

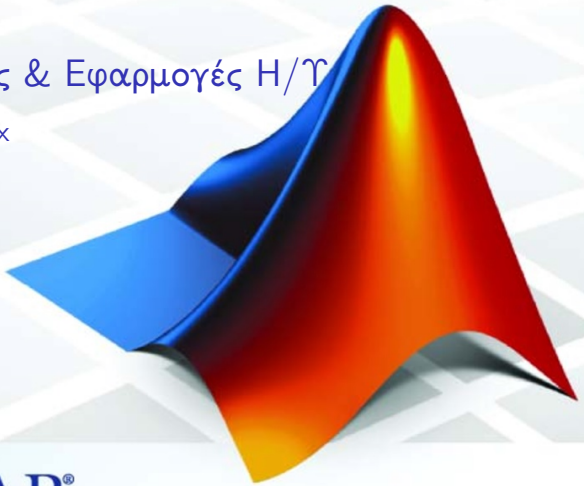
Προγραμματισμός & Εφαρμογές Η/Υ

Symbolic Math Toolbox

Π. Οικονόμου

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών

2020–2021



MATLAB[®]

- Symbolic Math Toolbox
 - ορισμός συμβολικών μεταβλητών
 - διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός
 - απλοποίηση μαθηματικών σχέσεων
 - επίλυση εξισώσεων
 - γραφικές παραστράσεις
- MuPAD

Symbolic Math Toolbox

Το Symbolic Math Toolbox παρέχει εντολές που επιτρέπουν την χρήση συμβολικών μαθηματικών εκφράσεων για την

- παραγωγή και ολοκλήρωση συναρτήσεων
- απλοποίηση μαθηματικών σχέσεων
- επίλυση εξισώσεων
- ...

Το Symbolic Math Toolbox περιλαμβάνει και τη γλώσσα MuPAD, η οποία έχει βελτιστοποιηθεί για το χειρισμό και την επεξεργασία συμβολικών μαθηματικών εκφράσεων.

syms

Η δήλωση μιας συμβολικής μεταβλητής γίνεται με την εντολή `syms`.

Για παράδειγμα, η εντολή

```
>> syms x y
```

δημιουργεί τις συμβολικές μεταβλητές x και y , ενώ η εντολή

```
>> z=x^(1/y)
```

δημιουργεί την συμβολική μεταβλητή z από τις μεταβλητές x και y .

Ένας άλλος τρόπος για να δηλώσουμε μια συμβολική μεταβλητή στο MATLAB είναι ακόλουθος

```
>>sym('x');
```

```
>>sym('x');
```

Για την δημιουργία σύνθετων συμβολικών μεταβλητών, δηλαδή μεταωλητών που ορίζονται με την βόηθεια άλλων μεταβλητών μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε εντολές όπως η ακόλουθη:

```
>> z=sym(str2sym('x^(1/y)'))
```

syms

Το MATLAB επιτρέπει την χρήση των συμβολικών μεταβλητών για την τέλεση διάφορων συμβολικών πράξεων. Για παράδειγμα

```
>>x^(2*z)
ans =
x^(2*x^(1/y))
```

Επιπλέον, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια συμβολική μεταβλητή για να αναπαραστήσουμε μια σταθερά, όπως παραδείγματος χάριν την χρυσή τομή $\rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

```
>>rho = sym(str2sym('(1 + sqrt(5))/2'));
```

Δήλωση πραγματικών και μιγαδικών συμβολικών μεταβλητών

Δήλωση και προβολή περιορισμών

Συχνά επιθυμούμε να δηλώσουμε μια μεταβλητή ως πραγματική ή ως ότι μπορεί να πάρει μόνο θετικές τιμές ή ότι είναι ακέραιος.

```
>> syms x y real; z=x+i*y
>> assumptions(z)
ans =
[ x in R_, y in R_]
>> syms w unreal
-----
>> syms x positive
>> assume(y<1)
>> assumptions(x)
ans =
0 < x
>> assumptions(y)
ans =
y < 1
```

```
>> syms n x
>> assume(n,'integer')
>> assume(x,'rational')
>> assumeAlso(x < 0)
```

Ερώτηση: Ποιά θα είναι η απάντηση του MATLAB στην εντολή *assumptions(x)*;

Σημείωση: `syms ... ASSUMPTION`
The ASSUMPTION can be 'real', 'rational', 'integer', or 'positive'

subs

Η εντολή `subs` αντικαθιστά τις συμβολικές μεταβλητές σε μια συμβολική έκφραση με τις τιμές που ορίζονται απο την εντολή αυτή.

