέξτε ότι παρόλο που η απόδειξη της Εξ. 8.12 έγινε για ορθογώνιο πλαίσιο, ισχύει για βρόγχο οποιουδήποτε σχήματος όπως π.χ. κυκλικό, ελλειπτικό τετραγωνικό κ.λ.π. εάν χρησιμοποιήσουμε για  $A$  το αντίστοιχο εμβαδό, π.χ. για κύκλο  $A = \pi R^2$  κ.λ.π.

Η λογική του παρόντος εδαφίου είναι η αρχή λειτουργίας των ηλεκτροκινητήρων (μοτέρ) και η Εξ. 8.12 χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της ροπής και της ισχύος του κινητήρα. Συνήθως το  $B$  προέρχεται από κάποιο μόνιμο ισχυρό μαγνήτη, το ρεύμα από μπαταρία ή την παροχή της Δ.Ε.Η. ενώ το  $N$  μεγιστοποιείται με την περιέλιξη μεγάλου αριθμού σπειρών που διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα. Ο παρακάτω σύνδεσμος ενεργοποιεί ένα βίντεο επίδειξης της αρχής αυτής.

<https://www.youtube.com/watch?v=Ue6S8L4On-Y>

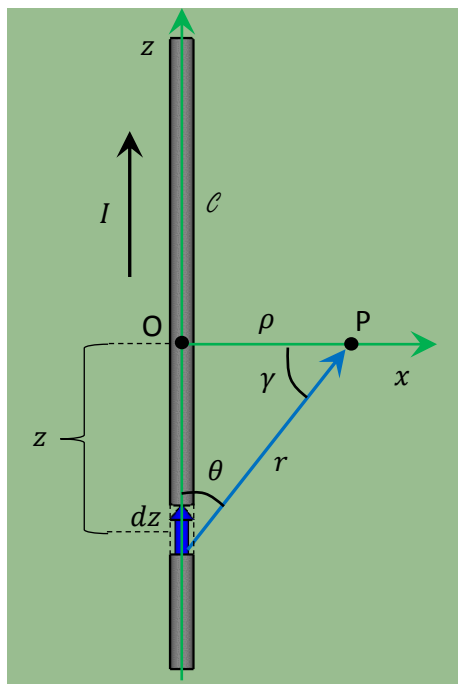


Σχήμα 8.19

## Ο νόμος των Biot-Savart- Παραγωγή μαγνητικού πεδίου από Ευθύγραμμο Ρευματοφόρο Αγωγό

Όπως είδαμε στα προηγούμενα εδάφια, όταν ένας ρευματοφόρος αγωγός βρεθεί μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο που παράγει π.χ. ένας μόνιμος μαγνήτης, τότε θα του ασκηθεί μια δύναμη από τον μαγνήτη. Σύμφωνα με την αρχή "δράσης-αντίδρασης" που είδαμε στη Φυσική Ι, θα πρέπει και ο ρευματοφόρος αγωγός να ασκεί μια ίση και αντίθετη δύναμη στον μόνιμο μαγνήτη. Αφού αυτή η δύναμη είναι μαγνητικής φύσης και αυτές οι δυνάμεις ασκούνται μέσω μαγνητικών πεδίων, αυτό σημαίνει ότι και ο ρευματοφόρος αγωγός παράγει και ο ίδιος ένα μαγνητικό πεδίο. Ποιο είναι το μέτρο και η φορά αυτού του πεδίου; Την απάντηση σε αυτό το ερώτημα μας την δίνει ο νόμος των Biot-Savart.

Η απλούστερη εφαρμογή του νόμου των Biot-Savart είναι η περίπτωση όπου έχουμε ευθύγραμμο αγωγό απείρου μήκους όπως στο Σχήμα 8.21 παρακάτω όπου ο αγωγός βέχει τοποθετηθεί κατά μήκος του άξονα  $z$  με το ρεύμα προς τα πάνω της σελίδας. Αναζητούμε το μαγνητικό πεδίο σε απόσταση  $\rho$  από τον αγωγό.



Σχήμα 8.21

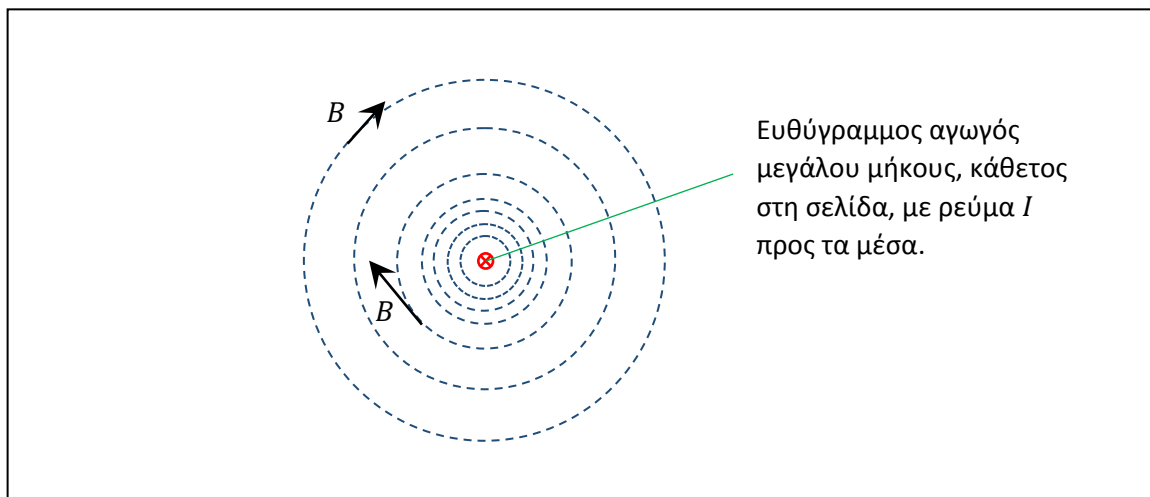
Το αποτέλεσμα είναι

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$	Μαγνητικό πεδίο – μακρύς ευθύγραμμος αγωγός	8.16
--------------------------------	---	------

όπου  $\mu_0$  είναι μια σταθερά που ονομάζεται "μαγνητική διαπερατότητα του κενού".

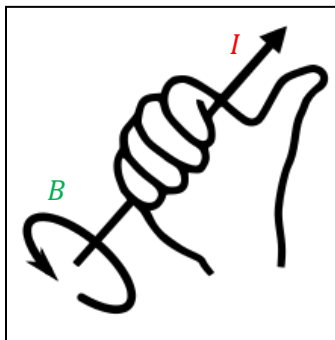
$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$	Σταθερά, σε μονάδες S.I.	8.14
-------------------------------	--------------------------	------

Το Σχήμα 8.23 δείχνει τη φορά του μαγνητικού πεδίου. Έτσι εάν ο αγωγός τέμνει την σελίδα κάθετα, τότε οι δυναμικές γραμμές είναι ομόκεντροι κύκλοι που βρίσκονται μέσα στη σελίδα με κοινό κέντρο επάνω στον αγωγό. Με άλλα λόγια, το  $\vec{B}$  περιτριγυρίζει τον αγωγό και δεν έχει σταθερή φορά.



Σχήμα 8.23

Η φορά του πεδίου δίνεται από έναν άλλο κανόνα του δεξιού χεριού που φαίνεται στο Σχήμα 8.24: Τοποθετούμε τον αντίχειρα του δεξιού χεριού κατά μήκος του ρεύματος και τότε η περιστροφή των άλλων τεσσάρων δακτύλων μας δείχνει την φορά του μαγνητικού πεδίου.



Σχήμα 8.24

Παράδειγμα 8.5:

Βρείτε την ένταση του μαγνητικού πεδίου 8 mm από ένα ευθύγραμμο αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα 14.0 A.

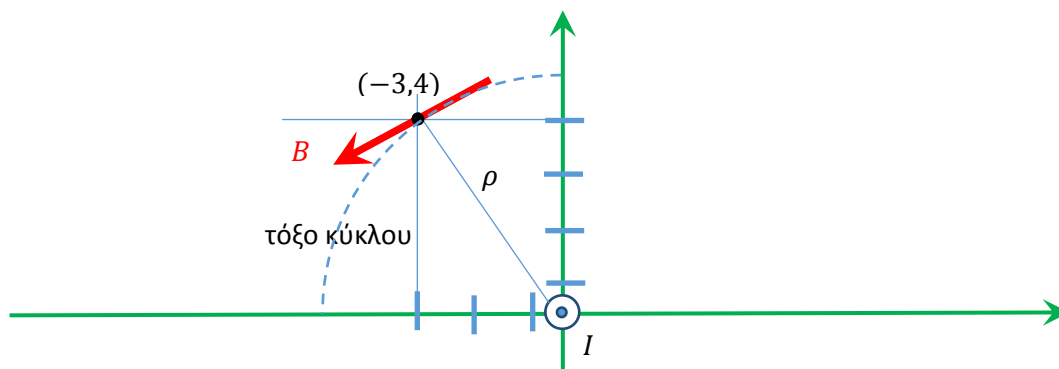
Λύση:

Τα δεδομένα είναι  $\rho = 8 \text{ mm} = 8 \times 10^{-3} \text{ m}$ ,  $I = 14 \text{ A}$ ,  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  οπότε από την Εξ. 8.16:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 14}{2 \times \pi \times 8 \times 10^{-3}} = 3.5 \times 10^{-4} \text{ T}$$

Παράδειγμα 8.6:

Ένα ευθύγραμμο μακρύ τμήμα σύρματος τέμνει την σελίδα κάθετα στο σημείο (0,0) και διαρρέεται από ρεύμα  $I = 5 \text{ A}$  με φορά έξω από τη σελίδα. Βρείτε το πεδίο  $\vec{B}$  στο σημείο (-3,4) (Σημείωση: όλες οι συντεταγμένες είναι σε cm)





**Λύση:**

Το Βείναι εφαπτόμενο στο τόξο του κύκλου με κέντρο το (0,0). Το σημείο (-3,4) απέχει απόσταση  $r$  από την αρχή των συντεταγμένων ίση με:

$$\rho = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5 \text{ cm} = 0.05 \text{ m}$$

Από την Εξ. 8.16

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 5}{2 \times \pi \times 5 \times 10^{-2}} = 2 \times 10^{-5} \text{ T}$$

## Δύναμη μεταξύ ρευματοφόρων αγωγών

Θεωρήστε στο Σχήμα 8.25 παρακάτω δυο ευθύγραμμους παράλληλους ρευματοφόρους αγωγούς μεγάλου μήκους 1 και 2 σε απόσταση  $\rho$  μεταξύ τους. Ο αγωγός διαρρέονται από ρεύμα  $I_1$  και  $I_2$  αντίστοιχα. Μπορούμε να θεωρήσουμε τον αγωγό 1 ως μια πηγή η οποία παράγει μαγνητικό πεδίο  $B_1$  στην περιοχή του αγωγού 2 και σύμφωνα με αυτά που ξέρουμε, αυτό το πεδίο θα ασκήσει μια δύναμη  $F_{12}$  στον ρευματοφόρο αγωγό 2. Στο παρόν εδάφιο θα υπολογίσουμε την δύναμη αυτή μεταξύ των δυο αυτών αγωγών. Σύμφωνα με την Εξ. 8.16, ο αγωγός 1 θα δημιουργήσει ένα μαγνητικό πεδίο ίσο με

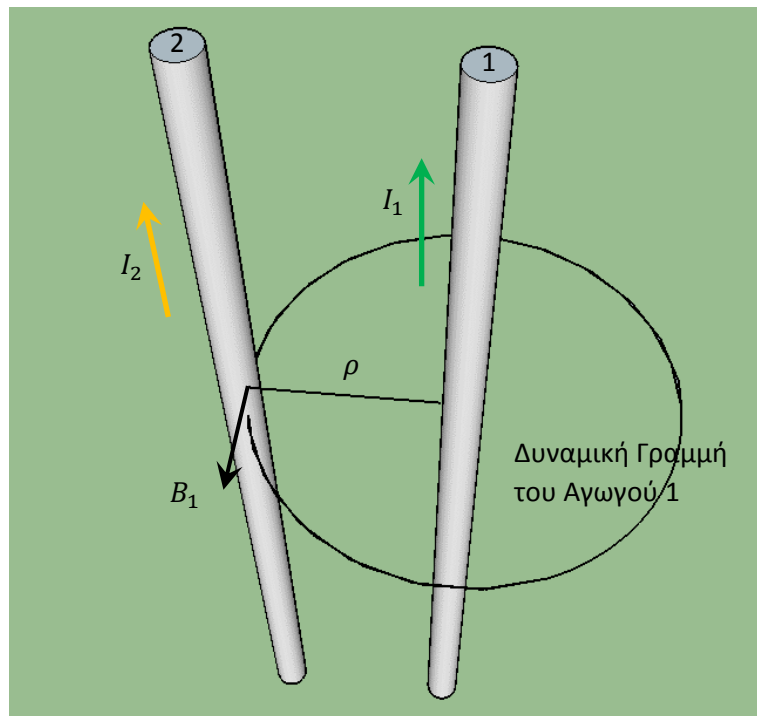
$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho}$$

σε απόσταση  $\rho$  από αυτόν, με τη φορά που φαίνεται στο σχήμα, δηλαδή εφαπτόμενο στην δυναμική γραμμή η οποία όπως γνωρίζουμε είναι ένας κύκλος γύρω από τον 1. Επίσης το  $B_1$  τέμνει κάθετα τον 2 και παραμένει σταθερό εάν διατρέξουμε τον αγωγό 2 κατά το μήκος του αφού για παράλληλους αγωγούς δεν αλλάζει η απόσταση  $\rho$  μεταξύ τους. Έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. 8.8, η οποία ισχύει μόνο για σταθερό μαγνητικό πεδίο, με γωνία  $\theta = 90^\circ$  στο εξωτερικό γινόμενο. Εάν θεωρήσουμε ένα κομμάτι του αγωγού 2 με μήκος  $L$ , τότε η δύναμη που θα ασκηθεί πάνω του ισούται με

$$F_{21} = I_2 L B_1 = I_2 L \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho}$$

Λόγω δράσης – αντίδρασης, μια ίση και αντίθετη δύναμη  $F_{12}$  δρα και στον αγωγό 1. Εάν π.χ. εργαζόμασταν με τον αγωγό 2 ως πηγή, τότε θα καταλήγαμε ακριβώς στο ίδιο αποτέλεσμα όπως και της  $F_{21}$  παραπάνω. Επομένως η δύναμη ανά μονάδα μήκους που δρα στον αγωγό 1 ή στον 2 ισούται με

$\frac{F_{12}}{L} = \frac{F_{21}}{L} = \frac{\mu_0}{2\pi\rho} I_1 I_2$	Δύναμη μεταξύ ρευματοφόρων αγωγών	8.17
--	-----------------------------------	------

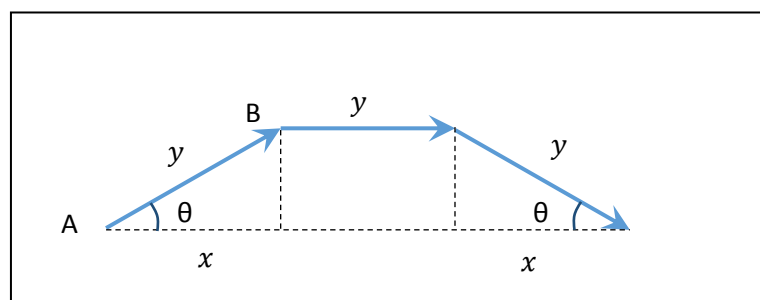


Σχήμα 8.25

## Προβλήματα

### Πρόβλημα 8.1.

Στο παρακάτω σχήμα, ο ρευματοφόρος αγωγός ΑΒΓΔ βρίσκεται μέσα στη σελίδα και αποτελείται από τρία συνδεδεμένα ευθύγραμμα τμήματα με ίσο μήκος  $y$  το καθένα. Το ρεύμα του αγωγού είναι  $I$  με τη φορά που δείχνεται και υπάρχει μαγνητικό πεδίο  $B$  κάθετο στη σελίδα το οποίο ασκεί μια δύναμη μέτρου  $F$  στον αγωγό. Να βρεθεί το μήκος  $y$  δεδομένων των  $F, B, \theta$ , και  $I$



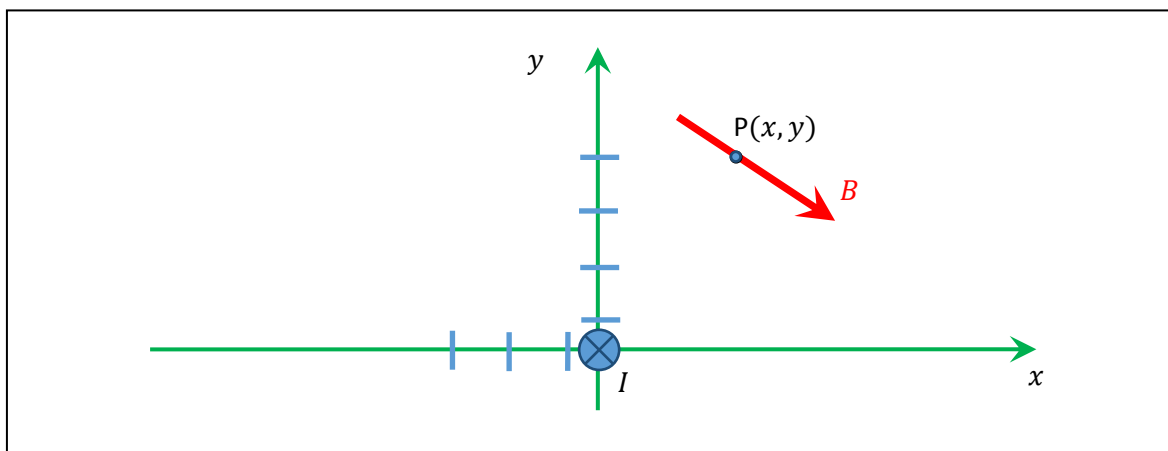
Απάντηση:  $y = F/B I (2 \cos \theta + 1)$

### Πρόβλημα 8.2.

Στο παρακάτω σχήμα ένα μακρύ ευθύγραμμο τμήμα σύρματος τέμνει την σελίδα κάθετα στο σημείο  $(0,0)$  και διαρρέεται από ρεύμα  $I$  με φορά προς τα μέσα της σελίδας. Βρείτε τη γωνία που

Φυσική ΙΙ – Δ. Κουζούδης – Π. Πετρίδης

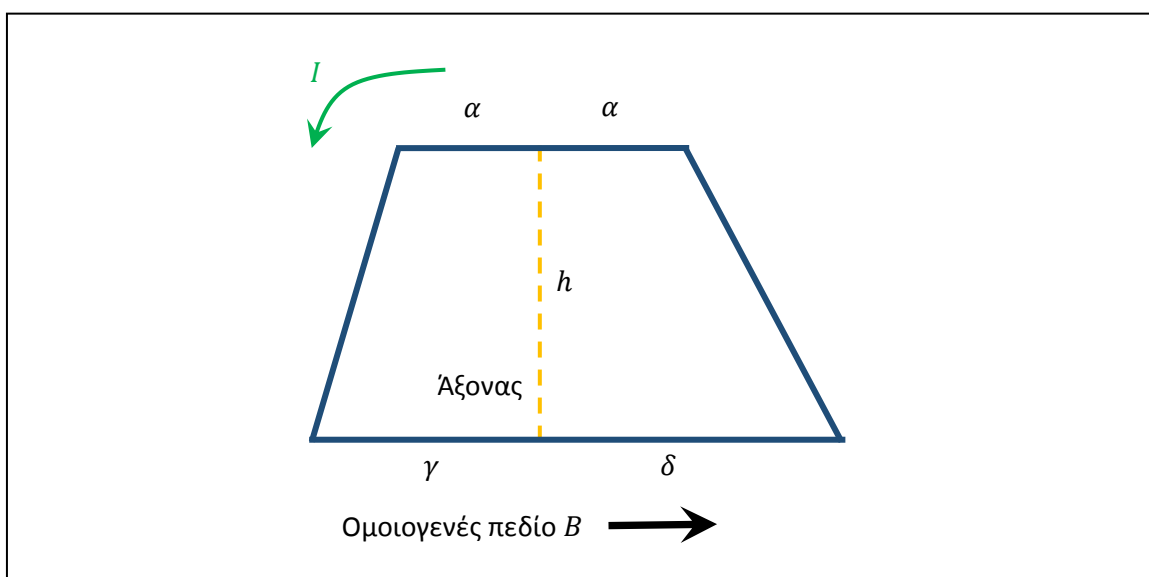
σχηματίζει το παραγόμενο (από τον ευθύγραμμο αγωγό) πεδίο  $\vec{B}$  σε σχέση με τον άξονα  $x$ , σε τυχαίο σημείο της σελίδας με συντεταγμένες  $x = 3.2 \text{ cm}$  και  $y = 2.1 \text{ cm}$ :



Απάντηση:  $-56.7^\circ$

### Πρόβλημα 8.3.

Στο παρακάτω σχήμα ένας κλειστός αγωγός σχήματος τραπεζίου διαρρέεται από ρεύμα  $I$ , με τις δυο παράλληλες πλευρές του να έχουν μήκος  $2\alpha$  και  $\gamma + \delta$  αντίστοιχα και να απέχουν απόσταση  $h$  μεταξύ τους. Ο αγωγός τοποθετείται μέσα σε περιοχή με ομοιογενές μαγνητικό πεδίο το οποίο είναι παράλληλο με τις δυο παράλληλες πλευρές του αγωγού. α) Να υπολογισθεί η μαγνητική δύναμη και η ροπή που δρα στην κάθε πλευρά του αγωγού ξεχωριστά. β) Να υπολογισθεί η συνολική μαγνητική δύναμη και η συνολική ροπή που δράνε στον αγωγό. Όλες οι ροπές να υπολογισθούν γύρω από τον άξονα που τέμνει την πάνω πλευρά κάθετα στο μέσο της, όπως φαίνεται και στο σχήμα.



Πρόβλημα 8.4.

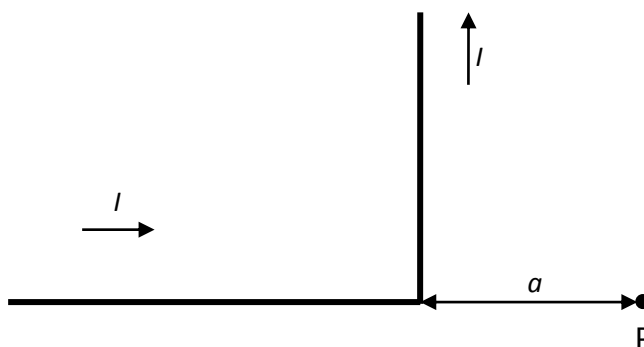
Με τη βοήθεια του νόμου των Biot-Savart να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο ενός αγωγού σχήματος κυκλικού βρόγχου ακτίνας  $R$  που φέρει ρεύμα  $I$ .

Πρόβλημα 8.5.

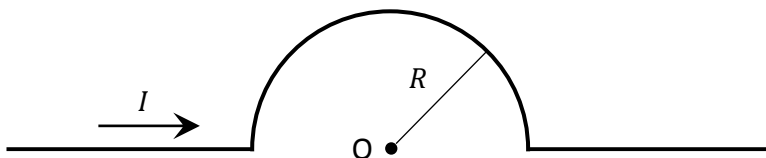
Να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο σε ένα σημείο που βρίσκεται στη μεσοκάθετο ενός αγωγού σχήματος κυκλικού βρόγχου ακτίνας  $R$  που φέρει ρεύμα  $I$  και σε απόσταση  $z$  από το κέντρο του.

Πρόβλημα 8.6.

Το σύρμα του παρακάτω σχήματος έχει άπειρο μήκος και διαρρέεται από ρεύμα  $I$ . Υπολογίστε το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται από το ρεύμα στο σημείο  $P$ . (Σημείωση: Οι τελικοί υπολογισμοί απλουστεύονται εάν εκφραστούν όλες οι μεταβλητές μήκους συναρτήσει μιας γωνίας).

Πρόβλημα 8.7.

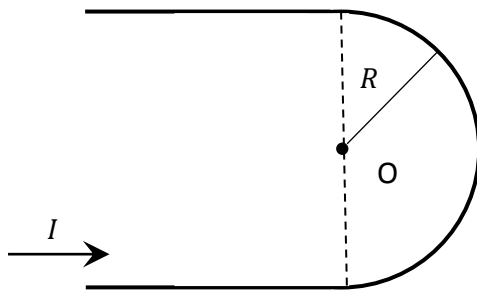
Το σύρμα του παρακάτω σχήματος έχει άπειρο μήκος και διαρρέεται από ρεύμα  $I$ . Βρείτε το δημιουργούμενο μαγνητικό πεδίο  $B$  στο σημείο  $O$  (μέτρο και φορά).

Πρόβλημα 8.8.

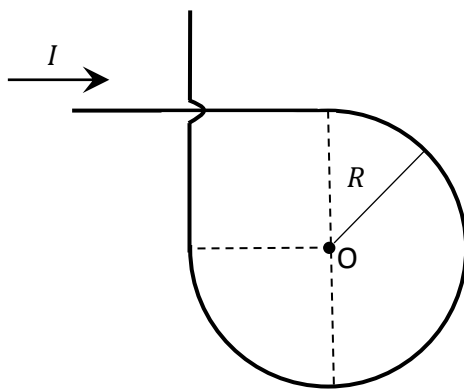
Να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ένας ευθύγραμμος αγωγός μήκους  $L$  που διαρρέεται από ρεύμα  $I$  σε σημείο  $P$  επάνω στη μεσοκάθετο του αγωγού και που απέχει απόσταση  $r$  από αυτόν.

Πρόβλημα 8.9.

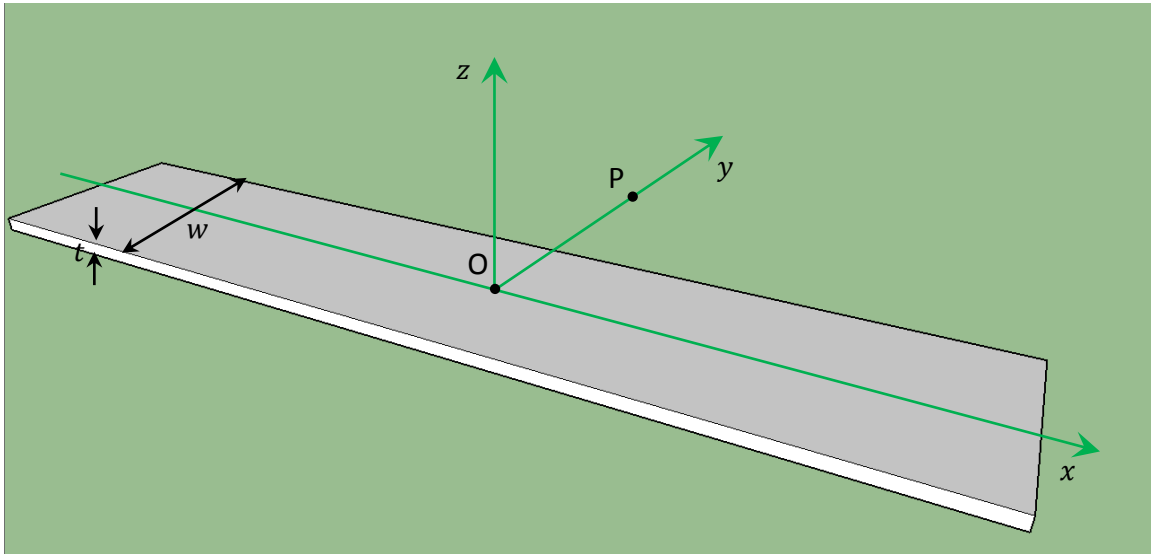
Το σύρμα του παρακάτω σχήματος έχει άπειρο μήκος και διαρρέεται από ρεύμα  $I$ . Υπολογίστε το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται από το ρεύμα στο σημείο  $O$ .

Πρόβλημα 8.10.

Το σύρμα του παρακάτω σχήματος έχει άπειρο μήκος και διαρρέεται από ρεύμα  $I$ . Υπολογίστε το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται από το ρεύμα στο σημείο  $O$  (μπορείτε να αγνοήσετε την μικρή καμπύλη η οποία απλώς υποδηλώνει ότι τα δυο κομμάτια του αγωγού δεν τέμνονται)

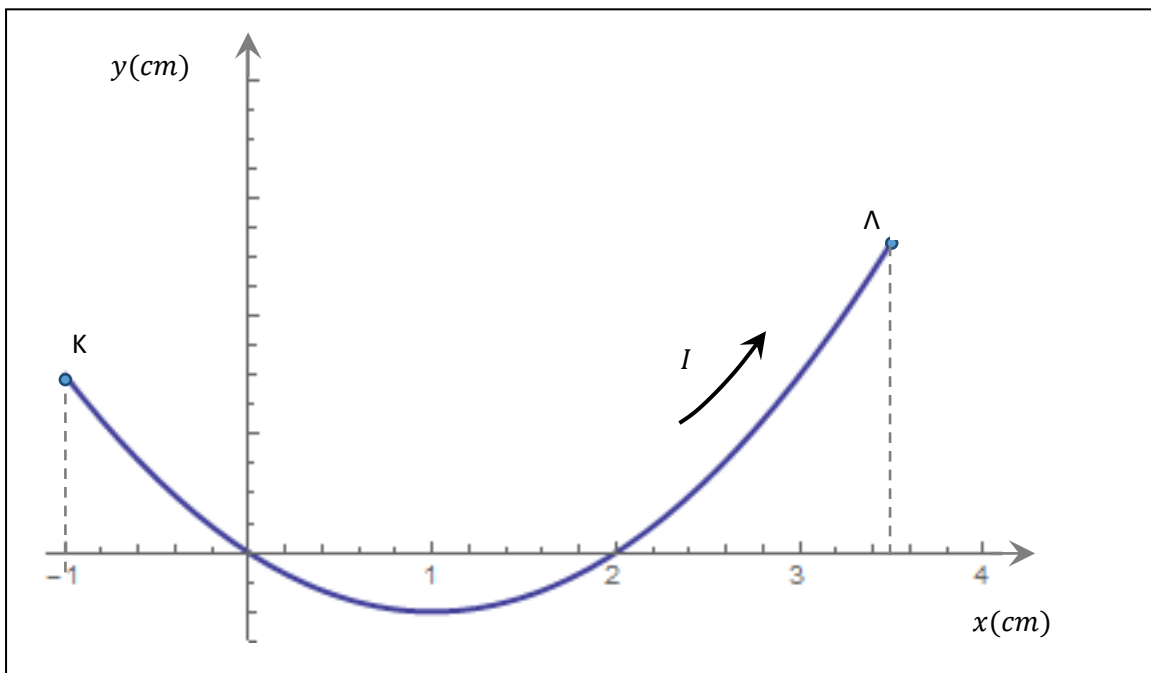
Πρόβλημα 8.11.

