

1) Κύκλωμα R-L σε σειρά έχει $R = 20\Omega$, $L = 15mH$ και διαρρέεται από ρεύμα που δίνεται από την έκφραση $I = 1.5\sin(500t - \pi/3)$ όπου οι μονάδες του I είναι σε Ampere, ο χρόνος σε sec και η διαφορά φάσης είναι εν σχέση με την τάση της πηγής. Ζητούνται:

- α. η σύνθετη αντίσταση Z (εμπέδηση) του κυκλώματος
- β. ο μαθηματικός τύπος της στιγμιαίας τιμής της τάσης V_S της πηγής τροφοδοσίας
- γ. οι τάσεις V_R, V_L
- δ. το διανυσματικό διάγραμμα των τάσεων

Λύση:

α. Από το δεδομένο ρεύμα βλέπουμε ότι η κυκλική συχνότητα ισούται με $\omega = 500 \text{ rad/s}$ και έτσι η επαγωγική εμπέδηση ισούται με $Z_L = L\omega = 15 \times 10^{-3} \times 500 = 7.5 \Omega$. Επομένως η ολική εμπέδηση ισούται με

$$Z = \sqrt{R^2 + Z_L^2} = \sqrt{20^2 + 7.5^2} = 21.4 \Omega$$

β. Από το δεδομένο ρεύμα βλέπουμε ότι το μέγιστο ρεύμα ισούται με $I_0 = 1.5 \text{ A}$ και έτσι το πλάτος της τάσης V_S ισούται με $V_0 = I_0 Z = 1.5 \times 21.4 = 32.1 \text{ V}$. Αφού $\omega = 500 \text{ rad/s}$ τότε

$$V_S = V_0 \sin(500t)$$

γ. Τα πλάτη των V_R και V_L υπολογίζονται από τις αντίστοιχες εμπεδήσεις:

$$V_{R0} = I_0 R = 1.5 \times 20 = 30 \text{ V}$$

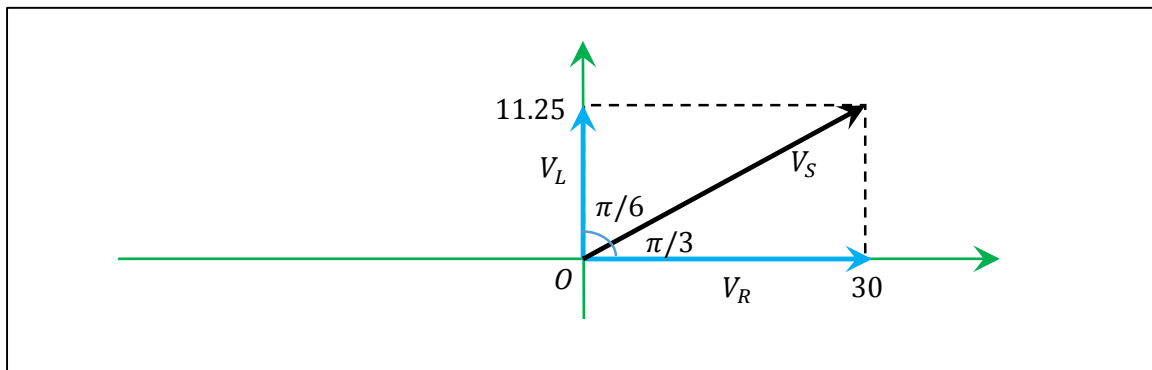
$$V_{L0} = I_0 Z_L = 1.5 \times 7.5 = 11.25 \text{ V}$$

Η V_R έχει την ίδια φάση με το ρεύμα ενώ η V_L υπερτερεί της V_R κατά γωνία ίση με $\pi/2$. Έτσι:

$$V_R = V_{R0} \sin(\omega t - \varphi) = 30 \sin\left(500t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$V_L = V_{L0} \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = 11.25 \sin\left(500t - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = 11.25 \sin\left(500t + \frac{\pi}{6}\right)$$

