ΘΕΡΜΙΚΕΣ ΜΗΧΑΝΕΣ

1) Μια θερμική μηχανή Carnot λειτουργεί μεταξύ μιας πηγής θερμότητας στα $1000\ K$ και μιας κρύας δεξαμενής στους $300\ K$. Εάν η θερμότητα παρέχεται με ρυθμό $800\ kJ/min$, να βρεθούν (α) η απόδοση της μηχανής και (β) η ισχύς εξόδου της μηχανής σε κιλο-$Watt$.

Λύση:

α) Η απόδοση μιας μηχανής Carnotείναι εξ' ορισμού ίση με:

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{300}{1000} = 0.7$$

δηλαδή 70%. Η ποσότητα Q_2είναι το εξερχόμενο ποσό θερμότητας προς την κρύα δεξαμενή ενώ το Q_1είναι το εισερχόμενο ποσό θερμότητας από την θερμή πηγή (συνήθως καύσιμο). Αντίστοιχα T_2 και T_1 είναι οι θερμοκρασίες της κρύας δεξαμενής και της θερμής πηγής.

β) Η παραπάνω σχέση γράφεται και ως:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{W}{Q_1}$$

όπου W είναι το παραγόμενο έργο της μηχανής. Λύνουμε ως προς Wκαι παίρνουμε ρυθμούς ως προς τον χρόνο tγια να έχουμε

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = \eta \frac{\Delta Q_1}{\Delta t}$$

Από τα δεδομένα $\Delta Q_1/\Delta t = 800\ kJ/min$οπότε

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = 560 \frac{kJ}{min} = 560 \frac{kJ}{60\ s} = 9.33\ kW$$

2) Ένας καινοτόμος τρόπος παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας περιλαμβάνει την αξιοποίηση της γεωθερμικής ενέργειας, δηλαδή της θερμότητας που παράγεται φυσικά σε υπόγεια κοιτάσματα-ως πηγή θερμότητας. Αν ένα τέτοιο κοίτασμα βρίσκεται σε θερμοκρασία $140\,°C$όπου η αντίστοιχη θερμοκρασία του περιβάλλοντος είναι $20\,°C$, βρείτε την θερμική απόδοση ενός εργοστασίου παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας σε αυτή τη θέση το οποίο χρησιμοποιεί κύκλο Carnotμεταξύ του κοιτάσματος και του περιβάλλοντος.

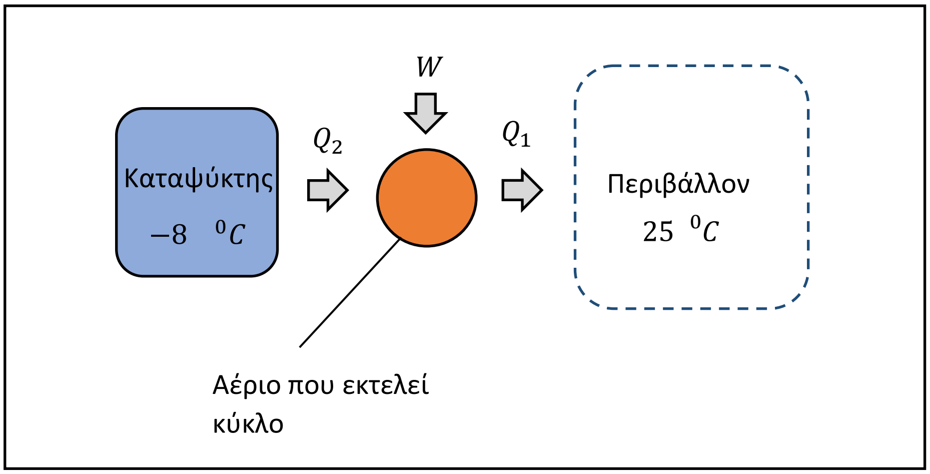
Λύση: Όπως είδαμε στο προηγούμενο πρόβλημα, η απόδοση μιας μηχανής Carnotείναι εξ' ορισμού ίση με:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{20 + 273}{140 + 273} = 0.29$$

δηλαδή 29 %

3) Ένα ψυγείο αφαιρεί θερμότητα από τον ψυχόμενο χώρο με ρυθμό $300\ kJ/min$ για να διατηρήσει τη θερμοκρασία του στους$-8\,°C$. Εάν ο αέρας που περιβάλλει το ψυγείο είναι στους $25\,°C$, να καθορισθεί η ελάχιστη ισχύς που απαιτείται για να λειτουργήσει αυτό το ψυγείο.

Λύση: Η απόδοση μιας μηχανής είναι εξ' ορισμού ίση με τον λόγο της ωφέλιμης ενέργειας προς την δαπανώμενη ενέργεια. Στις ψυκτικές μηχανές, αφαιρείται ένα ποσό θερμότητας Q_2 από μια περιοχή χαμηλής θερμοκρασίας T_2(καταψύκτης) με την βοήθεια μιας μηχανικής αντλίας που παρέχει έργο W και εξάγεται ένα άλλο ποσό Q_1στο περιβάλλον που βρίσκεται σε υψηλότερη θερμοκρασία T_1.



Το ωφέλιμο ποσό ενέργειας είναι το Q_2 ενώ το δαπανώμενο είναι το Wκαι έτσι:

$$\eta = \frac{Q_2}{W}$$

Αυτά τα ποσά ενέργειας αναφέρονται σε ένα θερμοδυναμικό κύκλο ενός αερίου και έτσι η συνολική μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας είναι μηδέν, δηλαδή $\Delta U = 0$. Από τον 1ο θερμοδυναμικό νόμο έχουμε

$$\Delta U = Q - (-W) = Q_2 - Q_1 + W = 0$$

Το έργο είναι αρνητικό επειδή προσφέρεται στο αέριο (θυμηθείτε ότι το έργο ορίζεται ως το έργο που είναι χρήσιμο για τον άνθρωπο). Αντιθέτως τα ποσά θερμότητας ορίζονται σε σχέση με το αέριο και έτσι το Q_1 είναι θετικό γιατί εισέρχεται στο αέριο ενώ το Q_2είναι αρνητικό γιατί εξάγεται προς το περιβάλλον. Συνδυάζοντας έχουμε

$$\eta = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$$

Εάν επιπλέον το αέριο εκτελεί κύκλο Carnot, τότε ο λόγος των ποσών θερμότητας είναι ίσος με τον λόγο των θερμοκρασιών και έτσι:

$$\eta = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα

$$\eta = \frac{-8+273}{(25+273)-(-8+273)} = 8.03$$

Λύνουμε την αρχική έκφραση ως προς το έργο η οποία οδηγεί στην

$$W = \frac{Q_2}{\eta}$$

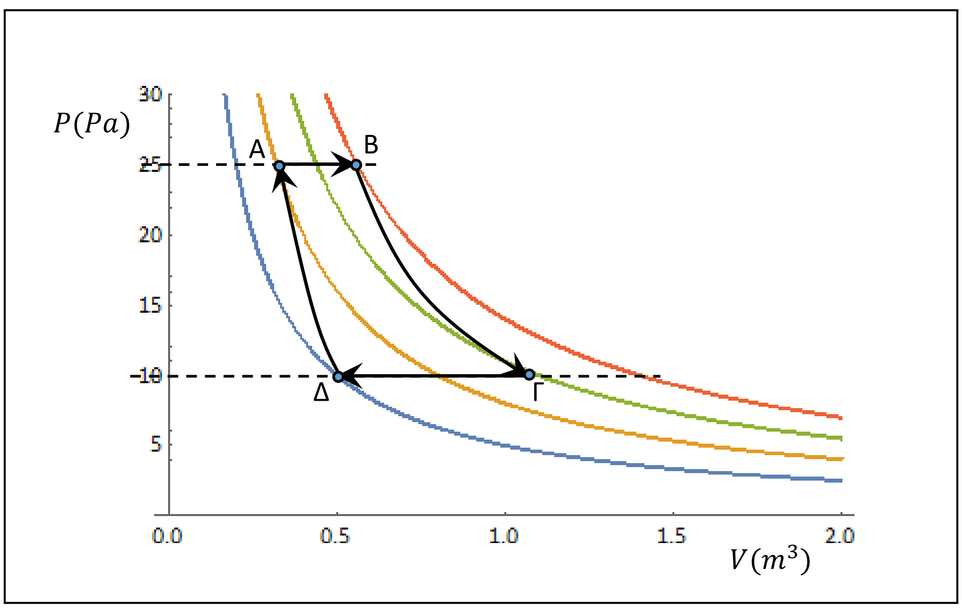
Παίρνοντας χρονικούς ρυθμούς, βρίσκουμε για την ισχύ $p = \Delta W/\Delta t$το εξής αποτέλεσμα

$$p = \frac{1}{\eta}\frac{\Delta Q_2}{\Delta t}$$

Αντικαθιστώντας

$$p = \frac{1}{8.03} 300 \frac{kJ}{min} = \frac{300}{8.03}\frac{kJ}{60s} = 0.623\ kW$$

4) Στο παρακάτω διάγραμμα $P-V$ φαίνονται τέσσερις ισόθερμες με θερμοκρασίες $200.113\ K$, $260\ K$, $292.473\ K$ και $380\ K$, καθώς και ένας θερμοδυναμικός κύκλος ΑΒΓΔ που αποτελείται από δυο ισοβαρείς στα 25 και $10\ Pa$ και δυο αδιαβατικές ΒΓ και ΔΑ μεταξύ των ισόθερμων. Να βρεθεί η απόδοση αυτού του κύκλου ως μηχανής εάν δίνεται το $c_V = 3.3256\ J/mole \cdot C^0$ και ο όγκος στο σημείο Α ίσος με $0.4\ m^3$ (Σημείωση: Η μεγάλη σχετικά ακρίβεια των αριθμών που δίνονται σε αυτό το πρόβλημα είναι απαραίτητη λόγω του ότι η εξίσωση της αδιαβατικής είναι ισχυρά μη-γραμμική λόγω και έτσι τα λάθη στρογγυλοποίησης μπορούν να είναι σχετικώς μεγάλα).



<u>Λύση 1</u>:

Οι τέσσερις ισόθερμες στο σχήμα είναι τοποθετημένες έτσι ώστε η χαμηλότερη να αντιστοιχεί στη χαμηλότερη θερμοκρασία και οι παραπάνω να αντιστοιχούν σε υψηλότερες θερμοκρασίες σε σειρά. Έτσι $T_\Delta = 200.113\ K, T_A = 260\ K, T_\Gamma = 292.473\ K$ και $T_B = 380\ K$

Σε μια μηχανή στη διάρκεια ενός κύκλου δαπανάται ποσό θερμότητας Q_H, αποδίδεται ωφέλιμο έργο W και αποβάλλεται ποσό θερμότητας Q_C. Η απόδοση ορίζεται ως "ωφέλιμη / δαπανώμενη" ενέργεια δηλαδή

$$\eta = \frac{W}{Q_H}$$

Σε ένα κύκλο $\Delta U = 0 => (Q_H - Q_C) - W = 0 => W = Q_H - Q_C$ (τα ποσά θερμότητας λαμβάνονται κατ’ απόλυτη τιμή και για αυτό εμφανίζεται το μείον) και άρα η απόδοση γίνεται:

$$\eta = 1 - \frac{Q_C}{Q_H}$$

(Ο συγκεκριμένος κύκλος δεν είναι Carnot οπότε δεν μπορούμε να γράψουμε μια αντίστοιχη σχέση για τις θερμοκρασίες). Αρκεί λοιπόν να υπολογισθούν τα δυο ποσά θερμότητας. Εφόσον οι δυο από τις τέσσερις μεταβολές του κύκλου είναι αδιαβατικές, ποσά θερμότητας έχουμε μόνο στις άλλες δυο και λόγω υψηλότερης θερμοκρασίας $Q_H = Q_{AB}$ και $Q_C = |Q_{\Gamma\Delta}|$ (όπως προαναφέρθηκε, το εξερχόμενο ποσό θερμότητας το λαμβάνουμε κατ’ απόλυτο τιμή). Δηλαδή στον δεδομένο κύκλο, θερμότητα Q_H μπαίνει μόνο στη διεργασία ΑΒ ενώ στη ΓΔ εξέρχεται θερμότητα Q_C .

Κατ’ αρχάς πρέπει να υπολογίσουμε τον αριθμό των moles. Από την καταστατική εξίσωση στο Α έχουμε:

$$P_A V_A = nRT_A => n = \frac{P_A V_A}{RT_A} = \frac{25 \times 0.4}{8.314 \times 260} = 0.00462612\, moles$$

Αφού η ΑΒ είναι ισόχωρη, τότε θα ισχύει $Q_{AB} = nc_P \Delta T_{AB} = n(C_V + R)(T_B - T_A)$. Αντικαθιστώντας

$$Q_{AB} = 0.00462612 \times (3.3256 + 8.314) \times (380 \ - 260\ ) = 6.46154\, J$$

(Σημείωση: Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε εάν κάναμε χρήση του 1^{ου} νόμου $Q_{AB} = \Delta U_{AB} + W_{AB}$ υπολογίζοντας το ΔU_{AB} από το c_V και το W_AB από τις πιέσεις και τους όγκους, με τους τελευταίους να προκύπτουν από την καταστατική εξίσωση).