Ο παρακάτω αγωγός έχει το σχήμα λεπτής λωρίδας μήκους  $L$ , πλάτους  $w$  και πολύ μικρού πάχους  $t$ . Εάν διαρρέεται από πυκνότητα ρεύματος  $J$  (ρεύμα ανά μονάδα επιφάνειας κάθετη στη ροή του ρεύματος, δείτε Εξ. 7.6) κατά τον θετικό άξονα  $x$ , να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο σε σημείο  $P$  που βρίσκεται επάνω στον θετικό άξονα  $x$  και απέχει απόσταση  $a > w$  από την αρχή των συντεταγμένων  $O$  η οποία βρίσκεται συμμετρικά στο κέντρο του αγωγού. (Υπόδειξη: Μπορείτε να χωρίσετε την λωρίδα σε ένα πλήθος ευθύγραμμων αγωγών πεπερασμένου μήκους  $L$  και να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα προηγούμενου προβλήματος).



**Πρόβλημα 8.12** Να γίνει το ίδιο στο προηγούμενο πρόβλημα εάν τώρα το σημείο παρατήρησης P βρίσκεται επάνω στον άξονα z σε απόσταση  $a$  από την αρχή των αξόνων.

**Πρόβλημα 8.13** Στο παρακάτω σχήμα το τμήμα της καμπύλης ΚΛ μεταξύ  $x = -1$  και  $x = 3.5$  αντιστοιχεί σε ένα αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα  $I = 1.5 \text{ A}$  με τη φορά που δείχνεται. Η καμπύλη είναι δευτεροβάθμια ως προς  $x$  με ρίζες στα  $x = 0$ ,  $x = 2$  και ελάχιστο στο  $y = -2$ . Ένα ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο  $\vec{B} = B_0(\vec{e}_x - \sqrt{3}\vec{e}_y)$  όπου  $B_0 = 0,4 \text{ T}$  εφαρμόζεται στην περιοχή όπου ανήκει ο αγωγός. Να βρεθεί η αντίστοιχη μαγνητική δύναμη σε Newton που ασκείται στον αγωγό. (Σημείωση: Θυμηθείτε ότι  $\tan(-x) = -\tan x$  και αντιστρόφως)



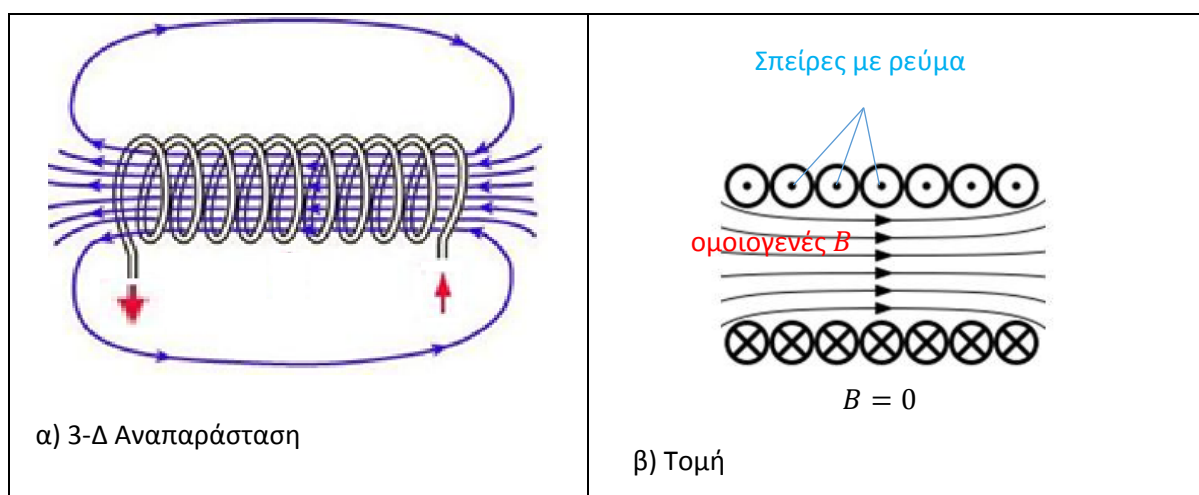
Απάντηση:  $0.0737 \text{ N}$ , προς τα μέσα της σελίδας.

## 9. Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ AMPERE

Είδαμε στο προηγούμενο εδάφιο ότι μπορούμε να υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο που παράγουν στο χώρο ρευματοφόροι αγωγοί διαφόρων γεωμετριών με τη βοήθεια του νόμου των Biot-Savart. Ένα άλλο χρήσιμο εργαλείο για τον προσδιορισμό του  $\vec{B}$  που παράγεται εξαιτίας κάποιων ρευμάτων ή συνεχή κατανομή ρευμάτων, είναι ο νόμος του Ampere ο οποίος είναι το ανάλογο του νόμου του Gaussπου είδαμε στον ηλεκτρισμό. Δεν θα μπορούμε στις λεπτομέρειες του νόμου, θα δώσουμε μόνο ένα αποτέλεσμα το οποίο είναι πολύ σημαντικό για τεχνολογικές εφαρμογές: Το μαγνητικό πεδίο ενός πηνίου.

### Πηνίο - Σωληνοειδές

Το **σωληνοειδές** είναι η διάταξη που φαίνεται στο Σχήμα 9.9α κατά την οποία ένας λεπτός ευθύγραμμος αγωγός απείρου μήκους περιτυλίγεται κυλινδρικά με τέτοιο τρόπο ώστε να προκύψει ελικοειδές σχήμα με έναν άπειρο αριθμό από ισαπέχουσες κυκλικές σπείρες ίσης διαμέτρου μεταξύ τους. Το **πηνίο** είναι μια πιο γενική περίπτωση αγωγού με ελικοειδές περιέλιξη αλλά όχι απαραίτητα με μια από τις παραπάνω συνθήκες, π.χ. οι σπείρες μπορεί να είναι τετραγωνικές, μικρού πλήθους ή μη ισαπέχουσες μεταξύ τους. Το Σχήμα 9.9β δείχνει μια επίπεδη τομή του σωληνοειδούς όπου το κοινό ρεύμα που διαρρέει όλες τις σπείρες εξέρχεται από το πάνω μέρος του σχήματος και εισέρχεται στο κάτω μέρος. Για μεγάλο αριθμό σπειρών, η διάταξη αυτή μοιάζει με το ζεύγος των δυο συστοιχιών που μελετήσαμε στην προηγούμενη ενότητα. Επομένως οι δυναμικές γραμμές είναι ομοιογενείς και ομοιόμορφες στο εσωτερικό του σωληνοειδούς ενώ δεν υπάρχουν δυναμικές γραμμές στο εξωτερικό του.



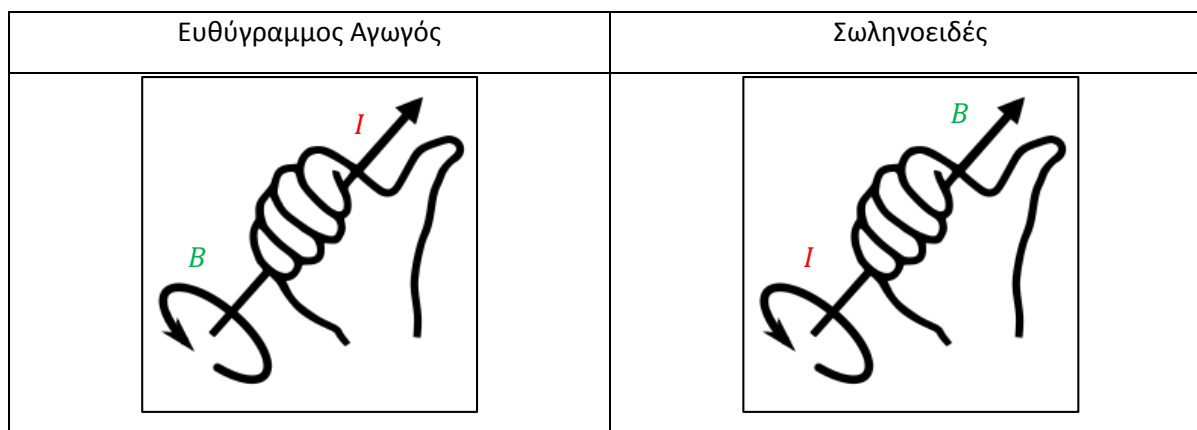
Σχήμα 9.9

Σύμφωνα με τον νόμο του Ampere, το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του πηνίου είναι ίσο με

$B = \mu_0 n I$	Μαγνητικό πεδίο σωληνοειδούς	9.5
-----------------	------------------------------	-----



όπου  $n$  είναι ο αριθμός των σπειρών ανά μονάδα μήκους του πηνίου. Στον εξωτερικό χώρο του σωληνοειδούς ισχύει  $B = 0$ , επομένως το σωληνοειδές είναι το μαγνητικό ανάλογο του πυκνωτή στον ηλεκτρισμό, δηλαδή το πεδίο είναι παντού σταθερό στο εσωτερικό του και μηδέν στο εξωτερικό του. Όσον αφορά την φορά του μαγνητικού πεδίου, χρησιμοποιούμε τον γνωστό κανόνα του δεξιού χεριού όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.11, με τη διαφορά ότι τα  $B$  και  $I$  ανταλλάζουν ρόλους στις περιπτώσεις του ευθύγραμμου αγωγού και του σωληνοειδούς.



Σχήμα 9.11

Στην πράξη δεν μπορούμε να έχουμε σωληνοειδές απείρου μήκους αλλά πηνίο μεγάλου μήκους οπότε μπορούμε να δεχθούμε προσεγγιστικά ότι το πεδίο είναι αρκετά ομοιογενές στο εσωτερικό του, εκτός ίσως από μια μικρή περιοχή στις άκρες του. Αγνοώντας αυτές τις περιοχές, μπορούμε με μεγάλη ακρίβεια να δεχθούμε το  $B$  ως σταθερό και να χρησιμοποιήσουμε προσεγγιστικά την Εξ. 9.5, την οποία μάλιστα την γράφουμε στη μορφή:

$B = \frac{\mu_0 N I}{l}$	Μαγνητικό πεδίο επιμήκους πηνίου	9.6
---------------------------	----------------------------------	-----

όπου  $l$  είναι το μήκος και  $N$  οι συνολικές σπείρες του πηνίου. Επίσης το πεδίο δεν είναι ακριβώς μηδέν στο εξωτερικό του πηνίου αλλά πρακτικώς πολύ μικρό. Ποιο όμως είναι το κριτήριο του πηνίου μεγάλου μήκους, δηλαδή πόσο μήκος είναι αρκετό ώστε να χαρακτηριστεί το πηνίο ως επίμηκες (μακρύ) και να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. 9.6; Στην πράξη ένα πηνίο θεωρείται μακρύ όταν το μήκος του είναι μεγαλύτερο από τουλάχιστον πέντε φορές τη διάμετρό του.

#### Παράδειγμα 9.1.

Ένα πηνίο μήκους  $30\text{ cm}$  και διαμέτρου  $4\text{ cm}$  έχει  $400$  κοντινές περιελίξεις από σύρμα. Εάν το σύρμα διαρρέεται από ρεύμα  $6\text{ A}$ , βρείτε το μέτρο του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του πηνίου.

Λύση:

Από τα δεδομένα έχουμε:  $L = 30 \text{ cm} = 0.3 \text{ m}$ , διάμετρος  $D = 4 \text{ cm} = 0.04 \text{ m}$ , αριθμός σπειρών  $N = 400$ , και ρεύμα  $I = 6 \text{ A}$ . Βλέπουμε ότι το κριτήριο για επίμηκες πηνίο ικανοποιείται αφού ο λόγος

$$\frac{L}{D} = \frac{0.3}{0.04} = 7.5$$

είναι μεγαλύτερος από 5 και έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε προσεγγιστικά την Εξ. 9.6:

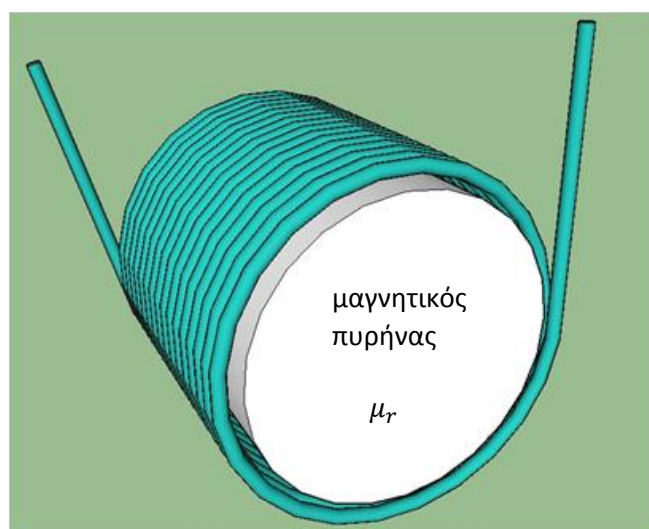
$$B = \frac{\mu_0 NI}{L} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 400 \times 6}{0.3} = 0.01 \text{ T}$$

Το πηνίο χρησιμοποιείται σε πολλές πρακτικές εφαρμογές για την παραγωγή μαγνητικών πεδίων για αυτό ονομάζεται και "ηλεκτρομαγνήτης". Το πλεονέκτημά του έναντι του κλασσικού σταθερού μαγνήτη είναι τα εξής:

- Το  $B$  είναι πολύ ομοιογενές στο εσωτερικό του, παράλληλο με τον άξονά του
- Το  $B$  είναι σχεδόν μηδέν στο εξωτερικό του
- Το  $B$  είναι γραμμικώς ανάλογο με το  $I$  και έτσι μπορεί να ρυθμιστεί πολύ εύκολα σε οποιαδήποτε επιθυμητή τιμή, αρκεί να μεταβάλλουμε το ρεύμα αναλόγως.
- Το  $B$  μπορεί να πάρει εξαιρετικά μεγάλες τιμές αυξάνοντας κατά πολύ τον αριθμό των σπειρών  $N$ . Αυτό πρακτικώς γίνεται με πολύ σφιχτή περιέλιξη και με την χρήση πολλών στρωμάτων (επίσης με την χρήση μαγνητικών υλικών στο εσωτερικό του πηνίου, δείτε επόμενο εδάφιο)

## Μαγνητική διαπερατότητα

Το μαγνητικό πεδίο της Εξ. 9.6 που παράγεται από ένα πηνίο, μπορεί να αυξηθεί σημαντικά εάν η περιέλιξη γίνει γύρω από μαγνητικό υλικό, γνωστό και ως "μαγνητικός πυρήνας", όπως στο παρακάτω Σχήμα 9.12.



Σχήμα 9.12

Σε αυτή τη περίπτωση η σταθερά  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  που χρησιμοποιείται στην Εξ. 9.6, αλλάζει σε  $\mu_r \mu_0$  όπου το  $\mu_r$  είναι μια αδιάστατη σταθερά υλικού γνωστή ως "σχετική διαπερατότητα", τιμές της οποίας δίνονται στον παρακάτω Πίνακα 9.1. Επομένως το μαγνητικό πεδίο του πηνίου αυξάνει κατά ένα παράγοντα  $\mu_r$  με τη χρήση μαγνητικού πυρήνα.

Μέσο	Σχετική διαπερατότητα $\mu_r$
Mu-metal	20000
Σιδηρο-κοβάλτιο	18000
Permalloy	8000
Χάλυβας	100 - 1000
Σιδηρίτης	640
Νικέλιο	100 - 600
Μαγνήτης Νεοδυμίου	1.05
Πλατίνα	1.00
Αλουμίνιο	1.00
Ξύλο	1.00
Αέρας	1.00
Μπετόν	1.00
Κενό	1.00
Teflon	1.00
Χαλκός	1.00
Νερό	1.00
Βισμούθιο	1.00
Υπεραγωγοί	0

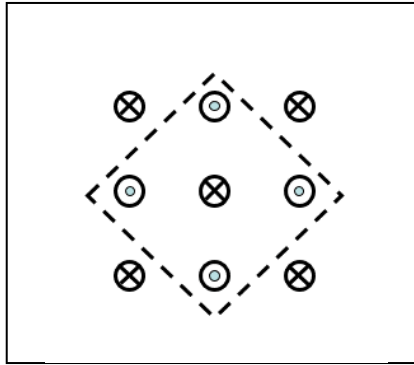
Πίνακας 9.1

Έτσι για παράδειγμα, με τη χρήση χάλυβα ως πυρήνα, το μαγνητικό πεδίο μπορεί να αυξηθεί έως και 1000 φορές στο εσωτερικό του πηνίου. Το γινόμενο  $\mu = \mu_r \mu_0$  ονομάζεται "μαγνητική διαπερατότητα" (σε αντιδιαστολή με το  $\mu_0$  που είναι η "μαγνητική διαπερατότητα του κενού") και έχει τις ίδιες διαστάσεις όπως και το  $\mu_0$ . Προσέξτε ότι τα περισσότερα υλικά τριγύρω μας δεν είναι μαγνητικά αφού έχουν  $\mu_r = 1$  ενώ οι υπεραγωγοί είναι μια ειδική κατηγορία υλικών με  $\mu_r = 0$ .

## Προβλήματα

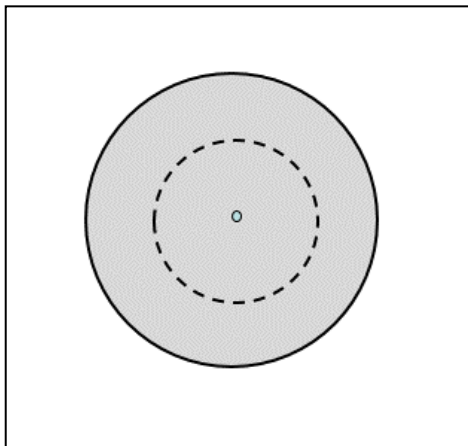
### Πρόβλημα 9.1.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται μια διάταξη  $3 \times 3$  λεπτών ρευματοφόρων αγωγών απείρου μήκους με τον καθένα να φέρει ρεύμα  $I$  και να τέμνει κάθετα την σελίδα με την φορά των ρευμάτων όπως δείχνεται. Σύμφωνα με τον νόμο του Ampere, η ποσότητα  $1/\mu_0 \oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$  επάνω στη διακεκομμένη διαδρομή (το  $d\vec{s}$  είναι το στοιχειώδες διάνυσμα μήκους) ισούται με: α)  $3I$  β)  $I$  γ)  $4I$  δ)  $0$

Πρόβλημα 9.2.

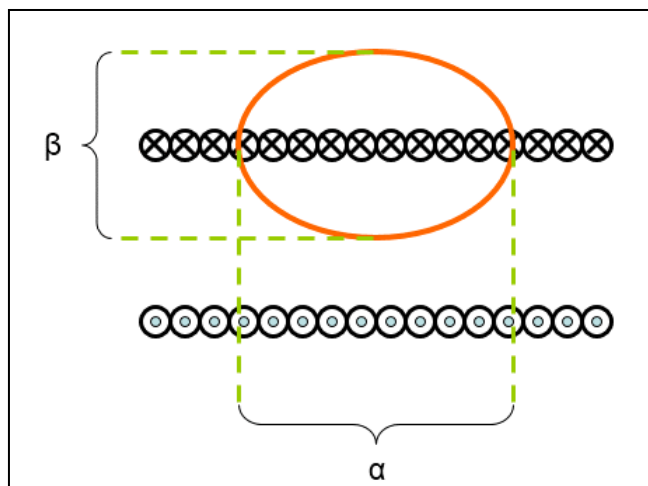
Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένας κυλινδρικός ρευματοφόρος αγωγός απείρου μήκους και ακτίνας  $R$  που τέμνει κάθετα την σελίδα και διαρρέεται από ομοιόμορφο ρεύμα  $I$ . Για να υπολογίσει την ένταση  $B$  του παραγόμενου μαγνητικού πεδίου ένας φοιτητής εφαρμόζει τον νόμο του Ampere επάνω στον διακεκομμένο κύκλο της σελίδας ο οποίος έχει ακτίνα  $r = R/2$ . Σύμφωνα με τον νόμο του Ampere, η ποσότητα  $1/\mu_0 \oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$  επάνω στη διακεκομμένη διαδρομή (το  $d\vec{s}$  είναι το στοιχειώδες διάνυσμα μήκους) ισούται με:

- α)  $I$     β)  $2I$     γ)  $4I$     δ)  $I/4$

Πρόβλημα 9.3.

Στο παρακάτω σχήμα εμφανίζεται η πλάγια τομή ενός πηνίου με μεγάλο αριθμό σπειρών  $N$  και μεγάλο μήκος  $L$ . Εάν το πηνίο διαρρέεται από ρεύμα  $I$  τότε σύμφωνα με τον νόμο του Ampere, η ποσότητα  $1/\mu_0 \oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$  επάνω στην έλλειψη (το  $d\vec{s}$  είναι το στοιχειώδες διάνυσμα μήκους) ισούται με:

- α)  $NI$             β)  $NI/L$  γ)  $NaI/L$             δ)  $NbI/L$

Πρόβλημα 9.4.

Να αποδείξετε με τον νόμο του Amperetην Εξ. 8.16 που εκφράζει το παραγόμενο μαγνητικό πεδίο από ένα ευθύγραμμο αγωγό απείρου μήκους, η οποία αποδείχθηκε στο περασμένο κεφάλαιο με τη βοήθεια του νόμου των Biot-Savart.

Πρόβλημα 9.5.

Το μαγνητικό πεδίο επάνω σε ένα κύκλο ακτίνας  $R$  με κέντρο επάνω στην αρχή των αξόνων δίνεται από την σχέση  $B = B_0 \vec{e}_\varphi$  όπου  $\vec{e}_\varphi$  είναι το μοναδιαίο της γωνίας  $\varphi$  στις πολικές συντεταγμένες. Να βρεθεί το ρεύμα διαμέσου του κύκλου εάν θεωρήσουμε ότι τέμνει κάθετα την επιφάνεια του κύκλου.

Πρόβλημα 9.6.

Το μαγνητικό πεδίο σε κάποιο χώρο δίνεται σε πολικές συντεταγμένες από την έκφραση

$$B = \frac{c}{\rho} \vec{e}_\varphi$$

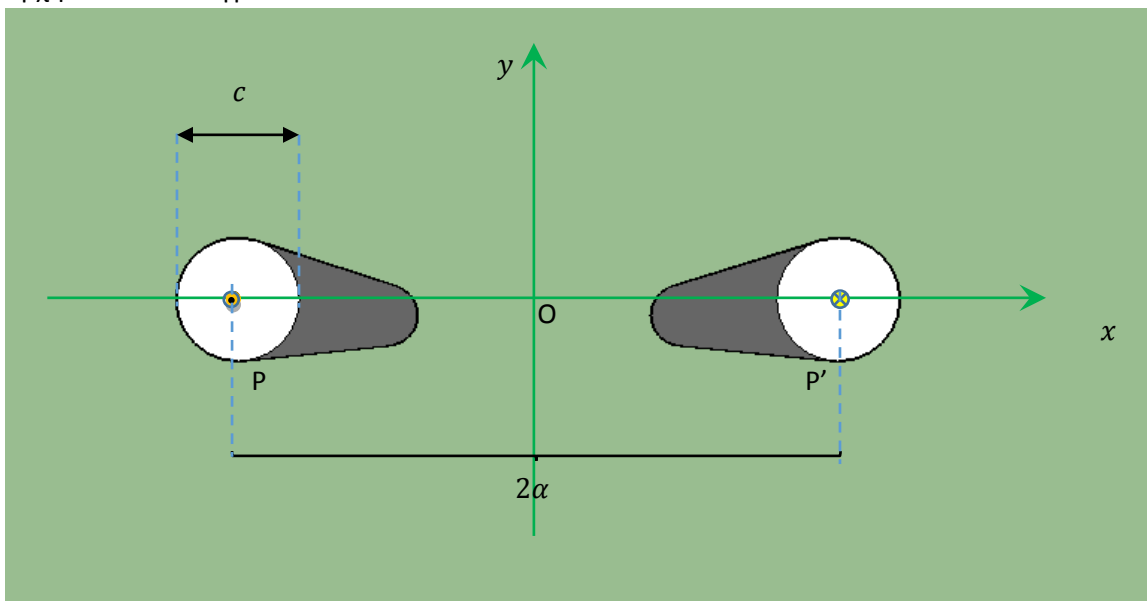
όπου  $c$  είναι μια σταθερά,  $\rho$  η πολική ακτίνα και  $\vec{e}_\varphi$  το μοναδιαίο της γωνίας  $\varphi$ . Να βρεθεί το ρεύμα διαμέσου ενός κύκλου ακτίνας  $R$  με κέντρο επάνω στην αρχή των αξόνων εάν θεωρήσουμε ότι αυτό τέμνει κάθετα την επιφάνεια του κύκλου.

Απάντηση:  $2\pi c / \mu_0$

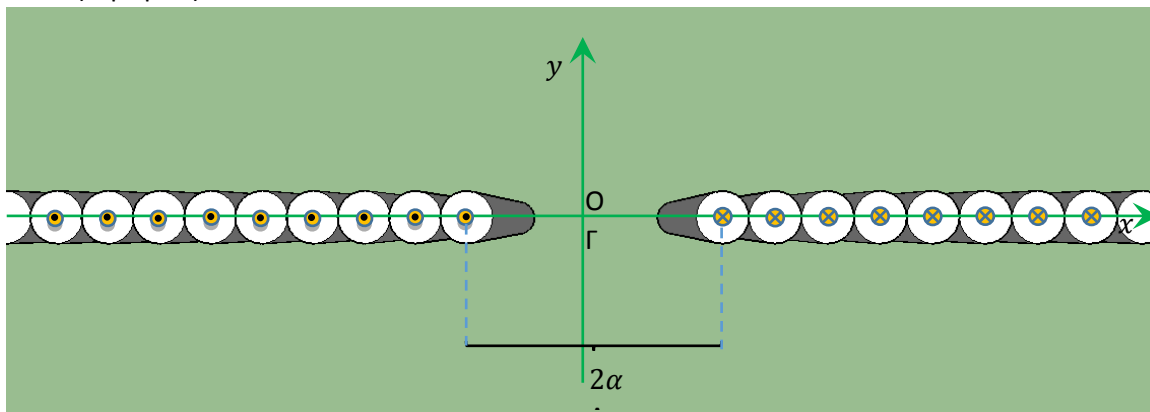
Πρόβλημα 9.7.

Στο παρακάτω σχήμα οι δυο λεπτοί κυλινδρικοί αγωγοί  $P$  και  $P'$  διαμέτρου  $c$  ο καθένας, τέμνουν τη σελίδα κάθετα, είναι απείρου μήκους και διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα  $I$  και με τη φορά που σημειώνεται.

α) Να βρεθεί το μέτρο και η φορά του συνισταμένου μαγνητικού πεδίου που παράγουν οι δυο αγωγοί στο σημείο  $O$  της σελίδας το οποίο ισαπέχει από αυτούς και που το λαμβάνουμε ως την αρχή των συντεταγμένων



β) Θεωρήστε τις παρακάτω δυο πεπερασμένες συστοιχίες αγωγών όπως αυτών στο μέρος α, οι οποίες βρίσκονται επάνω στον άξονα  $x$  συμμετρικά ως προς το  $O$ , η μια μεταξύ των ορίων  $x = \alpha$  και  $x = \beta$ , ενώ η άλλη μεταξύ των  $x = -\alpha$  και  $x = -\beta$ . Όλοι οι αγωγοί διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα  $I$  με τη φορά που σημειώνεται. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του μέρους α, υπολογίστε με ολοκλήρωση το μέτρο και τη φορά του συνισταμένου μαγνητικού πεδίου που παράγουν οι δυο συστοιχίες στο σημείο  $O$ . Σημείωση: Θεωρήστε ότι η διάμετρος  $c$  του κάθε αγωγού είναι πολύ μικρή  $c \rightarrow 0$  και έτσι σε ένα μικρό απειροστό μήκος  $dx$  βρίσκεται ένας μεγάλος αριθμός από τέτοιους αγωγούς.



