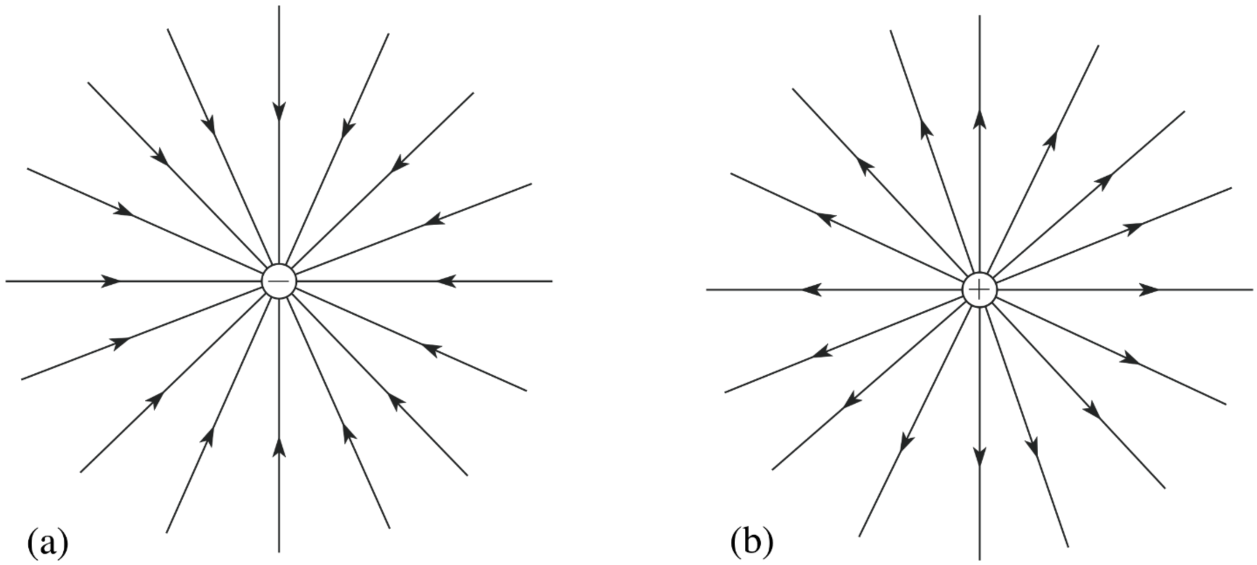
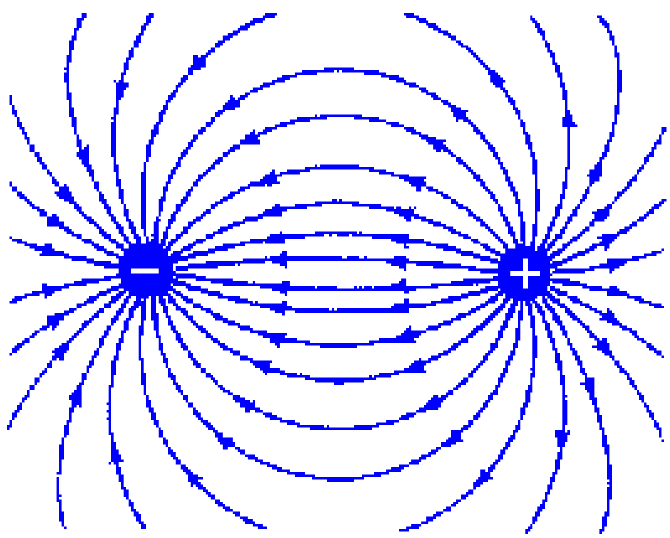
<u>Πρόβλημα 1</u>. Να σχεδιασθούν οι δυναμικές γραμμές ενός συστήματος δυο ίσων σημειακών φορτίων με αντίθετο πρόσημο σε κοντινή απόσταση μεταξύ τους.

<u>Λύση</u>: Οι δυναμικές γραμμές ενός αρνητικού και ενός θετικού σημειακού φορτίου, όταν το καθένα από αυτά είναι απομονωμένα φαίνονται παρακάτω (α και β αντίστοιχα).



Εάν τώρα πλησιάσουμε αυτά τα δυο φορτία, οι δυναμικές γραμμές του θετικού φορτίου που απομακρύνονται από αυτό, θα τείνουν να ενωθούν με τις δυναμικές γραμμές του αρνητικού φορτίου που συγκλίνουν προς αυτό. Στην προσπάθεια τους αυτή θα υπάρξει μια καμπύλωση και έτσι δεν θα είναι πλέον ευθείες γραμμές όπως στο προηγούμενο σχήμα αλλά καμπύλες όπως στο παρακάτω σχήμα.