δ. Το διανυσματικό διάγραμμα των τάσεων είναι το εξής: Οι μονάδες στους άξονες είναι σε Volts. Βλέπουμε ότι εν σχέση με την V_S που πρέπει να την φανταστούμε ότι περιστρέφεται με κυκλική συχνότητα ω , η V_R υστερεί κατά γωνία $\pi/3$ ενώ η V_L υπερτερεί κατά $\pi/6$ ενώ συνολικά η διαφορά φάσης των V_L και V_R είναι ίση με $\pi/2$. Πρέπει να έχουμε κατά νου ότι το ρεύμα I είναι **πάντοτε** συμφασικό με την V_R και άρα και αυτό υστερεί κατά γωνία $\pi/3$ εν σχέσει με την τάση της πηγής.



2) Κύκλωμα R-L σε σειρά έχει $R = 20\Omega$, και διαρρέεται από ρεύμα ενεργής τιμής $0.5 A$ εναλλασσόμενης τάσεως $V_{rms} = 50 V$ και κυκλικής συχνότητας $\omega = 1000 \text{ rad/sec}$. Η τάση στα άκρα του πηνίου όπως μετριέται από βολτόμετρο είναι $20 V$. Ζητούνται:

- α. Η τάση στα άκρα της ωμικής αντίστασης εάν μετρηθεί με το ίδιο βολτόμετρο
- β. Ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου L
- γ. Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος
- δ. Το διανυσματικό διάγραμμα των τάσεων και τη γωνία φ

Λύση:

α. Η δεδομένη τάση στα άκρα του πηνίου είναι ενεργός τιμή $V_{L,rms} = 10 V$ αφού μετριέται με βολτόμετρο. Από τον ορισμό της εμπέδησης έχουμε

$$Z^2 = Z_L^2 + R^2$$

Εάν πολλαπλασιάσουμε αυτή την σχέση με το I_{rms}^2 , τότε παίρνουμε την αντίστοιχη σχέση για τις ενεργές τιμές της τάσης

$$V_{rms}^2 = V_{L,rms}^2 + V_{R,rms}^2$$

απ' όπου παίρνουμε

$$50^2 = 20^2 + V_{R,rms}^2 \Rightarrow V_{R,rms} = 45.8 V$$

β. Από την $V_{L,rms} = I_{rms}Z_L$ μπορούμε να βρούμε την επαγωγική εμπέδηση

$$Z_L = \frac{20}{0.5} = 40 \Omega$$

Από τον ορισμό της επαγωγικής εμπέδησης έχουμε:

$$Z_L = L\omega \Rightarrow L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{20}{1000} = 20 \text{ mH}$$

γ. Ομοίως μπορούμε να βρούμε την ολική εμπέδηση από την $V_{rms} = I_{rms}Z$

$$Z = \frac{50}{0.5} = 100 \Omega$$

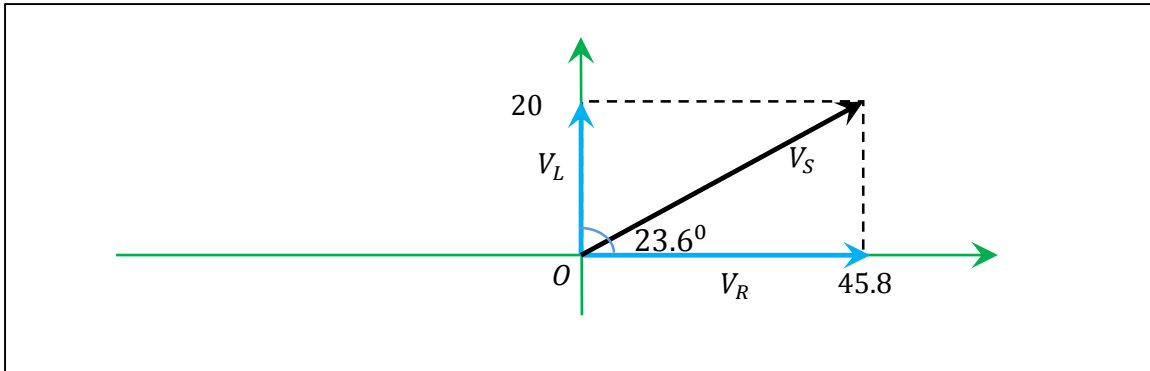
Τελικά από τον ορισμό της εμπέδησης έχουμε

$$Z^2 = Z_L^2 + R^2 \Rightarrow R = \sqrt{Z^2 - Z_L^2} = \sqrt{100^2 - 40^2} = 91.6 \Omega$$