Ομοίως στην ΓΔ έχουμε $Q_{\Gamma\Delta} = n(c_V + R)\Delta T_{\Gamma\Delta}$. Αντικαθιστώντας

$$Q_{\Gamma\Delta} = 0.00462612 \times (3.3256 + 8.314) \times (200.113 \ - 292.473\ ) = \ -4.97323\, J$$

Έτσι, κατ’ απόλυτη τιμή το Q_C ισούται με

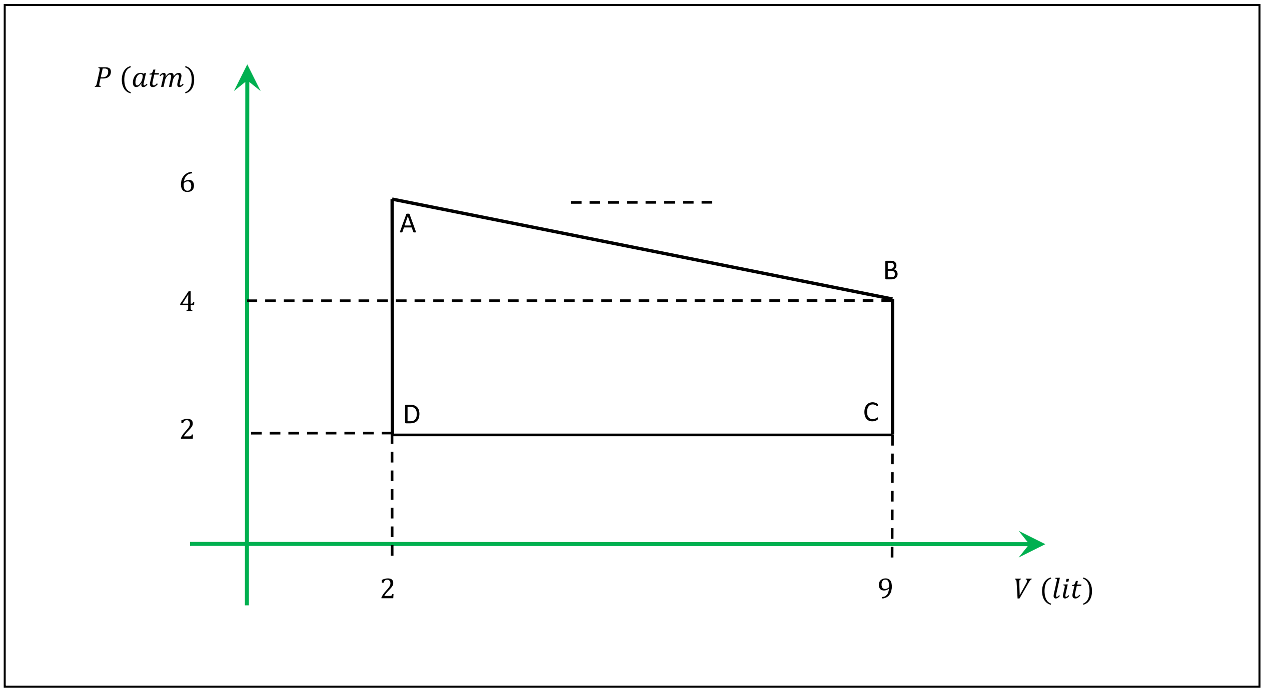
$$Q_C = 4.97323\ J$$

Η απόδοση της μηχανής ισούται με

$$n = \frac{W}{Q_H} = 1 - \frac{Q_C}{Q_H} = 1 - \frac{4.97323}{6.46154} = 0.23$$

δηλαδή 23 %

5) Στο παραπάνω σχήμα απεικονίζεται το διάγραμμα $P-V$ ενός έγκλειστου ιδανικού αερίου με μάζα $25\ g$. Στο σημείο A, το αέριο έχει θερμοκρασία $200\ C^0$. Η τιμή της ειδικής θερμότητας c_V του αερίου είναι $0.15\ cal/gC^0$. Υπολογίστε την απόδοση της θερμικής μηχανής που αναπαριστάνει ο κύκλος.



Λύση:

Πρέπει να βρούμε τις θερμοκρασίες σε όλα τα σημεία, με τη βοήθεια της καταστατικής εξίσωσης αλλά και από το σημείο A του οποίου είναι γνωστή η θερμοκρασία του

$$T_A = 200\ C^0 = 473\ K$$

Στο σημείο A η καταστατική γράφεται ως

$$P_A V_A = nRT_A$$

Στοσημείο B

$$P_B V_B = nRT_B$$

Παίρνοντας τονλόγο

$$\frac{T_B}{T_A} = \frac{P_B V_B}{P_A V_A} => T_B = \frac{P_B V_B}{P_A V_A}(\theta_A + 273) = \frac{36}{12}(200 + 273) = 1419\ K = 1146\ C^0$$

Ομοίως για τα άλλα δυο σημεία C και D:

$$T_C = \frac{P_C V_C}{P_A V_A}(\theta_A + 273) = \frac{18}{12}(200 + 273) = 709.5\ K = 436.5\ C^0$$

$$T_D = \frac{P_D V_D}{P_A V_A}(\theta_A + 273) = \frac{4}{12}(200 + 273) = 157.7\,K = -115.3\,C^0$$

Για τιςεσωτερικέςενέργειεςέχουμε

$$\Delta U_{AB} = mc_V \Delta T = 25 \times 0.15 \times (1146 - 200) = 3547.5\,cal = 14842\,Joules$$

$$\Delta U_{BC} = mc_V \Delta T = 25 \times 0.15 \times (436.5 - 1146) = -2660.6\,cal = -11132\,Joules$$

$$\Delta U_{CD} = mc_V \Delta T = 25 \times 0.15 \times (-115.3\ - 436.5) = -2069.2\,cal = -8657.5\,Joules$$

$$\Delta U_{DA} = mc_V \Delta T = 25 \times 0.15 \times \big(200 - (-115.3)\big) = 1182.3\,cal = 4946.7\,Joules$$

Τα έργα υπολογίζονται εύκολα γιατί είναι μηδέν στις BC και DA, ενώ ισούνται με το εμβαδό στις άλλες δυο. Έτσι στην AB το έργο δίνεται από το εμβαδό του τραπεζίου

$$W_{AB} = \frac{6+4}{2}(9-2) = 35\,atm \cdot lit = 35 \times 101 \times 10^3 \times 10^{-3} Pa \cdot m^3 = 3535 J$$

και στην CD δίνεται από το εμβαδό του παραλληλογράμμου:

$$W_{CD} = 2(2-9) = -14\,atm \cdot lit = -14 \times 101 \times 10^3 \times 10^{-3} Pa \cdot m^3 = -1414 J$$

Οι αντίστοιχες θερμότητες $Q = \Delta U + W$ είναι

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} + W_{AB} = 14842 + 3535 = 18377\,J$$