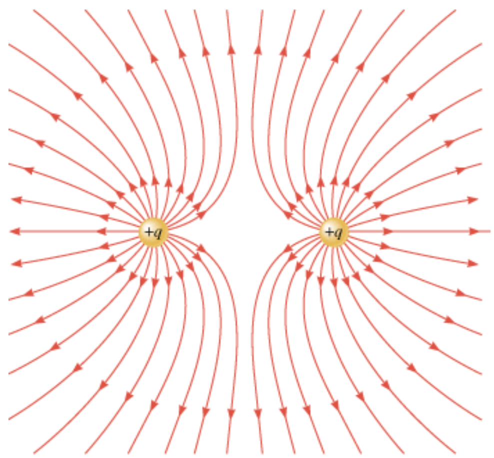


Επίσης οι, δεν μπορούν να φτάσουν με κάποια άμεση διαδρομή στο αρνητικό φορτίο επειδή αλλιώς θα έτεμναν τις δυναμικές γραμμές που βρίσκονται ανάμεσα από τα δυο φορτία. Έτσι είτε κάνουν μεγαλύτερη διαδρομή με μεγάλη καμπύλωση ώστε να αποφύγουν τον συνωστισμό ανάμεσα στα δυο φορτία, είτε καταλήγουν στο άπειρο. Ομοίως και οι δυναμικές γραμμές που βρίσκονται στα αριστερά από το αρνητικό φορτίο, λόγω συμμετρίας (ίσα φορτία) έχουν παρόμοια μορφή με τις αντίστοιχες δυναμικές γραμμές από την άλλη μεριά.

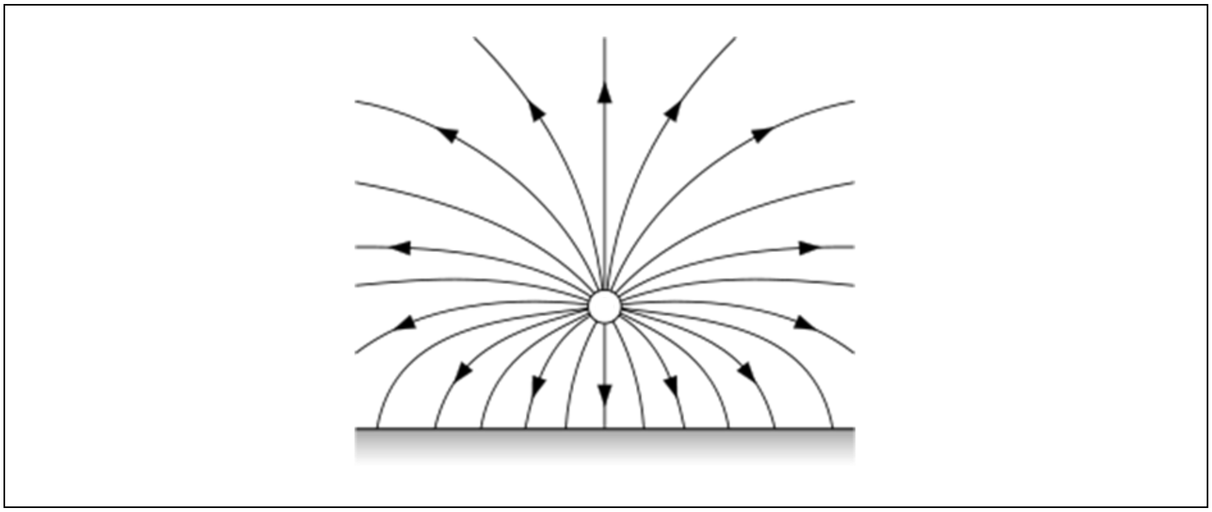
Παρατηρήστε ότι πολύ κοντά στα φορτία, οι δυναμικές γραμμές έχουν ακόμη την ακτινική κατανομή των απομονωμένων φορτίων αλλά καθώς απομακρυνόμαστε από αυτά αλλάζουν δραματικά. Επομένως η παρουσία ενός φορτίου, διαταράσσει το πεδίο ενός άλλου ισοδύναμου φορτίου. Αυτός είναι και ο λόγος που το δοκιμαστικό φορτίο που το χρησιμοποιούμε για να μετρήσουμε ένα πεδίο στο χώρο, πρέπει να είναι μερικές τάξεις μικρότερο από τα φορτία που δημιουργούν το πεδίο αυτό (την πηγή του πεδίου).

Πρόβλημα 2. Να σχεδιασθούν οι δυναμικές γραμμές ενός συστήματος δυο ίσων θετικών σημειακών φορτίων σε κοντινή απόσταση μεταξύ τους.