δ. Η φωνία φ ισούται με:

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{Z_L}{R} = \tan^{-1} \frac{40}{91.6} = 23.6^\circ$$

Το διανυσματικό διάγραμμα των τάσεων (ενεργά μεγέθη) είναι το



3) Κύκλωμα R-C σε σειρά έχει $R = 20 \Omega$, $C = 50 \mu F$ και τροφοδοτείται από πηγή τάσης που περιγράφεται από την έκφραση $V_S = 120 \sin(800t)$. Εάν το ρεύμα υπερτερεί αυτής της τάσης κατά 30° , να βρεθούν:

- Η σύνθετη αντίσταση Z του κυκλώματος
- Ο μαθηματικός τύπος της στιγμιαίας τιμής του ρεύματος I
- Οι τάσεις V_R , V_L και οι αντίστοιχες ενεργές τιμές τους
- Το διανυσματικό διάγραμμα των τάσεων

Λύση:

α. Από τα δεδομένα $\omega = 800 \text{ rad/s}$ και έτσι

$$Z_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{50 \times 10^{-6} \times 800} = 25 \Omega$$

Από τον ορισμό της εμπέδησης έχουμε

$$Z = \sqrt{Z_C^2 + R^2} = \sqrt{25^2 + 20^2} = 32.0 \Omega$$

β. Από τα δεδομένα το πλάτος της τάσης της πηγής είναι $V_0 = 120 \text{ V}$ και έτσι το πλάτος του ρεύματος ισούται με:

$$I_0 = \frac{V_0}{Z} = \frac{120}{32} = 3.75 \text{ A}$$

Δεδομένης και της γωνίας $\varphi = 30^\circ$, ο μαθηματικός τύπος της στιγμιαίας τιμής του ρεύματος I είναι ο ακόλουθος:

$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi) = 3.75 \sin(800t + \pi/6)$$

Σημείωση: Γιατί μετατράπηκε η φ σε ακτίνια; Απάντηση: Επειδή συνήθως το ω είναι σε ακτίνια/s. Εάν μας δινόταν σε μοίρες/s, πράγμα σπάνιο, τότε θα αφήναμε την φ σε μοίρες.

γ. Τα πλάτη των V_R και V_C υπολογίζονται από τις αντίστοιχες εμπεδήσεις:

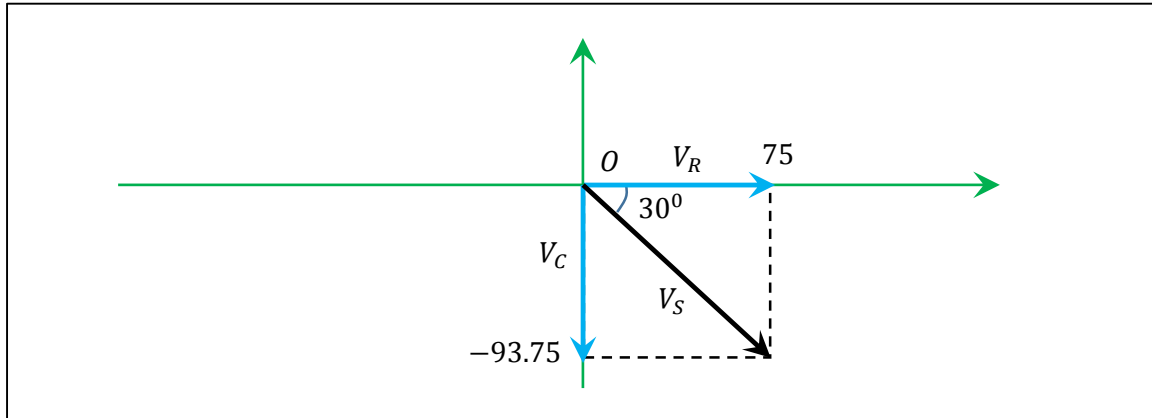
$$\begin{aligned} V_{R0} &= I_0 R = 3.75 \times 20 = 75 \text{ V} \\ V_{C0} &= I_0 Z_C = 3.75 \times 25 = 93.75 \text{ V} \end{aligned}$$