Παραδείγματα

```
>> syms x y
>> f = x*exp(y) + x^2;
>> subs(f, x, -1)
```

```
ans =
1 - exp(y)
```

```
>>f(-1)
```

```
ERROR
```

```
-----
```

```
>> syms a b
>> subs(cos(a) + sin(b), [a, b], [1, 2])
```

```
ans =
cos(1) + sin(2)
```

Ορισμός συμβολικών συναρτήσεων

```
>> syms f(x)
>> f(x)=sqrt(x)
f(x) =
x^(1/2)
>> f(-1)
ans =
i
>> f(i)
ans =
i^(1/2)
```


Παράγωγος συνάρτησης – diff

```
>> syms x y
>> diff(sin(1/x))
ans =
-cos(1/x)/x^2

>> diff(log(y),2)
ans =
-1/y^2
```

```
>> sym f(x,y);
>> f(x,y)=exp(x*y);
>> diff(f(x,y),x)
ans =
y*exp(x*y)
>> diff(f(x,y),y)
ans =
x*exp(x*y)
>> diff(f(x,y),y,2)
ans =
x^2*exp(x*y)
```

Ολοκληρώματα - int

Αόριστο

```
>> int(1/x)
ans =
log(x)
```

```
>> int(exp(-2*x))
ans =
-exp(-2*x)/2
```

Ορισμένο

```
>> int(exp(x),0,1)
ans =
exp(1) - 1
```

```
>> int(x*log(x),1,2)
ans =
log(4) - 3/4
```

```
>> int(exp(-x),0,Inf)
ans =
1
```

```
>> int(1/x,1,Inf)
ans =
Inf
```

```
>> double(int(exp(x),0,1))
ans =
1.7183
```

Όρια συναρτήσεων - limit

```
>> limit(log(x)/(x-1),x,1)
```

```
ans =
```

```
1
```

```
>> limit(exp(-x),x,Inf)
```

```
ans =
```

```
0
```

```
>> limit((1+1/x)^x,x,Inf)
```

```
ans =
```

```
exp(1)
```

```
>> limit(1/x,x,0,'right')
```

```
ans =
```

```
Inf
```

```
>> limit(1/x,x,0,'left')
```

```
ans =
```

```
-Inf
```

Όρια συναρτήσεων - limit

Άσκηση: Ποιά είναι τα αποτελέσματα των δύο παρακάτω εντολών

```
>> limit(log(x),x,0,'right')  
>> limit(log(x),x,0,'left')
```

Προσπαθήστε να δικαιολογήσετε το αποτέλεσμα του MATLAB στην δεύτερη εντολή. Ποιό είναι το όριο του πραγματικού και ποιό του φανταστικού μέρους του $\log(x)$ καθώς το X τείνει στο μηδέν από αριστερά;

Σημειώνεται ότι αν $z = r \cdot e^{i\theta}$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός τότε ο $\log(z)$ ορίζεται ως

$$\log(z) = \log(r) + i\theta.$$

Άρα για $x < 0...$

Εκθετική μορφή μιγαδικού $z = r \cdot e^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Ανάπτυγμα γινομένου – Παραγοντοποίηση

expand – factor

```
>> expand((x+1)^4)
```

```
ans =
```

```
x^4 + 4*x^3 + 6*x^2 + 4*x + 1
```

```
>> expand(cos(x+y))
```

```
ans =
```

```
cos(x)*cos(y) - sin(x)*sin(y)
```

```
>> expand(log(x*y))
```

```
ans =
```

```
log(x) + log(y)
```

```
>> factor(x^3 + 3*x^2 + 3*x + 1)
```

```
ans =
```

```
(x + 1)^3
```

```
>> factor(x^7-1)
```

```
ans =
```

```
(x - 1)*(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)
```

απλοποίηση μαθηματικών σχέσεων

simplify – simple

```
>> a=diff((x^3-1)/x^2,x)
```

```
a =
```

```
3 - (2*(x^3 - 1))/x^3
```

```
>> simplify(a)
```

```
ans =
```

```
2/x^3 + 1
```

Άσκηση: Εφαρμόστε την εντολή `simple` στο `a`. Προσπαθήστε να δικαιολογήσετε τα αποτελέσματα που παραθέτει το MATLAB μέχρι να δώσει την τελική απάντησή του.