Λύση: Παρόμοια με το προηγούμενο πρόβλημα μόνο που τώρα οι δυναμικές γραμμές που ξεκινούν από τα δυο θετικά φορτία, πρέπει αναγκαστικά να καταλήξουν στο άπειρο ώστε να βρούνε εκεί αρνητικά φορτία για να καταλήξουν. Οι δυναμικές γραμμές του ενός φορτίου προσπαθούν να αποφύγουν τις δυναμικές γραμμές του άλλου φορτίου. Η κατάσταση λοιπόν μοιάζει κάπως έτσι:



Πρόβλημα Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι δυναμικές γραμμές ενός συστήματος φορτίων. Να συζητηθεί ποιοτικώς η φύση του συστήματος αυτού (πρόσημο φορτίων, κατανομή κ.τ.λ.)

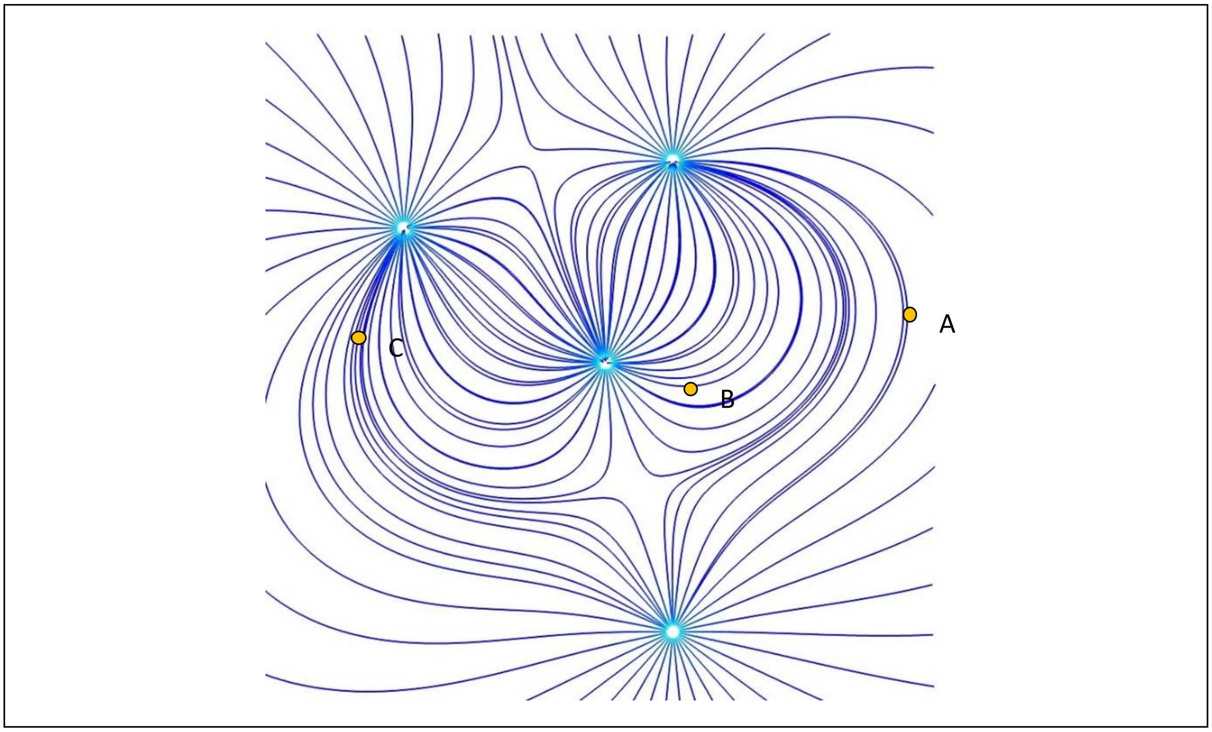


http://physics.stackexchange.com/questions/37572/are-the-field-lines-the-same-as-the-trajectories-of-a-particle-with-initial-velo

Λύση:

Εφόσον οι δυναμικές γραμμές φαίνεται να πηγάζουν από την μικρή σφαίρα στο σχήμα, τότε εκεί βρίσκεται είτε ένα θετικό σημειακό φορτίο είτε μια μικρή φορτισμένη σφαίρα (και τα δυο έχουν την ίδια ακτινική κατανομή δυναμικών γραμμών). Οι γραμμές όμως δεν συνεχίζουν στο άπειρο αλλά φαίνεται να καταλήγουν στην επίπεδη επιφάνεια και επομένως εκεί βρίσκονται αρνητικά φορτία. Επειδή οι δυναμικές γραμμές που τέμνουν την επιφάνεια αυτή είναι ισαπέχουσες, άρα και η κατανομή του αρνητικού φορτίου είναι ομοιόμορφη εκεί.