### Πρόβλημα 9.8.

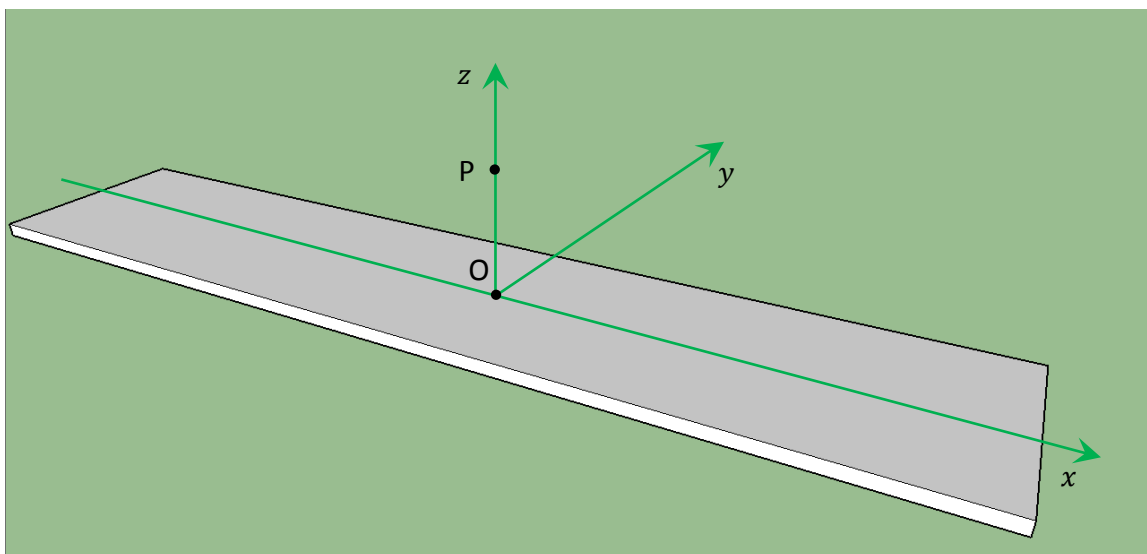
Με τη βοήθεια του νόμου του Ampere να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο παντού στο χώρο ενός σωλήνα απείρου μήκους με εσωτερική ακτίνα  $R_1$  και εξωτερική ακτίνα  $R_2$ , ο οποίος διαρρέεται από ομοιόμορφη πυκνότητα ρεύματος  $J$  (ρεύμα ανά μονάδα επιφάνειας κάθετη στη ροή του ρεύματος, δείτε Εξ. 7.6) κατά μήκος του άξονά του.

Πρόβλημα 9.9.

Να λυθεί το προηγούμενο πρόβλημα εάν η πυκνότητα ρεύματος δεν είναι ομοιογενής επάνω στη τομή του σωλήνα αλλά δίνεται από την έκφραση  $J = cr$  όπου  $c$  είναι μια σταθερά σε μονάδες  $A/m^3$  και  $r$  είναι η πολική ακτίνα θεωρώντας ότι ο άξονας του σωλήνα ταυτίζεται με τον άξονα-z.

Πρόβλημα 9.10.

Ο παρακάτω αγωγός έχει το σχήμα λεπτού φύλλου απείρου μήκους, απείρου πλάτους και πολύ μικρού πάχους  $t$ . Ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα κατά μήκος του άξονα  $x$  με σταθερή γραμμική πυκνότητα ρεύματος  $J = dI/dy$  κατά μήκος του άξονα  $y$  (ρεύμα ανά μονάδα μήκους κάθετη στη ροή του ρεύματος). α) Να βρεθεί η φορά του μαγνητικού πεδίου τεμαχίζοντας το φύλλο σε λεπτές λωρίδες συμμετρικά σε θέσεις  $\pm y$  και θεωρώντας την κάθε λωρίδα ως ευθύγραμμο αγωγό β) Με τη βοήθεια της φοράς των δυναμικών γραμμών που βρήκατε στο προηγούμενο υποερώτημα, να βρεθεί το μέτρο του μαγνητικού πεδίου σε σημείο P που βρίσκεται επάνω στον άξονα  $z$  σε απόσταση  $a$  από την αρχή των αξόνων.

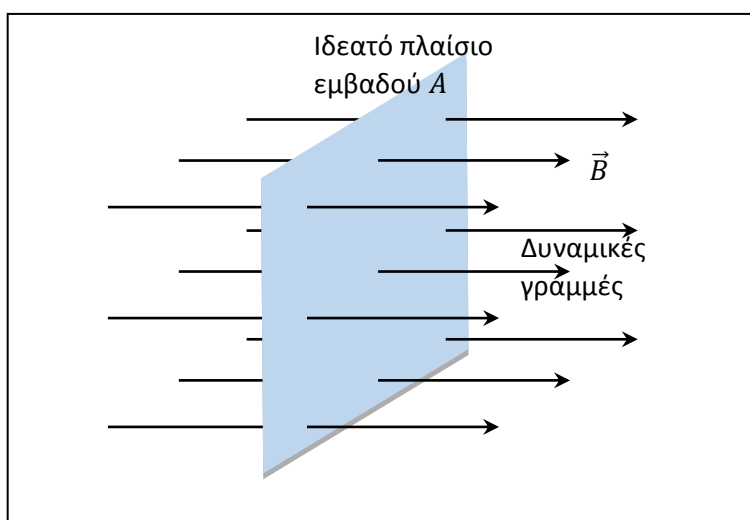
Πρόβλημα 9.11.

Να λυθεί το προηγούμενο πρόβλημα εάν το φύλλο δεν είναι λεπτό αλλά έχει πάχος  $d$  και γνωρίζετε ότι οι δυναμικές γραμμές του παρόντος προβλήματος είναι παρόμοιες με αυτές του προηγούμενου. Πρέπει να βρείτε το πεδίο τόσο στο εσωτερικό όσο και στο εξωτερικό του αγωγού.

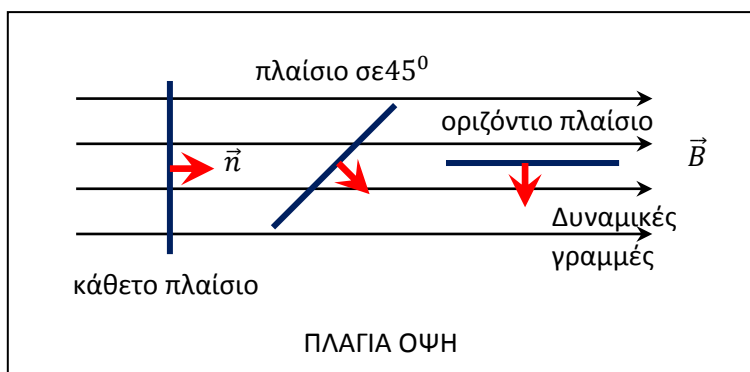
## 10. ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

### Μαγνητική Ροή

Θεωρήστε το παρακάτω Σχήμα 10.1 το οποίο απεικονίζει μια περιοχή του χώρου όπου το μαγνητικό πεδίο είναι σταθερό και ομοιογενές και οι δυναμικές του γραμμές είναι ευθύγραμμες και ισαπέχουσες. Ακριβώς όπως ορίσαμε την Ηλεκτρική Ροή στο Κεφ. 3, εντελώς παρομοίως θα ορίσουμε και την **μαγνητική ροή**  $\Phi_M$ . Θεωρήστε δηλαδή ένα ιδεατό ορθογώνιο πλαίσιο που τέμνει κάθετα τις δυναμικές γραμμές (Δ.Γ.). Η μαγνητική ροή ορίζεται ποιοτικώς ως ο αριθμός των δυναμικών γραμμών που διαπερνούν το πλαίσιο. Καταλαβαίνει κανείς ότι τρεις παράγοντες επηρεάζουν την μαγνητική ροή: α) το εμβαδό  $A$  του πλαισίου, αφού μεγαλύτερο εμβαδό θα "συλλαμβάνει" περισσότερες γραμμές, β) η πυκνότητα των Δ.Γ. που από τις ιδιότητές τους γνωρίζουμε ότι είναι ανάλογη του  $B$  και γ) ο προσανατολισμός του πλαισίου όπως φαίνεται και στο Σχήμα 10.2 όπου το ίδιο πλαίσιο έχει τοποθετηθεί με τρεις διαφορετικούς προσανατολισμούς. Για παράδειγμα το κάθετο πλαίσιο φαίνεται να "συλλαμβάνει" διπλάσιο αριθμό δυναμικών γραμμών σε σχέση με το πλαίσιο με προσανατολισμό  $45^\circ$  μοιρών (η αναλογία είναι εικονική) ενώ καμία Δ.Γ. δεν διαπερνά το οριζόντιο πλαίσιο όπως αναμένεται.



Σχήμα 10.1



Σχήμα 10.2



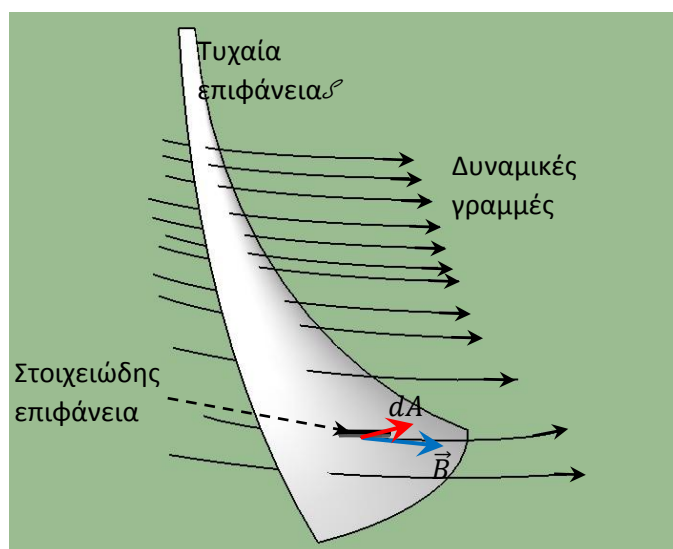
Ποσοτικώς η μαγνητική ροή ορίζεται ως  $\Phi_M = BA\cos\theta$  όπου  $\theta$  είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα  $\vec{B}$  με το διάνυσμα  $\vec{n}$  το οποίο είναι ένα μοναδιαίο αδιάστατο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια του πλαισίου (περιστρέφεται μαζί με το πλαίσιο). Η παραπάνω σχέση συνοψίζει όλες τις παραπάνω ποιοτικές παρατηρήσεις. Στην πράξη πολλές φορές κατασκευάζουμε ένα μεγάλο αριθμό  $N$  πανομοιότυπων πλαισίων με ταυτόσημο προσανατολισμό γιατί όπως θα δούμε οδηγούν σε καλύτερα αποτελέσματα. Η μαγνητική ροή τότε γενικεύεται στην

$\Phi_M = NBA\cos\theta$	Μαγνητική ροή	10.1
--------------------------	---------------	------

Οι μονάδες της μαγνητικής ροής είναι το *Weber*, σε συντομογραφία *Wb*, το οποίο ισούται με  $1 Tm^2$ . Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφτεί σε διανυσματική μορφή εάν ορίσουμε ένα νέο διάνυσμα με διαστάσεις εμβαδού το  $\vec{A} = A\vec{n}$  το οποίο είναι επίσης κάθετο στην επιφάνεια του πλαισίου. Κάνοντας χρήση του εσωτερικού γινομένου, μπορούμε να γράψουμε

$\Phi_M = N\vec{B} \cdot \vec{A}$	Μαγνητική ροή	10.2
-----------------------------------	---------------	------

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 10.3, μπορούμε να ορίσουμε την ροή μέσω οποιασδήποτε τυχαίας επιφάνειας  $S$  και όχι μόνο μέσω ενός ορθογωνίου πλαισίου. Σε αυτή την περίπτωση, "τεμαχίζουμε" την επιφάνεια σε ένα σύνολο μικροσκοπικών πλαισίων απειροστού εμβαδού  $dA$  το καθένα, και ορίζουμε το κάθετο διάνυσμα  $d\vec{A} = dA\vec{n}$  στο πλαίσιο, ακριβώς όπως κάναμε παραπάνω.



Σχήμα 10.3

Η στοιχειώδης ροή διαμέσου αυτού του πλαισίου είναι σύμφωνα με την παραπάνω Εξ. 10.2 ίση με  $d\Phi_M = \vec{B} \cdot d\vec{A}$  και άρα η συνολική ροή ισούται με

$\Phi_M = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$	Μαγνητική ροή	10.3
--	---------------	------

Βέβαια και πάλι εάν πρόκειται για ένα αριθμό  $N$  πανομοιότυπων πλαισίων, το παραπάνω αποτέλεσμα πρέπει να πολλαπλασιαστεί με  $N$ .

#### Παράδειγμα 10.1.

Ορθογώνιο πλαίσιο πλάτους  $10\text{ cm}$  και ύψους  $20\text{ cm}$  σχηματίζει γωνία  $60^\circ$  με το μαγνητικό πεδίο μέτρου  $0.3\text{ T}$ . Υπολογίστε την μαγνητική ροή διαμέσου του πλαισίου.

#### Λύση:

Από τα δεδομένα έχουμε: Εμβαδό  $A = 10 \times 20 = 200\text{ cm}^2 = 0.02\text{ m}^2$ ,  $B = 0.3\text{ T}$ .

Η δεδομένη γωνία  $60^\circ$  είναι η γωνία που σχηματίζει το επίπεδο του πλαισίου με το μαγνητικό πεδίο και άρα η γωνία του πεδίου με το κάθετο στο πλαίσιο ισούται με  $\theta = 30^\circ$ . Η Εξ. 10.1 οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$\Phi = BA \cos \theta = 0.3 \times 0.02 \times \cos 30^\circ = 0.00519\text{ T} \cdot \text{m}^2 = 0.00519\text{ Wb}$$

#### Παράδειγμα 10.2.

Ένα κυκλικό πλαίσιο διαμέτρου  $30\text{ cm}$  και  $5$  σπειρών είναι κάθετο σε ένα μαγνητικό πεδίο  $0.6\text{ T}$ . Εάν το πλαίσιο αλλάξει θέση ώστε η επιφάνειά του να σχηματίζει  $30^\circ$  με το πεδίο, ποια είναι η αλλαγή της μαγνητικής ροής που διαπερνάει το πλαίσιο;

#### Λύση:

Από τα δεδομένα έχουμε: Διάμετρος  $D = 30\text{ cm} = 0.3\text{ m} \Rightarrow R = 0.15\text{ m}$ ,  $B = 0.6\text{ T}$ ,  $N = 5$ . Όπως και στο προηγούμενο εδάφιο, πρέπει να μετατρέψουμε τις δεδομένες γωνίες στις συμπληρωματικές τους ώστε να αναφέρονται ως προς το κάθετο στο πλαίσιο. Έτσι η αρχική γωνία είναι  $\theta_0 = 0^\circ$  (κάθετα) και η τελική  $\theta_F = 60^\circ$ . Το εμβαδό του κύκλου ισούται με:  $A = \pi R^2 = 3.14 \times 0.15^2 = 0.0706\text{ m}^2$ . Από την Εξ. 10.1 έχουμε:

$$\text{Αρχική ροή } \Phi_0 = NBA \cos \theta_0 = 5 \times 0.6 \times 0.0706 \times \cos 0^\circ = 0.212\text{ Wb}$$

$$\text{Τελική ροή } \Phi_F = NBA \cos \theta_F = 5 \times 0.6 \times 0.0706 \times \cos 60^\circ = 0.106\text{ Wb}$$

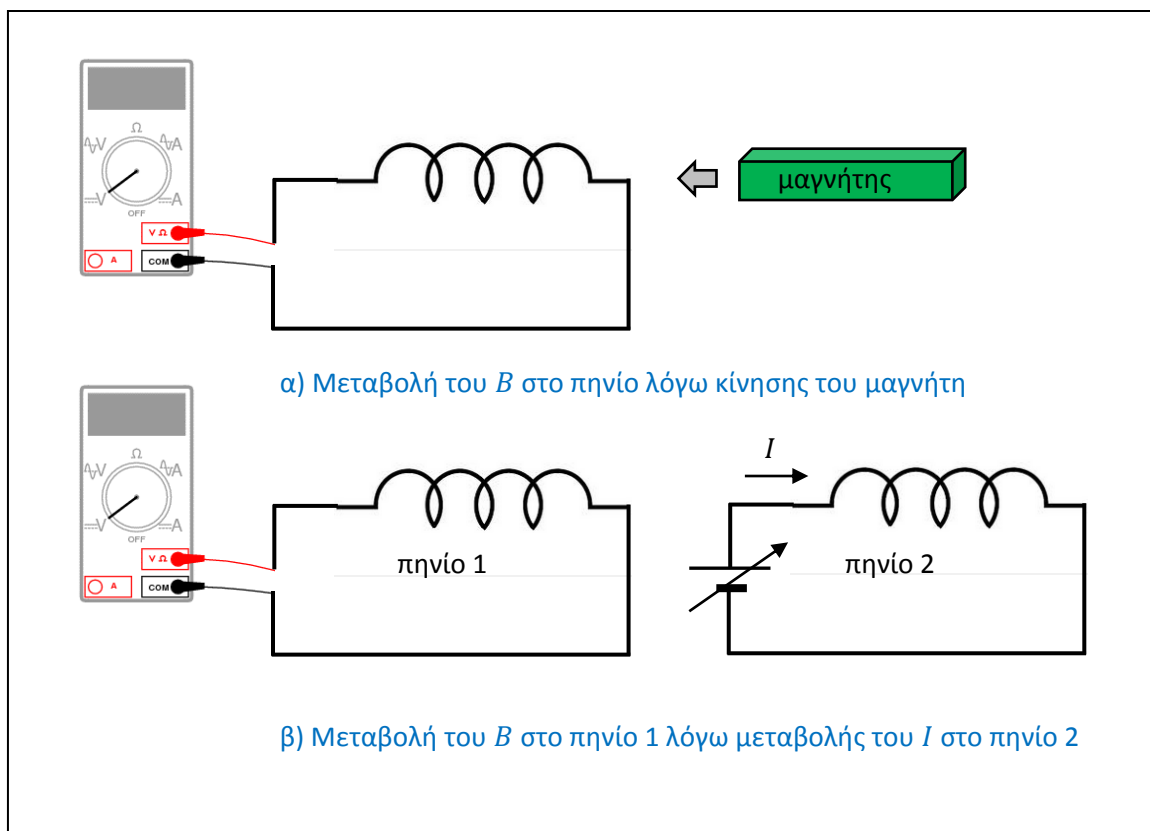
Η μεταβολή της ροής ισούται με:

$$\Delta \Phi = 0.106 - 0.212 = -0.106\text{ Wb}$$

Όπως και με άλλες μεταβολές στη Φυσική, αρνητικό πρόσημο σημαίνει μείωση της ροής.

## Ο νόμος του Faraday.

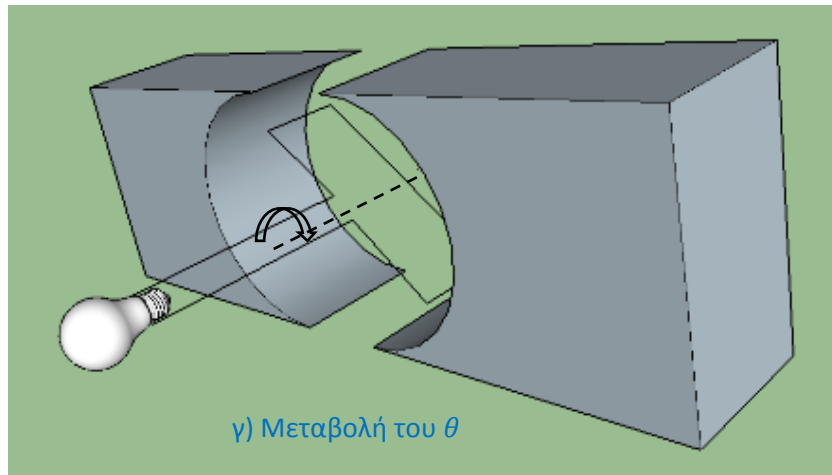
Ο νόμος του Faraday, γνωστός και ως "νόμος της Ηλεκτρομαγνητικής Επαγωγής" λέει με απλά λόγια ότι όταν η μαγνητική ροή μεταβληθεί διαμέσου ενός πλαισίου, τότε εμφανίζεται μια ηλεκτρική τάση στο πλαίσιο. Στο περασμένο εδάφιο είδαμε ότι η μαγνητική ροή δίνεται από την Εξ. 10.1 ως  $\Phi = NBA \cos \theta$ . Πως μπορούμε όμως να μεταβάλλουμε τη μαγνητική ροή; Μπορούμε να αλλάξουμε οποιαδήποτε από τις τέσσερις παραμέτρους  $N$ ,  $B$ ,  $A$  ή  $\theta$  όπως φαίνεται και στα παρακάτω παραδείγματα:



Σχήμα 10.4

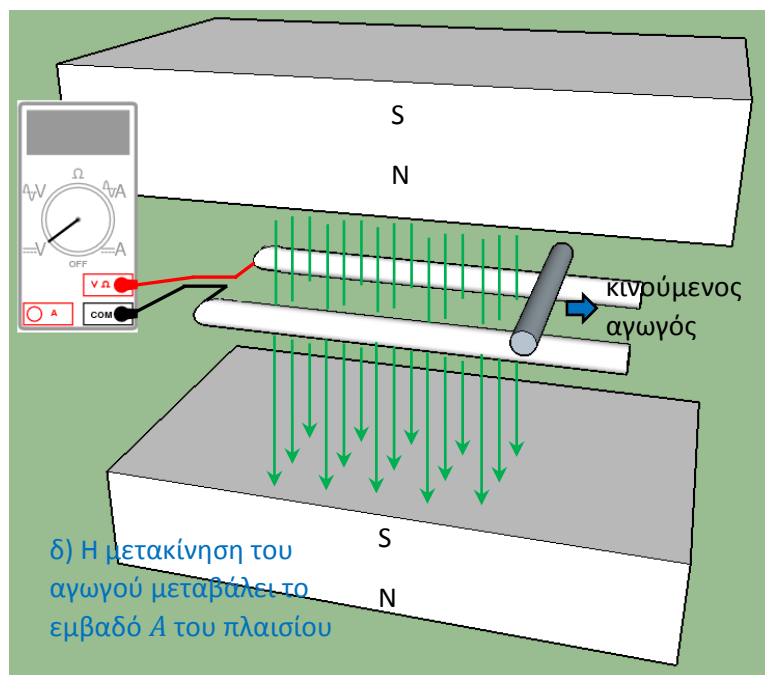
α) Ένας μετακινούμενος μαγνήτης στο Σχήμα 10.4α θα έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση του  $B$  στην γειτονιά του πηνίου όταν τον πλησιάζουμε σε αυτό και άρα αύξηση της  $\Phi$ . Όταν εκτελέσουμε αυτό το πείραμα, βλέπουμε μια ένδειξη στο συνδεδεμένο βολτόμετρο για όσο χρόνο διαρκεί η κίνηση του μαγνήτη.

β) Στο δεύτερο παράδειγμα στο Σχήμα 10.4β, χρησιμοποιούνται δυο πηνία, το ένα στα δεξιά για να παράξει μαγνητικό πεδίο  $B$  και το δεύτερο στα αριστερά ως δέκτης της μαγνητικής ροής. Αυξομειώνοντας το ρεύμα στο πηνίο 2 (με τη βοήθεια μιας μεταβλητής πηγής) αλλάζουμε το παραγόμενο  $B$  και άρα το  $\Phi$  στο πηνίο 1 στα αριστερά. Και πάλι βλέπουμε μια ένδειξη στο συνδεδεμένο βολτόμετρο στο πηνίο 1 για όσο χρόνο διαρκεί η μεταβολή του ρεύματος στο πηνίο 2.



Σχήμα 10.5

γ) Η γρήγορη περιστροφή του πλαισίου στο Σχήμα 10.5 έχει ως αποτέλεσμα το άναμμα της φωτεινής λυχνίας στο παραπάνω σχήμα. Τι αλλάζει σε αυτή την περίπτωση; Η γωνία  $\theta$



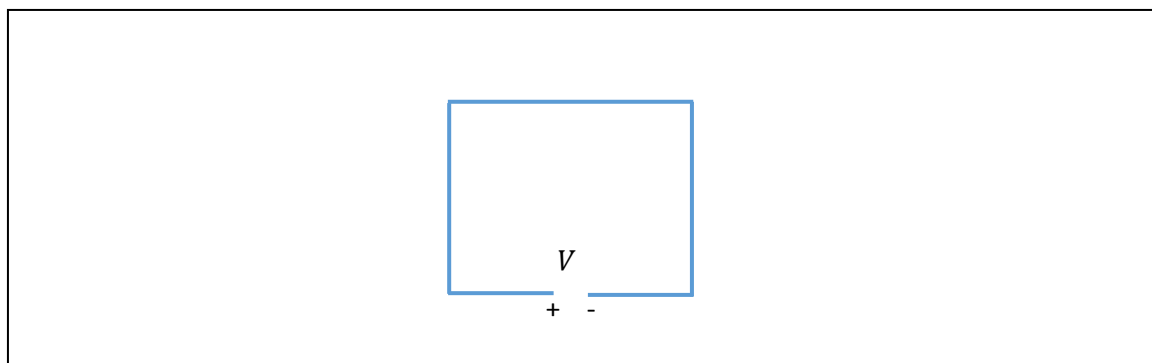
Σχήμα 10.6

δ) Στο Σχήμα 10.6 σχηματίζουμε ένα ορθογώνιο πλαίσιο με τη βοήθεια ενός κινούμενου ευθύγραμμου αγωγού και ενός σταθερού αγωγού σχήματος "Π". Μετακινώντας τον ευθύγραμμο αγωγό, μεταβάλλουμε το εμβαδό  $A$  του πλαισίου και άρα την μαγνητική ροή  $\Phi$ .

Ποσοτικώς ο νόμος του Faraday μας λέει το εξής: "Η μεταβολή της μαγνητικής ροής διαμέσου ενός πλαισίου ή πηνίου, έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση μιας τάσης που είναι ίση με την χρονική παράγωγο της ροής":

$V = -\frac{d\Phi}{dt}$	Νόμος του Faraday	10.4
-------------------------	-------------------	------

Για να χρησιμοποιήσουμε ή για να μετρήσουμε αυτή τη τάση, συνήθως αφήνουμε ένα μικρό διάκενο στο πλαίσιο όπως στο Σχήμα 10.7. Τότε οι δυο άκρες του πλαισίου δρουν ως οι πόλοι μιας μπαταρίας. Η παραγόμενη τάση με αυτό τον τρόπο ονομάζεται "Ηλεκτρεγερτική Δύναμη" και συμβολίζεται ως "ΗΕΔ".



Σχήμα 10.7

Παράδειγμα 10.3.

Ένα συρμάτινο πλαίσιο εμβαδού  $2 \times 10^{-3} \text{ m}^2$  τοποθετείται σε περιοχή που περιέχει μαγνητικό πεδίο  $B = 0.65 \text{ T}$ . Μέσα σε χρονικό διάστημα  $0.003 \text{ s}$ , το  $B$  αυξάνει γραμμικά σε  $1.4 \text{ T}$ . Εάν το πλαίσιο περιέχει 20 σπείρες, πόση είναι η επαγόμενη ΗΕΔ;

Λύση:

Από τα δεδομένα έχουμε: Εμβαδό  $A = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ , αρχικό πεδίο  $B_0 = 0.65 \text{ T}$ ,  $\Delta t = 0.003 \text{ s}$ , τελικό πεδίο  $B_F = 1.4 \text{ T}$ ,  $\theta = 0^\circ$  (αφού δεν αναφέρεται κάτι, θα θεωρήσουμε κάθετη ροή) και  $N = 20$ . Αφού το  $B$  αυξάνει γραμμικά με τον χρόνο, τότε είναι της μορφής:

$$B = B_0 + \lambda t$$

όπου η κλίση λισούται από τα δεδομένα με  $\lambda = \Delta B / \Delta t = (1.4 - 0.65) / 0.003 = 250 \text{ T/s}$ . Από τον νόμο του Faraday Εξ. (27) έχουμε

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(NBA \cos\theta)}{dt} = -NA \cos\theta \frac{dB}{dt} = -NA \cos\theta \lambda$$

ή

$$V = -20 \times 2 \times 10^{-3} \times \cos 0^\circ \times 250 = -10 \text{ V}$$

Παράδειγμα 10.4.

Ένα πηνίο 100 σπειρών με εμβαδό  $0.055 \text{ m}^2$  η καθεμία, τοποθετείται αρχικά με τον άξονά του παράλληλα σε μαγνητικό πεδίο  $B = 4 \text{ mT}$ . Το πηνίο περιστρέφεται έτσι ώστε η γωνία του άξονά του ως προς το  $B$  να μεταβάλλεται γραμμικά με το χρόνο και σε χρόνο  $0.3 \text{ s}$  έχει σαρώσει  $90^\circ$ . Ποια είναι η επαγόμενη ΗΕΔ σε αυτή τη θέση του πηνίου (θεωρώντας ότι η κίνηση συνεχίζεται και μετά από αυτή τη θέση);

Λύση: Τα δεδομένα είναι  $N = 100$ ,  $A = 0.055 \text{ m}^2$ ,  $B = 0.004 \text{ T}$ ,  $\Delta t = 0.3 \text{ s}$ , αρχική γωνία  $\theta_0 = 0$  και τελική γωνία  $\theta_F = \pi/2$  (θυμηθείτε ότι στον νόμο του Faraday η γωνία ορίζεται μεταξύ του καθέτου του πλαισίου και του  $B$  και άρα μεταξύ του άξονα του πηνίου και του  $B$ ). Αφού η  $\theta$  αυξάνει γραμμικά με τον χρόνο, τότε είναι της μορφής:

$$\theta = \theta_0 + \lambda t = \lambda t$$

όπου η κλίση  $\lambda$  ισούται από τα δεδομένα με  $\lambda = d\theta/dt = (\pi/2 - 0)/0.3 = 5.23 \text{ rad/s}$ . Από τον νόμο του Faraday Εξ. (27) έχουμε

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(NBA\cos\theta)}{dt} = NAB\sin\theta \frac{d\theta}{dt} = NAB\sin\theta\lambda$$

Μας ζητείται η ΗΕΔ στην τελική θέση  $\theta = \pi/2$  οπότε

$$V = 100 \times 0.055 \times 0.004 \times \sin 90^\circ \times 5.23 = 0.11 \text{ Volts}$$

Σημείωση: Προσέξτε ότι στον παραπάνω υπολογισμό μετατρέψαμε την κλίση  $d\theta/dt$ , που στην ουσία είναι η γωνιακή ταχύτητα, σε  $\text{rad/s}$  ενώ στον υπολογισμό του συνημιτόνου χρησιμοποιήσαμε μοίρες. Αυτό έγινε εσκεμμένα για να τονίσουμε την σημασία των ακτινίων στην Φυσική. Σε όλους τους τύπους της Φυσικής που εμφανίζεται γωνιακή ταχύτητα ή γωνιακή επιτάχυνση για να υπολογίσουμε κάποιο άλλο μέγεθος πρέπει πάντα να χρησιμοποιούμε τα ακτίνια αλλιώς ο τύπος μπορεί να μην ισχύει. Δηλαδή οι τύποι που περιέχουν αυτές τις ποσότητες έχουν αποδειχθεί με την παραδοχή ότι αυτές οι γωνίες είναι σε ακτίνια. Όσον αφορά τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις όπως το ημίτονο και το συνημίτονο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε όποια μονάδα μας βολεύει αφού αυτές οι συναρτήσεις οδηγούν σε καθαρούς αριθμούς, αρκεί να μην κάνουμε λάθος στην αριθμομηχανή κατά την επιλογή των μονάδων. Το πιο βέβαιο πάντως είναι να τα μετατρέπουμε όλα σε ακτίνια με το επιπλέον κόστος ότι πρέπει να μάθουμε να κάνουμε και τις αντίστοιχες πράξεις στην αριθμομηχανή.

## Αυτεπαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε το σωληνοειδές το οποίο είναι στην ουσία ένας λεπτός αγωγός κατά τέτοιο τρόπο περιτυλιγμένος ώστε να σχηματίζει  $N$  κυκλικές σπείρες σε ελικοειδή μορφή. Στην πράξη συνήθως το σωληνοειδές αποκαλείται "πηνίο" το οποίο όπως είδαμε είναι κάπως μια πιο γενική έννοια οπότε από δω και πέρα θα χρησιμοποιήσουμε αυτόν τον όρο. Όπως και ο πυκνωτής, έτσι και το πηνίο αποθηκεύει ενέργεια λόγω ενός φαινομένου γνωστού ως "**αυτεπαγωγή**". Είδαμε από τον νόμο του Faraday ότι όταν μεταβάλλεται η μαγνητική ροή διαμέσου ενός βρόχου, τότε αναπτύσσεται ΗΕΔ στον βρόχο αυτό. Επίσης είδαμε ότι όταν ένας βρόχος διαρρέεται από ρεύμα, παράγει μαγνητικό πεδίο. Στο πηνίο λόγω εγγύτητας των σπειρών, όταν το ρεύμα στην  $n$ -οστή σπείρα μεταβάλλεται, τότε και το αντίστοιχο παραγόμενο μαγνητικό

πεδίο μεταβάλλεται και άρα και η μαγνητική ροή σε γειτονικές σπείρες με αποτέλεσμα να παράγεται ΗΕΔ σε αυτές. Έτσι η κάθε σπείρα δρα ως μια ανεξάρτητη πηγή τάσης που σημαίνει ότι μέσα στο πηνίο υπάρχει αποθηκευμένη ενέργεια.

Από τον νόμο των Biot-Savart Εξ. 8.13 γνωρίζουμε ότι το παραγόμενο πεδίο της  $n$ -οστής σπείρας είναι ανάλογο με το ρεύμα  $I$  που τη διαρρέει. Ακολουθώντας και η μαγνητική ροή στις γειτονικές σπείρες θα είναι ανάλογη του  $I$  και από τον νόμο του Faraday Εξ. 10.4, η παραγόμενη τάση θα είναι ανάλογη του  $dI/dt$ . Το ρεύμα είναι κοινό για όλες τις σπείρες και έτσι όταν αθροίσουμε τις τάσεις σε όλες από αυτές, θα πάρουμε για την συνολική τάση  $V_L$  του πηνίου:

$V = L \frac{dI}{dt}$	Τάση πηνίου	10.5
-----------------------	-------------	------

όπου  $L$  μια σταθερά του πηνίου γνωστή ως "**αυτεπαγωγή**". Η μονάδα της είναι το *Henry* ή  $H$ . Για παράδειγμα για ένα μακρύ σωληνοειδές μήκους  $l$  που διαρρέεται από ρεύμα  $I$  και που αποτελείται από  $N$  σπείρες εμβαδού  $A$  η καθεμία, το παραγόμενο μαγνητικό πεδίο δίνεται από την Εξ. 9.6 ως

$$B = \frac{\mu_0 N I}{l}$$

Εάν το ρεύμα μεταβάλλεται, τότε θα μεταβάλλεται και το  $B$  αλλά και η μαγνητική ροή  $\Phi = BA$  δια μέσου μιας σπείρας, όπου  $A$  το εμβαδό της. Σύμφωνα με τον νόμο του Faraday, η επαγόμενη τάση στη μια σπείρα ισούται με

$$V_1 = \frac{d\Phi}{dt} = A \frac{\mu_0 N}{l} \frac{dI}{dt}$$

Αθροίζοντας σε όλες τις σπείρες, η συνολική τάση του πηνίου ισούται με  $V = NV_1$  δηλαδή

$$V = \frac{\mu_0 AN^2}{l} \frac{dI}{dt}$$

Συγκρίνοντας με την Εξ. 10.5 παραπάνω, έχουμε

$L = \frac{\mu_0 AN^2}{l}$	Αυτεπαγωγή σωληνοειδούς	10.6
----------------------------	-------------------------	------

## Ενέργεια Σωληνοειδούς

Πόση ενέργεια χρειάζεται για να φορτίσουμε ένα πηνίο αυτεπαγωγής  $L$  σε τελικό ρεύμα  $I$ ; Όπως θα δούμε σε μεταγενέστερα κεφάλαια, το πηνίο σε ένα κύκλωμα δεν φορτίζεται ακαριαία αλλά απαιτεί κάποιο χρόνο. Στο Σχήμα 10.8 εικονίζεται το πηνίο σε κάποια τυχαία χρονική στιγμή  $t$  από τη έναρξη της φόρτισης, με στιγμιαίο ρεύμα  $i(t)$  και αντίστοιχη στιγμιαία τάση η οποία σύμφωνα με την Εξίσωση 10.5 είναι ίση με  $V(t) = L di/dt$ . Η συνάρτηση  $i(t)$  παίρνει οριακές τιμές  $i(0) = 0$  και  $i(\infty) \rightarrow I$  (όπως θα δούμε στο Κεφ. 11, το πηνίο φορτίζεται στο μέγιστο ρεύμα του οριακά). Θα υπολογίσουμε την επιπλέον ενέργεια που απαιτείται για να αυξήσουμε το ρεύμα του πηνίου από  $i(t)$  σε  $i(t) + di$ . Από τον ορισμό της ισχύος Εξ. 7.7 που καταναλώνει ένα ηλεκτρικό στοιχείο

Φυσική ΙΙ – Δ. Κουζούδης – Π. Πετρίδης

όπως το πηνίο στο συγκεκριμένο παράδειγμα, βλέπουμε ότι κατά τη διάρκεια μιας απειροστής αύξησης του χρόνου κατά  $dt$ , η ενέργεια  $U$  του πηνίου αυξάνει κατά

$$dU = iVdt$$

Από την Εξ. 10.5 όμως

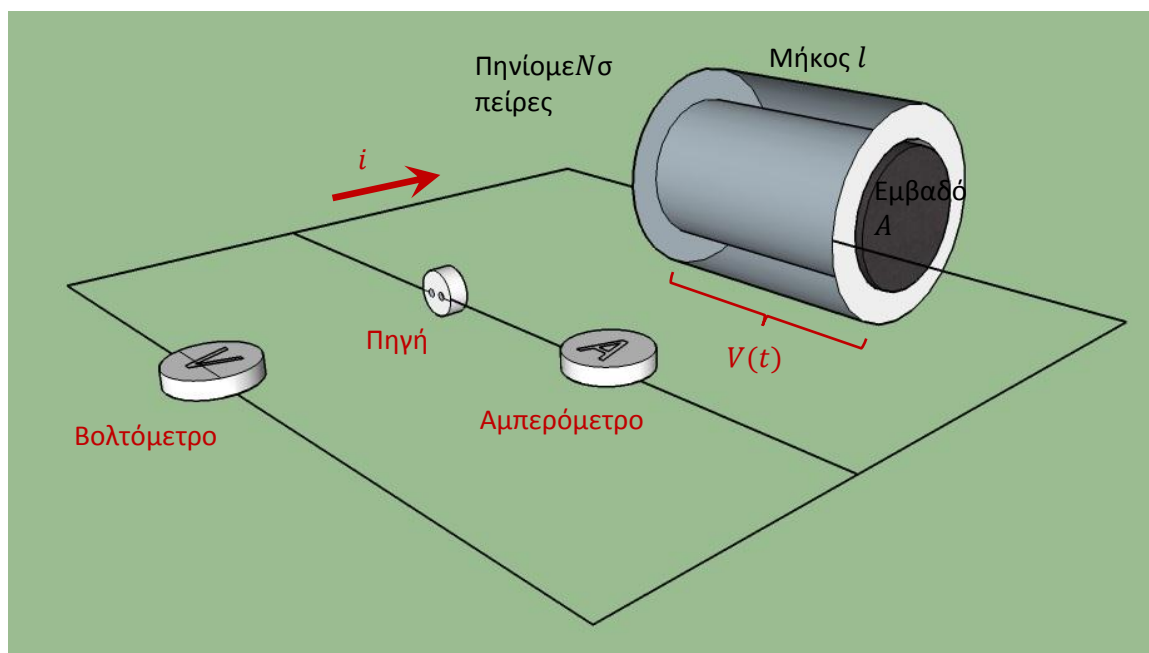
$$dU = iL \frac{di}{dt} dt = iLdi$$

Αυτή η εξίσωση μπορεί πολύ εύκολα να ολοκληρωθεί

$$U = \int_{i=0}^I dU = L \int_{i=0}^I idi$$

οδηγώντας στο αποτέλεσμα

$U = \frac{1}{2} LI^2$	Ενέργεια πηνίου	10.6
------------------------	-----------------	------



Σχήμα 10.8

## Προβλήματα

### Πρόβλημα 10.1.

Μια μαγνητική ροή ίση με  $13.6 \text{ mWb}$  διαπερνάει ένα κυκλικό συρμάτινο βρόχο διαμέτρου  $240 \text{ mm}$ . Βρείτε το μαγνητικό πεδίο εάν ο βρόχος τέμνει κάθετα το πεδίο. (Λύση:  $0.3 \text{ T}$ )

### Πρόβλημα 10.2.



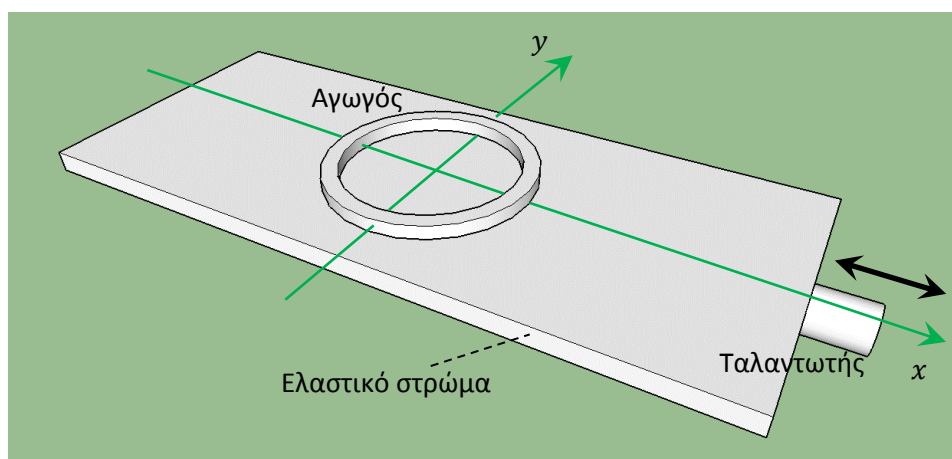
Ένα ορθογώνιο πλαίσιο διαστάσεων  $25 \times 15 \text{ cm}$  σχηματίζει γωνία  $\theta$  με ένα μαγνητικό πεδίο μέτρου  $0.6 \text{ T}$ . Ποια είναι η γωνία  $\theta$  εάν η μαγνητική ροή που διαπερνάει το πλαίσιο είναι ίση με  $0.015 \text{ Wb}$ ?

### Πρόβλημα 10.3.

Κυκλικός βρόχος διαμέτρου  $8 \text{ cm}$  έχει 5 σπείρες και τοποθετείται σε περιοχή του χώρου με πεδίο  $B$  ίσο με  $1.8 \text{ T}$ . Εάν το  $B$  μειώνεται γραμμικά στην τιμή  $0.6 \text{ T}$  μέσα σε  $0.004 \text{ s}$ , ποια είναι η παραγόμενη ΗΕΔ; (Λύση  $3.765 \text{ V}$ )

### Πρόβλημα 10.4.

Ο παρακάτω αγωγός σχήματος κύκλου με ακτίνα  $a = 2 \text{ cm}$  βρίσκεται στερεωμένος επάνω σε ένα ελαστικό στρώμα. Ένας ταλαντωτής παραμορφώνει το στρώμα αρμονικά κατά μήκος του άξονα  $x$  με πλάτος  $x_0 = 0.1 \text{ mm}$  και κυκλική συχνότητα  $\omega = 500 \text{ rad/s}$ . Θεωρείστε ότι ο αγωγός είναι από ελαστικό υλικό (όπως το κράμα κασσίτερου που χρησιμοποιείται στις ηλεκτρο-κολλήσεις κυκλωμάτων, γνωστό ως "καλάι") και έτσι ακολουθεί το στρώμα στις ταλαντώσεις και θεωρήστε επίσης ότι παραμορφώνεται μόνο ως προς τον άξονα  $x$ . Εάν το σύστημα αυτό τοποθετηθεί μέσα σε χώρο όπου υπάρχει ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο  $B = 0.2 \text{ T}$  κάθετο στην επιφάνεια του αγωγού, να βρεθεί η επαγόμενη ΗΕΔ στον αγωγό.



### Απάντηση:

Εναλλασσόμενη τάση  $V = V_0 \cos \omega t$  με πλάτος  $6.28 \times 10^{-4} \text{ V}$

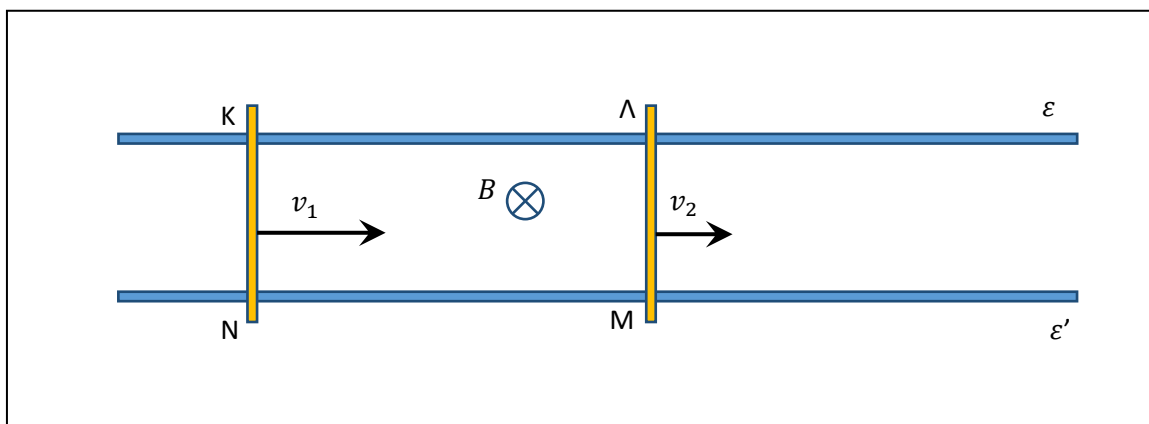
### Πρόβλημα 10.5.

Ένα κυκλικό πηνίο ακτίνας  $2 \text{ cm}$  με 5 σπείρες κολλητές μεταξύ τους, βρίσκεται μέσα σε ομοιογενές μαγνητικό πεδίο μέτρου  $2.1 \text{ T}$ . Η αρχική μαγνητική ροή διαμέσου του πηνίου είναι  $8.48 \text{ mWb}$  όταν ξαφνικά το πλαίσιο περιστρέφεται μέσα σε χρόνο  $0.5 \text{ ms}$  σε νέα θέση ώστε το κάθετό του να σχηματίζει γωνία  $51.3^\circ$  ως προς το μαγνητικό πεδίο. Να βρεθεί η επαγόμενη ΗΕΔ στο πηνίο λόγω αυτής της ξαφνικής περιστροφής.

### Πρόβλημα 10.6.

Στο παρακάτω σχήμα εικονίζονται δυο κατακόρυφοι αγωγοί ΚΝ και ΛΜ οι οποίοι κινούνται με ταχύτητες  $v_1$  και  $v_2$  αντίστοιχα προς τα δεξιά. Αυτοί οι αγωγοί είναι σε συνεχή επαφή με τους

οριζόντιους και σταθερούς αγωγούς  $\varepsilon$  και  $\varepsilon'$  στα σημεία Κ, Λ, Μ και Ν έτσι ώστε να σχηματίζεται ένα αγωγίμο ορθογώνιο πλαίσιο ΚΛΜΝ την κάθε στιγμή. Η απόσταση μεταξύ αυτών των οριζόντιων αγωγών είναι ίση με  $w$ . Εάν κάθετα στο επίπεδο της σελίδας υπάρχει ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο  $B$ , να βρεθεί η ΗΕΔ σε αυτό το πλαίσιο.



### Πρόβλημα 10.7.

Ένα συρμάτινο κυκλικό πλαίσιο ακτίνας  $R$  τοποθετείται κάθετα σε μαγνητικό πεδίο  $B_1$ . Μέσα σε χρονικό διάστημα  $\Delta t$ , το  $B$  αυξάνει γραμμικά σε  $B_2$ . Εάν το πλαίσιο περιέχει  $N$  σπείρες, και η επαγόμενη ΗΕΔ είναι  $V$  (σε απόλυτη τιμή), πόσο είναι το  $R$ ; Δίνονται τα  $B_1$ ,  $\Delta t$ ,  $B_2$  και  $V$  (σε αντιστοιχία).

Απάντηση:  $R = (V\Delta t/N\pi(B_2 - B_1))^{1/2}$

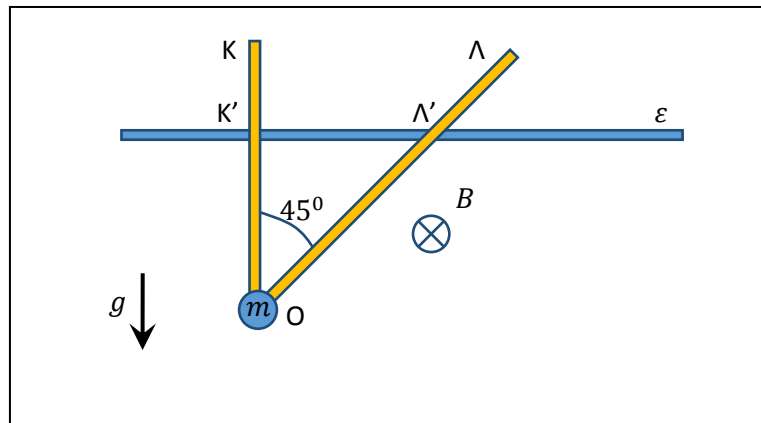
### Πρόβλημα 10.8.

Ένα τετραγωνικό αγωγίμο πλαίσιο 5 σπειρών κολλητά η μια με την άλλη, με εμβαδό  $0.1 \text{ m}^2$  η καθεμία, περιστρέφεται ελεύθερα ώστε η γωνία  $\varphi$  που σχηματίζει το επίπεδο του πλαισίου με ένα σταθερό μαγνητικό πεδίο  $B = 0.3 \text{ T}$  να μεταβάλλεται γραμμικά με το χρόνο με αρχική τιμή 0. Σε χρόνο  $\Delta t = 0.5 \text{ s}$  το πλαίσιο έχει καλύψει γωνία  $\Delta\varphi = 2 \text{ rad}$  (σε σχέση με την αρχική του θέση). Ποια είναι η επαγόμενη ΗΕΔ κατ' απόλυτη τιμή σε Volts σε αυτή τη θέση του πηνίου (θεωρώντας ότι η κίνηση συνεχίζεται και μετά από αυτή τη θέση;

Απάντηση:  $-0.25 \text{ Volts}$

### Πρόβλημα 10.9.

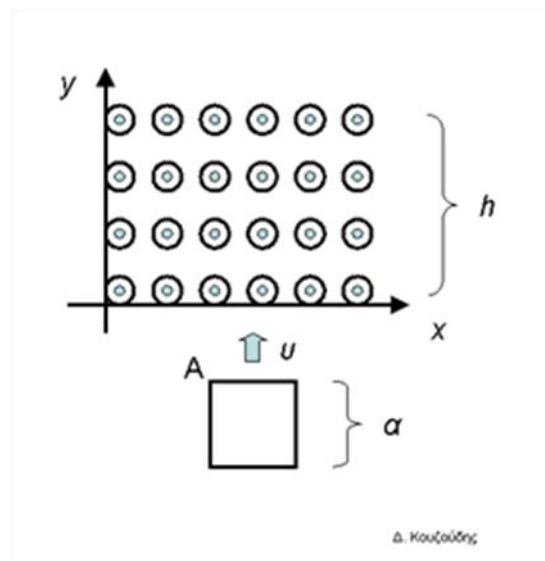
Στο παρακάτω σχήμα εικονίζονται ένας σταθερός αγωγός  $\varepsilon$  και ένας δεύτερος κινούμενος αβαρής αγωγός ΚΟΛ σε σχήμα γωνίας (σταθερού σχήματος) όπου  $K\hat{O}\Lambda = 45^\circ$ . Στη κορυφή Ο της γωνίας είναι προσδεμένη σημειακή μάζα  $m$  η οποία εκτελεί κατακόρυφη ελεύθερη πτώση ξεκινώντας στο  $t = 0$  από το ύψος του  $\varepsilon$ , παρασύροντας τον ΚΟΛ επίσης σε καθαρή κατακόρυφη πτώση χωρίς περιστροφή. Οι δυο αγωγοί είναι σε συνεχή επαφή μεταξύ τους στα σημεία Κ' και Λ', χωρίς τριβή έτσι ώστε να σχηματίζεται ένα αγωγίμο τριγωνικό ισοσκελές πλαίσιο Κ'ΟΛ' σε κάθε στιγμή. Εάν κάθετα στο επίπεδο της σελίδας υπάρχει ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο  $B = 0.2 \text{ T}$ , να βρεθεί η ΗΕΔ σε αυτό το πλαίσιο κατά τη χρονική στιγμή  $t = 2 \text{ s}$  (πάρτε  $g \approx 10 \text{ m/s}^2$  για ευκολία).



Απάντηση:  $80 \text{ V}$

Πρόβλημα 10.10.

Στο παρακάτω σχήμα ένα τετράγωνο πλαίσιο διαστάσεων  $a \times a$  εισέρχεται με ταχύτητα  $v$  μέσα σε χώρο όπου υπάρχει ομοιογενές μαγνητικό πεδίο μέτρου  $B$  και με φορά έξω από την σελίδα. Το μαγνητικό πεδίο εκτείνεται σε μια περιοχή εύρους  $h$  κατά μήκος του άξονα  $y$ . Να γίνει η γραφική παράσταση της επαγόμενης τάσης  $V$  στο πλαίσιο συναρτήσει της συντεταγμένης  $y$  του σημείου  $A$  του πλαισίου.



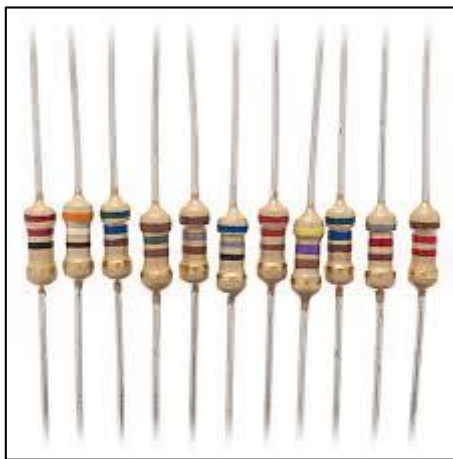


## 11. ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

Τα βασικά ηλεκτρικά κυκλώματα αποτελούνται από πηγές (συνήθως τάσης όπως οι μπαταρίες αλλά μπορεί να είναι και πηγές έντασης) συνδεδεμένες μέσω λεπτών αγωγών μηδενικής αντίστασης με τα λεγόμενα "γραμμικά στοιχεία" (ή "παθητικά στοιχεία") τα οποία είναι η αντίσταση, ο πυκνωτής και το πηνίο. Τα στοιχεία αυτά λέγονται γραμμικά επειδή όταν η πηγή είναι εναλλασσόμενη, αναπτύσσουν στα άκρα τους τάσεις με την ίδια συχνότητα με αυτή της πηγής. Θα εξετάσουμε το κάθε στοιχείο ξεχωριστά πριν να εξετάσουμε την συμπεριφορά τους στα ηλεκτρικά κυκλώματα.

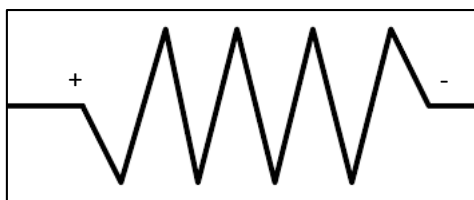
### Ηλεκτρική αντίσταση.

Όπως είδαμε στον νόμο του Ohm, οι αγωγοί πάντοτε παρουσιάζουν μια αντίσταση  $R$  στη διέλευση του ηλεκτρικού φορτίου διαμέσου τους. Στα ηλεκτρικά κυκλώματα υπάρχει η ανάγκη πολλές φορές να υπάρχει μια σταθερή τιμή της αντίστασης και για τον λόγο αυτό κατασκευάζονται μικροί κυλινδρικοί αγωγοί όπως αυτοί που εικονίζονται στο Σχήμα 11.1, οι οποίοι έχουν σταθερό και γνωστό  $R$  και ονομάζονται "αντιστάτες" ή "αντιστάσεις". Οι χρωματιστές λωρίδες που φαίνονται επάνω στους αντιστάτες ακολουθούν ένα συγκεκριμένο χρωματικό κώδικα σύμφωνα με τον οποίο μπορούμε να προσδιορίσουμε την τιμή της αντίστασης, δηλαδή διαφορετικές τιμές της  $R$  αντιστοιχούν σε διαφορετικά χρώματα ώστε να είναι εύκολη η χρήση τους.



Σχήμα 11.1

Στα ηλεκτρικά σχέδια χρησιμοποιείται το σύμβολο που φαίνεται στο Σχήμα 11.2 μαζί με την τιμή της αντίστασης σε  $\Omega$ . Επίσης στο σχήμα τοποθετούμε τα σύμβολα  $+$  και  $-$  σύμφωνα με τα οποία υπολογίζεται η διαφορά δυναμικού  $V_R = V_+ - V_-$  στις άκρες της αντίστασης. Εάν χρησιμοποιήσουμε τον νόμο του Ohm (δες παρακάτω) τότε πρέπει να επιλέξουμε το θετικό σύμβολο  $+$  από την μεριά που εισέρχεται το ρεύμα  $I$  και το  $-$  από την μεριά που εξέρχεται τότε η  $V_R$  ονομάζεται "πτώση τάσης".



Σχήμα 11.2

Σύμφωνα με τον νόμο του Ohm, η τάση στα άκρα της αντίστασης  $V_R$  ισούται με:

$V_R = IR$	Νόμος του Ohm	11.1
------------	---------------	------

Εάν π.χ. στο Σχήμα 11.2 μας δοθεί ότι  $V_R = 5\text{ V}$ , τότε το δυναμικό από τη μεριά της αντίστασης που υπάρχει το σύμβολο +, είναι υψηλότερο κατά  $5\text{ V}$  σε σχέση με την απέναντι μεριά και έτσι το ρεύμα (συμβατική φορά) ρέει από το υψηλό προς το χαμηλό δυναμικό, σύμφωνα με αυτά που συζητήσαμε στο Κεφ. 7. Εάν αντιθέτως μας δοθεί ότι  $V_R = -5\text{ V}$ , τότε το δυναμικό από τη μεριά της αντίστασης που υπάρχει το σύμβολο +, είναι χαμηλότερο κατά  $5\text{ V}$  σε σχέση με την απέναντι μεριά. Σε αυτή την περίπτωση η Εξ. 11.1 ορθά προβλέπει ότι το ρεύμα  $I$  είναι αρνητικό που σημαίνει ότι στην πραγματικότητα ρέει αντίθετα από ότι το θεωρήσαμε, δηλαδή ρέει από την μεριά της αντίστασης με το  $-$  προς την μεριά με το  $+$ .