Συγκρίνετε τα αποτελέσματα των εντολών `simplify` και `simple` όταν τις εφαρμόζεται στην έκφραση $\cos(x) + (-\sin(x)^2)^{(1/2)}$.

ΠΡΟΣΟΧΉ! Το MATLAB σημειώνει ότι η εντολή `simple` θα αφαιρεθεί σε κάποια από τις μελλοντικές του εκδόσεις.

solve

```
>> solve(3*x^2-5)
ans =
15^(1/2)/3
```

```
>> solve(3*x^2+5)
ans =
```

```
(15^(1/2)*i)/3
-(15^(1/2)*i)/3
```

```
>> syms r
>> solve(r^2== -1)
ans =
i
-i
```

```
>> syms t positive
>> solve(t^2-1)
ans =
1
```

```
>> solve(t^2-1, 'IgnoreProperties', true)
```

```
ans =
1
-1
```

solve

```
>> syms x y z
>> [Sx,Sy,Sz] = solve(x + y == 1, x - 11*y == 5, x+z==3)
Sx =
4/3

Sy =
-1/3

Sz =
5/3

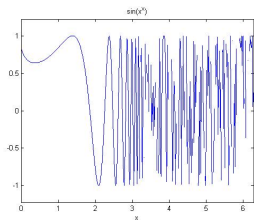
>> [Sx,Sy,Sz] = solve(x^2 + y^2 +z == 1, x^2 - 2*y == 2, x^2+z^2==3)
Sx =
2^(1/2)

Sy =
0

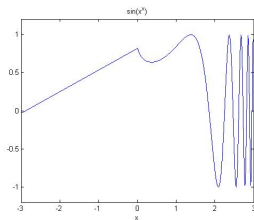
Sz =
-1
```


ezplot

```
>> ezplot(sin(abs(x)^x))
```

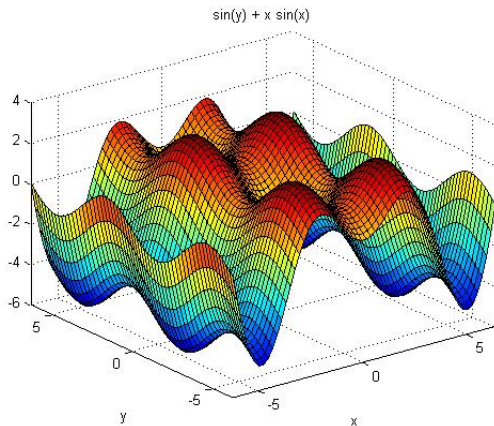


```
>> ezplot(sin(abs(x)^x), [-3,3])
```



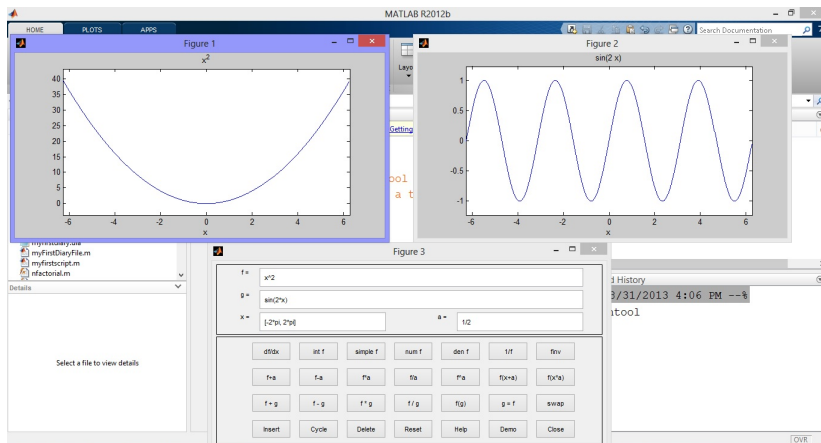
ezsurf

```
>> ezsurf(x*sin(x)+sin(y))
```



funtool

>> funtool



Εξετάσεις 9/2017

Μια δοκός κάμπτεται την χρονική στιγμή $t = 0$ και αφήνεται να ταλαντωθεί. Το πλάτος της ταλάντωσης y περιγράφεται από την σχέση

$$y(t) = 2e^{-t} \cos[20t]$$

Θέλουμε

- 1 να βρούμε το πλάτος και την ταχύτητα (υπολογίζεται από την παράγωγο της $y(t)$) της ταλάντωσης την χρονική στιγμή $t = 2$ και
- 2 να κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις του πλάτους και της ταχύτητας της ταλάντωσης για $t \leq 3$.