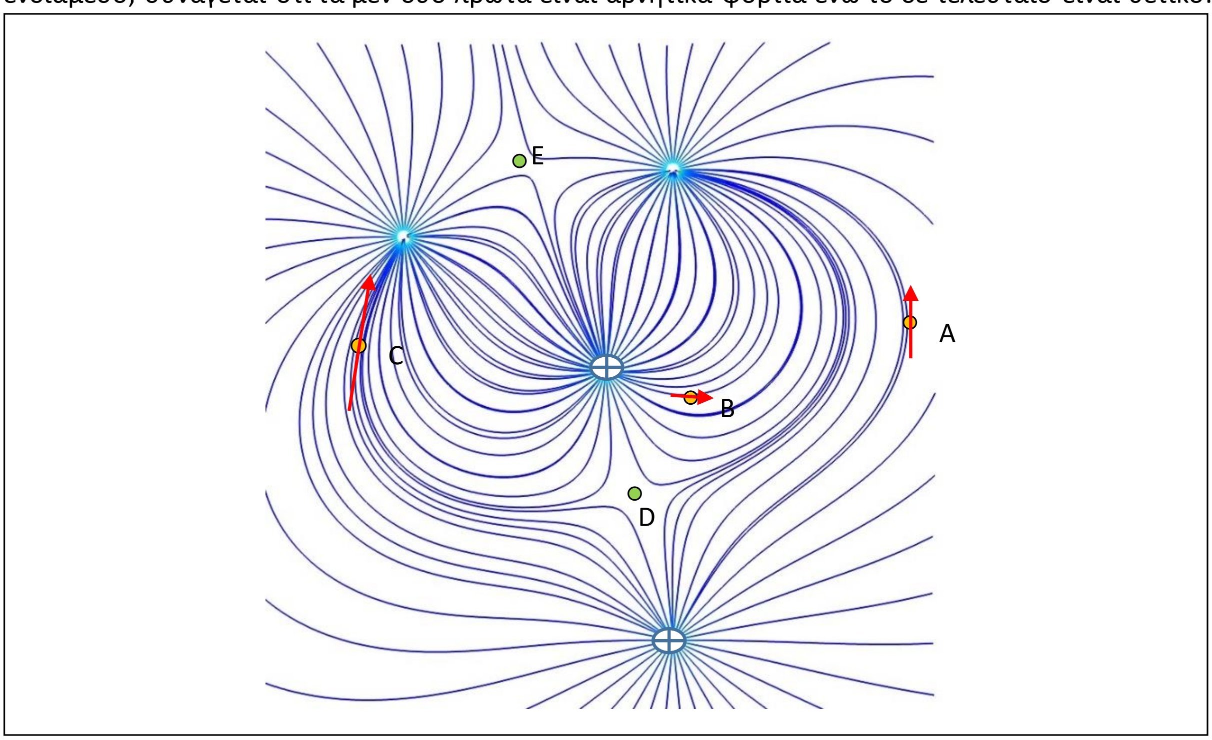
Πρόβλημα 4. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι δυναμικές γραμμές ενός συστήματος φορτίων. α) Να σημειωθούν επάνω στο σχήμα οι τοποθεσίες όπου υπάρχουν φορτία κατά τη γνώμη σας. β) Να συζητηθεί το είδος των φορτίων αυτών εάν γνωρίζετε ότι το χαμηλότερο από αυτά στο σχήμα είναι θετικό. γ) Να σημειωθούν επάνω στο σχήμα δυο σημεία όπου περιμένετε το ηλεκτρικό πεδίο να είναι πρακτικώς μηδέν. δ) Σε ποιο από τα τρία σημεία A, B και C του σχήματος εάν τοποθετηθεί ένα πέμπτο υποθετικό σημειακό φορτίο (πολύ μικρότερου μεγέθους από τα φορτία του συστήματος) θα του ασκηθεί μεγαλύτερη δύναμη; ε) Σχεδιάστε τα διανύσματα του πεδίου $\vec{E}$ σε καθένα από τα παραπάνω τρία σημεία με το μήκος του διανύσματος να αντιπροσωπεύει ποιοτικώς το μέτρο του (δηλαδή σχεδιάστε ένα μεγαλύτερο διάνυσμα εκεί που πιστεύετε ότι το πεδίο είναι ισχυρότερο κ.ό.κ.) και τον προσανατολισμό του διανύσματος να αντιπροσωπεύει τη γωνία του $\vec{E}$. στ) Ποιο από τα παραπάνω τρία σημεία A, B και C του σχήματος βρίσκεται εγγύτερα σε φορτίο; Είναι το ίδιο σημείο που βρήκατε στο υποερώτημα δ παραπάνω; Σχολιάστε



http://elektromagnetisme.no/2010/09/25/using-mayavi-to-visualize-electric-fields/

Λύση:

α) Τα φορτία βρίσκονται εκεί που συγκλίνουν οι δυναμικές γραμμές (Δ.Γ.) β) Εφόσον οι Δ. Γ. από το χαμηλότερο φορτίο φαίνεται να καταλήγουν στα δυο υψηλότερα ενώ αντιθέτως αποφεύγουν το ενδιάμεσο, συνάγεται ότι τα μεν δυο πρώτα είναι αρνητικά φορτία ενώ το δε τελευταίο είναι θετικό:



γ) Η πυκνότητα των Δ.Γ. είναι ανάλογη με το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου E. Έτσι έχουμε $E \cong 0$ εκεί όπου δεν υπάρχουν δυναμικές γραμμές όπως στα σημεία D και E.

