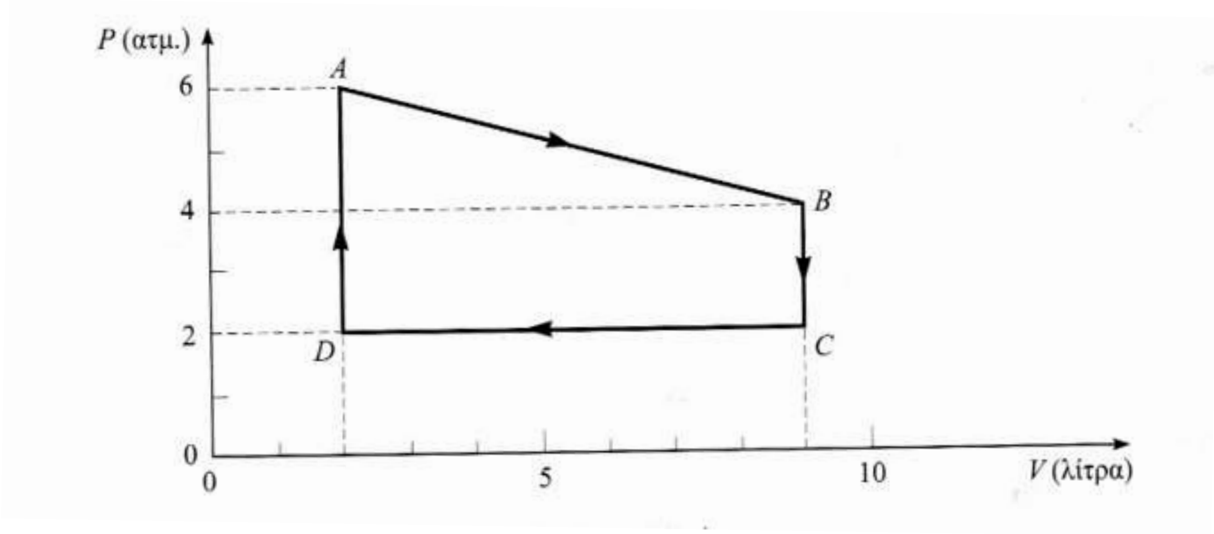
1) Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται το διάγραμμα P-V ενός έγκλειστου ιδανικού αερίου με μάζα $2\ g$. Στο σημείο A το αέριο έχει θερμοκρασία $450\ \mathrm{C}^0$. Η τιμή της ειδικής θερμότητας του αερίου είναι $c_V = 0.42\ cal/gC^0$. Υπολογίστε τη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας, το έργο και την θερμότητα για το τμήμα του κύκλου από το A στο B.



Λύση: Στο σημείο A έχουμε $P_A = 6\ atm = 6 \times 101\ kPa = 606\ kPa$ και $V_A = 2\ l = 0.002\ m^3$ και $T_A = 450\ C^0 = 450 + 273 = 723\ K$. Από την καταστατική εξίσωση μπορούμε να βρούμε την θερμοκρασία στο σημείο B:

$$\frac{nRT_B}{nRT_A} = \frac{P_B V_B}{P_A V_A} => T_B = 723\frac{4 \times 9}{2 \times 6} = 2169\ K$$

Μεταβολή εσωτερικής ενέργειας (προσέξτε τις μονάδες):

$$\Delta U = mc_V \Delta T = 2 \times 0.42 \times (2169 - 723\ ) = 1210\ cal = 5058\ J$$

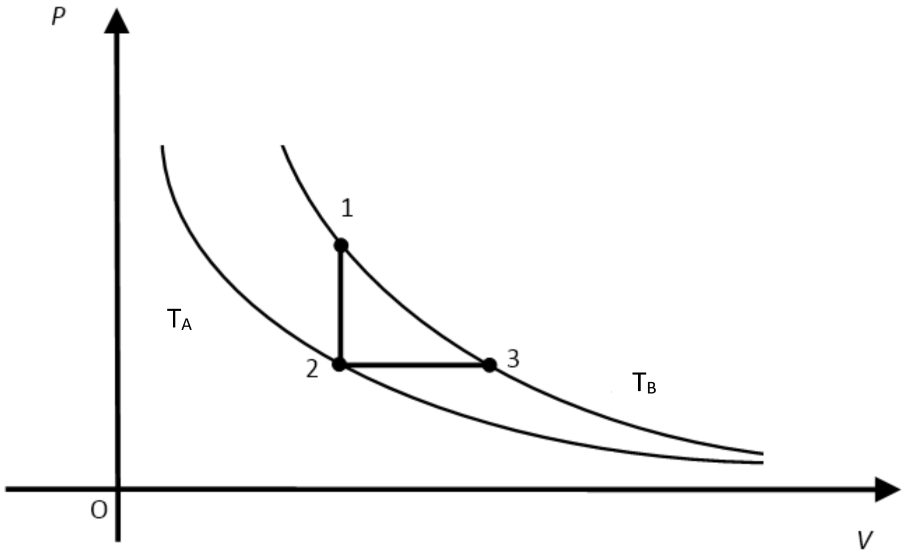
Το έργο υπολογίζεται εύκολα από το εμβαδό της καμπύλης

$$W = \frac{1}{2}(6+2)(9-2) = 28\ atm\ L = 2828\ Pa \cdot m^3 = 2828\ J$$

Από τον 1^o θερμοδυναμικό νόμο

$$Q = \Delta U + W = 5058 + 2828 = 7886\ J$$

2) Στο παρακάτω διάγραμμα P-V ενός ιδανικού αερίου, τα σημεία 1, 2 και 3 βρίσκονται επάνω σε δυο ισόθερμες με θερμοκρασίες $T_A = 3^0$ και $T_B = T_A + 250^0 C$. Εάν το αέριο περιέχει $n = 2.5$ γραμμομόρια, να υπολογισθούν α) Το ποσό θερμότητας Q_{123} για την διαδρομή 1 → 2 → 3, και β) Το έργο W_{1231} της κλειστής διαδρομής 1 → 2 → 3 → 1.



Λύση:

α) Η διαδρομή 123 ξεκινάει και σταματάει στην ίδια θερμοκρασία

$$\Delta U_{123} = nc_V \Delta T = 0$$

Από τον 1ο θερμοδυναμικό νόμο

$$Q_{123} = \Delta U_{123} + W_{123} = W_{123}$$

Το έργο στην 12 είναι μηδέν ενώ στην 23

$$W_{23} = P(V_3 - V_2) = PV_3 - PV_2$$

Από την καταστατική

$$W_{23} = nRT_3 - nRT_2 = nR\Delta T = 2.5 \times 8.31 \times 250 = 5193\, J$$

Επομένως

$$Q_{123} = W_{12} + W_{23} = 0 + 5193 = 5193\, J$$

Εναλλακτική λύση, η 12 είναι ισόχωρη 12 και άρα $Q_{12} = nc_V\Delta T_{12}$ ενώ η 23 είναι ισοβαρής και επομένως $Q_{23} = nc_P\Delta T_{23} = -nc_P\Delta T_{12}$ (το μείον είναι επειδή στην πρώτη περίπτωση έχουμε $T_B \to T_A$ ενώ στην δεύτερη $T_A \to T_B$). Έτσι συνολικά

$$Q_{123} = Q_{12} + Q_{23} = nc_V\Delta T_{12} - nc_P\Delta T_{12} = -n(c_P - c_V)\Delta T_{12} = -nR\Delta T_{12} = nR(T_B - T_A)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον γνωστό τύπο $R = c_P - c_V$. Αντικαθιστώντας $Q_{123} = 2.5 \times 8.31 \times 250$ ή

$$Q_{123} = 5193\, J$$

β) Για την κλειστή διαδρομή 1231 πρέπει να προσθέσουμε και το έργο της ισόθερμης

$$W_{31} = nRT_B ln\left(\frac{V_1}{V_3}\right) = nRT_B ln\left(\frac{V_2}{V_3}\right)$$