Ένας φοιτητής προσπαθεί να λύσει το παραπάνω πρόβλημα με την βοήθεια του *MATLAB* χρησιμοποιώντας ως βάση τον κώδικα που παρουσιάζεται στην επόμενη διαφάνεια. Ωστόσο, κάποια κομμάτια του λείπουν κι έχουν αντικατασταθεί με ερωτηματικά (?) ή είναι λάθος.

Σημείωση: Σε κάθε ερωτηματικό μπορεί να αντιστοιχεί μέρος μιας εντολής ή και παραπάνω από μία εντολές.

Εξετάσεις 9/2017

```

1 syms t
2 ?
3  $y(t) = 2 * \exp(-t) * \cos(20 * t);$ 
4  $u(t) = ?$ 
5  $[y(2), u(2)]$ 
6 subplot(2,1,1)
7 ?
8 ?('y(t)')
9 ?(0,0)
10 subplot(2,1,2)
11 ?
12 ?('u(t)')
13 ?(0,0)

```

Απαντήστε στις ερωτήσεις που εμφανίζονται στην ηλεκτρονική φόρμα.

Εξετάσεις 9/2017

1. Ποια από τις παρακάτω επιλογές πρέπει να αντικαταστήσει το ? στην γραμμή (2) έτσι ώστε να δηλώσουμε ότι η μεταβλητή t παίρνει μόνο θετικές τιμές;

- `assume(t>0)`
- `assumeNot(t<=0)`
- Όλοι οι προτεινόμενοι τρόποι
- Other...

2. Η εντολή στην γραμμή 3 είναι σωστή;

Αν πιστεύεται ότι είναι λάθος πληκτρολογήστε την σωστή.

- Σωστή
- Other...

Εξετάσεις 9/2017

3. Ποια εντολή πρέπει να εισάγουμε στην γραμμή 4 στην θέση του ερωτηματικού έτσι ώστε να πάρουμε την παράγωγο της $y(t)$;

Long answer text

4. Η εντολή `subplot(2,1,1)` στην γραμμή 6 του κώδικα

- χωρίζει το παράθυρο των γραφικών παραστάσεων σε ένα πίνακα 2 γραμμών και μιας στήλης και τοποθετεί την ει
- χωρίζει το παράθυρο των γραφικών παραστάσεων σε ένα πίνακα 2 στηλών και μιας γραμμής και τοποθετεί την ει
- Other...

5. Ποια από τις παρακάτω εντολές πρέπει να βάλουμε στις γραμμές 7 και 11 έτσι ώστε να πάρουμε τις γραφικές παραστάσεις των $y(t)$ και $u(t)$;

- `ezplot(y(t),[0,3])` και `ezplot(u(t),[0,3])`
- `plot(0:0.01:3,y(t))` και `plot(0:0.01:3,u(t))`
- Όλοι οι προτεινόμενοι τρόποι

Εξετάσεις 9/2017

5. Ποια από τις παρακάτω εντολές πρέπει να βάλουμε στις γραμμές 7 και 11 έτσι ώστε να πάρουμε τις γραφικές παραστάσεις των $y(t)$ και $u(t)$;

- `ezplot(y(t),[0,3])` και `ezplot(u(t),[0,3])`
- `plot(0:0.01:3,y(t))` και `plot(0:0.01:3,u(t))`
- Όλοι οι προτεινόμενοι τρόποι

6. Ποια εντολή πρέπει να πληκτρολογήσουμε στην θέση του ερωτηματικού στις γραμμές 8 και 12 έτσι ώστε να εισάγουμε τίτλους στις γραφικές παραστάσεις;

Long answer text

7. Ποια εντολή πρέπει να πληκτρολογήσουμε στην θέση του ερωτηματικού στις γραμμές 9 και 13 έτσι ώστε να εισάγουμε την ευθεία $y=0$ στις γραφικές παραστάσεις;

Long answer text