δ) Με την ίδια λογική, εκεί όπου υπάρχουν πολλές Δ.Γ., το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου E είναι ισχυρό. Έτσι στα σημεία A, B και C έχουμε αντίστοιχα 2, 1 και 5 γραμμές να βρίσκονται κοντά τους και συνεπώς το E και κατ' επέκταση η δύναμη $F = qE$ το σημειακό φορτίο q είναι μεγαλύτερα στο C.

ε) Το διάνυσμα $\vec{E}$ του πεδίου σε κάποιο σημείο του χώρου είναι εφαπτόμενο στη Δ.Γ. που περνάει από αυτό το σημείο. Λαμβάνοντας υπόψη και το υποερώτημα δ παραπάνω, τα τρία διανύσματα είναι όπως τα δείχνουμε στο παραπάνω σχήμα.

στ) Το σημείο B φαίνεται να είναι πλησιέστερα προς ένα φορτίο παρόλα αυτά δεν είναι απαραίτητα και το σημείο με το υψηλότερο E. Επομένως μόνο οι Δ.Γ. μπορούν να μας δώσουν σωστές πληροφορίες για το είδος του πεδίου.

Πρόβλημα 5. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί λεπτό μονωτικό σφαιρικό κέλυφος διαμέτρου $34\ mm$ με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο $6\ \mu C$ σε απόσταση $10\ mm$ από την επιφάνειά του.

Λύση:

Το ηλεκτρικό πεδίο στον εξωτερικό χώρο ενός φορτισμένου σφαιρικού κελύφους είναι παρόμοιο με αυτό ενός σημειακού φορτίου, δηλαδή δίνεται από την σχέση:

$$E = k\frac{Q}{r^2}$$

Η ακτίνα του κελύφους είναι ίση με:

$$R = 17\ mm$$

Στον παραπάνω τύπο του E, η απόσταση r είναι η απόσταση από το κέντρο του κελύφους έως και το σημείο παρατήρησης. Επειδή μας δίνεται η απόσταση από την εξωτερική επιφάνεια του κελύφους, πρέπει να προσθέσουμε και την ακτίνα:

$$r = 10 + 17 = 27\ mm = 27 \times 10^{-3}\ m$$

Τελικά:

$$E = 9 \times 10^9 \frac{6 \times 10^{-6}}{(27 \times 10^{-3})^2} = 7.4 \times 10^7 N/C$$

Πρόβλημα 6. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί λεπτό μονωτικό σφαιρικό κέλυφος διαμέτρου $34\, mm$ με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο επιφανειακής πυκνότητας $2\, \mu C/cm^2$ σε απόσταση $30\ mm$ από το κέντρο του κελύφους.

Λύση:

Παρόμοια με το προηγούμενο πρόβλημα, το πεδίο στο εξωτερικό του κελύφους ισούται με:

$$E = k\frac{Q}{r^2}$$

Η ακτίνα όπως και προηγουμένως ισούται με:

$$R = 17\ mm$$

Επειδή δεν μας δίνεται το φορτίο Q της σφαίρας αλλά η επιφανειακή πυκνότητα $\sigma = 2\ \mu C/cm^2$ που είναι φορτίο ανά επιφάνεια, πρέπει να την πολλαπλασιάσουμε με την επιφάνεια A (το εμβαδό) της σφαίρας για να βρούμε το φορτίο. Το εμβαδό σφαίρας ισούται με:

$$A = 4\pi R^2 = 4\pi(17 \times 10^{-3})^2 = 0.0125\ m^2$$

Έτσι:

$$Q = \sigma A = 0.02 \times 0.0125 = 2.5 \times 10^{-4}\ C$$

Η δεδομένη απόσταση των $30\ mm$ είναι από το κέντρο του κελύφους που είναι το r. Επομένως:

$$E = 9 \times 10^9 \frac{2.5 \times 10^{-4}}{(30 \times 10^{-3})^2} = 2.5 \times 10^9 N/C$$

Πρόβλημα 7. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στο μέσο μεταξύ δυο παράλληλων άπειρων γραμμών φορτίου οι οποίες απέχουν $10\ cm$ μεταξύ τους και έχουν γραμμικές πυκνότητες φορτίου $2\ \mu C/cm$ και $4\ \mu C/cm$ αντίστοιχα.