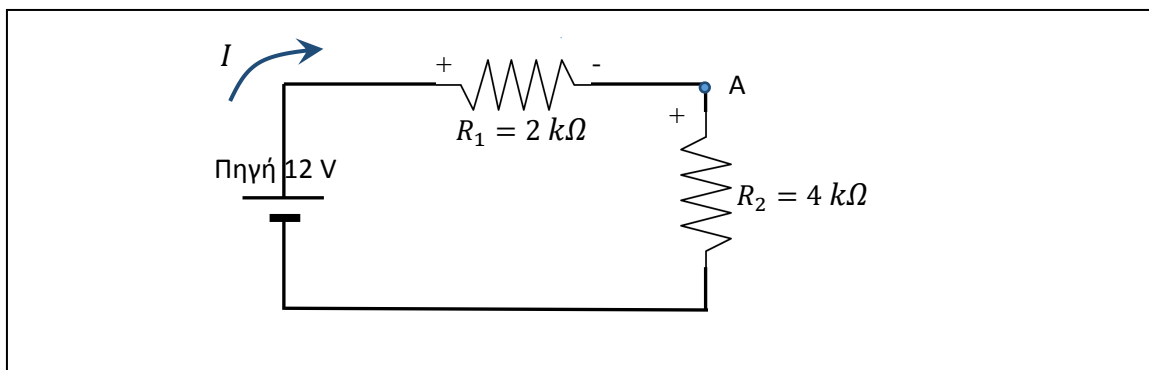
Ως γνωστόν δυο διαφορετικές αντιστάσεις  $R_1$  και  $R_2$  μπορούν να ενωθούν είτε σε σειρά, οπότε και διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα με ισοδύναμη αντίσταση  $R = R_1 + R_2$ , είτε παράλληλα, οπότε και βρίσκονται υπό την ίδια τάση, με ισοδύναμη αντίσταση  $R$  όπου  $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$ . Επίσης, σε ορισμένες περιπτώσεις χρησιμοποιούνται μεταβλητές αντιστάσεις, οι λεγόμενοι "ρεοστάτες", στους οποίους μπορούμε να θέσουμε το  $R$  σε μια επιθυμητή τιμή συνήθως με την βοήθεια κάποιου κοχλίου όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.3:



Σχήμα 11.3

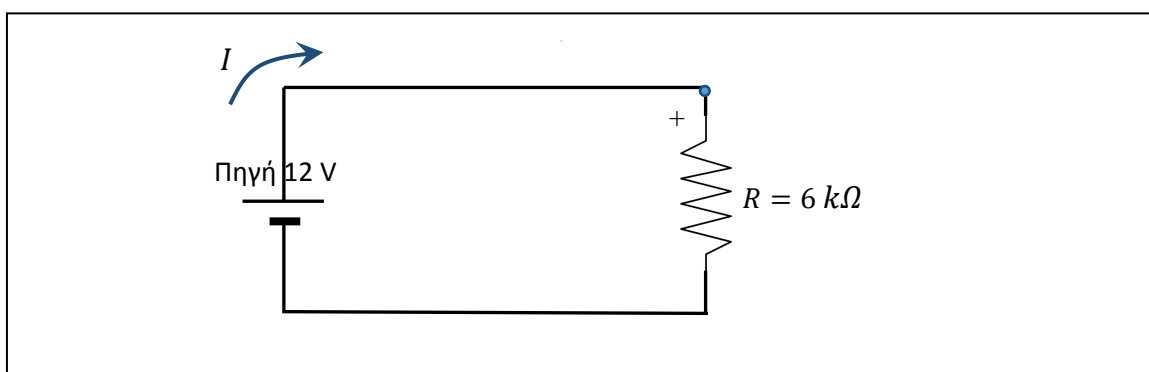
Λόγω της αντίστασης του υλικού στο εσωτερικό ενός αντιστάτη, η ηλεκτρική ενέργεια  $E$  που παρέχεται από κάποια εξωτερική πηγή σε χρόνο  $t$ , καταναλώνεται με τη μορφή θερμότητας επάνω στον αντιστάτη. Η αντίστοιχη ισχύς δίνεται από την Εξ 7.8.

**Παράδειγμα 11.1:** α) Να βρεθεί το δυναμικό στο σημείο Α στο παρακάτω κύκλωμα και β) Να βρεθεί η ισχύς που καταναλώνει η  $R_2$



Λύση:

α) Οι δυο αντιστάσεις είναι σε σειρά επομένως μπορούν να αντικατασταθούν όπως στο παρακάτω σχήμα από την ισοδύναμη αντίσταση  $R = 2 + 4 = 6 \text{ k}\Omega$ .



Από τον νόμο του Ohm παίρνουμε για το ρεύμα  $I = V_R/R$ . Η τάση στα άκρα της  $R$  ισούται με την τάση της πηγής  $12 \text{ V}$  (θυμηθείτε ότι οι λεπτές αγωγίμες συνδέσεις έχουν πρακτικώς μηδενική αντίσταση και άρα και μηδενική πτώση τάσης στα άκρα τους) και επομένως  $I = 12\text{V}/6 \times 10^3 \Omega = 2 \text{ mA}$ . Αναφερόμενοι στο αρχικό σχήμα, η πτώση τάσης στην  $R_1$  ισούται με

$$V_1 = V_{1+} - V_{1-} = IR_1 = 2 \text{ mA} \times 2 \text{ k}\Omega = 4 \text{ V}$$

Στις πηγές παίρνουμε αυθαίρετα τον αρνητικό πόλο σε δυναμικό μηδέν (γείωση) και έτσι ο θετικός πόλος βρίσκεται σε δυναμικό  $12 \text{ V}$ . Αυτή είναι και η τάση του θετικού άκρου (+) της  $R_1$ , δηλαδή  $V_{1+} = 12 \text{ V}$ . Επομένως  $V_1 = V_{1+} - V_{1-} \Rightarrow 4 = 12 - V_{1-} \Rightarrow V_{1-} = 8 \text{ V}$ . Το αρνητικό άκρο (-) της  $R_1$  όμως συμπίπτει με το σημείο Α και άρα έχουν το ίδιο δυναμικό  $V_A = 8 \text{ V}$ .

Θα μπορούσαμε να δουλέψουμε και με την  $R_2$  αντί της  $R_1$ . Η πτώση τάσης στα άκρα της ισούται με

$$V_2 = V_{2+} - V_{2-} = IR_2 = 2 \text{ mA} \times 4 \text{ k}\Omega = 8 \text{ V}$$

Το άκρο (-) της  $R_2$  είναι συνδεδεμένο με τη γείωση ενώ το άκρο (+) συμπίπτει με το σημείο Α και επομένως

$$V_{2+} - V_{2-} = 8 \text{ V} \Rightarrow V_A - 0 = 8 \text{ V}$$

Όπως αναμένουμε, καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα  $V_A = 8 \text{ V}$ .

β) Από την Εξ. 7.8 έχουμε για την ισχύ (ενέργεια ανά μονάδα χρόνου)

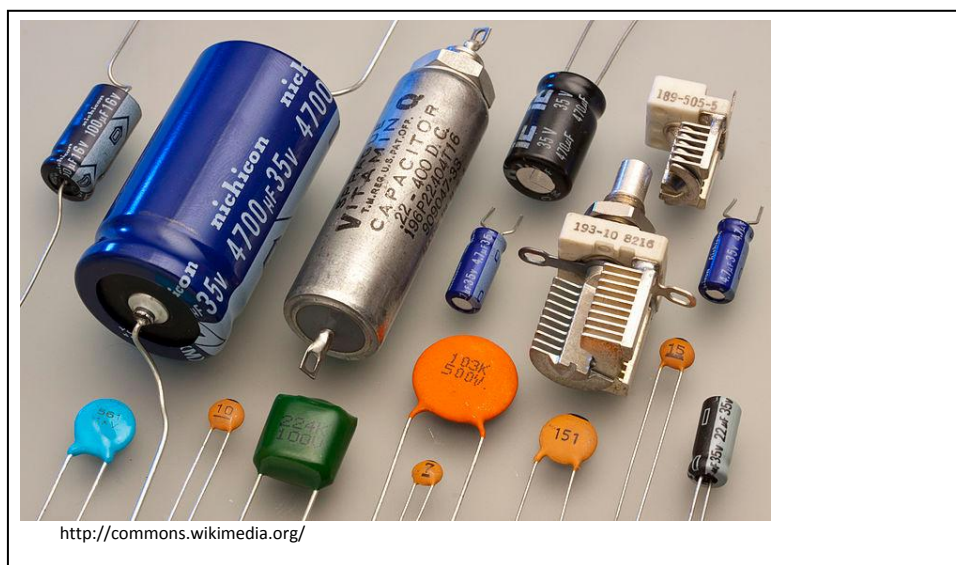
$$P_2 = I^2 R_2 = (0.002)^2 \times 4 \times 10^3 = 0.016 \text{ Watt}$$

## Πυκνωτής.

Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 6, ο πυκνωτής είναι μια διάταξη στην οποία δυο αγώγιμες επιφάνειες βρίσκονται σε μικρή απόσταση μεταξύ τους και φέρουν ίσα και αντίθετα φορτία  $\pm q$ . Αντίθετα με τις αντιστάσεις, οι πυκνωτές απαντούν σε διάφορα σχήματα μέσα στα κυκλώματα, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 11.4 και έχουν διάφορες χρήσεις όπως π.χ. σε φίλτρα συχνοτήτων, σε ρυθμιστές χρονικών σταθερών, σε συντονισμούς, σε αποθήκευση ενέργειας κ.ά. αλλά η βασική τους λειτουργία είναι η αποθήκευση φορτίου στις δυο αγώγιμες επιφάνειες οι οποίες ονομάζονται και "οπλισμοί" του πυκνωτή. Όπως είδαμε, η χωρητικότητα του πυκνωτή εκφράζει κυρίως την δυνατότητα του πυκνωτή να αποθηκεύει φορτίο και δίνεται από την Εξ. 6.1 ως

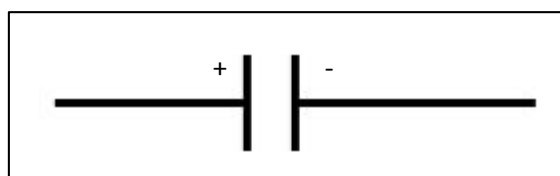
$$C = \frac{q}{V_C}$$

όπου  $V_C = V_+ - V_-$  η διαφορά δυναμικού στα άκρα του πυκνωτή και  $V_+$ ,  $V_-$  τα δυναμικά στους οπλισμούς με φορτία  $\pm q$  αντίστοιχα. Όπως είδαμε στο Κεφ. 6, η μονάδα της χωρητικότητας είναι το *Farad* ή  $F$  το οποίο ισούται με  $F = C/V$ . Στην πράξη το *Farad* είναι πολύ μεγάλη μονάδα και οι περισσότεροι πυκνωτές στα κυκλώματα, όπως αυτοί που φαίνονται στο Σχήμα 11.4, έχουν χωρητικότητες της τάξης του  $\mu F$  ή  $nF$  οι οποίες αναγράφονται αριθμητικά επάνω στην εξωτερική επιφάνειά τους.



Σχήμα 11.4

Στα ηλεκτρικά σχέδια χρησιμοποιείται για τον πυκνωτή το σύμβολο που εικονίζεται στο Σχήμα 11.5 και δίπλα του αναγράφεται η τιμή της χωρητικότητας σε  $\mu F$  ή  $nF$ . Επίσης στο σχήμα τοποθετούμε τα σύμβολα  $\pm$  που αντιστοιχούν στα δυναμικά  $V_+$  και  $V_-$  αντίστοιχα.



Σχήμα 11.5



Η διαφορά δυναμικού στα άκρα του πυκνωτή ονομάζεται επίσης "πτώση τάσης" και από τον ορισμό της χωρητικότητας του πυκνωτή Εξ. 6.1 που είδαμε παραπάνω, ισούται με:

$V_C = \frac{q}{C}$	Τάση πυκνωτή	11.2
---------------------	--------------	------

Σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα, οι συρμάτινοι αγωγοί που συνδέονται στους δυο οπλισμούς του πυκνωτή μεταφέρουν φορτίο στους οπλισμούς του και τον φορτίζουν, ή του απομακρύνουν φορτίο και τον αποφορτίζουν. Εάν σε χρόνο  $dt$  μεταφερθεί φορτίο  $dq$  στο θετικό οπλισμό (φόρτιση), τότε από την Εξ. 11.2 η τάση του πυκνωτή θα αυξηθεί κατά  $dV_C = dq/C$ . Εάν όμως αφαιρεθεί φορτίο  $dq$  από το θετικό οπλισμό (εκφόρτιση) τότε η τάση του πυκνωτή μειώνεται κατά το ίδιο ποσό, δηλαδή  $dV_C = -dq/C$ . Διαιρώντας με τον αντίστοιχο χρόνο  $dt$  καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

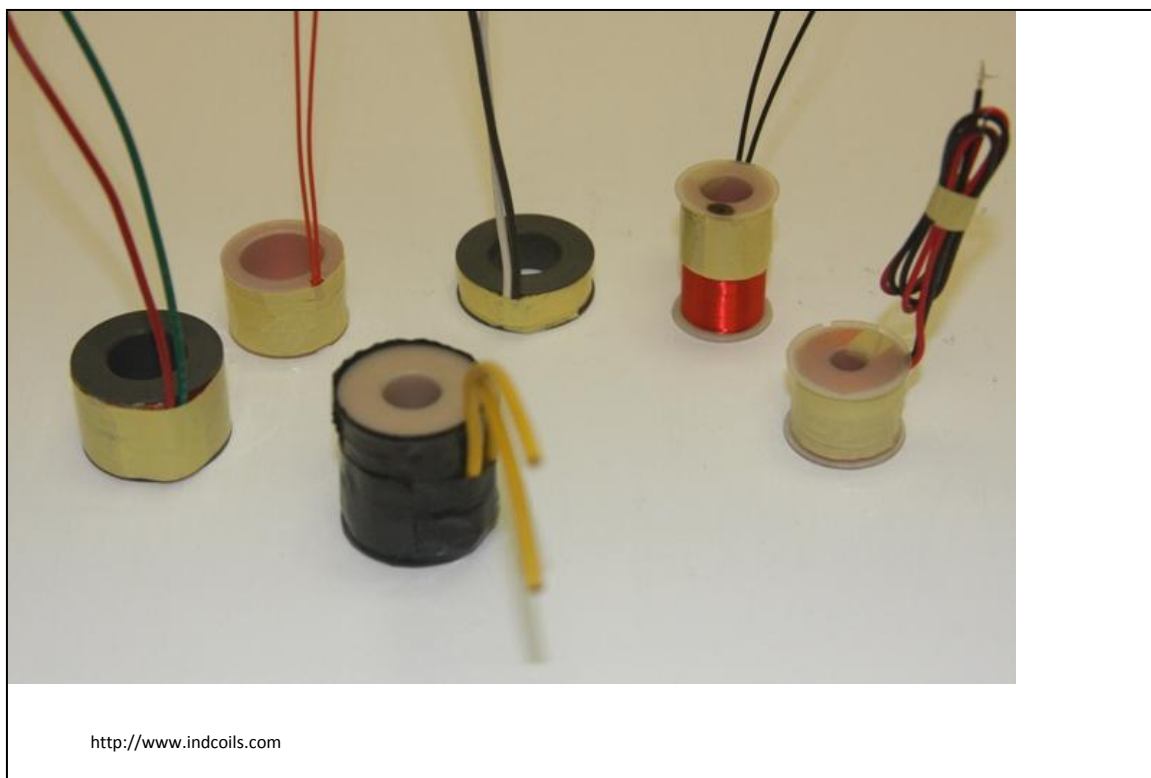
$\frac{dV_C}{dt} = \frac{I}{C}$	Μεταβολή τάσης πυκνωτή - Φόρτιση	11.3α
$\frac{dV_C}{dt} = -\frac{I}{C}$	Μεταβολή τάσης πυκνωτή - Εκφόρτιση	11.3β

όπου χρησιμοποιήθηκε ο ορισμός του ρεύματος  $I = dq/dt$  που διαρρέει τους συρμάτινους αγωγούς. Με άλλα λόγια, όταν το ρεύμα  $I$  κατευθύνεται προς τον θετικό οπλισμό, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. 11.4α ενώ όταν το  $I$  απομακρύνεται από αυτόν, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. 11.5β.

Όπως είδαμε στο Κεφ. 6, όταν δυο διαφορετικοί πυκνωτές με χωρητικότητες  $C_1$  και  $C_2$  συνδέονται παράλληλα, οπότε και βρίσκονται υπό την ίδια τάση, έχουν ισοδύναμη χωρητικότητα  $C = C_1 + C_2$ , ενώ όταν συνδέονται σε σειρά, οπότε και έχουν το ίδιο φορτίο  $q$ , έχουν ισοδύναμη χωρητικότητα  $C$  που δίνεται από την  $1/C = 1/C_1 + 1/C_2$ .

## Πηνίο

Στο κεφάλαιο 8 μελετήσαμε το πηνίο το οποίο είναι στην ουσία ένας συρμάτινος αγωγός περιτυλιγμένος κατά τέτοιο τρόπο ώστε να σχηματίζει ένα αριθμό  $N$  σπειρών σε ελικοειδή μορφή. Όπως και ο πυκνωτής, έτσι και το πηνίο αποθηκεύει ενέργεια λόγω του φαινομένου της αυτεπαγωγής. Διάφορα πηνία που συναντώνται σε ηλεκτρικά κυκλώματα και εφαρμογές φαίνονται στο Σχήμα 11.6

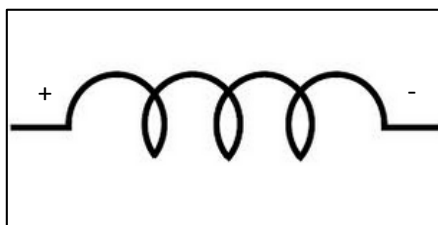


Σχήμα 11.6

Από την Εξ. 10.5 γνωρίζουμε ότι η τάση  $V_L$  του πηνίου δίνεται από την σχέση

$V_L = L \frac{dI}{dt}$	Τάση πηνίου	11.4
-------------------------	-------------	------

όπου  $L$  η αυτεπαγωγή του η οποία όπως είδαμε στο Κεφ. 10 έχει ως μονάδα το *Henry* ή *H*. Στα ηλεκτρικά σχέδια χρησιμοποιείται το σύμβολο του Σχήματος 11.7 για το πηνίο και δίπλα του αναγράφεται η τιμή της αυτεπαγωγής συνήθως σε *mH*. Επίσης στο σχήμα τοποθετούμε τα σύμβολα  $\pm$  που έχουν το ίδιο νόημα όπως και με την αντίσταση, δηλαδή το (+) δείχνει το σημείο εισόδου του ρεύματος και το (-) το σημείο εξόδου.


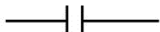
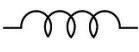


Σχήμα 11.7

Ο συνδυασμός δυο πηνίων είναι ανάλογος με αυτόν των δυο αντιστάσεων. Όταν δηλαδή δυο διαφορετικά πηνία με αυτεπαγωγές  $L_1$  και  $L_2$  ενωθούν σε σειρά, τότε διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα με ισοδύναμη αυτεπαγωγή  $L = L_1 + L_2$ , ενώ όταν είναι παράλληλα τότε βρίσκονται υπό την ίδια τάση, με ισοδύναμη αυτεπαγωγή  $L$  που δίνεται από την  $1/L = 1/L_1 + 1/L_2$ .

## Κυκλώματα με αντιστάσεις, πυκνωτές και πηνία

Όπως προαναφέρθηκε, σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετηθούν τα βασικά ηλεκτρικά κυκλώματα που αποτελούνται από πηγές, αντιστάσεις, πυκνωτές και πηνία. Για την επίλυση αυτών των κυκλωμάτων, θα χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω συνοπτικό Πίνακα 11.1 όπου εμφανίζονται οι εξισώσεις του κάθε στοιχείου καθώς και το σύμβολό του.

Στοιχείο	Εξίσωση	Σύμβολο	Πτώση τάσης	Εξίσωση
Αντίσταση	$V_R = IR$		Κατά μήκος $I$	11.1
Πυκνωτής	$V_C = \frac{q}{C}$		Από τον (+) στον (-) οπλισμό	11.2
	$\frac{dV_C}{dt} = \pm \frac{I}{C}$			11.3
Πηνίο	$V_L = L \frac{dI}{dt}$		Κατά μήκος $I$	11.4

Πίνακας 11.1

Επιπλέον του παραπάνω πίνακα, θα χρησιμοποιήσουμε και το γεγονός ότι η συνολική μεταβολή της δυναμικής ενέργεια είναι μηδέν επάνω σε μια κυκλική διαδρομή. Π.χ. στο βαρυτικό πεδίο όσο ψηλά και εάν ανέβουμε, εάν επιστρέψουμε στο αρχικό σημείο μέσω οποιαδήποτε διαδρομής, η συνολική μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας ισούται με μηδέν. Αφού η τάση είναι εξ' ορισμού η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια ανά μονάδα φορτίου, θα έχει και αυτή την ίδια ιδιότητα με την δυναμική ενέργεια, δηλαδή η συνολική μεταβολή της κατά μήκος μιας οποιοδήποτε κλειστής διαδρομής ισούται με μηδέν. Επομένως μπορούμε να πούμε ότι

Το άθροισμα των τάσεων κατά μήκος μιας οποιασδήποτε κλειστής διαδρομής ίσο με μηδέν. Αυτό η ιδιότητα των ηλεκτρικών κυκλωμάτων είναι γνωστή ως "ο 2<sup>ος</sup> νόμος του Kirchhoff".

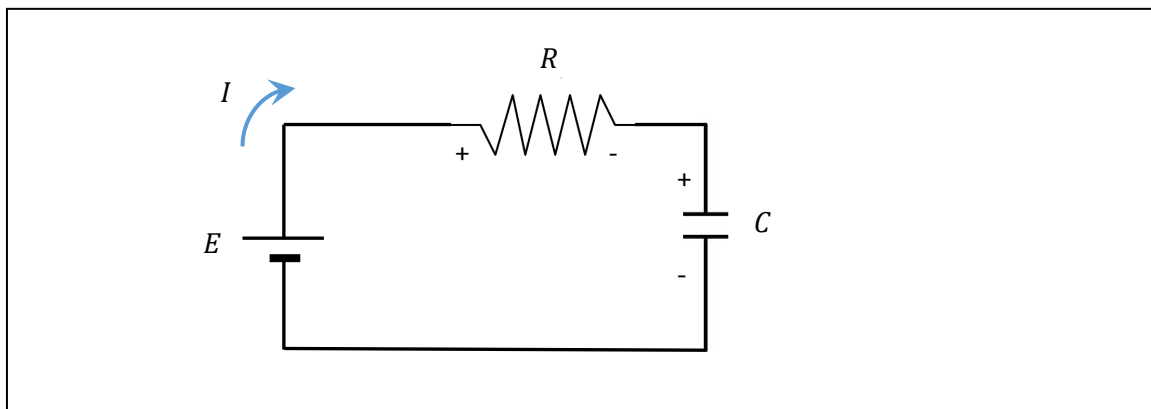
Υπάρχουν δυο μεγάλες κατηγορίες κυκλωμάτων, ανάλογα με την πηγή του κυκλώματος: α) τα κυκλώματα συνεχούς ρεύματος (DC) όπου η πηγή παρέχει σταθερή τάση (ή σταθερό ρεύμα εάν χρησιμοποιούμε πηγή σταθερού ρεύματος) και β) τα κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος (AC) όπου η πηγή παρέχει εναλλασσόμενη τάση σταθερής συχνότητας. Παράδειγμα της πρώτης περίπτωσης είναι μια μπαταρία 1.5 V και της δεύτερης ο ρευματολήπτης της Δ.Ε.Η. που παρέχει 220 V εναλλασσόμενη τάση στα 50 Hz.

## Κυκλώματα Συνεχούς Ρεύματος DC

Υπάρχουν βασικά δυο κυκλώματα συνεχούς που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον: Το κύκλωμα RC και το κύκλωμα RL

α) Κύκλωμα  $RC$ -Φόρτιση

Όπως υπονοεί το όνομα, το κύκλωμα  $RC$  αποτελείται από μια αντίσταση  $R$  και ένα πυκνωτή χωρητικότητας  $C$ . Εάν το κύκλωμα περιέχει πηγή, τότε έχουμε την περίπτωση φόρτισης του πυκνωτή αλλιώς έχουμε εκφόρτιση. Συνήθως σε ένα τέτοιο κύκλωμα υπάρχει διακόπτης και παίρνουμε ως μηδέν του χρόνου τη χρονική στιγμή που κλείνει ο διακόπτης. Στο Σχήμα 11.8 φαίνεται η περίπτωση **φόρτισης** όπου το φορτίο του πυκνωτή αυξάνεται με τον χρόνο. Η τάση της πηγής είναι ίση με  $E$ .



Σχήμα 11.8

Σύμφωνα με το 2<sup>ο</sup> νόμο του Kirchhoff για τον βρόχο του παραπάνω κυκλώματος έχουμε

$$E - V_R - V_C = 0$$

Οι τάσεις  $V_R$  και  $V_C$  παίρνουν αρνητικό πρόσημο επειδή είναι πτώσεις τάσης όπως διαγράφουμε το κύκλωμα κατά την φορά του ρεύματος (δείτε τα σχετικά πρόσημα στο σχήμα). Από τις Εξισώσεις 11.1 και 11.2 έχουμε:

$$E - IR - \frac{q}{C} = 0$$

Στην παραπάνω εξίσωση έχουμε δυο μεταβλητές, το  $I$  και το  $q$  και έτσι δεν μπορούμε να την λύσουμε. Για τον πυκνωτή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. 11.3 που περιέχει το ρεύμα αντί για το φορτίο. Για να γίνει αυτό, παραγωγίζουμε την παραπάνω εξίσωση των τάσεων που οδηγεί στο αποτέλεσμα:

$$0 - \frac{dV_R}{dt} - \frac{dV_C}{dt} = 0$$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$-R \frac{dI}{dt} - \frac{I}{C} = 0 \Rightarrow \frac{dI}{dt} = -\frac{1}{RC} I$$

Η παραπάνω είναι μια απλή Διαφορική Εξίσωση (Δ.Ε.) ως προς  $I$  το οποίο είναι γενικά μια συνάρτηση του χρόνου  $I(t)$ . Αυτή η Δ.Ε. βασικά μας λέει με απλά λόγια ότι εάν παραγωγίσουμε τη συνάρτηση αυτή, παίρνουμε μια σταθερά  $-1/RC$  επί την ίδια συνάρτηση  $I(t)$ . Οι συναρτήσεις στα Μαθηματικά που έχουν αυτή την ιδιότητα είναι οι εκθετικές. Όντως εάν δοκιμάσουμε τη λύση

$$I = I_0 e^{-t/RC}$$

όπου  $I_0$  είναι μια σταθερά, θα δούμε ότι ικανοποιεί την παραπάνω Δ.Ε. αφού

$$\frac{dI}{dt} = I_0 \frac{d}{dt}(e^{-t/RC}) = -\frac{1}{RC} I_0 e^{-t/RC} = -\frac{1}{RC} I$$

Η σταθερά  $I_0$  είναι το αρχικό ρεύμα αφού για  $t = 0$  έχουμε  $I = I_0 e^0 = I_0$  και προσδιορίζεται από τις αρχικές συνθήκες. Εάν π.χ. ο πυκνωτής αρχικά είναι αφόρτιστος, τότε  $q = 0$  και από την Εξ. 11.2 συνεπάγεται  $V_C = 0$ . Σύμφωνα με το 2<sup>ο</sup> νόμο του Kirchhoff τότε έχουμε

$$E - V_R - 0 = 0 \Rightarrow E - I_0 R = 0 \Rightarrow I_0 = \frac{E}{R}$$

Δηλαδή το αρχικό ρεύμα είναι αυτό που θα παίρναμε από τον νόμο του Ohm εάν απουσίαζε ο πυκνωτής εντελώς από το κύκλωμα. Έτσι για κάθε  $t$ , το ρεύμα του κυκλώματος ισούται με

$I(t) = \frac{E}{R} e^{-t/RC}$	Ρεύμα φόρτισης RC	11.5
--------------------------------	-------------------	------

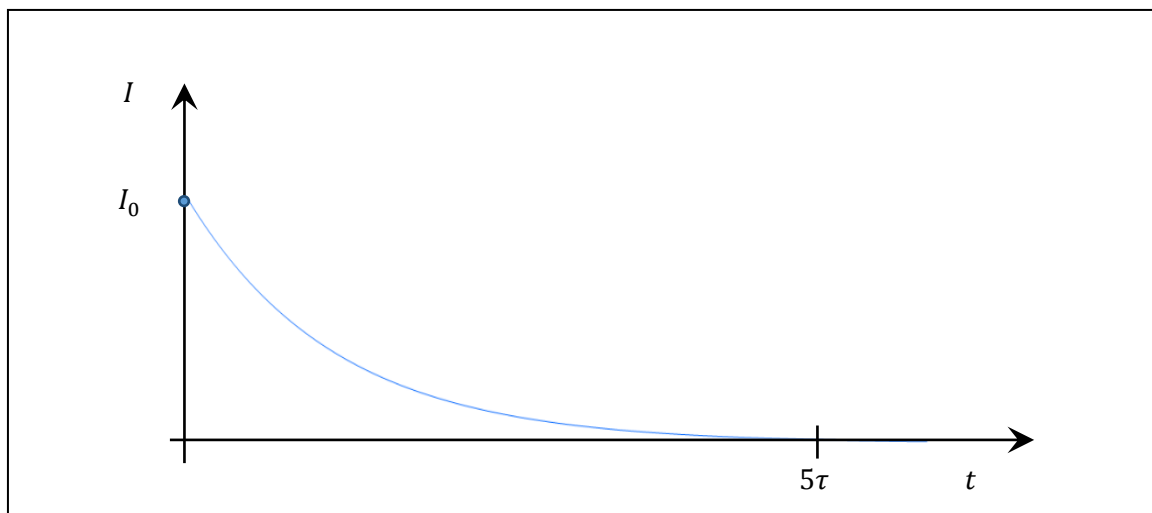
Στο όριο  $t \rightarrow \infty$  το ρεύμα μηδενίζεται. Θα δούμε παρακάτω τον φυσικό λόγο γιατί γίνεται αυτό. Από τον ορισμό του ρεύματος  $I = dq/dt$  μπορούμε να ολοκληρώσουμε το ρεύμα για να υπολογίσουμε το φορτίο του πυκνωτή

$$q(t) = \int I dt = \frac{E}{R} \int e^{-t/RC} dt = -EC e^{-t/RC} + c_1$$

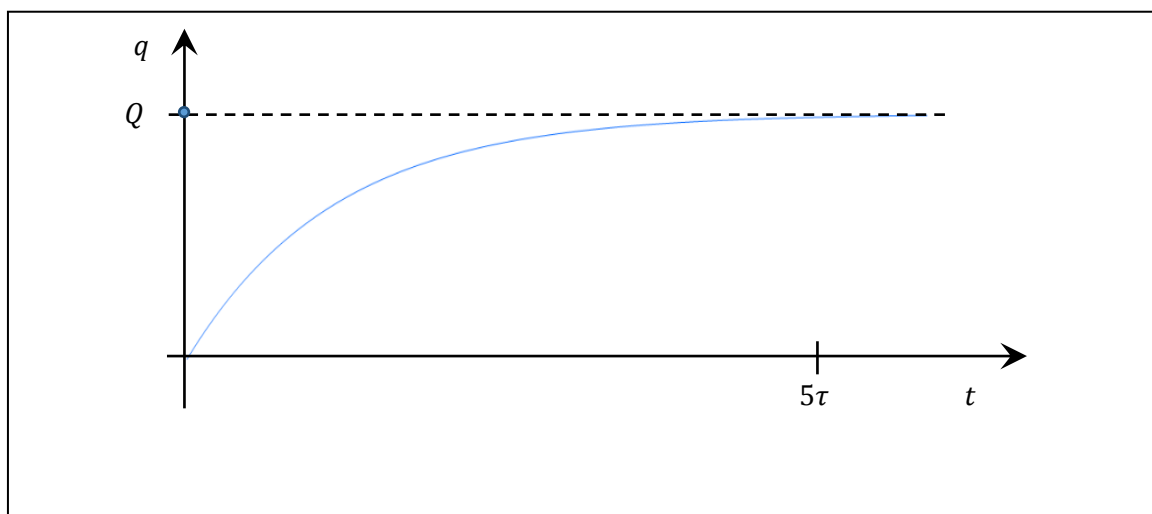
όπου  $c_1$  είναι η σταθερά ολοκλήρωσης. Από την αρχική συνθήκη  $q(0) = 0$  (αρχικά αφόρτιστος πυκνωτής) παίρνουμε  $c_1 = EC$  και έτσι

$q(t) = EC(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$	Φορτίο φόρτισης πυκνωτή RC	11.6
------------------------------------	----------------------------	------

Η γραφική παράσταση του ρεύματος και του φορτίου φαίνονται στα σχήματα 11.9 και 11.10 αντίστοιχα. Ο πυκνωτής ξεκινάει με μηδενικό φορτίο και σε πολύ μεγάλους χρόνους  $t \rightarrow \infty$  το φορτίο του τείνει στην οριακή τιμή  $q \rightarrow Q = EC$ . Αντιθέτως το ρεύμα αρχικά είναι μέγιστο με τιμή  $E/R$  αλλά φθίνει συνεχώς και οριακά γίνεται μηδέν. Η φυσική εξήγηση αυτών των αποτελεσμάτων είναι η εξής: Αρχικά ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος, η τάση στα άκρα του είναι μηδέν και έτσι δεν αντιτίθεται στην πηγή η οποία μπορεί και παρέχει έτσι το μέγιστο ρεύμα. Το ρεύμα μεταφέρει φορτίο στον πυκνωτή και όσο περνάει η ώρα, το φορτίο αυτό εμποδίζει να πλησιάσει επιπλέον φορτίο αφού τα ομόσημα φορτία απωθούνται. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τον περιορισμό και τελικά τον μηδενισμό του ρεύματος.