Από την καταστατική εξίσωση στην ισοβαρή

$$\frac{PV_2}{PV_3} = \frac{nRT_A}{nRT_B} => \frac{V_2}{V_3} = \frac{T_A}{T_B}$$

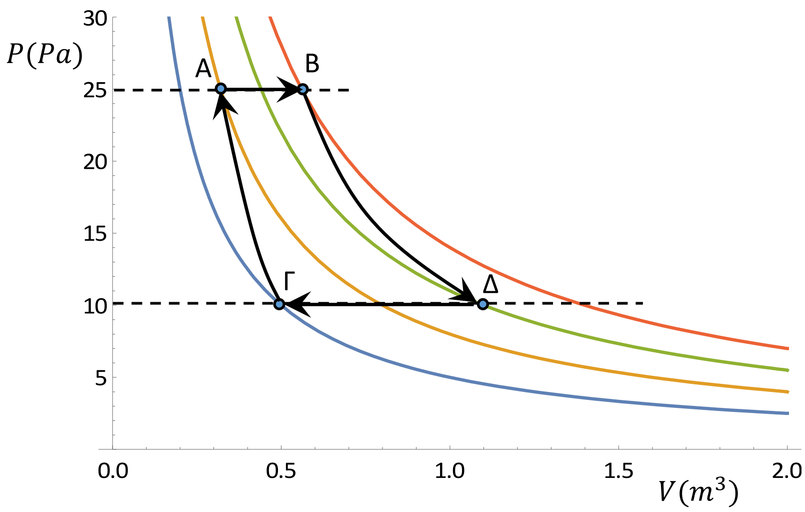
Οπότε

$$W_{31} = nRT_B ln\left(\frac{T_A}{T_B}\right) = 2.5 \times 8.31 \times (253 + 273) \ln\left(\frac{3 + 273}{253 + 273}\right) = -7047\, J$$

Συνολικό έργο

$$W_{123} + W_{31} = 5193 - 7047 = -1854\, J$$

3) Στο παρακάτω διάγραμμα $P - V$ φαίνονται τέσσερις ισόθερμες με θερμοκρασίες T, $1.2T$, $1.5T$ και $1.8T$ όπου $T = 200\, K$, καθώς και ένας θερμοδυναμικός κύκλος ΑΒΔΓ που αποτελείται από δυο ισοβαρείς στα 25 και $10\, Pa$ και δυο αδιαβατικές ΒΔ και ΓΑ μεταξύ των ισόθερμων. Εάν ο όγκος στο σημείο Α ίσος με $0.4\, m^3$ και $\gamma = 1.248$ να βρεθούν α) Το ποσό θερμότητας β) Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας και γ) Το έργο για κάθε διαδρομή χωριστά αλλά και για όλο τον κύκλο.



<u>Λύση 1</u>: Οι τέσσερις ισόθερμες είναι οι $200\, K$, $240\, K$, $300\, K$ και $360\, K$.

Κατ' αρχάς πρέπει να υπολογίσουμε τον αριθμό των γραμμομορίων. Από την καταστατική εξίσωση $P_A V_A = nRT_A$ στο Α έχουμε:

$$n = \frac{P_A V_A}{RT_A} = \frac{25 \times 0.4}{8.31 \times 1.2 \times 200} = 0.005\, mole$$

Στην ΑΒ έχουμε

$$\Delta U_{AB} = nc_V \Delta T$$

Όμως

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V}$$

οπότε

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1} = \frac{8.314}{1.248 - 1} = 33.5\ \mathrm{J/mol \cdot K}$$

Έτσι

$$\Delta U_{AB} = nC_V \Delta T = 0.005 \times 33.5\ \times (240 - 200) = 6.70\ \mathrm{J}$$

Το αντίστοιχο έργο ισόχωρης είναι

$$W_{AB} = P(V_B - V_A) = PV_B - PV_A = nRT_B - nRT_A = 0.005 \times 8.31 \times (240 - 200) = 1.67\ J$$

Έτσι

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} + W_{AB} = 6.70 + 1.67 = 8.37\ J$$

Στο σημείο B μπορούμε εύκολα από την καταστατική να βρούμε τον όγκο (η θερμοκρασία του είναι η υψηλότερη από τις 4 ισόθερμες, δείτε το σχήμα)

$$V_B = \frac{nRT_B}{P_B} = \frac{0.005 \times 8.314 \times 360}{25} = 0.6\ m^3$$

Ομοίως στα σημεία Γ (η θερμοκρασία του είναι η χαμηλότερη) και Δ

$$V_\Gamma = \frac{nRT_\Gamma}{P_\Gamma} = \frac{0.005 \times 8.314 \times 200}{10} = 0.83\ m^3$$

$$V_\Delta = \frac{nRT_\Delta}{P_\Delta} = \frac{0.005 \times 8.314 \times 300}{10} = 1.25\ m^3$$

Στην αδιαβατική ΒΔ εξ 'ορισμού $Q_{B\Delta} = 0$ ενώ από τον 1° νόμο

$$W_{B\Delta} = -\Delta U_{B\Delta} = -nc_V \Delta T = -0.005 \times 33.5\ \times (300 - 360) = 10.0\ \mathrm{J}$$

Ομοίως στην ΔΓ έχουμε

$$\Delta U_{\Delta\Gamma} = nc_V \Delta T = 0.005 \times 33.5 \times (200 - 300) = -16.7\ \mathrm{J}$$

$$W_{\Delta\Gamma} = PV_\Gamma - PV_\Delta = nRT_\Gamma - nRT_\Delta = 0.005 \times 8.31 \times (200 - 320) = -5.00\ J$$