Η V_R έχει την ίδια φάση με το ρεύμα ενώ η V_C υπερτερεί της V_R κατά γωνία ίση με $\pi/2$. Έτσι:

$$V_R = V_{R0} \sin(\omega t + \varphi) = 75 \sin\left(800t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$V_C = V_{C0} \sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = 93.75 \sin\left(800t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = 93.75 \sin\left(800t - \frac{\pi}{3}\right)$$

δ. Το διανυσματικό διάγραμμα των τάσεων είναι το εξής:



4) Κύκλωμα RLC σε σειρά έχει $R = 4 \Omega$, $Z_L = 10 \Omega$, $Z_C = 4 \Omega$ και η ένδειξη του αμπερομέτρου είναι $0.5 A$ και η αυτεπαγωγή του πηνίου $5 mH$. Ζητούνται:

- α. Η σύνθετη αντίσταση Z του κυκλώματος
- β. Η ενεργός τιμή της τάσης της πηγής V_S του κυκλώματος
- γ. Η γωνία θ
- δ. Οι στιγμιαίες τάσεις V_R , V_L και V_C (ως εκφράσεις) και το διανυσματικό τους διάγραμμα και
- ε. να χαρακτηριστεί η συμπεριφορά του κυκλώματος

Λύση:

α. Από την Εξ (60) στις σημειώσεις

$$Z = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \sqrt{4^2 + (10 - 4)^2} = 7.2 \Omega$$

β. Το δεδομένο ρεύμα είναι από αμπερόμετρο οπότε είναι ενεργός τιμή. Από τον ορισμό της ολικής εμπέδησης $Z = V_0/I_0$ εάν διαιρέσουμε τόσο τον Αριθμητή όσο και τον παρονομαστή με $\sqrt{2}$ παίρνουμε:

$$Z = \frac{V_{S,rms}}{I_{rms}} \Rightarrow V_{S,rms} = Z I_{rms} = 7.2 \times 0.5 = 3.6 V$$

γ. Από την Εξ (61) στις σημειώσεις

$$\tan\theta = \frac{Z_L - Z_C}{R} = \frac{10 - 4}{4} = 1.5 \Rightarrow \theta = \text{atan}(1.5) = 56.3^\circ$$

δ. Από τα δεδομένα $L = 5 \times 10^{-3} H$ οπότε από την $Z_L = L\omega$ βρίσκουμε

$$\omega = \frac{Z_L}{L} = \frac{10}{5 \times 10^{-3}} = 2000 \text{ rad/s}$$

Το πλάτος του ρεύματος είναι ίσο με

$$I_0 = \sqrt{2}I_{rms} = 0.5\sqrt{2}$$

Τα αντίστοιχα πλάτη των τάσεων είναι:

$$V_{R0} = I_0 R = 2\sqrt{2}$$

$$V_{L0} = I_0 Z_L = 5\sqrt{2}$$

$$V_{C0} = I_0 Z_C = 2\sqrt{2}$$

Η γωνία θ σε ακτίνια ισούται με

$$\theta = \frac{56.3^\circ}{180^\circ} 3.14 = 0.98$$

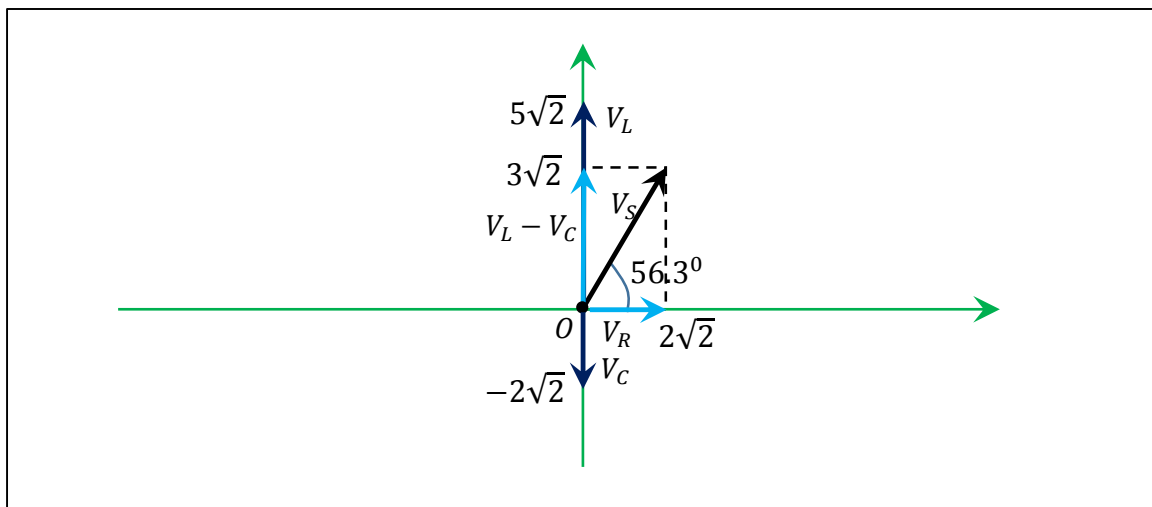
Η μαθηματική έκφραση των τάσεων είναι η εξής (Εξισώσεις 63, 64 και 65 στις σημειώσεις)

$$V_R = V_{R0} \sin(\omega t - \theta) = 2\sqrt{2} \sin(2000t - 0.98)$$

$$V_L = V_{L0} \sin(\omega t - \theta + \pi/2) = 5\sqrt{2} \sin(2000t + 0.59)$$

$$V_C = V_{C0} \sin(\omega t - \theta - \pi/2) = 2\sqrt{2} \sin(2000t - 2.55)$$

Το διάγραμμα των τάσεων είναι όπως παρακάτω. Επειδή η V_L είναι μεγαλύτερη από τις άλλες δυο τάσεις, η γωνία θ είναι μεγαλύτερη από 45° και το φορτίο είναι κυρίως "επαγωγικό" όπως λέμε.



5) Ένα ηλεκτρικό κύκλωμα αποτελείται από μια ωμική αντίσταση $R = 4 \Omega$, ένα πηνίο με επαγωγική αντίσταση $X_L = 10 \Omega$ και έναν πυκνωτή με χωρητική αντίσταση $X_C = 10 \Omega$ συνδεδεμένα σε σειρά. Το κύκλωμα τροφοδοτείται από πηγή τάσης $120 V$, $50 Hz$. Να υπολογίσετε:

- α. Τη σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος.
- β. Την ενεργό τιμή της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα.
- γ. Να αναφέρετε πως συμπεριφέρεται το κύκλωμα (ωμικά, χωρητικά ή επαγωγικά);
- δ. Να βρεθεί το γινόμενο LC

Λύση:

- α. Από την Εξ (60) στις σημειώσεις

$$Z = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \sqrt{4^2 + (10 - 10)^2} = 4 \Omega$$

β. Όταν η τάση δίνεται μαζί με την συχνότητα, η τάση είναι το πλάτος. Έτσι έχουμε $V_0 = 120 V$ και $f = 50 Hz$ οπότε $\omega = 2\pi f = 100\pi$. Το πλάτος του ρεύματος ισούται με

$$I_0 = \frac{V_0}{Z} = \frac{120}{4} = 30 A$$

γ. Αφού $Z_L = Z_C$ το κύκλωμα βρίσκεται σε συντονισμό με $\omega_0 = \omega = 100\pi$ και άρα συμπεριφέρεται καθαρά ωμικά

δ. Από την συνθήκη συντονισμού

$$Z_L = Z_C \Rightarrow L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} \Rightarrow LC = \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{10^4\pi^2}$$