Σχήμα 11.9



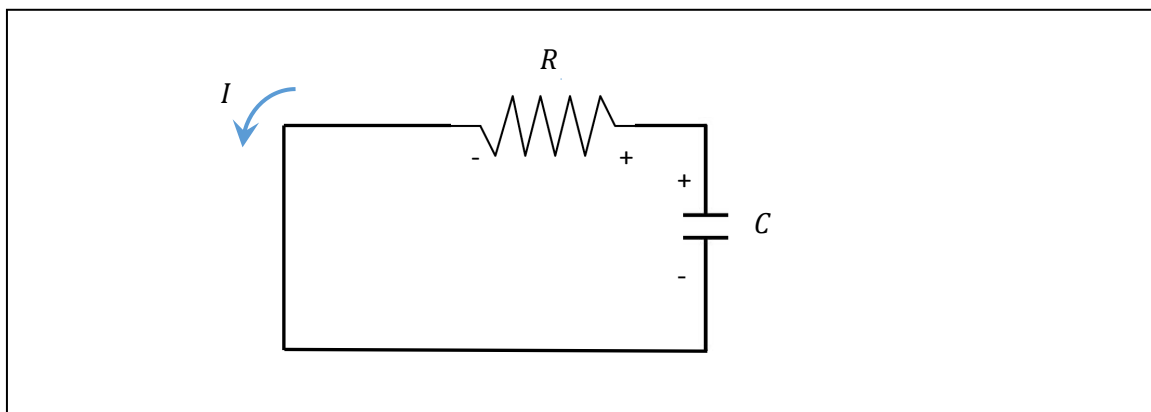
Σχήμα 11.10

Η σταθερά  $\tau = RC$  έχει διαστάσεις χρόνου και είναι μια ένδειξη του πόσο γρήγορα θα πλησιάσει το σύστημα τις οριακές του τιμές. Βέβαια η εκθετική συνάρτηση τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν και μηδενίζεται μόνο στο άπειρο αλλά επειδή  $e^{-5} \approx 0.0067$ , κάτι μικρότερο ως τιμή από το 0.1%, πρακτικώς θεωρούμε ότι σε χρόνο  $t = 5\tau$  το κύκλωμα  $RC$  έχει έρθει στην οριακή του κατάσταση. Από την Εξ. 11.2η τάση στα άκρα του πυκνωτή ισούται με  $V_C = q/C$  η οποία με την βοήθεια της Εξ. 11.6 γίνεται

$V_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$	Τάση φόρτισης πυκνωτή RC	11.7
-------------------------------------	-----------------------------	------

β) Κύκλωμα  $RC$ -Εκφόρτιση

Εάν στο κύκλωμα δεν υπάρχει πηγή τότε έχουμε την περίπτωση της **εκφόρτισης** πυκνωτή, δηλαδή ο πυκνωτής έχει αρχικά φορτίο  $Q$  το οποίο μειώνεται συνεχώς με τον χρόνο. Ένα τέτοιο κύκλωμα  $RC$  φαίνεται στο Σχήμα 11.11. Από την εξίσωση 11.2, η αρχική τάση του πυκνωτή είναι  $V_C(0) = Q/C$



Σχήμα 11.11

Σύμφωνα με το 2<sup>ο</sup> νόμο του Kirchhoff για τον βρόχο του παραπάνω κυκλώματος έχουμε

$$V_C - V_R = 0$$

Ο πυκνωτής παίζει τον ρόλο της πηγής σε αυτό το κύκλωμα και η τάση  $V_R$  εμφανίζεται με αρνητικό πρόσημο επειδή είναι πτώση τάσης όπως διαγράφουμε το κύκλωμα κατά την φορά του ρεύματος (δείτε τα σχετικά πρόσημα στο σχήμα). Όπως και στην περίπτωση της φόρτισης, παραγωγίζουμε την παραπάνω εξίσωση

$$\frac{dV_C}{dt} - \frac{dV_R}{dt} = 0$$

και χρησιμοποιούμε τις Εξισώσεις 11.3 και 11.1 για να καταλήξουμε στο αποτέλεσμα:

$$-\frac{I}{C} - R \frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dI}{dt} = -\frac{1}{RC} I$$

(Θυμηθείτε ότι στην εκφόρτιση χρησιμοποιούμε το αρνητικό πρόσημο Εξ. 11.3β αντί της 11.3α). Αυτή είναι η ίδια Διαφορική Εξίσωση όπως και με τη φόρτιση και έτσι έχουμε την ίδια λύση

$$I = I_0 e^{-t/RC}$$

Από την αρχική τάση  $V_C(0) = Q/C$  παίρνουμε για το αρχικό ρεύμα  $I_0 = V_C(0)/R = Q/RC$  και άρα

$I = \frac{Q}{RC} e^{-t/RC}$	Ρεύμα εκφόρτισης $RC$	11.8
------------------------------	-----------------------	------

Μπορούμε να ολοκληρώσουμε το ρεύμα για να πάρουμε το φορτίο του πυκνωτή. Θυμηθείτε ότι στην εκφόρτιση  $I = -dq/dt$  οπότε

$$q(t) = - \int Idt = \frac{-Q}{RC} \int e^{-t/RC} dt = Qe^{-t/RC} + c_1$$

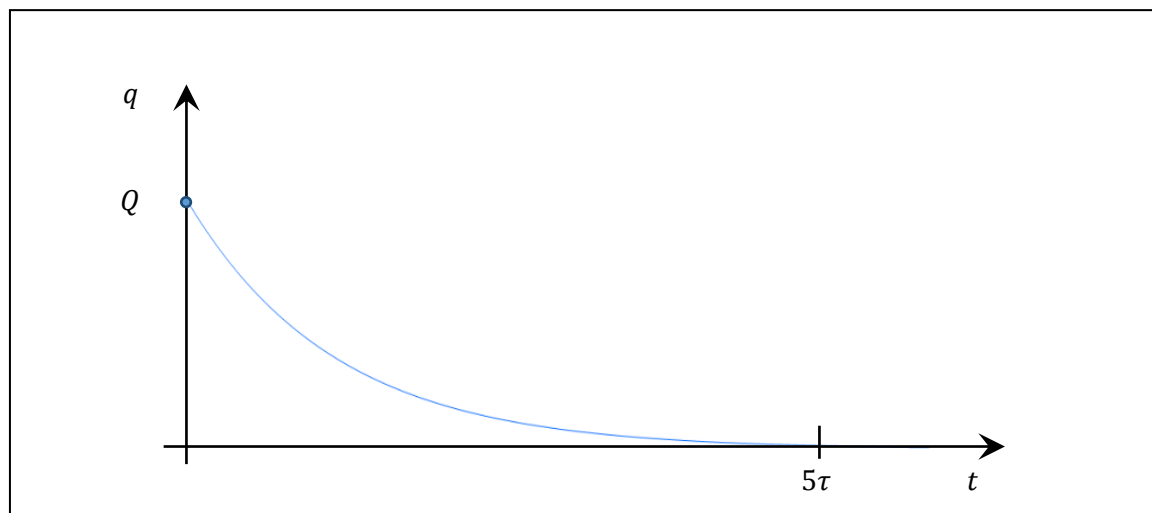
όπου η  $c_1$  είναι η σταθερά ολοκλήρωσης. Από την αρχική συνθήκη  $q(0) = Q$  (αρχικά φορτισμένος πυκνωτής σε φορτίο  $Q$ ) παίρνουμε  $c_1 = 0$  και έτσι

$q(t) = Qe^{-t/RC}$	Φορτίο εκφόρτισης πυκνωτή RC	11.9
---------------------	------------------------------	------

Από την Εξ. 11.2 η τάση στα άκρα του πυκνωτή ισούται με  $V_C = q/C$ η οποία με την βοήθεια της Εξ. 11.9 γίνεται

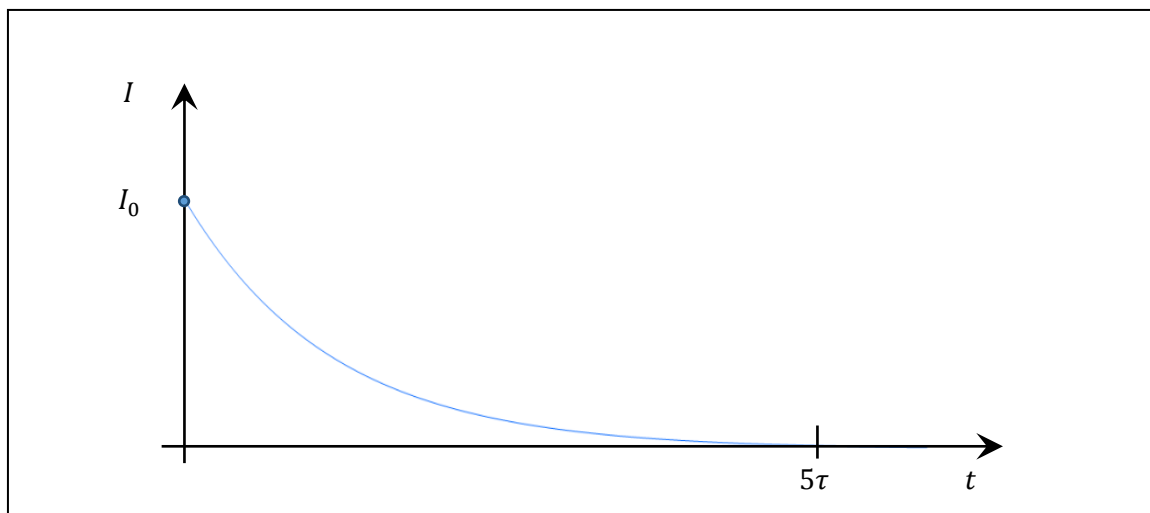
$V_C(t) = \frac{Q}{C} e^{-\frac{t}{RC}}$	Τάση εκφόρτισης πυκνωτή RC	11.10
--	----------------------------	-------

Η γραφική παράσταση του φορτίου και του ρεύματος φαίνονται αντίστοιχα στα σχήματα 11.12 και 11.13. Το ρεύμα και το φορτίο μηδενίζονται σε πολύ μεγάλους χρόνους  $t \rightarrow \infty$ .



Σχήμα 11.12



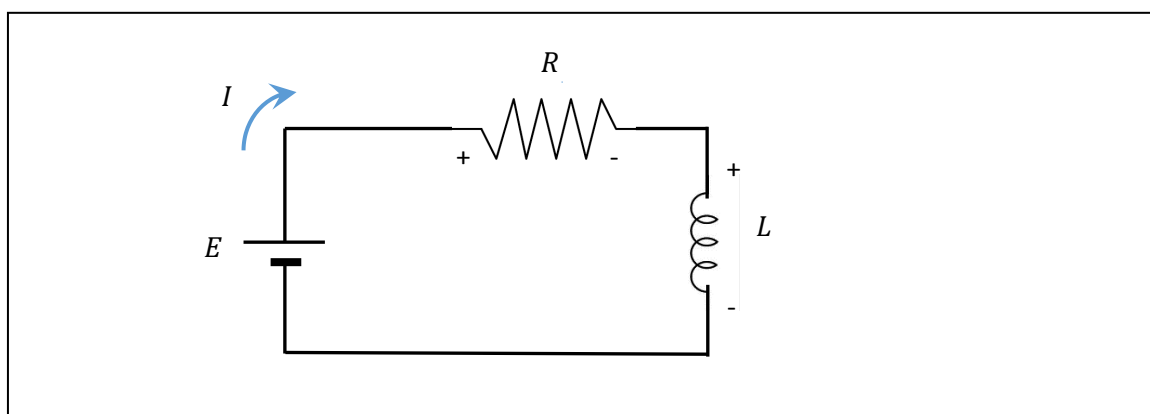


Σχήμα 11.13

Και πάλι σε πέντε σταθερές χρόνουτ, όπου  $t = RC$ , η εκθετική συνάρτηση πρακτικώς δεν μεταβάλλεται.

### γ) Κύκλωμα $RL$ - Φόρτιση

Το κύκλωμα  $RL$  όπως υπονοεί το όνομα, αποτελείται από μια αντίσταση  $R$  και ένα πηνίο αυτεπαγωγής  $L$ . Εάν το κύκλωμα περιέχει πηγή, τότε έχουμε την περίπτωση φόρτισης του πηνίου αλλιώς έχουμε εκφόρτιση. Συνήθως σε ένα τέτοιο κύκλωμα υπάρχει διακόπτης και παίρνουμε ως μηδέν του χρόνου τη χρονική στιγμή που κλείνει ο διακόπτης. Στο Σχήμα 11.14 φαίνεται η περίπτωση της **φόρτισης** όπου το ρεύμα του πηνίου αυξάνεται με τον χρόνο. Η τάση της πηγής είναι ίση με  $E$ .



Σχήμα 11.14

Σύμφωνα με το 2<sup>ο</sup> νόμο του Kirchhoff για τον βρόχο του παραπάνω κυκλώματος έχουμε

$$E - V_R - V_L = 0$$

Οι τάσεις  $V_R$  και  $V_L$  παίρνουν αρνητικό πρόσημο επειδή είναι πτώσεις τάσης όπως διαγράψουμε το κύκλωμα κατά την φορά του ρεύματος (δείτε τα σχετικά πρόσημα στο σχήμα). Από τις Εξισώσεις 11.1 και 11.4 έχουμε:

$$E - IR - L \frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I + \frac{E}{L}$$

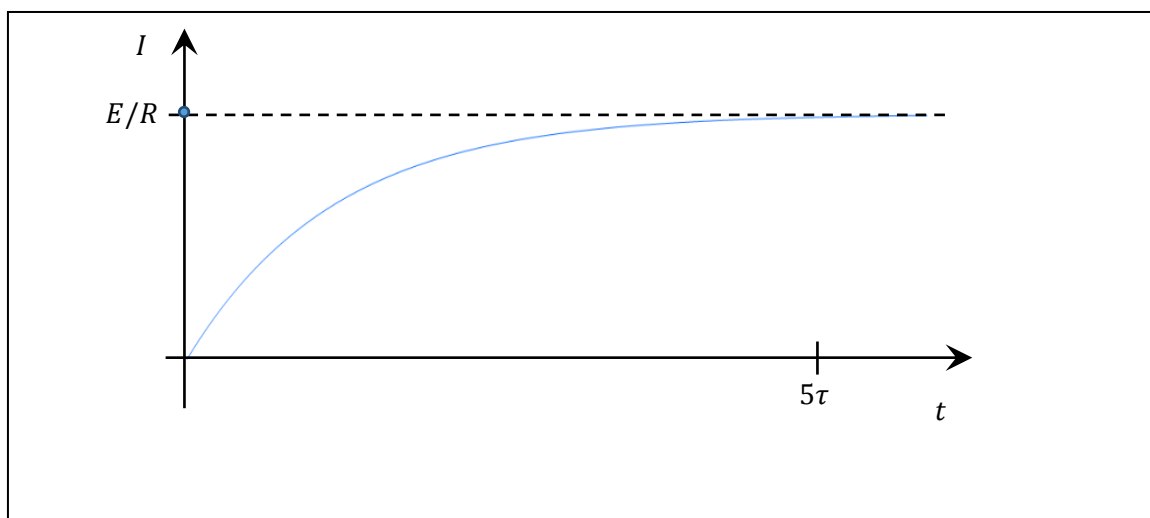
Αυτή είναι μια παρόμοια Διαφορική Εξίσωση με αυτές που είδαμε στα κυκλώματα  $RC$  με τη μόνη διαφορά ότι εμφανίζεται ο επιπλέον σταθερός όρος  $E/L$ . Μπορούμε εύκολα να δούμε με αντικατάσταση ότι η λύση είναι η

$$I = I_0 e^{-tR/L} + \frac{E}{R}$$

όπου  $I_0$  είναι σταθερά. Εάν η αρχική συνθήκη είναι  $I(0) = 0$  τότε  $I_0 = -E/R$  και έτσι έχουμε για το ρεύμα του κυκλώματος

$I(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{tR}{L}})$	Ρεύμα φόρτισης RL	11.11
---	-------------------	-------

Στο άλλο όριο  $t \rightarrow \infty$  το ρεύμα λαμβάνει τη μέγιστη τιμή του  $E/R$ . Η γραφική παράσταση του ρεύματος φαίνεται στο Σχήμα 11.15. Η σταθερά χρόνου είναι τώρα  $\tau = L/R$ .



Σχήμα 11.15

Γιατί το ρεύμα είναι αρχικά μηδέν; Το μηδέν του χρόνου το θεωρούμε τη στιγμή που πρωτο-συνδέουμε την πηγή στο κύκλωμα. Το πηνίο όπως είδαμε στον νόμο του Faraday, λόγω αυτεπαγωγής, αντιδράει στις αλλαγές και αναπτύσσει τη δική του τάση η οποία πάντοτε αντιτίθεται στις αλλαγές (αλλιώς θα είχαμε ενίσχυση της τάσης και άρα μη διατήρηση της ενέργειας). Αυτό το φαινόμενο είναι γνωστό ως ο νόμος του Lenz για το πηνίο. Από τις Εξισώσεις 11.4 και 11.11 έχουμε για την τάση του πηνίου  $V_L = LdI/dt$  το οποίο οδηγεί στο αποτέλεσμα:

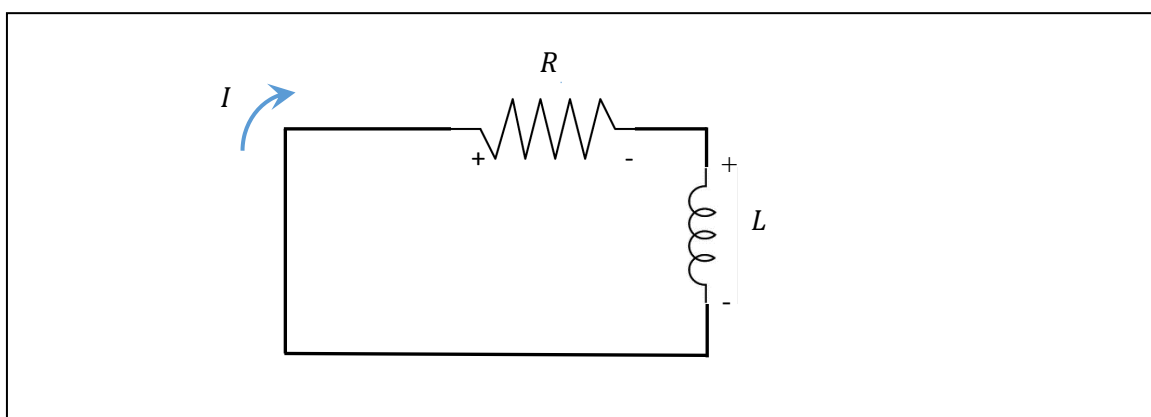
$V_L = E e^{-\frac{tR}{L}}$	Τάση φόρτισης πηνίου RL	11.12
-----------------------------	-------------------------	-------

Βλέπουμε ότι η αρχική τάση του πηνίου ισούται με  $V_L(0) = E$ , όση δηλαδή και της πηγής, αλλά με αντίθετη πολικότητα όπως φαίνεται και στο σχήμα. Επομένως αρχικά το πηνίο αντιδράει πλήρως στην πηγή και έτσι από τον νόμο του Kirchhoff για τον βρόχο έχουμε

$$E - V_R - E = 0 \Rightarrow V_R = 0 \Rightarrow I = 0$$

#### δ) Κύκλωμα $RL$ - Εκφόρτιση

Εάν στο κύκλωμα δεν υπάρχει πηγή τότε έχουμε την περίπτωση της **εκφόρτισης** πηνίου, δηλαδή το πηνίο έχει αρχικό ρεύμα  $I_0$  το οποίο μειώνεται συνεχώς με τον χρόνο. Σε αντίθεση με τον πυκνωτή, ο οποίος παρέχει στο κύκλωμα ρεύμα αντίθετο με αυτό που φορτίστηκε, το πηνίο λόγω αυτεπαγωγής προσπαθεί να διατηρήσει το ρεύμα το οποίο αποθήκευσε και έτσι η φόρτιση και η εκφόρτιση έχουν ρεύματα ίδιας φοράς. Οι πολικότητες των τάσεων φαίνονται στο Σχήμα 11.16.



Σχήμα 11.16

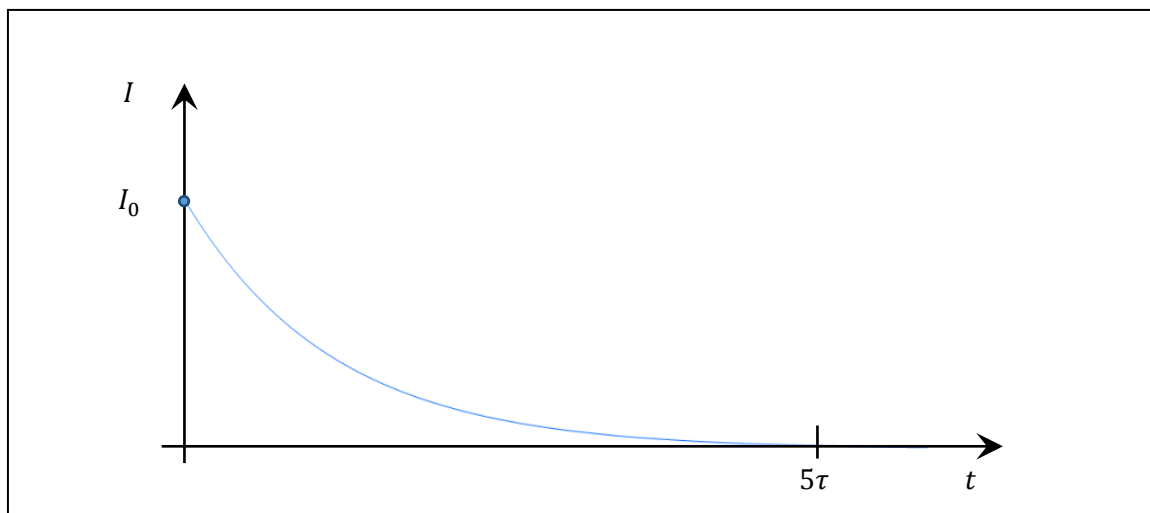
Σύμφωνα με το 2<sup>ο</sup> νόμο του Kirchhoff για τον βρόχο του παραπάνω κυκλώματος έχουμε:

$$-V_L - V_R = 0 \Rightarrow \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I$$

Και οι δυο τάσεις έχουν αρνητικό πρόσημο επειδή είναι πτώσεις τάσης όπως διαγράφουμε το κύκλωμα κατά την φορά του ρεύματος (δείτε τα σχετικά πρόσημα στο σχήμα). Αυτή είναι μια παρόμοια Διαφορική Εξίσωση με την περίπτωση του πυκνωτή και έτσι περιμένουμε μια παρόμοια λύση

$I = I_0 e^{-tR/L}$	Ρεύμα κυκλώματος RL	11.13
---------------------	---------------------	-------

όπου βέβαια το  $I_0$  είναι το αρχικό ρεύμα. Η γραφική παράσταση του ρεύματος φαίνεται στο Σχήμα 11.17. Το ρεύμα μηδενίζεται σε πολύ μεγάλους χρόνους  $t \rightarrow \infty$  και η σταθερά χρόνου ισούται με  $\tau = L/R$



Σχήμα 11.17

Από τις Εξισώσεις 11.3 και 11.13 έχουμε για την τάση του πηνίου  $V_L = L di/dt$  το οποίο οδηγεί στο αποτέλεσμα:

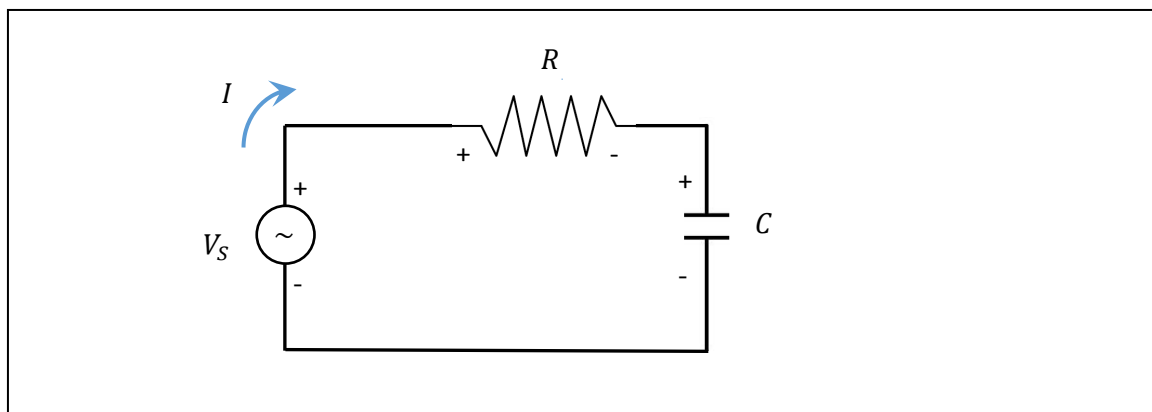
$V_L = -\frac{I_0 R}{L} e^{-\frac{tR}{L}}$	Τάση εκφόρτισης πηνίου RL	11.14
--	---------------------------	-------

## Κυκλώματα Εναλλασσόμενου Ρεύματος AC

Στα κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος, η τάση της πηγής του κυκλώματος δεν είναι σταθερή αλλά έχει τη μορφή μιας ημιτονοειδής συνάρτησης του χρόνου. Υπάρχουν βασικά τρία κυκλώματα εναλλασσόμενου που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον: Το κύκλωμα  $RC$ , το κύκλωμα  $RL$  και το κύκλωμα  $RCL$

### α) Κύκλωμα $RC$

Το κύκλωμα  $RC$  το είδαμε στα κυκλώματα συνεχούς. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.18, η μόνη διαφορά είναι η πηγή η οποία τώρα παρέχει τάση  $V_S = V_0 \sin \omega t$  όπου  $\omega$  είναι η κυκλική συχνότητα. Η πηγή αλλάζει πολικότητα με τον χρόνο και στο σχήμα αναγράφονται τα σύμβολα  $\pm$  που αναφέρονται στην αρχική πολικότητα της πηγής κατά την πρώτη ημιπερίοδο.



Σχήμα 11.18

Εφαρμόζουμε και πάλι τον 2<sup>ο</sup> νόμο του Kirchhoff και έχουμε

$$V_S - V_R - V_C = 0 \Rightarrow V_0 \sin \omega t - V_R - V_C = 0$$

Όπως και στην περίπτωση του συνεχούς, παραγωγίζουμε την παραπάνω εξίσωση

$$\omega V_0 \cos \omega t - \frac{dV_R}{dt} - \frac{dV_C}{dt} = 0$$

και χρησιμοποιούμε τις Εξισώσεις 11.1 και 11.3α:

$$R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \omega V_0 \cos \omega t$$

Η παραπάνω είναι μια μη ομογενής απλή Γραμμική Διαφορική Εξίσωση (Δ.Ε). Ο τρόπος λύσης της είναι πέρα του σκοπού του παρόντος συγγράμματος. Η Θεωρία των Δ.Ε. προβλέπει ότι η λύση της αποτελείται από δυο όρους, έναν ημιτονοειδή όρο (γνωστός και ως "μόνιμη λύση") και έναν φθίνον εκθετικό όρο ο οποίος συμπίπτει με τη λύση του συνεχούς κυκλώματος του προηγούμενου εδαφίου (γνωστός και ως "μεταβατική λύση"). Θεωρώντας πολύ μεγάλους χρόνους, η εκθετική λύση όπως είδαμε πρακτικώς μηδενίζεται και έτσι θα κρατήσουμε μόνο την μόνιμη λύση η οποία έχει τη μορφή

$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

όπου  $I_0$  και  $\varphi$  σταθερές που πρέπει να προσδιορισθούν. Αντικαθιστώντας στην παραπάνω Δ.Ε., οδηγούμαστε στο αποτέλεσμα:

$$R \cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{\omega C} \sin(\omega t + \varphi) = \frac{V_0}{I_0} \cos \omega t$$

Οι ποσότητες  $R$  και  $V_0/I_0$  έχουν μονάδες αντίστασης και άρα και το  $1/C\omega$  το οποίο ονομάζεται "**χωρητική εμπέδηση**":

$Z_C = \frac{1}{C\omega}$	Χωρητική εμπέδηση	11.15
---------------------------	-------------------	-------

Ορίζουμε ως "**ολική εμπέδηση**" ή "**σύνθετη αντίσταση**" του κυκλώματος την ποσότητα

$Z = \frac{V_0}{I_0}$	Ολική Εμπέδηση	11.16
-----------------------	----------------	-------

Με αυτούς τους ορισμούς, η παραπάνω σχέση γίνεται

$$R\cos(\omega t + \varphi) + Z_C\sin(\omega t + \varphi) = Z\cos\omega t$$

Αναπτύσσουμε το ημίτονο και συνημίτονο του αθροίσματος

$$R\cos(\omega t)\cos\varphi - R\sin(\omega t)\sin\varphi + Z_C\sin(\omega t)\cos\varphi + Z_C\cos(\omega t)\sin\varphi = Z\cos\omega t$$

Οι συναρτήσεις  $\sin(\omega t)$  και  $\cos(\omega t)$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και έτσι εάν ξεχωρίσουμε τους συντελεστές τους, καταλήγουμε στις εξής δυο εξισώσεις

$$-R\sin\varphi + Z_C\cos\varphi = 0$$

$$R\cos\varphi + Z_C\sin\varphi = Z$$

οι οποίες λύνονται πολύ εύκολα, π.χ. από την πρώτη με απλή διαίρεση παίρνουμε

$\tan\varphi = \frac{Z_C}{R}$	Φάση	11.17
-------------------------------	------	-------

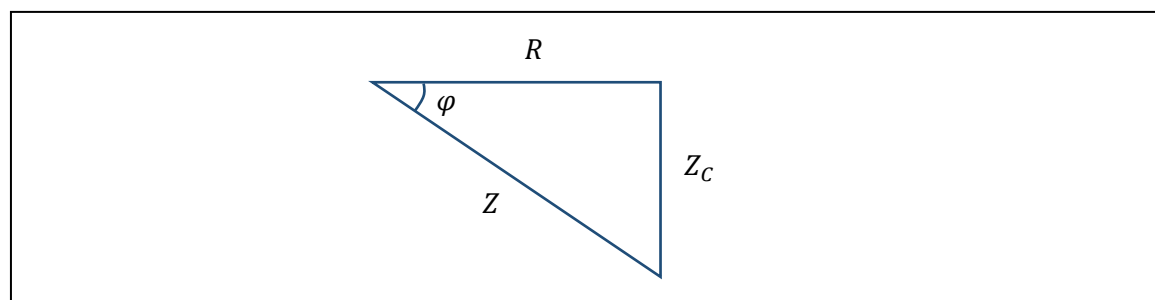
Επιπλέον, εάν υψώσουμε και τις δυο εξισώσεις στο τετράγωνο, τις προσθέσουμε και κάνουμε χρήση της τριγωνομετρικής ταυτότητας  $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ , οδηγούμαστε στο αποτέλεσμα:

$$Z^2 = R^2\sin^2\varphi + Z_C^2\cos^2\varphi - 2R\sin\varphi Z_C\cos\varphi + Z_C^2\sin^2\varphi + R^2\cos^2\varphi + 2R\sin\varphi Z_C\cos\varphi$$

ή τελικά

$Z = \sqrt{R^2 + Z_C^2}$	Ολική Εμπέδηση	11.18
--------------------------	----------------	-------

Οι δυο τελευταίες σχέσεις μας παραπέμπουν στην τριγωνομετρία αφού η Εξ 11.17 έχει τη μορφή υποτείνουσας ενώ η Εξ. 11.18 έχει την μορφή εφαπτομένης. Μπορούμε πολύ εύκολα να δούμε ότι οι τρεις ποσότητες  $Z$ ,  $Z_C$  και  $R$  σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο όπως στο Σχήμα 11.19:



Σχήμα 11.19

Το τρίγωνο αυτό ικανοποιεί τις Εξισώσεις 11.17 και 11.18. Οι αντίστοιχες τάσεις υπολογίζονται από τις Εξισώσεις 11.1 και 11.3. Για παράδειγμα από την  $V_R = IR$  παίρνουμε

$V_R = I_0 R \sin(\omega t + \varphi)$	Τάση αντίστασης	11.19
--	-----------------	-------

Βλέπουμε ότι η  $V_R$  έχει την ίδια φάση με το ρεύμα. Για την  $V_C$  καταφεύγουμε στην Εξ. 11.3 για να πάρουμε:

$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{1}{C} I = \frac{1}{C} I_0 \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow V_C = \frac{1}{C} I_0 \int \sin(\omega t + \varphi) dt$$

$$V_C = -\frac{1}{C\omega} I_0 \cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{C\omega} I_0 \sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$$

ή

$V_C = I_0 Z_C \sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$	Τάση πυκνωτή	11.20
--	--------------	-------

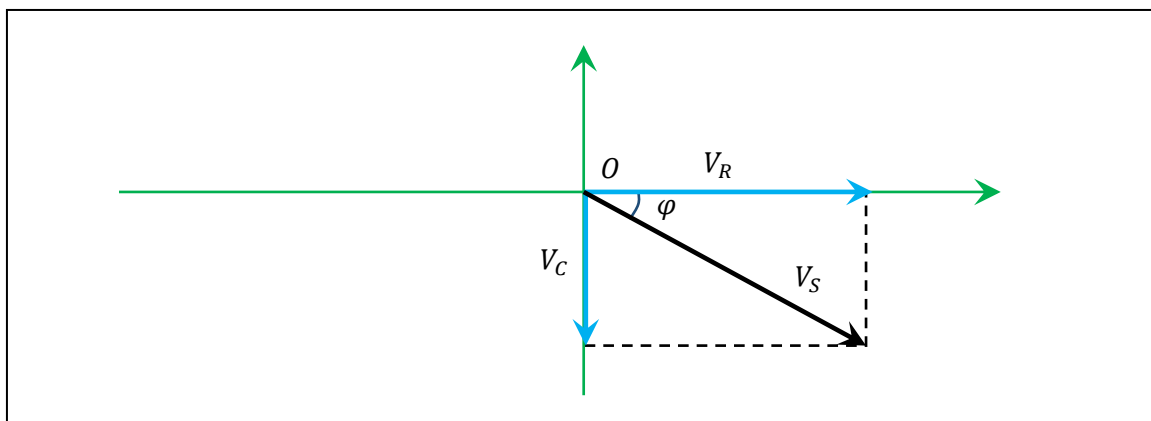
Βλέπουμε ότι η  $V_C$  υστερεί της  $V_R$  κατά γωνία ίση με  $\pi/2$ . Με τη βοήθεια της Εξ. 11.16 η τάση της πηγής  $V_S = V_0 \sin \omega t$  μπορεί να γραφτεί και ως

$V_S = I_0 Z \sin \omega t$	Τάση πηγής	11.21
-----------------------------	------------	-------

Τα παραπάνω αποτελέσματα συνοψίζονται στον Πίνακα 11.2. Στην πρώτη γραμμή φαίνονται οι αντιστάσεις (εμπεδήσεις) του κάθε στοιχείου του κυκλώματος. Από τις Εξισώσεις 11.19-11.21 φαίνεται ότι το πλάτος της κάθε τάσης ισούται με το πλάτος  $I_0$  επί την αντίστοιχη εμπέδηση, αρκεί να θεωρήσουμε την  $Z$  ως την συνολική εμπέδηση όλου του κυκλώματος. Αυτή η πληροφορία βρίσκεται στην δεύτερη γραμμή του πίνακα. Τελικά στην τρίτη γραμμή παρατίθεται η φάση της κάθε τάσης. Υπάρχει ένας πολύ εύχρηστος γραφικός τρόπος για να αναπαράγουμε τις πληροφορίες αυτού του πίνακα. Λόγω της σχέσης μεταξύ των φάσεων, σχεδιάζουμε σε άξονες  $x - y$  στο Σχήμα 11.20 τρία διανύσματα, το διάνυσμα  $\vec{V}_R$  με μέτρο  $V_{R0} = I_0 R$  επάνω στον άξονα  $x$ , το διάνυσμα  $\vec{V}_C$  με μέτρο  $V_{C0} = I_0 Z_C$  επάνω στον άξονα  $-y$ , και το διάνυσμα  $\vec{V}_S$  με μέτρο  $V_0 = I_0 Z$  και γωνία  $-\varphi$  ως προς τον άξονα  $x$ . Αυτή η αναπαράσταση των τάσεων είναι γνωστή ως η "**τεχνική περιστρεφόμενων διανυσμάτων**" επειδή φανταζόμαστε τα τρία αυτά διανύσματα να ανήκουν σε ένα κοινό πλαίσιο το οποίο περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  γύρω από την αρχή των αξόνων, με αναφορά το  $\vec{V}_S$ . Έτσι η γωνία του τελευταίου είναι  $\omega t$ , ενώ η γωνία των  $\vec{V}_R$  και  $\vec{V}_C$  είναι αντίστοιχα  $\omega t + \varphi$  και  $\omega t + \varphi - \pi/2$ . Βέβαια τα περιστρεφόμενα διανύσματα διατηρούν την σχετική γωνία μεταξύ τους και για αυτό τα τοποθετούμε όπως στο Σχήμα 11.20 σε σταθερές θέσεις.

	Αντίσταση	Πυκνωτής	Όλο κύκλωμα
Αντίσταση	$R$	$Z_C$	$Z$
Πλάτος τάσης	$V_{R0} = I_0 R$	$V_{C0} = I_0 Z_C$	$V_0 = I_0 Z$
Φάση	$\varphi$	$\varphi - \pi/2$	0

Πίνακας 11.2: Χαρακτηριστικά κυκλώματος  $RC$ .

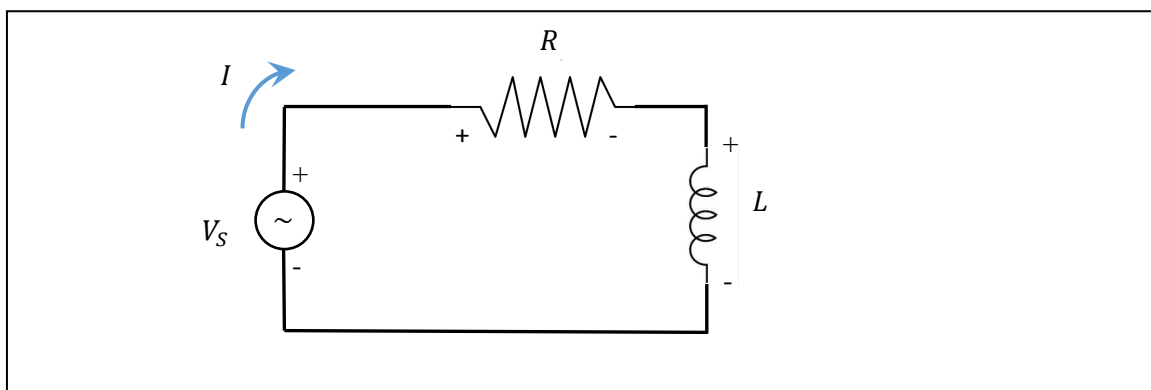


Σχήμα 11.20

Από το Σχήμα 11.20 μπορούμε να αναπαράγουμε τις Εξισώσεις 11.19-11.21 εάν για την κάθε τάση πάρουμε ως πλάτος της το μέτρο του κάθε διανύσματος και για γωνία του ημιτόνου πάρουμε το  $\omega t$  προσαυξανόμενο με την διαφορά φάσης από τη  $V_S$ .

### β) Κύκλωμα $RL$

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.21, το κύκλωμα  $RL$  είναι παρόμοιο με αυτό του συνεχούς με τη μόνη διαφορά ότι η πηγή παρέχει εναλλασσόμενη τάση  $V_S = V_0 \sin \omega t$ .



Σχήμα 11.21

Εφαρμόζουμε και πάλι τον 2<sup>ο</sup> νόμο του Kirchhoff και έχουμε

$$V_S - V_R - V_L = 0 \Rightarrow V_0 \sin \omega t - V_R - V_L = 0$$

Εάν χρησιμοποιούμε τις Εξισώσεις 11.4 και 11.1 καταλήγουμε στο αποτέλεσμα:

$$L \frac{dI}{dt} + IR = V_0 \sin \omega t$$

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση  $RC$ , η λύση αποτελείται από τον μόνιμο ημιτονοειδή όρο και έναν φθίνον εκθετικό όρο τον οποίο και αγνοούμε για μεγάλους αρκετά χρόνους. Έτσι για την μόνιμη λύση δοκιμάζουμε

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$$



Φυσική II – Δ. Κουζούδης – Π. Πετρίδης

(το μείον είναι για να έχουμε θετικό  $\varphi$ , δείτε παρακάτω). Αντικαθιστώντας αυτή την έκφραση στην παραπάνω Δ.Ε. οδηγεί στο αποτέλεσμα:

$$L\omega\cos(\omega t - \varphi) + R\sin(\omega t - \varphi) = \frac{V_0}{I_0}\sin\omega t$$

Το  $L\omega$  έχει μονάδες αντίστασης και ονομάζεται "επαγωγική εμπέδηση":

$Z_L = L\omega$	Επαγωγική εμπέδηση	11.22
-----------------	--------------------	-------

Με τον παραπάνω ορισμό και την Εξ. 11.18, η παραπάνω Δ.Ε. γίνεται

$$Z_L\cos(\omega t - \varphi) + R\sin(\omega t - \varphi) = Z\sin\omega t$$

Αναπτύσσουμε το ημίτονο και συνημίτονο του αθροίσματος βάσει των γνωστών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων και έχουμε:

$$Z_L\cos(\omega t)\cos\varphi + Z_L\sin(\omega t)\sin\varphi + R\sin(\omega t)\cos\varphi - R\cos(\omega t)\sin\varphi = Z\sin\omega t$$

Ξεχωρίζοντας τους συντελεστές του  $\sin(\omega t)$  και  $\cos(\omega t)$  καταλήγουμε στις εξής δυο εξισώσεις

$$-R\sin\varphi + Z_L\cos\varphi = 0$$

$$R\cos\varphi + Z_L\sin\varphi = Z$$

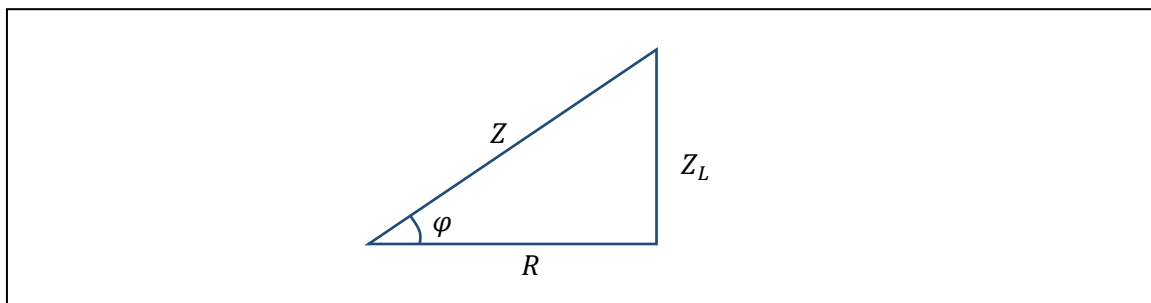
Από την πρώτη παίρνουμε με απλή διαίρεση:

$\tan\varphi = \frac{Z_L}{R}$	Φάση	11.23
-------------------------------	------	-------

Ενώ εάν υψώσουμε και τις δυο εξισώσεις στο τετράγωνο, τις προσθέσουμε και κάνουμε χρήση της τριγωνομετρικής ταυτότητας  $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ , οδηγούμαστε στο αποτέλεσμα:

$Z = \sqrt{R^2 + Z_L^2}$	Εμπέδηση	11.24
--------------------------	----------	-------

Και σε αυτό το εδάφιο μπορεί να γίνει χρήση της τριγωνομετρίας με τα  $Z$ ,  $Z_L$  και  $R$  να σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο όπως στο Σχήμα 11.22:



Σχήμα 11.22

Το τρίγωνο αυτό ικανοποιεί τις Εξισώσεις 11.23 και 11.24. Οι αντίστοιχες τάσεις υπολογίζονται από τις Εξισώσεις 11.1 και 11.4 ως εξής. Για την τάση της αντίστασης  $V_R = IR$

έχουμε

$V_R = I_0 R \sin(\omega t - \varphi)$	Τάση αντίστασης	11.25
--	-----------------	-------

Βλέπουμε ότι η  $V_R$  έχει την ίδια φάση με το ρεύμα. Για την  $V_L$  μέσω της Εξ. 11.4 έχουμε:

$$V_L = L \frac{dI}{dt} = L\omega I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

ή

$V_L = I_0 Z_L \sin(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2})$	Τάση πηνίου	11.26
--	-------------	-------

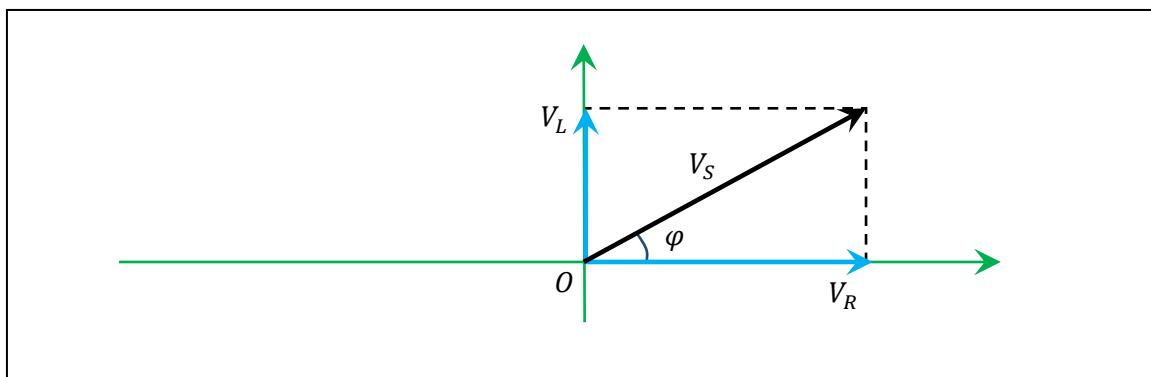
Βλέπουμε ότι η  $V_L$  υπερτερεί της  $V_R$  κατά γωνία ίση με  $\pi/2$ . Με τη βοήθεια της Εξ. 11.6 η τάση της πηγής  $V_S = V_0 \sin \omega t$  μπορεί να γραφτεί και ως

$V_S = I_0 Z \sin \omega t$	Τάση πηγής	11.27
-----------------------------	------------	-------

Τα παραπάνω αποτελέσματα συνοψίζονται στον παρακάτω Πίνακα 3.3. Στην πρώτη γραμμή φαίνονται οι αντιστάσεις (εμπεδήσεις) του κάθε στοιχείου του κυκλώματος. Από τις Εξισώσεις 11.25 - 11.27 φαίνεται ότι το πλάτος της κάθε τάσης ισούται με το πλάτος  $I_0$  επί την αντίστοιχη εμπέδηση, αρκεί να θεωρήσουμε την  $Z$  ως την συνολική εμπέδηση όλου του κυκλώματος. Αυτή η πληροφορία βρίσκεται στην δεύτερη γραμμή του πίνακα. Τελικά στην τρίτη γραμμή παρατίθεται η φάση της κάθε τάσης. Και σε αυτό το εδάφιο μπορούμε να κάνουμε χρήση των περιστρεφόμενων διανυσμάτων. Σχεδιάζουμε σε άξονες  $x - y$  όπως στο Σχήμα 11.23 τρία διανύσματα, το διάνυσμα  $\vec{V}_R$  με μέτρο  $V_{R0} = I_0 R$  επάνω στον άξονα  $x$ , το διάνυσμα  $\vec{V}_L$  με μέτρο  $V_{L0} = I_0 Z_L$  επάνω στον άξονα  $+y$ , και το διάνυσμα  $\vec{V}_S$  με μέτρο  $V_0 = I_0 Z$  και με γωνία  $\varphi$  ως προς τον άξονα  $x$ . Φανταζόμαστε τα τρία αυτά διανύσματα να ανήκουν σε ένα κοινό πλαίσιο το οποίο περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  γύρω από την αρχή των αξόνων, ώστε το  $\vec{V}_S$  να σχηματίζει γωνία  $\omega t$  ως προς την αρχική του θέση, ενώ η γωνία των  $\vec{V}_R$  και  $\vec{V}_L$  είναι αντίστοιχα  $\omega t - \varphi$  και  $\omega t - \varphi + \pi/2$ .

	Αντίσταση	Πηνίο	Όλο κύκλωμα
Αντίσταση	$R$	$Z_L$	$Z$
Πλάτος τάσης	$V_{R0} = I_0 R$	$V_{L0} = I_0 Z_L$	$V_0 = I_0 Z$
Φάση	$-\varphi$	$-\varphi + \pi/2$	$0$

Πίνακας 3.3: Χαρακτηριστικά κυκλώματος  $RL$ .

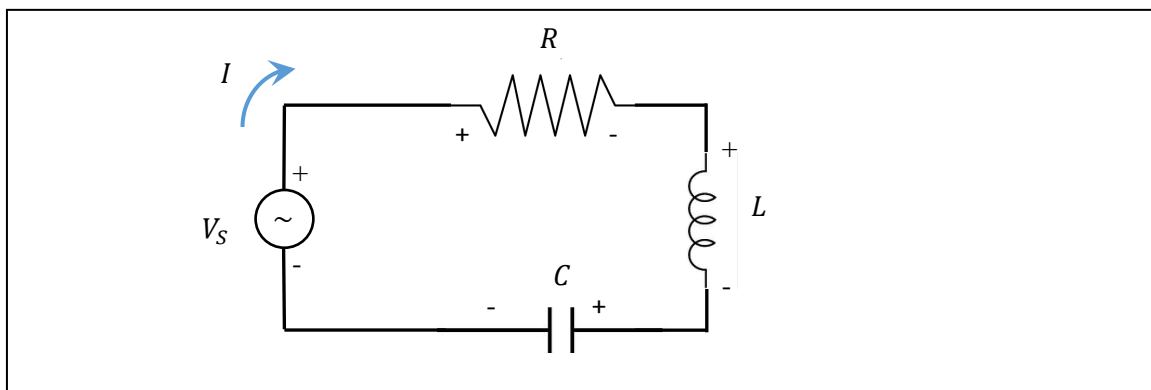


Σχήμα 11.23

Από το παραπάνω διάγραμμα μπορούμε να αναπαράγουμε τις Εξισώσεις 11.25 - 11.27 εάν για την κάθε τάση πάρουμε ως πλάτος της το μέτρο του κάθε διανύσματος και για γωνία του ημιτόνου πάρουμε το  $\omega t$  προσαυξανόμενο με την διαφορά φάσης από τη  $V_S$ .

### γ) Κύκλωμα RCL

Όταν συνδέσουμε και τα τρία γραμμικά στοιχεία  $R$ ,  $L$  και  $C$  σε σειρά με πηγή εναλλασσόμενης τάσης όπως στο Σχήμα 11.24, τότε εμφανίζεται ένα πολύ ενδιαφέρον φαινόμενο της Φυσικής, ο "συντονισμός". Έστω και πάλι ότι η τάση της πηγής δίνεται από την  $V_S = V_0 \sin \omega t$ .



Σχήμα 11.24

Ο 2<sup>ος</sup> νόμος του Kirchhoffμας δίνει:

$$V_S - V_R - V_L - V_C = 0 \Rightarrow V_0 \sin \omega t - V_R - V_L - V_C = 0$$

Όπως και στην περίπτωση του κυκλώματος  $RC$ , παραγωγίζουμε την παραπάνω εξίσωση

$$\omega V_0 \cos \omega t - \frac{dV_R}{dt} - \frac{dV_L}{dt} - \frac{dV_C}{dt} = 0$$

και χρησιμοποιούμε τις Εξισώσεις 11.4, 11.1 και 11.3α για να καταλήξουμε στο αποτέλεσμα:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \omega V_0 \cos \omega t$$

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, η λύση αποτελείται από τον μόνιμο ημιτονοειδή όρο και έναν φθίνον εκθετικό όρο τον οποίο και αγνοούμε για μεγάλους αρκετά χρόνους. Έτσι για την μόνιμη λύση δοκιμάζουμε

$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Αντικαθιστώντας αυτή την έκφραση στην παραπάνω Δ.Ε. οδηγεί στο αποτέλεσμα:

$$-\omega^2 L \sin(\omega t + \varphi) + \omega R \cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{C} \sin(\omega t + \varphi) = \omega \frac{V_0}{I_0} \cos \omega t$$

Διαιρούμε με  $\omega$  και χρησιμοποιούμε τις εμπεδήσεις  $Z_L = L\omega$  και  $Z_C = 1/C\omega$  που είδαμε στα προηγούμενα εδάφια για να πάρουμε:

$$-Z_L \sin(\omega t + \varphi) + R \cos(\omega t + \varphi) + Z_C \sin(\omega t + \varphi) = Z \cos \omega t$$

$$R \cos(\omega t + \varphi) + (Z_C - Z_L) \sin(\omega t + \varphi) = Z \cos \omega t$$

Αυτό είναι ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα που βρήκαμε και με το  $RC$  κύκλωμα με τη μόνη διαφορά ότι αντί για  $Z_C$  έχουμε τον όρο  $Z_C - Z_L$ . Επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε άμεσα τα αποτελέσματα του εδαφίου "κύκλωμα  $RC$ ". Η εμπέδηση δίνεται τώρα από την έκφραση

$Z = \frac{V_0}{I_0} = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}$	Εμπέδηση $RCL$	11.28
--	----------------	-------

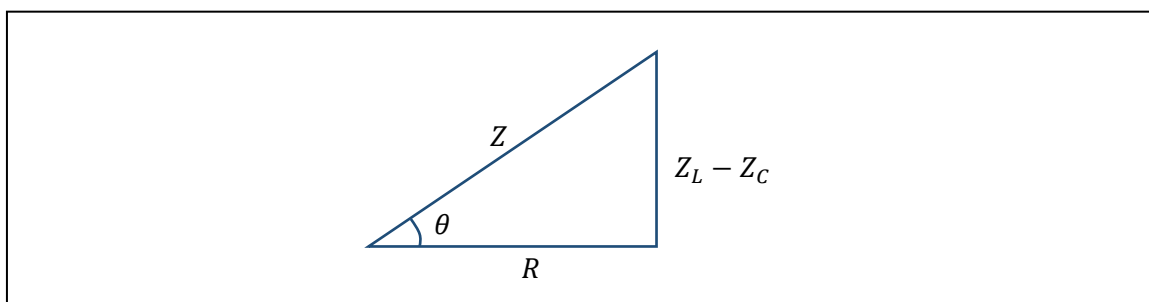
ενώ η γωνία δίνεται από την  $\tan \varphi = (Z_C - Z_L)/R$  αλλά παραδοσιακά στα κυκλώματα  $RCL$  χρησιμοποιείται η αντίθετη γωνία  $\theta = -\varphi$  η οποία δίνεται από την

$\tan \theta = \frac{Z_L - Z_C}{R}$	Φάση $RCL$	11.29
-------------------------------------	------------	-------

Επίσης το ρεύμα  $I = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$  δίνεται από την σχέση:

$I = I_0 \sin(\omega t - \theta)$	Ρεύμα $RCL$	11.30
-----------------------------------	-------------	-------

Και σε αυτό το εδάφιο μπορεί να γίνει χρήση της τριγωνομετρίας με τα  $Z$ ,  $Z_L - Z_C$  και  $R$  να σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο όπως στο Σχήμα 11.25:



Σχήμα 11.25

Το τρίγωνο αυτό ικανοποιεί τις Εξισώσεις 11.28 και 11.29. Για τις τάσεις και τις εμπεδήσεις ισχύουν αυτά που είδαμε και στα προηγούμενα εδάφια και συνοψίζονται στον Πίνακα 3.4. Οι τάσεις υπολογίζονται από τις Εξισώσεις 11.1, 11.3α και 11.4 ως εξής: Για την τάση της αντίστασης  $V_R = IR$  παίρνουμε

$V_R = I_0 R \sin(\omega t - \theta)$	Τάση αντίστασης	11.31
---------------------------------------	-----------------	-------

Βλέπουμε ότι η  $V_R$  έχει την ίδια φάση με το ρεύμα. Για την  $V_L$  μέσω της Εξ. 11.4 έχουμε:

$$V_L = L \frac{dI}{dt} = L\omega I_0 \cos(\omega t - \theta)$$

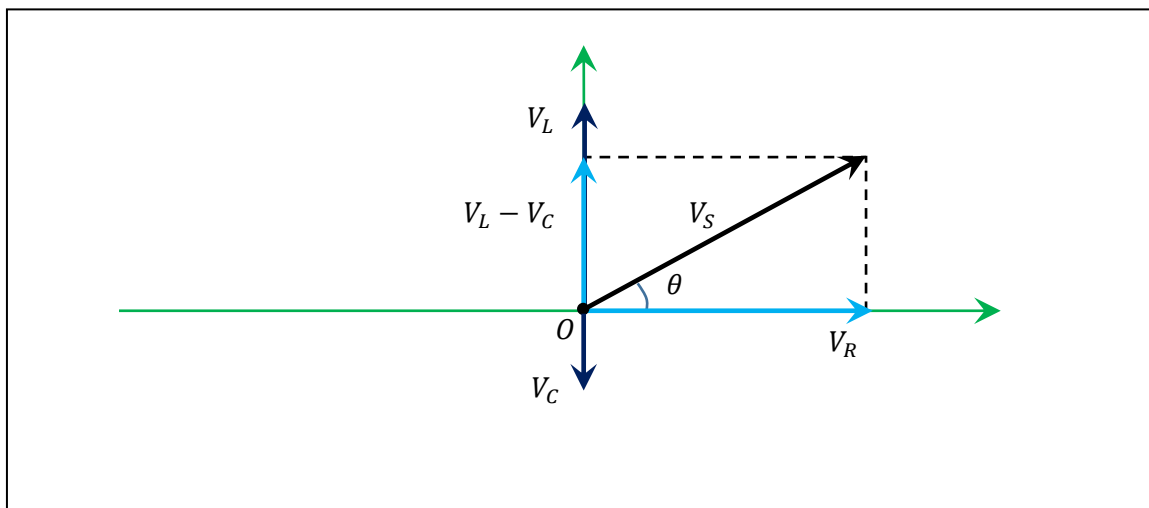
ή

$V_L = I_0 Z_L \sin(\omega t - \theta + \frac{\pi}{2})$	Τάση πηνίου	11.32
---	-------------	-------

Η τάση  $V_C$  υπολογίζεται με ολοκλήρωση της Εξ. 11.3α, ακριβώς όπως στο εδάφιο  $RC$  (ο αναγνώστης παραπέμπεται στο σχετικό εδάφιο για τα βήματα του υπολογισμού). Το τελικό αποτέλεσμα είναι το:

$V_C = I_0 Z_C \sin(\omega t - \theta - \frac{\pi}{2})$	Τάση πυκνωτή	11.33
---	--------------	-------

Βλέπουμε ότι η  $V_L$  υπερτερεί της  $V_R$  κατά γωνία ίση με  $\pi/2$  ενώ η  $V_C$  υστερεί κατά  $\pi/2$ . Βάσει αυτών, το αντίστοιχο διάγραμμα τάσεων διαμορφώνεται όπως στο Σχήμα 11.26. Η  $V_L$  βρίσκεται στον θετικό  $+y$  άξονα ενώ  $V_C$  στον  $-y$ . Η γωνία  $\theta$  καθορίζεται από την  $V_L - V_C$ :



Σχήμα 11.26

Τα παραπάνω αποτελέσματα συνοψίζονται στον παρακάτω Πίνακα 3.4. Φανταζόμαστε και πάλι τα τέσσερα διανύσματα να ανήκουν σε ένα κοινό πλαίσιο το οποίο περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  γύρω από την αρχή των αξόνων.