Λύση:

Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της επαλληλίας. Εάν στο παρακάτω σχήμα ήταν παρούσα μόνο η γραμμή στα αριστερά με γραμμική πυκνότητα φορτίου

$$\lambda_1 = 2\frac{\mu C}{cm} = 2\frac{10^{-6}\ C}{10^{-2} m} = 2 \times 10^{-4}\frac{C}{m}$$

τότε θα δημιουργούσε ηλεκτρικό πεδίο μέτρου

$$E_1 = \frac{2k\lambda_1}{\rho_1}$$

σε απόσταση ρ_1 από αυτή. Εφόσον το υπό εξέταση σημείο είναι το μέσο μεταξύ των δυο γραμμών, τότε $\rho_1 = 5\ cm = 0.05\ m$ και

$$E_1 = \frac{2 \times 9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-4}}{5 \times 10^{-2}} = 7.2 \times 10^7 \; N/C$$

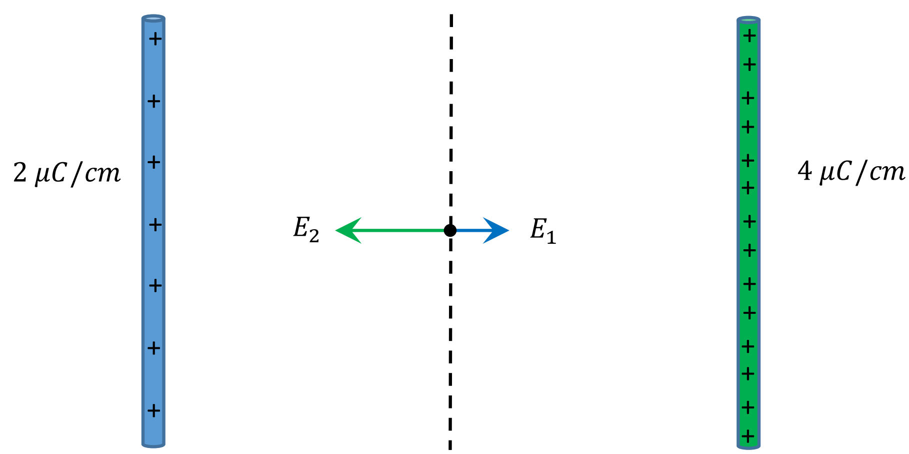
Η φορά του πεδίου είναι προς τα δεξιά (απομακρυνόμενο από θετική πηγή). Ομοίως εάν ήταν παρούσα μόνο η γραμμή στα δεξιά τότε το αντίστοιχο πεδίο θα ήταν ίσο με:

$$E_2 = \frac{2 \times 9 \times 10^9 \times 4 \times 10^{-4}}{5 \times 10^{-2}} = 14.4 \times 10^7 \; N/C$$

αλλά με αντίθετη φορά. Από την αρχή της επαλληλίας, το ολικό πεδίο είναι ίσο με

$$E = E_1 - E_2 = -7.2 \times 10^7 \; N/C$$

Το αρνητικό πρόσημο είναι επειδή το πεδίο έχει φορά προς τα αριστερά.



<u>Πρόβλημα 8</u>. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στα $1/3$ της απόστασης μεταξύ μιας θετικής φορτισμένης λεπτής πλάκας απείρων διαστάσεων και μιας αντίστοιχης αρνητικής που είναι παράλληλη με την πρώτη και σε απόσταση $10 \; cm$ από αυτήν, εάν οι επιφανειακές πυκνότητες των φορτίων τους είναι $2 \; \mu C/cm^2$ και $-4 \; \mu C/cm^2$.

<u>Λύση</u>:

Όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα, θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της επαλληλίας. Εάν στο παρακάτω σχήμα ήταν παρούσα μόνο η πλάκα στα αριστερά με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου

$$\sigma_1 = 2 \frac{\mu C}{cm^2} = 2 \frac{10^{-6} \; C}{10^{-4} m^2} = 2 \times 10^{-2} \frac{C}{m^2}$$

τότε θα δημιουργούσε ηλεκτρικό πεδίο μέτρου

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} = \frac{2 \times 10^{-2}}{2 \times 8.85 \times 10^{-12}} = 1.13 \times 10^9 \; N/C$$

το οποίο όπως είπαμε είναι ανεξάρτητο της απόστασης από την πλάκα οπότε είναι παντού το ίδιο.