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC} + 0 = -11132\,J$$

$$Q_{CD} = \Delta U_{CD} + W_{CD} = -8657.5 - 1414 = -10071.5\,J$$

$$Q_{DA} = \Delta U_{DA} + 0 = 4946.7\ J$$

Το συνολικό ποσό θερμότητας που εισήρθε στο σύστημα ήταν

$$Q_{IN} = Q_{AB} + Q_{DA} = 18377 + 4946.7 = 23323.7\,J$$

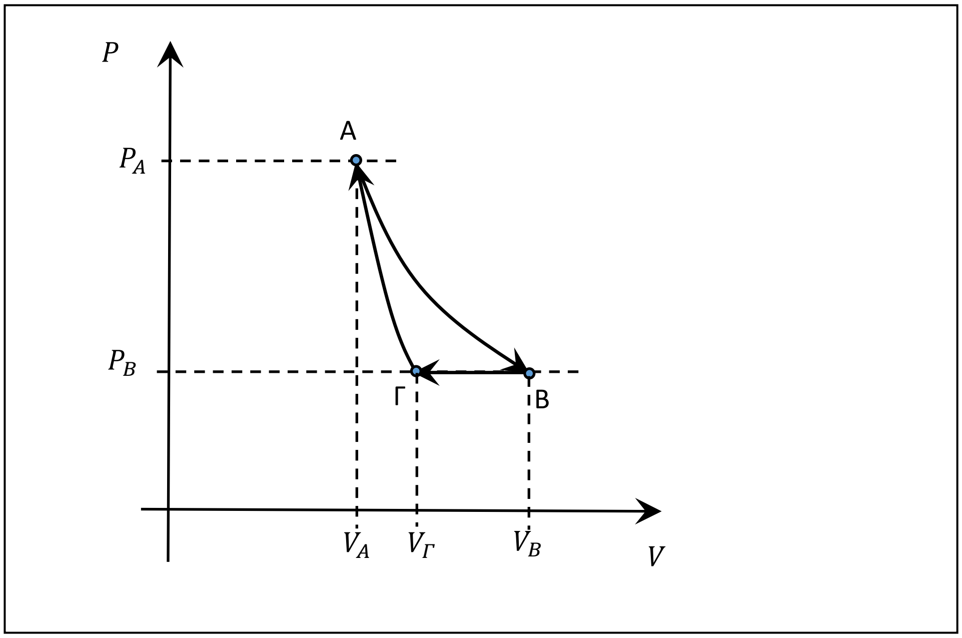
ενώτοσυνολικόέργο

$$W = W_{AB} + W_{CD} = 3535 - 1414 = 2121\,J$$

Επομένως η απόδοση του συστήματος ισούται με

$$n = \frac{W}{Q_{IN}} = \frac{2121}{23323} = 0.09 = 9\%$$

6) Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται ένα θερμοδυναμικός κύκλος που απαρτίζεται από μια ισόθερμη, μια αδιαβατική και μια ισόχωρη διεργασία ενός αερίου με γνωστό c_V. (α) Ταυτοποιήστε τις διαδικασίες (β) Υπολογίστε τα ποσά θερμότητας σε κάθε διεργασία (γ) Υπολογίστε την απόδοση της μηχανής.



Λύση:

α) Η ΒΓ είναι προφανώς η ισοβαρής. Από τις άλλες δυο, η αδιαβατική είναι η πιο απότομη και άρα είναι η ΓΑ που σημαίνει ότι η ΑΒ είναι ισόθερμη.

β) Για τα ποσά θερμότητας έχουμε τα εξής:

Διεργασία ΑΒ: Ισόθερμη Εκτόνωση, εισερχόμενο ποσό θερμότητας $Q_{AB} = ΔU_{AB} + W_{AB}$. Στην ισόθερμη $ΔU_{AB} = 0$ οπότε

$$Q_{AB} = W_{AB} = nRTln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

όπου T είναι η θερμοκρασία της ισόθερμης την οποία μπορούμε να την υπολογίσουμε στο σημείο Β (ή στο σημείο Α από την καταστατική. Έτσι:

$$Q_{AB} = P_B V_B ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

Αυτή η θερμότητα είναι θετική αφού εισέρχεται στο αέριο αλλά για τον άνθρωπο είναι δαπανώμενη, δηλαδή πρέπει να την παρέχει στη μηχανή με κάποια διαδικασία π.χ. καύση.

Διεργασία ΒΓ: Ισοβαρής Ψύξη, εξερχόμενο ποσό θερμότητας $Q_{BΓ} = ΔU_{BΓ} + W_{BΓ}$. Το έργο υπολογίζεται εύκολα από το εμβαδό $W_{BΓ} = P_B(V_Γ - V_B)$και είναι αρνητικό αφού έχουμε συμπίεση. Για την εσωτερική ενέργεια έχουμε

$$ΔU_{BΓ} = nc_V ΔT_{BΓ} = \frac{c_V}{R}(P_Γ V_Γ - P_B V_B) \; = \frac{P_B c_V}{R}(V_Γ - V_B)$$

Έτσι

$$Q_{B\Gamma} = \frac{P_B c_V}{R}(V_\Gamma - V_B) + P_B(V_\Gamma - V_B) = \frac{c_V + R}{R} P_B(V_\Gamma - V_B)$$

Προσέξτε ότι το $c_V + R$ είναι ίσο με c_Pκαι ότι η παραπάνω γράφεται και ως $Q_{B\Gamma} = nc_P \Delta T_{B\Gamma}$ όπως αναμένεται από τον ορισμό του c_P. Αυτή η θερμότητα είναι αρνητική αφού εξέρχεται από το αέριο

Διεργασία ΓΑ: Αδιαβατική συμπίεση, εξ' ορισμού $Q_{\Gamma A} = 0$

γ) Συντελεστής απόδοσης

Για την κυκλική διεργασία ΑΒΓΑ έχουμε: Από τον 1ο νόμο $Q_{AB\Gamma A} = \Delta U_{AB\Gamma A} + W_{AB\Gamma A}$. Όμως εφόσον η εσωτερική ενέργεια είναι καταστατική ποσότητα, στη διάρκεια ενός κύκλου $\Delta U_{AB\Gamma A} = 0$ οπότε

$$W_{AB\Gamma A} = Q_{AB\Gamma A} = Q_{AB} + Q_{B\Gamma} + Q_{\Gamma A} = Q_{AB} + Q_{B\Gamma}$$

Στην αδιαβατική ΓΑ όμως ισχύει εξ' ορισμού ότι $Q_{\Gamma A} = 0$

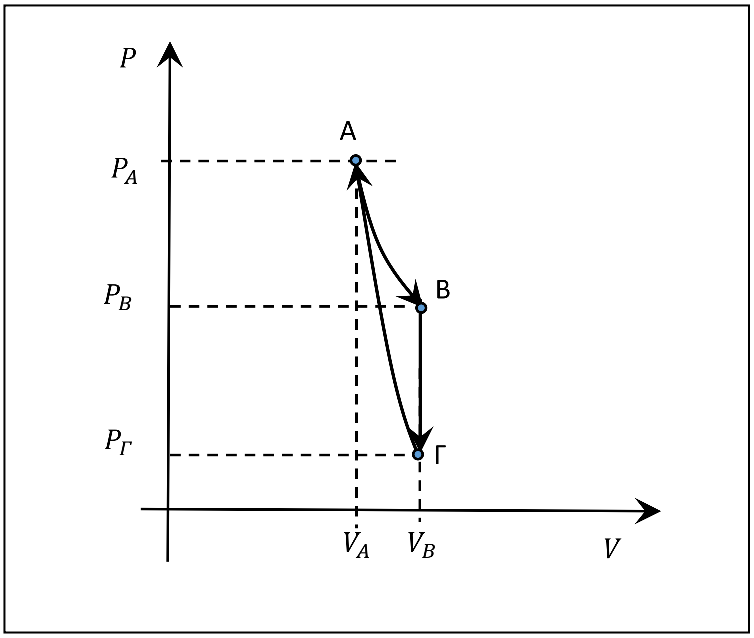
Ο ορισμός της απόδοσης για μια θερμική μηχανή είναι ίσος με τον λόγο του παραγόμενου έργου προς τη δαπανώμενη θερμότητα και έτσι:

$$\eta = \frac{W}{Q_{AB}} = \frac{Q_{AB} + Q_{B\Gamma}}{Q_{AB}} = 1 + \frac{Q_{B\Gamma}}{Q_{AB}}$$

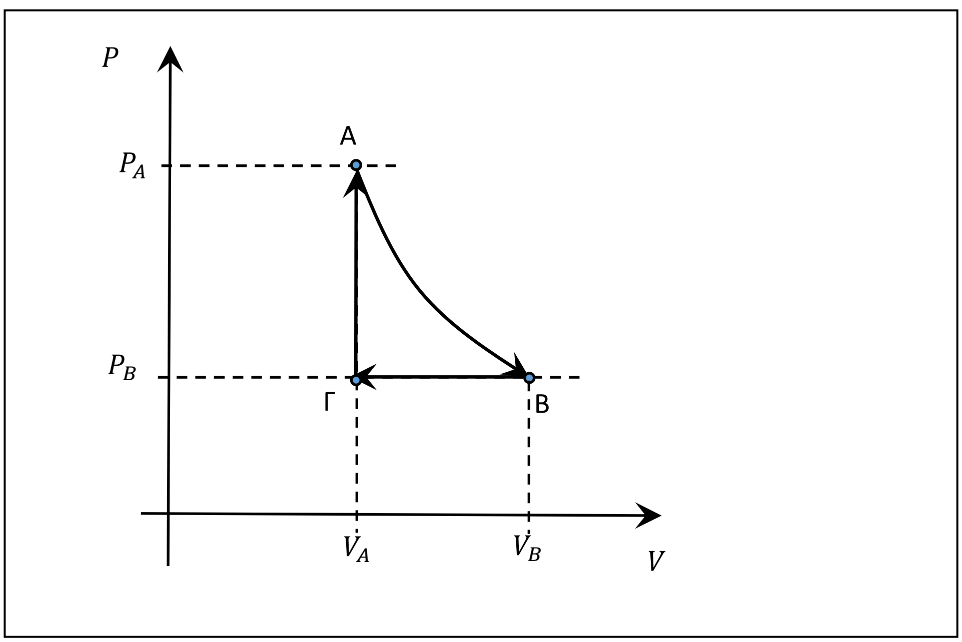
Αντικαθιστώντας

$$\eta = 1 + \frac{(c_V + R)(V_\Gamma - V_B)}{RV_B ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)}$$

7) Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται ένα θερμοδυναμικός κύκλος ενός διατομικού αερίου που απαρτίζεται από μια ισόθερμη, μια αδιαβατική και μια ισοβαρή διεργασία. (α) Ταυτοποιήστε τις διαδικασίες (β) Υπολογίστε τα ποσά θερμότητας σε κάθε διεργασία (γ) Υπολογίστε την απόδοση της μηχανής.



8) Να γίνει το ίδιο για τον παρακάτω κύκλο ενός μονατομικού αερίου ο οποίος αποτελείται από μια αδιαβατική, μια ισόχωρη και μια ισοβαρή διεργασία.

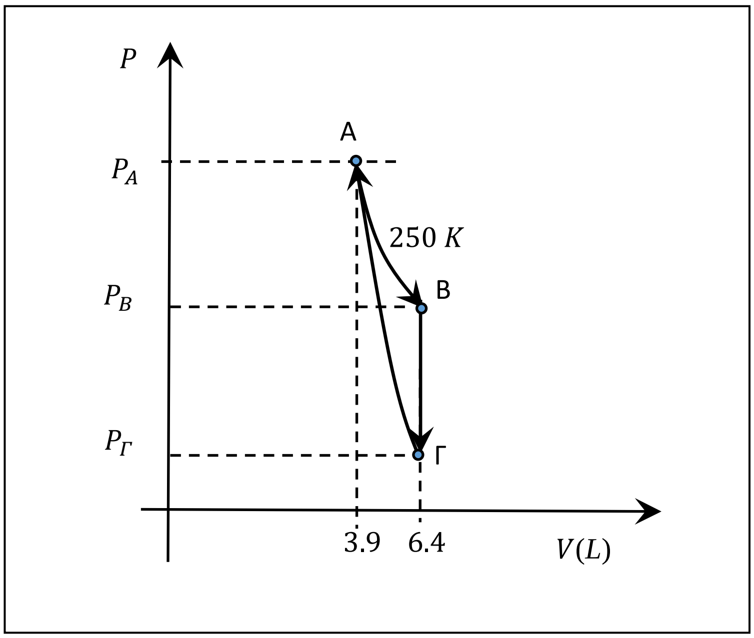


9) Ένα διατομικό ιδανικό αέριο χρησιμοποιείται ως η ουσία για έναν κύκλο μιας θερμικής μηχανής η οποία αποτελείται από τις εξής τρεις διεργασίες:Αδιαβατική συμπίεσηαπόόγκο $6.40\ L$ σε $3.90\ L$, ισόθερμη εκτόνωση στους $250\ K$καιισόχωρη ψύξη. Εάν τα αέριο αποτελείται από9.80 γραμμομόρια:

(α) Σχεδιάστε τον κύκλο σε διάγραμμα $P-V$. (β) βρείτε το εισερχόμενο ποσό θερμότητας και το παραγόμενο έργο σε κάθε διεργασία. (γ) Επαληθεύστε ότι το συνολικό ποσό της εισερχόμενης θερμότητας ισούται με το συνολικό παραγόμενο έργο (δ) Υπολογίστε την απόδοση της μηχανής (ε) Υπολογίστε την αντίστοιχη απόδοση μιας μηχανής Carnotπου εργάζεται μεταξύ των δυο ακραίων θερμοκρασιών της παρούσης άσκησης. Ποια από τις δυο αποδόσεις είναι μεγαλύτερη και γιατί; (στ) Υπολογίστε τη συνολική μεταβολή της εντροπίας κατά τη διάρκεια ενός κύκλου και αποφανθείτε εάν ο κύκλος είναι αντιστρεπτός.

<u>Λύση</u>:

α) Βάσει των δεδομένων, έχουμε τον εξής κύκλο:



Από την καταστατική μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιέσεις P_AκαιP_B:

$$P_A = \frac{nRT}{V_A} = \frac{9.8 \times 8.314 \times 250}{3.9 \times 10^{-3}} = 5.22\ MPa$$

$$P_B = \frac{nRT}{V_B} = \frac{9.8 \times 8.314 \times 250}{6.4 \times 10^{-3}} = 3.18\ MPa$$

Αντιθέτως, από την εξίσωση της αδιαβατικής μπορούμε να υπολογίσουμε το $P_Γ$. Για διατομικό αέριο $c_V = 5R/2$, $c_P = c_V + R = 7R/2$και $\gamma = c_P/c_V = 1.4$. Έτσι:

$$P_Γ {V_Γ}^{\gamma} = P_A {V_A}^{\gamma} => P_Γ = \frac{{V_A}^{\gamma}}{{V_\gamma}^{\gamma}} P_Γ = 5.22 \left(\frac{3.9}{6.4}\right)^{1.4} = 2.61\ MPa$$

Η θερμοκρασία στο σημείο Γ ισούται με

$$T_Γ = \frac{P_Γ V_Γ}{nR} = \frac{2.61 \times 10^{6} \times 6.4 \times 10^{-3}}{9.8 \times 8.314} = 205\ K$$

β)

Ισόθερμη ΑΒ: Από τον 1ο θερμοδυναμικό νόμο

$$\Delta U_{AB} = Q_{AB} - W_{AB} = 0$$

Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας ενός ιδανικού αερίου είναι μηδέν επάνω σε μια ισόθερμη. Έτσι

$$Q_{AB} = W_{AB} = nRTln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = 9.8 \times 8.314 \times 250 \times ln\left(\frac{6.4}{3.9}\right) = 10089\,J$$

Ισόχωρη ΒΓ: Από τον 1ο θερμοδυναμικό νόμο

$$\Delta U_{B\Gamma} = Q_{B\Gamma} - W_{B\Gamma} = Q_{B\Gamma}$$

Το έργο είναι μηδέν σε μια ισόχωρη. Έτσι

$$Q_{B\Gamma} = \Delta U_{B\Gamma} = nc_V(T_\Gamma - T_B) = \frac{5}{2}nR(T_\Gamma - T_B)$$

Αντικαθιστώντας

$$Q_{B\Gamma} = \frac{5}{2}9.8 \times 8.314(205 - 250) = -9166\,J$$

ΑδιαβατικήΓΑ: Από τον 1ο θερμοδυναμικό νόμο

$$\Delta U_{\Gamma A} = Q_{\Gamma A} - W_{\Gamma A} = -W_{\Gamma A}$$

Η θερμότητα είναι μηδέν σε μια αδιαβατική. Έτσι

$$W_{\Gamma A} = -\Delta U_{\Gamma A} = nc_V(T_A - T_\Gamma) = -\frac{5}{2}nR(T_A - T_\Gamma) = -9166\,J$$

γ) Η συνολική θερμότητα και το συνολικό έργο ισούνται με:

$$Q = Q_{AB} + Q_{B\Gamma} + Q_{\Gamma A} = 10089 - 9166 + 0 = 923\,J$$

$$W = W_{AB} + W_{B\Gamma} + W_{\Gamma A} = 10089 + 0 - 9166 = 923\,J$$

Όντως οι δυο ποσότητες είναι ίσες. Αυτό είναι απόρροια του 1ου νόμου αφού σε ένα κύκλο $\Delta U = 0$.

δ) Ο ορισμός της απόδοσης για μια θερμική μηχανή είναι ίσος με τον λόγο του παραγόμενου έργου προς τη δαπανώμενη θερμότητα και έτσι:

$$\eta = \frac{W}{Q_{AB}} = \frac{923}{10089} = 0.091$$

δηλαδή 9.1 %.

ε) Οι δυο ακραίες θερμοκρασίες είναι οι $250\,K$ και $205\,K$ και επομένως η αντίστοιχη απόδοση ενός κύκλου Carnotείναι ίσος με

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{205}{250} = 0.18$$

δηλαδή 18 %.

στ) Τη μεταβολή της εντροπίας για την κάθε διεργασία ξεχωριστά μπορούμε να την υπολογίσουμε από το διαφορικό της εντροπίας που είναι το εξής:

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

Έτσι έχουμε:

<u>Ισόθερμη ΑΒ</u>: Εάν η θερμοκρασία T είναι σταθερή τότε

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\int_A^B dQ = \frac{Q_{AB}}{T} = \frac{10089}{250} = 40.36\, J/K$$

<u>Ισόχωρη ΒΓ</u>: Το ποσό θερμότητας σε μια ισόχωρη δίνεται από την

$$dQ = nc_V dT$$

$$\Delta S_{B\Gamma} = \int_B^\Gamma \frac{dQ}{T} = \int_B^\Gamma \frac{nc_V dT}{T} = nc_V \int_B^\Gamma \frac{dT}{T} = nc_V ln\left(\frac{T_\Gamma}{T_B}\right) = \frac{5}{2} nRln\left(\frac{T_\Gamma}{T_B}\right) = -40.42\, J/K$$

<u>ΑδιαβατικήΓΑ</u>: Εξ’ ορισμού στην αδιαβατική $dQ = 0$ οπότε και $\Delta S_{\Gamma A} = 0$

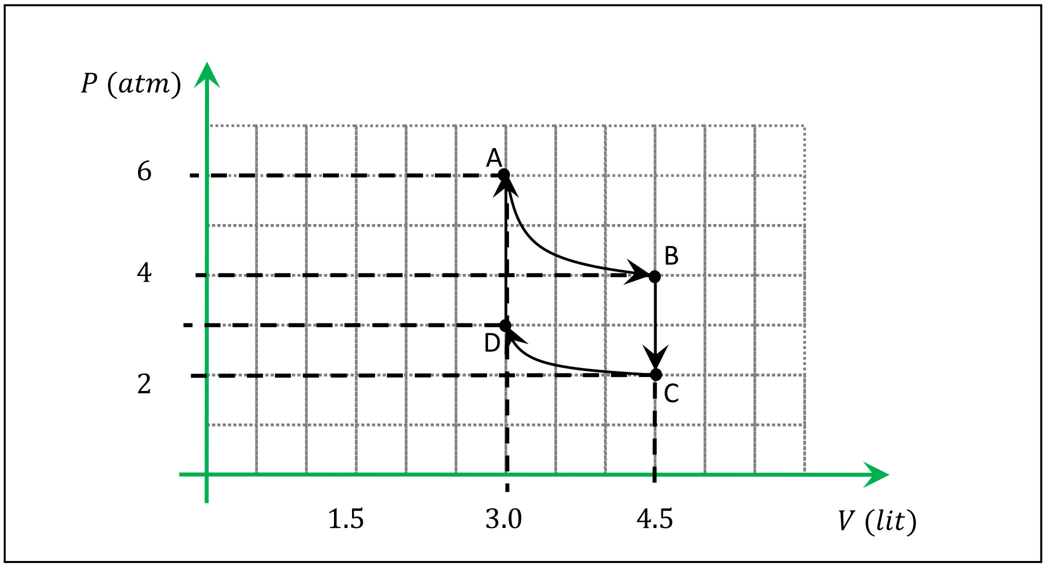
Η συνολική μεταβολή της εντροπίας είναι ίση με

$$\Delta S = \Delta S_{AB} + \Delta S_{B\Gamma} + \Delta S_{\Gamma A} = 40.36 - 40.42 = -0.06\, J/K$$

Αφού η συνολική μεταβολή είναι διάφορη του μηδενός οκύκλος δεν είναι αντιστρεπτός.

10) Στο παραπάνω σχήμα απεικονίζεται το διάγραμμα $P - V$ ενός έγκλειστου ιδανικού αερίου. Οι τιμές P, V στις τέσσερις κορυφές είναι ακέραιοι ή ημιακέραιοι και ίσες με τις τιμές που φαίνονται στους άξονες. Στο σημείο Α, το αέριο έχει θερμοκρασία 257 C^0 και οι καμπύλες AB και CD είναι ισόθερμες. Η τιμή της ειδικής γραμμομοριακή θερμότητας c_V του αερίου είναι ίση με $0.25\, cal/mole \cdot C^0$. Υπολογίστε τα εξής:

α) Την εσωτερική ενέργεια του αερίου σε κάθε σημείο
β) Το έργο σε καθεμία από τις τέσσερις διεργασίες που απαρτίζουν τον κύκλο
γ) Τα ποσά θερμότητας που ανταλλάσονται σε καθεμία από τις τέσσερις διεργασίες που απαρτίζουν τον κύκλο
δ) Το συνολικό έργο που παρήγαγε το αέριο και το συνολικό ποσό θερμότητας που απορρόφησε κατά τη διάρκεια του κύκλου
ε) Την απόδοση του κύκλου.



Λύση:

Πρέπει να βρούμε τις θερμοκρασίες σε όλα τα σημεία, με τη βοήθεια της καταστατικής εξίσωσης αλλά και από το σημείο A του οποίου είναι γνωστή η θερμοκρασία του

$$T_A = 257\ C^0 = 530\ K$$

Αφού η AB είναι ισόθερμη τότε

$$T_B = T_A = 257\ C^0 = 530\ K$$

Η BC είναι ισόχωρη και άρα παίρνοντας τον λόγο

$$\frac{T_C}{T_B} = \frac{P_C V_C}{P_B V_B} = \frac{P_C}{P_B} => T_C = \frac{P_C}{P_B} T_B = \frac{2}{4} 530\ = 265\ K = -8\ C^0$$

Αφού η CD είναι ισόθερμη τότε

$$T_D = T_C = 265\ K = -8\ C^0$$

Επίσης μπορούμε να υπολογίσουμε και τον αριθμό των γραμμομορίων του αερίου από ένα από τα σημεία, π.χ. στο σημείο A από την καταστατική έχουμε

$$n = \frac{P_A V_A}{R T_A}$$

Χρειάζεται όμως εδώ λίγη προσοχή με τις μονάδες επειδή τα δεδομένα της πίεσης είναι σε $atm = 101\ kPa$ ενώ του όγκου σε $lit = 10^{-3}\ m^3$. Έτσι:

$$n = \frac{P_A V_A}{R T_A} = \frac{6 \times 101 \times 10^3 \times 3 \times 10^{-3}}{8.31 \times 530} = 0.412\ moles$$

	A	B	C	D
$P\ (atm)$	6	4	2	3

$V\ (lit)$	3	4.5	4.5	3
$T\ (K)$	530	530	265	265

Τώρα που έχουμε όλα τα παραπάνω στοιχεία, μπορούμε να απαντήσουμε στις ερωτήσεις του προβλήματος

α) Η εσωτερική ενέργεια ενός ιδανικού αερίου δίνεται από την σχέση

$$U = nc_V T$$

Μπορούμε να μετατρέψουμε το δεδομένο $c_V = 0.25\ cal/mole \cdot C^0$ χρησιμοποιώντας την αναλογία $1\ cal = 4.18\ J$ ώστε η απάντηση να είναι σε $Joules$. Η μετατροπή δίνει

$$c_V = \ 1.045\ J/mole \cdot C^0$$

Έτσι έχουμε για τις αντίστοιχες εσωτερικές ενέργειες στα σημεία A και B:

$$U_A = U_B = 228.5\ J$$

σημεία C και D:

$$U_C = U_D = 114.2\ J$$

β) Ως γνωστό το έργο ισόχωρης είναι μηδέν οπότε

$$W_{BC} = W_{DA} = 0$$

Για τις ισόθερμες ισχύει

$$W_{AB} = nRT_A ln(V_B/V_A) = 737.1\ J$$

και

$$W_{CD} = nRT_C ln(V_D/V_C) = -368.61\ J$$

γ) Τα ποσά θερμότητας υπολογίζονται από τον 1^{ο} θερμοδυναμικό νόμο

$$\Delta U = Q - W$$

Έτσι έχουμε για τις διάφορες διεργασίες:

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} + W_{AB} = U_B - U_A + W_{AB} = 0 + W_{AB} = 737.1\ J$$

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC} + W_{BC} = \Delta U_{BC} + 0 = U_C - U_B = 114.2 - 228.5 = -114.2\ J$$

$$Q_{CD} = \Delta U_{CD} + W_{CD} = U_C - U_D + W_{CD} = 0 + W_{CD} = -368.6\ J$$

$$Q_{DA} = \Delta U_{DA} + W_{DA} = \Delta U_{DA} + 0 = U_A - U_D = 228.5 - 114.2 = 114.2\ J$$

δ) Το συνολικό έργο είναι ίσο με

$$W = W_{AB} + W_{CD} = 737.1 - 368.6 = \ 368.6\ J$$

Το συνολικό ποσό θερμότητας θα το υπολογίσουμε σε δυο μέρη (επειδή χρειαζόμαστε τα επιμέρους αποτελέσματα στο επόμενη ερώτημα).

Στις διαδρομές DA και AB και BC εισέρχεται ποσό θερμότητας ίσο με

$$Q_{DA} + Q_{AB} = 114.2 + 737.1 = \ 851.3\,J$$

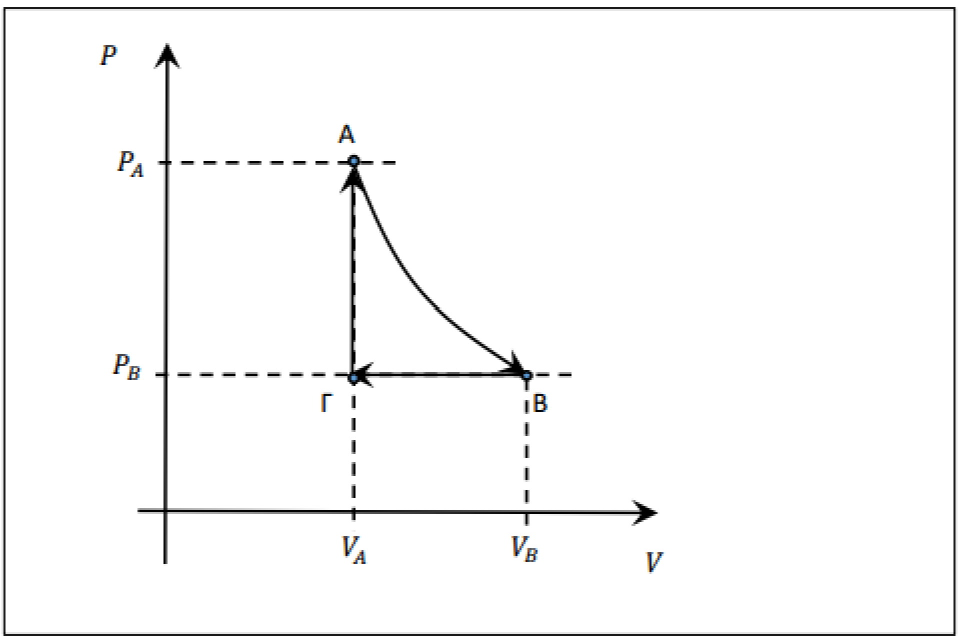
Αντίθετα στις διαδρομές BC και CD το αέριο χάνει θερμότητα (είναι αρνητική) ίση με

$$Q_{BC} + Q_{CD} = -114.2 - 368.6 = \ -482.8\,J$$

ε) Η απόδοση της μηχανής η είναι εξ' ορισμού το ωφέλιμο ποσό ενέργειας, που είναι φυσικά το έργο, δια το δαπανώμενο που είναι η θερμότητα που πρέπει να προσφερθεί στο αέριο για να εκτελέσει τον κύκλο. Έτσι

$$n = \frac{W}{Q_{DA} + Q_{AB}} = \frac{368.6}{851.3} = 0.43 = 43\ \%$$

11) Να υπολογιστεί η απόδοση του παρακάτω διατομικού αερίου εάν δίνονται ότι στο σημείο Α ισχύει $V_A = 2\ m^3$ και $P_A = 6.6\ atm$, ότι ο όγκος στο σημείο Β είναι διπλάσιος από ότι ο όγκος στο σημείο Γ και ότι μια από τις διεργασίες είναι αδιαβατική



Λύση :

Η απόδοση μιας μηχανής ισούται με τον λόγο της ωφέλιμης ενέργειας προς την δαπανώμενη ενέργεια. Η πρώτη είναι το συνολικό έργο W ενώ η δεύτερη είναι το εισερχόμενο ποσό θερμότητας Q_1.

$$\eta = \frac{W}{Q_1}$$

Για διατομικό αέριο $q = 5$ βαθμοί ελευθερίας και έτσι

$$c_V = \frac{q}{2}R = \frac{5}{2}R$$

$$c_P = c_V + R = \frac{7}{2}R$$

Έτσι

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{7}{5} = 1.4$$

Για τον όγκο στο Γ έχουμε $V_\Gamma = 2V_A = 4\, m^3$ και αφού ο όγκος στο Α είναι ίσος με τον όγκο στο Γ τότε θα ισχύει $V_A = 4\, m^3$. Από την εξίσωση της αδιαβατικής

$$P_A {V_A}^\gamma = P_B {V_B}^\gamma$$

$$P_A = P_B \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^\gamma = 2^\gamma P_B = 2^{1.4} \times 2.5 = 6.6\, m^3$$

Έτσι σε κάθε διεργασία έχουμε:

Αδιαβατική <u>ΑΒ</u>:

Η θερμότητα $Q_{AB} = 0$ εξ' ορισμού. Το έργο της αδιαβατικής ισούται με

$$W_{B\Gamma} = \frac{1}{1-\gamma}(P_B V_B - P_A V_A) = \frac{1}{1-1.4}(4 \times 2.5 - 2 \times 6.6) = 8\, Joule$$

Ισοβαρής <u>ΒΓ</u>:

Έργο $W_{B\Gamma} = P(V_\Gamma - V_B) = 2.5 \times (2-4) = -5\, J$ όπου P η κοινή πίεση στα Β και Γ. Τη θερμότητα μπορούμε να την υπολογίσουμε από την

$$Q_{B\Gamma} = nc_P(T_\Gamma - T_B) = \frac{7}{2}nR(T_\Gamma - T_B) = \frac{7}{2}(P_\Gamma V_\Gamma - P_B V_B)$$

αλλά δεν μας χρειάζεται αφού αυτό είναι το αποβαλλόμενο ποσό θερμότητας και δεν εμφανίζεται στον παραπάνω τύπο του η.

Ισόχωρη <u>ΓΑ</u>:

Ως γνωστόν το έργο της ισόχωρης είναι μηδέν δηλαδή $W_{\Gamma A} = 0$. Τη θερμότητα μπορούμε να την υπολογίσουμε από την

$$Q_{\Gamma A} = nc_V(T_A - T_\Gamma) = \frac{5}{2}nR(T_A - T_\Gamma) = \frac{5}{2}(P_A V_A - P_\Gamma V_\Gamma) = \frac{5}{2}(P_A - P_\Gamma)V$$

όπου V ο κοινός όγκος των σημείων Α και Γ. Το $Q_{\Gamma A}$ είναι στην ουσία το εισερχόμενο ποσό θερμότητας Q_1. Αντικαθιστώντας

$$Q_1 = \frac{5}{2}(6.6 - 2.5) \times 2 = 20.5\,J$$

Επομένως η απόδοση του δεδομένου θερμικού κύκλου είναι ίση με

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{W_{AB} + W_{BA}}{Q_1} = \frac{8 - 5}{20.5} \approx 0.15$$

δηλαδή 15%.