	Αντίσταση	Πηνίο	Πυκνωτής	Όλο κύκλωμα
Αντίσταση	$R$	$Z_L = L\omega$	$Z_C = 1/C\omega$	$Z$
Πλάτος τάσης	$V_{R0} = I_0 R$	$V_{L0} = I_0 Z_L$	$V_{C0} = I_0 Z_C$	$V_0 = I_0 Z$
Φάση	$-\theta$	$-\theta + \pi/2$	$-\theta - \pi/2$	0

Πίνακας 3.4: Χαρακτηριστικά κυκλώματος  $RCL$ .

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το πλάτος του ρεύματος  $I_0$  το οποίο μεγιστοποιείται σε μια ορισμένη συχνότητα. Αυτό το φαινόμενο είναι γνωστό ως "**συντονισμός**". Για να δούμε γιατί γίνεται αυτό, ξεκινούμε από τον ορισμό της εμπέδησης  $Z = V_0/I_0$  και λύνουμε ως προς το ρεύμα

$$I_0 = \frac{V_0}{Z} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}}$$

ή

$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}}$	Πλάτος ρεύματος $RCL$	11.34
--	-----------------------	-------

Στην υπόριζο ποσότητα έχουμε δυο θετικούς αριθμούς (αφού είναι και τα δυο τετράγωνα) εκ των οποίων ο ένας είναι σταθερός ενώ ο άλλος εξαρτάται από το  $\omega$ . Εφόσον αυτός ο όρος είναι θετικός, η ελάχιστη τιμή του είναι το 0 το οποίο οδηγεί σε μέγιστο ρεύμα

$I_0 = \frac{V_0}{R}$	Μέγιστο ρεύμα - Συντονισμός	11.35
-----------------------	--------------------------------	-------

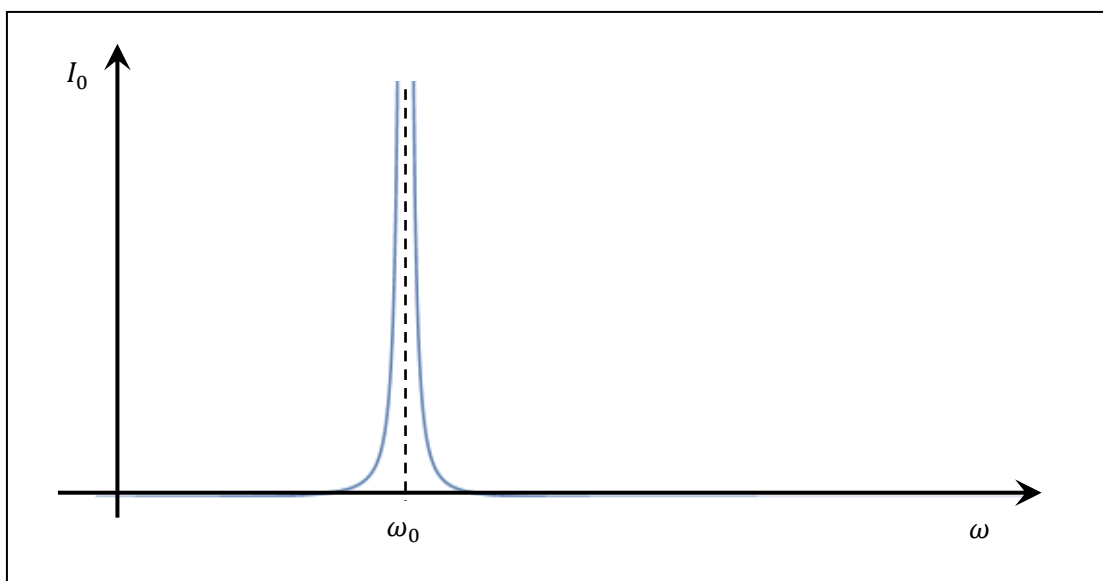
Σαν να μην υπάρχουν δηλαδή τα  $L$  και  $C$  καθόλου στο κύκλωμα! Ο μηδενισμός αυτού του όρου γίνεται για μια συγκεκριμένη τιμή  $\omega_0$  όπου

$$L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Η αντίστοιχη συχνότητα  $f_0 = \omega_0/2\pi$  που εμφανίζεται ο συντονισμός ονομάζεται "**συχνότητα συντονισμού**" και δίνεται από την έκφραση

$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$	Συχνότητα συντονισμού	11.36
---------------------------------	-----------------------	-------

Η γραφική παράσταση του ρεύματος φαίνεται στο Σχήμα 11.27. Το ρεύμα παίρνει εξαιρετικά μεγάλες τιμές, ειδικά εάν η αντίσταση  $R$  είναι μικρή. Στην οριακή περίπτωση που  $R \rightarrow 0$  έχουμε  $I_0 \rightarrow \infty$ . Ο συντονισμός είναι πολύ χρήσιμος στα ηλεκτρονικά για την ενίσχυση ενός σήματος και για την επιλογή μιας ορισμένης συχνότητας. Π.χ. στους ραδιοφωνικούς δέκτες, αυτό που αλλάζουμε όταν επιλέγουμε τον αγαπημένο μας σταθμό είναι η χωρητικότητα  $C$  του πυκνωτή ώστε η  $f_0$  να συμπίπτει με την συχνότητα εκπομπής του σταθμού. Τότε ενισχύουμε το ρεύμα αυτής της συχνότητας μόνο ενώ οι άλλες συχνότητες (οι άλλοι σταθμοί) έχουν μηδενικό ρεύμα.



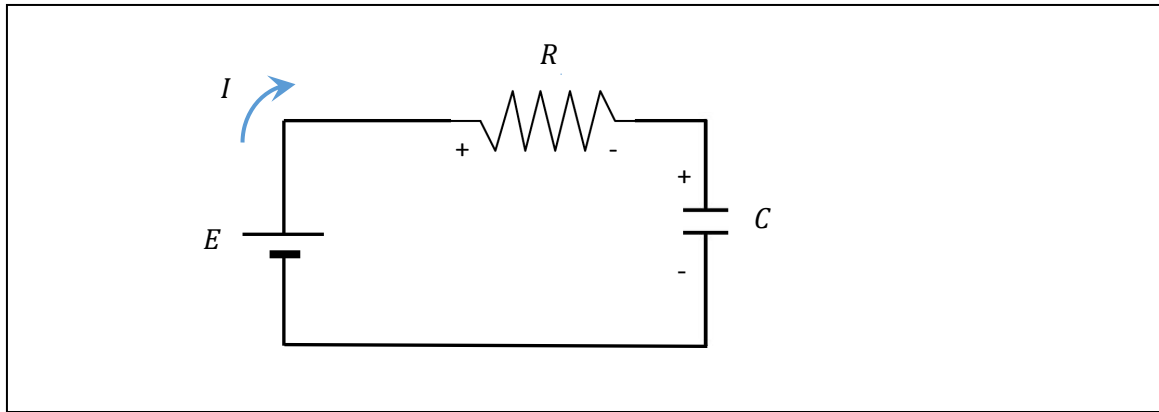
Σχήμα 11.27

Κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο θα θέλαμε να επισημάνουμε ότι σε πολλά εναλλασσόμενα μεγέθη χρησιμοποιούμε τις ενεργές τιμές Εξισώσεις 7.12 και 7.13 που ορίσαμε στο Κεφ. 7.

## Προβλήματα

### Πρόβλημα 11.1.

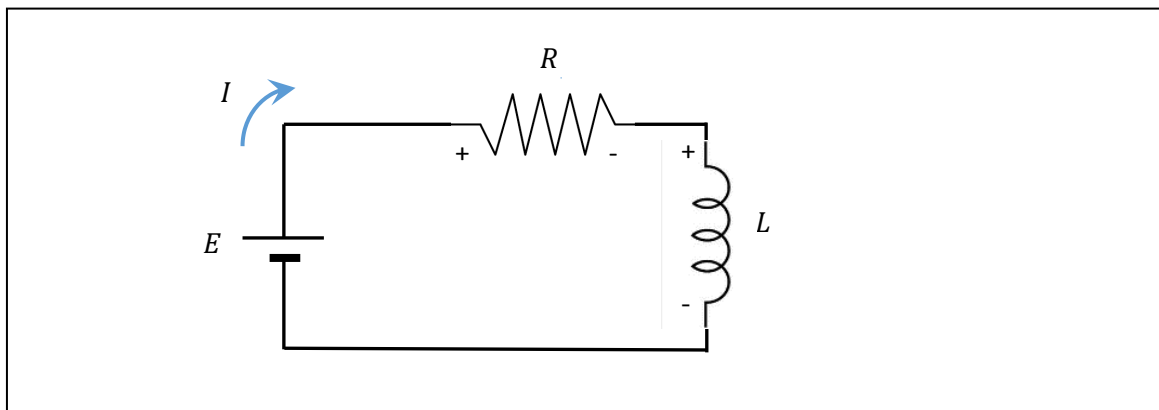
Στο παρακάτω σχήμα, ο πυκνωτής είναι αρχικά αφόρτιστος. Εάν σε χρόνο  $t$  το ρεύμα αποκτάει κλάσμα  $\kappa$  της μέγιστης του τιμής, όπου  $\kappa < 1$ , να βρεθεί η χωρητικότητα του πυκνωτή  $C$ . Δίνονται  $t = 0.01 \text{ ms}$ ,  $\kappa = 0.65$  και  $R = 10 \Omega$ :



Απάντηση:  $2.32 \mu F$

Πρόβλημα 11.2.

Στο παρακάτω σχήμα, δεν υπάρχει αρχικά ρεύμα στο κύκλωμα. Να βρεθεί το ρεύμα όταν ο χρόνος  $t$  ισούται με  $\kappa$ -φορές τη σταθερά του χρόνου. Δίνονται  $\kappa = 0.65$ ,  $E = 1.5 V$ , και  $R = 10 \Omega$ .

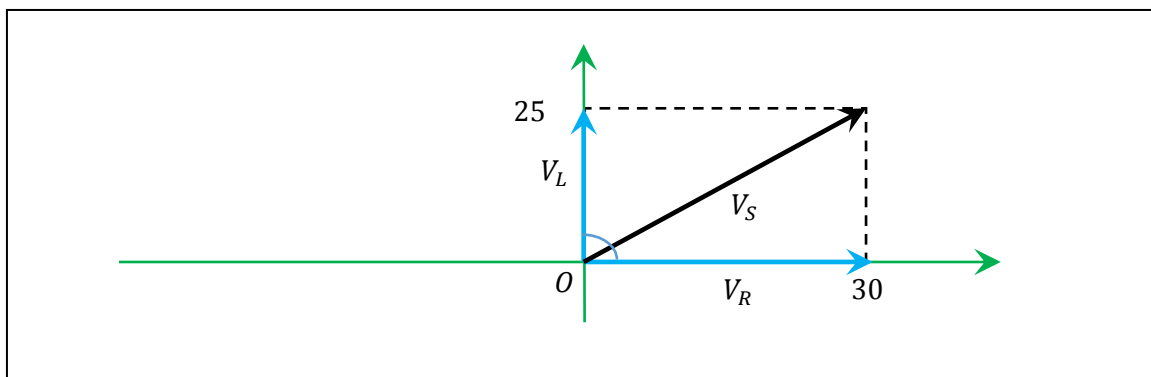


Απάντηση:  $71.69 mA$

Πρόβλημα 11.3.

Στο παρακάτω σχήμα, φαίνεται το διάγραμμα τάσεων ενός κυκλώματος  $RL$  με εναλλασσόμενα ρεύματα. Να βρεθεί η συχνότητα σε  $Hz$  του ρεύματος. Δίνονται  $R = 10 \Omega$  και  $L = 2 mH$ :

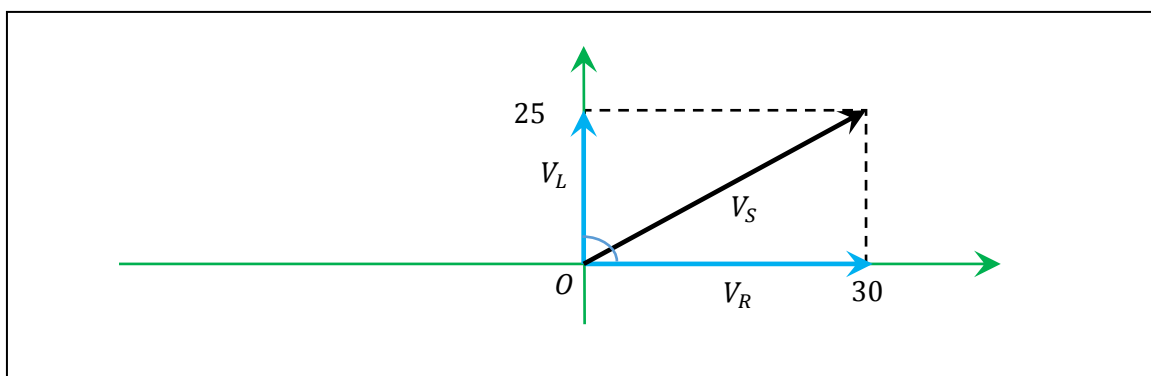




Απάντηση: 663 Hz

Πρόβλημα 11.4.

Στο παρακάτω σχήμα, φαίνεται το διάγραμμα τάσεων ενός κυκλώματος  $RL$  με εναλλασσόμενα ρεύματα. Να βρεθεί η ολική εμπέδηση του κυκλώματος σε  $\Omega$ . Δίνεται  $R = 10 \Omega$ :



Απάντηση: 13  $\Omega$

Πρόβλημα 11.5.

Κύκλωμα  $RL$  σε σειρά τροφοδοτείται από πηγή  $V_s = V_0 \sin \omega t$  και διαρρέεται από ρεύμα που δίνεται από την έκφραση  $I = 1.5 \sin(\omega t - \varphi)$  όπου οι μονάδες του  $I$  είναι σε *Ampere*, ο χρόνος σε *sec* και η διαφορά φάσης είναι σε σχέση με την τάση της πηγής. Ζητείται η τιμή της εναλλασσόμενης τάσης σε *Volts* του πηνίου στο χρόνο  $t = 1$  s. Δίνονται τα  $\omega = 10 \pi \text{ rad/s}$ ,  $R = 10 \Omega$  και  $L = 2 \text{ mH}$ :

Απάντηση: 0.01885 V

Πρόβλημα 11.6.

Κύκλωμα  $RC$  σε σειρά διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα πλάτους 0.5 A και κυκλικής συχνότητας  $\omega$ . Η τάση στα άκρα του πυκνωτή όπως μετρείται από βολτόμετρο είναι  $V_1$ . Να βρεθεί η χωρητικότητα  $C$  του πυκνωτή σε *Farad*. Δίνονται  $\omega = 10 \pi \text{ rad/s}$  και  $V_1 = 1.5 \text{ V}$

Απάντηση:  $7.5 \text{ mF}$

Πρόβλημα 11.6.

Σε κύκλωμα  $RLC$  σε σειρά η ένδειξη του αμπερομέτρου είναι  $0.1 \text{ A}$  ενώ οι ενδείξεις του βολτόμετρου στα άκρα του πυκνωτή είναι  $V_1$  και στα άκρα του πηνίου  $V_2$ . Να βρεθεί το πλάτος της τάσης της πηγής του κυκλώματος. Δίνονται  $R = 10 \Omega$ ,  $V_1 = 1.5 \text{ V}$  και  $V_2 = 0.5 \text{ V}$ :

Απάντηση:  $2 \text{ V}$

Πρόβλημα 11.7.

Ένα ηλεκτρικό κύκλωμα  $RCL$  σε σειρά τροφοδοτείται από πηγή τάσης με χαρακτηριστικά  $12 \text{ V}$  (πλάτος) και  $50 \text{ Hz}$  (συχνότητα). Να υπολογίσετε την ενεργό τιμή της έντασης του ρεύματος. Δίνονται  $R = 3 \Omega$ ,  $L = 2 \text{ mH}$  και  $C = 1 \text{ mF}$ .

Απάντηση:  $2.15 \text{ A}$

Πρόβλημα 11.8.

Ένα ηλεκτρικό κύκλωμα  $RCL$  σε σειρά τροφοδοτείται από πηγή τάσης με  $12 \text{ V}$  πλάτος και μεταβλητή συχνότητα. Εάν  $R = 3 \Omega$ ,  $L = 2 \text{ mH}$  και  $C = 1 \text{ mF}$  να υπολογίσετε α) την συχνότητα συντονισμού του κυκλώματος σε  $\text{Hz}$ , β) την εμπέδηση στον συντονισμό και γ) το πλάτος της έντασης του ρεύματος στο συντονισμό.

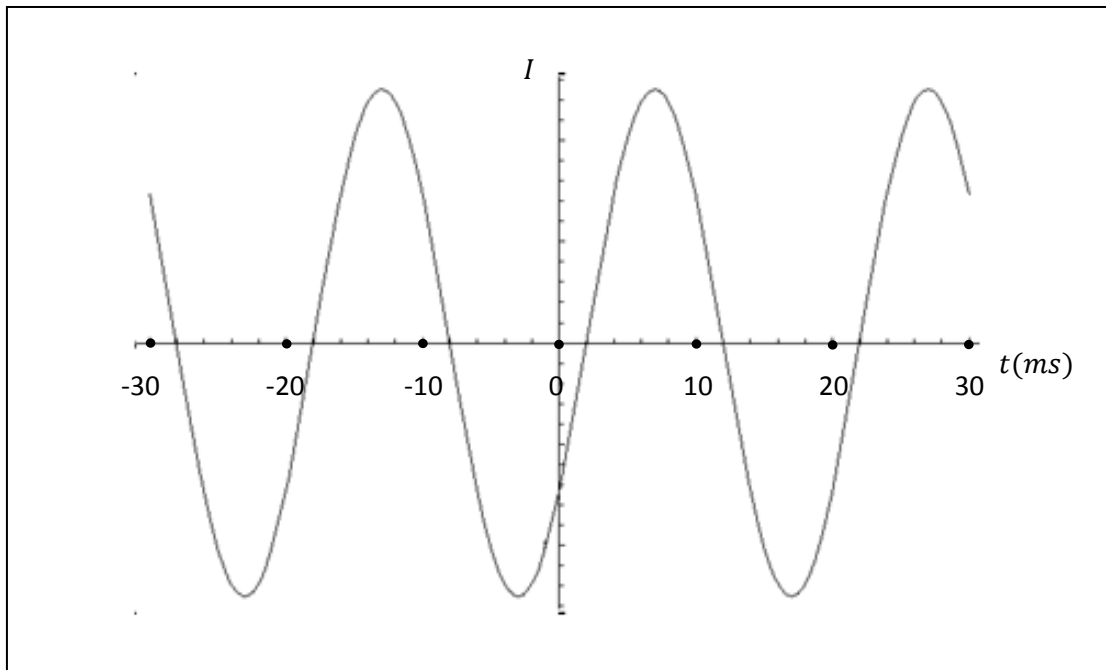
Απάντηση: α)  $112.5 \text{ Hz}$  β)  $3 \Omega$  γ)  $4 \text{ A}$

Πρόβλημα 11.9.

Φοιτητής θέλει να ακούσει τον αγαπημένο του σταθμό στα  $92.9 \text{ FM}$  και επιλέγει να κατασκευάσει ένα κατάλληλο κύκλωμα συντονισμού. Για το σκοπό αυτό διαθέτει 2 αντιστάσεις  $5 \Omega$  και  $12 \Omega$ , δυο πηνία  $1 \mu\text{H}$  και  $2 \mu\text{H}$  και έναν επίπεδο πυκνωτή με παράλληλους οπλισμούς εμβαδού  $A = 0.1 \text{ m}^2$  ο καθένας, με μεταβλητή απόσταση  $d$  μεταξύ τους συνεχόμενα από  $1 \text{ cm}$  έως  $4 \text{ cm}$ . Εξηγήστε πως πρέπει να κατασκευάσει το κύκλωμα αυτό χρησιμοποιώντας τα παραπάνω υλικά.

Πρόβλημα 11.10.

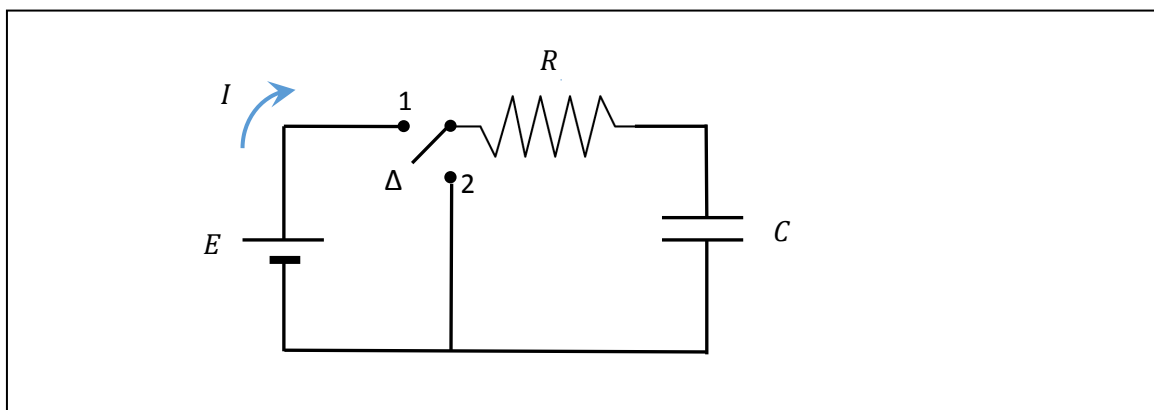
Κύκλωμα  $RL$  σειράς έχει  $R = 1.4 \Omega$ ,  $L = 4 \text{ mH}$  και διαρρέεται από το ρεύμα με πλάτος  $I_0 = 4 \text{ A}$  με γραφική παράσταση που φαίνεται παρακάτω. Ζητούνται: α) οι στιγμιαίες τάσεις  $V_R, V_L$  και η τάση της πηγής στο  $t = 9 \text{ ms}$  β) οι αντίστοιχες ενεργές τιμές και γ) το διανυσματικό διάγραμμα των τάσεων



Απάντηση: α) 4.4, 2.33,  $-3.10$  V β) 3.96, 5.32, 3.55 V γ) Το κύκλωμα είναι ελαφρά επαγωγικό με  $\theta = 33.7^\circ$

Πρόβλημα 11.11.

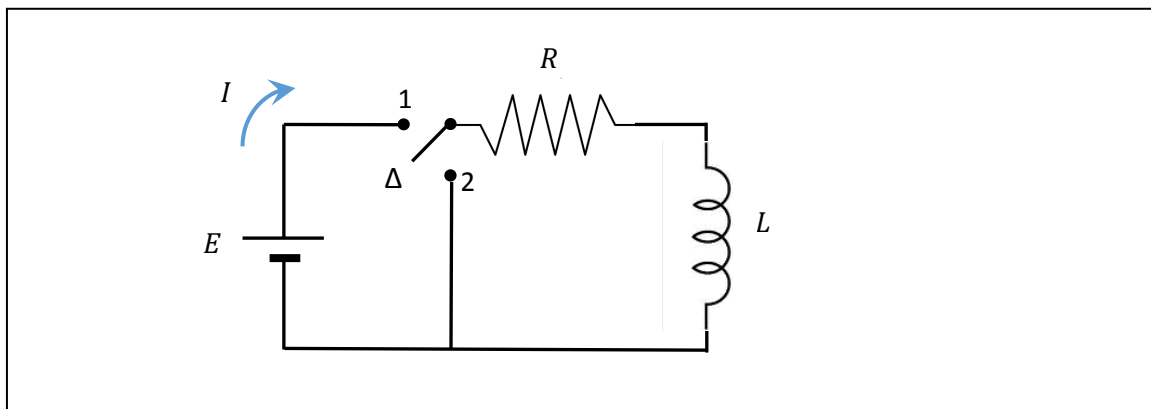
Ο διακόπτης  $\Delta$  στο παρακάτω σχήμα μπορεί να συνδεθεί σε μια από τις δυο θέσεις 1 και 2 αλλά αρχικά είναι ανοικτός και έτσι δεν υπάρχει ρεύμα στο κύκλωμα. Στο  $t = 0$  ο διακόπτης κλείνει στη θέση 1. Μετά από 6 δευτερόλεπτα ο διακόπτης μεταβαίνει ακαριαία στη θέση 2 κατά τέτοιο τρόπο ώστε να μη μεταβληθεί στιγμιαία το φορτίο του πυκνωτή. Να βρείτε την τάση στα άκρα της  $R$  σε χρόνο 0.2 δευτερολέπτων αφού γίνει η μεταγωγή  $1 \rightarrow 2$ . Δίνονται  $R = 2.5$  k $\Omega$ ,  $C = 4.2$  mF και  $E = 12$  V.



Απάντηση: 2.05  $\mu$ A

Πρόβλημα 11.12.

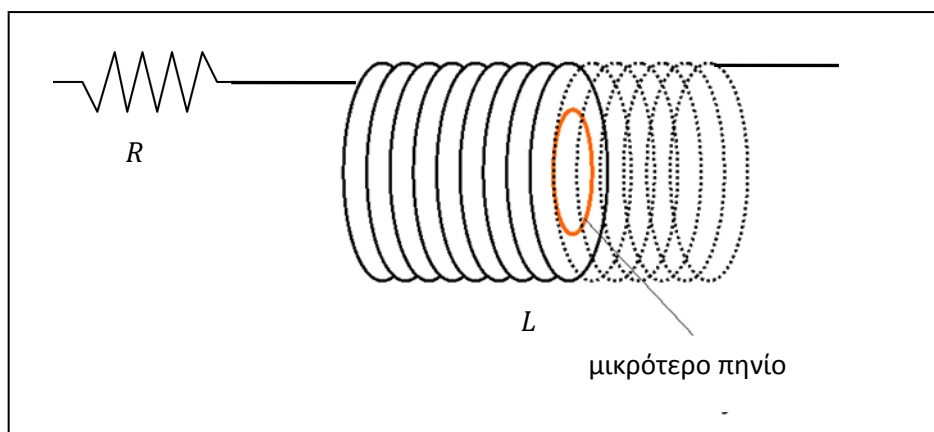
Ο διακόπτης  $\Delta$  στο παρακάτω σχήμα μπορεί να συνδεθεί σε μια από τις δυο θέσεις 1 και 2 αλλά αρχικά είναι ανοικτός και έτσι δεν υπάρχει ρεύμα στο κύκλωμα. Στο  $t = 0$  ο διακόπτης κλείνει στη θέση 1. Μετά από 0.3 δευτερόλεπτα ο διακόπτης μεταβαίνει ακαριαία στη θέση 2 κατά τέτοιο τρόπο ώστε να μη μεταβληθεί το ρεύμα που διαρρέει τα  $R$  και  $L$ . Να βρείτε την τάση στα άκρα της  $R$  σε χρόνο 0.5 δευτερολέπτων αφού γίνει η μεταγωγή  $1 \rightarrow 2$ . Δίνονται  $R = 2.5 \Omega$ ,  $L = 3.2 H$  και  $E = 12 V$ .



Απάντηση: 1.69 V

Πρόβλημα 11.13.

Κύκλωμα  $RL$  σειράς έχει  $R = 0.25 \Omega$ ,  $L = 4.5 mH$  και τροφοδοτείται με πηγή πλάτους 1.20 V και κυκλικής συχνότητας  $\omega = 30 rad/s$ . Το πηνίο είναι κατασκευασμένο με 3 σπείρες/cm και όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, στο εσωτερικό του έχει τοποθετηθεί μικρότερο πηνίο 5 σπειρών και εμβαδού  $4.2 mm^2$ , με τους άξονες των δυο πηνίων να συμπίπτουν και το μικρό να εμπεριέχεται πλήρως μέσα στο μεγαλύτερο πηνίο κατά μήκος. Να βρεθεί το πλάτος της επαγόμενης ΗΕΔ στο μικρό πηνίο.



Φυσική ΙΙ – Δ. Κουζούδης – Π. Πετρίδης

Απάντηση: 1.00  $\mu\text{V}$