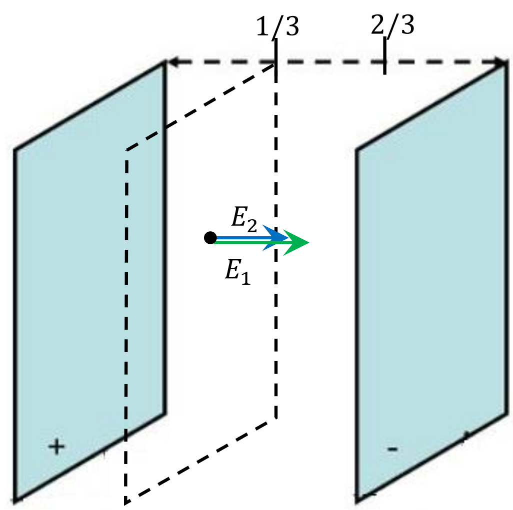
Η φορά του πεδίου αυτού είναι προς τα δεξιά (απομακρυνόμενο από θετική πηγή). Ομοίως εάν ήταν παρούσα μόνο η πλάκα στα δεξιά, τότε το αντίστοιχο πεδίο θα έχει μέτρο ίσο με:

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = \frac{4 \times 10^{-2}}{2 \times 8.85 \times 10^{-12}} = 2.26 \times 10^{9}\ N/C$$

με την ίδια φορά προς τα δεξιά (προς την αρνητική πηγή). Από την αρχή της επαλληλίας, το ολικό πεδίο είναι ίσο με

$$E = E_1 + E_2 = 3.39 \times 10^{9}\ N/C$$

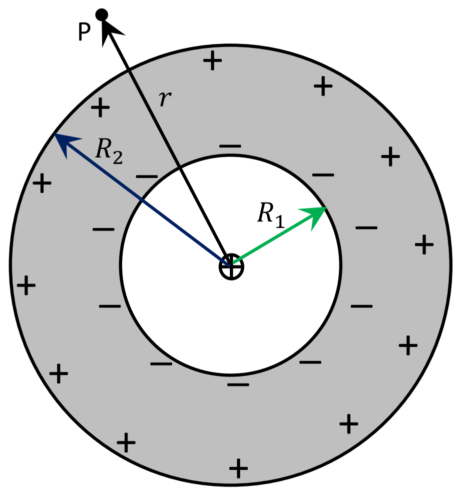
με φορά προς τα δεξιά.



<u>Πρόβλημα 9</u>. Σημειακό φορτίο $+Q$ βρίσκεται στο κέντρο σφαιρικού αγώγιμου φλοιού εσωτερικής ακτίνας R_1 και εξωτερικής R_2. α) Περιγράψτε την κατανομή του επαγόμενου φορτίου στο κέλυφος β) Να βρεθεί το παραγόμενο ηλεκτρικό πεδίο παντού στο χώρο (εντός, εκτός και στο εσωτερικό του κελύφους) με τα βοήθεια της αρχής της επαλληλίας.

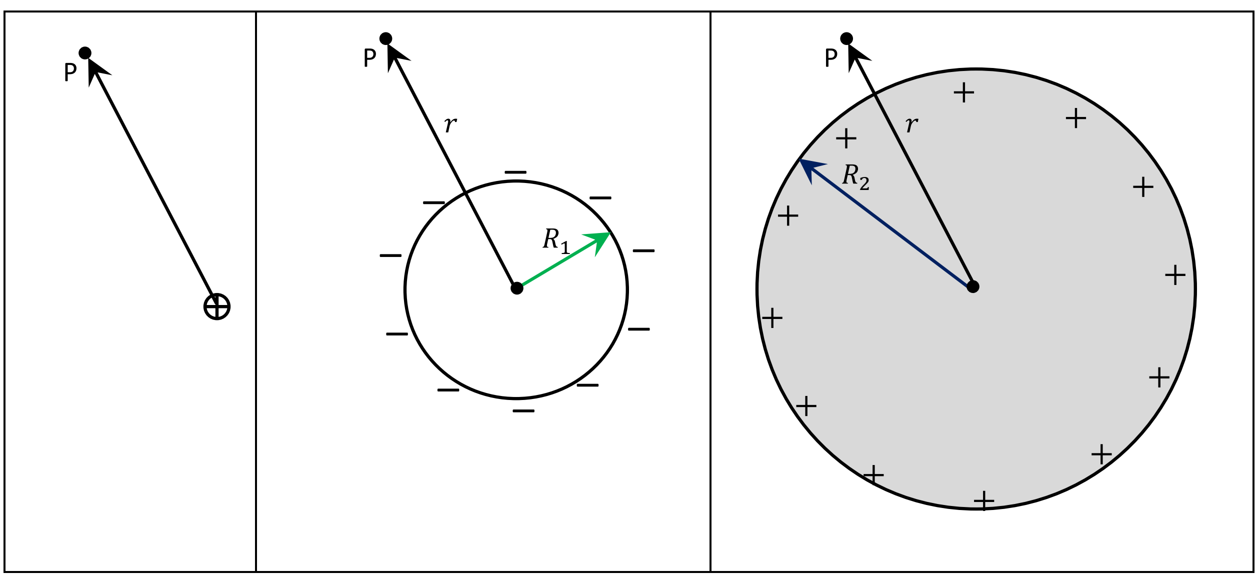
<u>Λύση</u>:

α) Όπως δείχνουμε στο παρακάτω σχήμα, επειδή ο φλοιός είναι αγώγιμος, θα λάβει χώρα το φαινόμενο της επαγωγής δηλαδή τα ηλεκτρόνια του φλοιού θα προσελκυσθούν στο θετικό φορτίο και έτσι θα εμφανισθεί αρνητικό φορτίο $-Q$ εξ' επαγωγής στην εσωτερική επιφάνεια του φλοιού. Ταυτόχρονα, στην άλλη επιφάνεια θα εμφανισθεί ίσο και αντίθετο φορτίο $+Q$ από τους πυρήνες του υλικού που έχασαν τα ηλεκτρόνια τους. Επειδή στους αγωγούς το (επιπλέον) φορτίο εμφανίζεται μόνο στην επιφάνειά τους, δεν υπάρχει φορτίο στο εσωτερικό του φλοιού, μόνο στην εσωτερική και εξωτερική του επιφάνεια, όπως απεικονίζεται στο σχήμα.



β) Θα βρούμε το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα τυχαίο σημείο P στο χώρο που απέχει απόσταση r από το κέντρο του φλοιού. Παρόλο που στο σχήμα δείχνουμε το P έξω από το φλοιό, γενικά μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε στο χώρο. Έτσι πρέπει να εξετάσουμε τρεις περιπτώσεις, το P να είναι εκτός του φλοιού (όπως στο σχήμα) με $r > R_2$, το P να είναι μέσα μέσα στο φλοιό με $R_1 < r < R_2$ και το P να είναι στην κοιλότητα με $r < R_1$. Ας εξετάσουμε την κάθε περίπτωση χωριστά:

- Περίπτωση: $r > R_2$. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας είναι σαν να έχουμε τρεις πηγές (από μέσα προς τα έξω), το σημειακό φορτίο $+Q$, ένα λεπτό σφαιρικό κέλυφος ακτίνας R_1 με αρνητικό φορτίο $-Q$ και ένα άλλο λεπτό σφαιρικό κέλυφος μεγαλύτερης ακτίνας R_2 με θετικό φορτίο $+Q$



Στο εξωτερικό ενός σφαιρικού κελύφους, το ηλεκτρικό πεδίο είναι πανομοιότυπο με αυτό ενός σημειακού φορτίου ενώ και έτσι από την αρχή της επαλληλίας έχουμε

$$E = \frac{kQ}{r} - \frac{kQ}{r} + \frac{kQ}{r} = \frac{kQ}{r}$$

- Περίπτωση: $R_1 < r < R_2$. Τώρα το σημείο P βρίσκεται μέσα στο φλοιό. Ως προς το λεπτό σφαιρικό κέλυφος της μεγαλύτερης ακτίνας R_2 (του παραπάνω σχήματος), το P βρίσκεται στο εσωτερικό του και έτσι αυτό το κέλυφος δεν συνεισφέρει (το πεδίο στο εσωτερικό ενός λεπτού κελύφους είναι μηδέν). Αντιθέτως ως προς το λεπτό σφαιρικό κέλυφος της μικρότερης ακτίνας R_1, το P βρίσκεται στο εξωτερικό του και έτσι αυτό το κέλυφος παράγει πεδίο παρόμοιο με ένα σημειακό φορτίο. Επομένως από την αρχή της επαλληλίας:

$$E = 0 - \frac{kQ}{r} + \frac{kQ}{r} = 0$$

- Περίπτωση: $r < R_1$. Τώρα το σημείο P βρίσκεται μέσα στην κοιλότητα. Ως προς τα λεπτά σφαιρικά κελύφη, το σημείο P βρίσκεται στο εσωτερικό και των δυο και έτσι κανένα από τα δυο δεν συνεισφέρει. Επομένως από την αρχή της επαλληλίας:

$$E = 0 - 0 + \frac{kQ}{r} = \frac{kQ}{r}$$

Συνοψίζοντας έχουμε

$$E = \begin{cases} \frac{kQ}{r} & r > R_2 \\ 0 & R_1 < r < R_2 \\ \frac{kQ}{r} & r < R_1 \end{cases}$$

Το πεδίο είναι ακτινικό όπως και για σημειακό φορτίο: