Πίνακες

Ορισμός: *Πίνακας* ονομάζεται κάθε διάταξη στοιχείων σε n γραμμές και m στήλες

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nm} \end{pmatrix} = (\alpha_{ij})_{n\times m}\,,$$

Ορισμός: *Διάνυσμα* ονομάζεται ένας $1 \times m$ πίνακας .

Ορισμός: Ένας $n \times 1$ πίνακας ονομάζεται *διάνυσμα - στήλη* (ή απλά διάνυσμα).

Ορισμός: Δύο πίνακες A και B λέγονται ίσοι $(A = B)$ αν

- έχουν τις ίδιες διαστάσεις και
- $\alpha_{ij} = \beta_{ij}\ \forall (i, j)$.

Πράξεις πινάκων

- **Πρόσθεση και αφαίρεση**

$$C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$$

$$D = A - B \Leftrightarrow d_{ij} = \alpha_{ij} - \beta_{ij}$$

Σχόλιο: Η πρόσθεση και η αφαίρεση πινάκων ορίζεται μόνο αν οι πίνακες έχουν τις ίδιες διαστάσεις.

Οι σημειώσεις αυτές βασίστηκαν στο Παράρτημα Α του βιβλίου "Π. Οικονόμου και Χ. Καρώνη. Στατιστικά Μοντέλα Παλινδρόμησης. Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 2010".

- **Πολλαπλασιασμός**
  - *Γινόμενο αριθμού με πίνακα*

$$\lambda A = (\lambda \alpha_{ij})_{n \times m}$$

  - *Πολλαπλασιασμός διανυσμάτων*

Ο πολλαπλασιασμός διανυσμάτων ορίζεται μόνο μεταξύ $1 \times m$ και $m \times 1$ διανυσμάτων. Στην περίπτωση αυτή το αποτέλεσμα είναι ένας αριθμός, το ονομαζόμενο *εσωτερικό γινόμενο*, ο οποίος ορίζεται ως

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = \alpha_1 \beta_1 + \ldots + \alpha_m \beta_m$$

  - *Πολλαπλασιασμός πίνακα με πίνακα*

Ο πολλαπλασιασμός $A \cdot B$ του πίνακα A με τον πίνακα B ορίζεται μόνο όταν το πλήθος των στηλών του A ισούται με το πλήθος των γραμμών του B.
Στην περίπτωση αυτή, δηλαδή αν A είναι ένας $n \times m$ πίνακας και B είναι ένας $m \times k$ πίνακας, το γινόμενο $C = A \cdot B$ είναι ένας $n \times k$ πίνακας, του οποίου το (i, j) στοιχείο ορίζεται ως

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{im} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_{1j} \\ \beta_{2j} \\ \vdots \\ \beta_{mj} \end{pmatrix} = \alpha_{i1} \beta_{1j} + \ldots + \alpha_{im} \beta_{mj}$$

Σχόλιο: Στον πολλαπλασιασμό πινάκων δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα $(A \cdot B \neq B \cdot A)$.
Σχόλιο: Στον πολλαπλασιασμό πινάκων μπορεί να ισχύει $A \cdot B = 0$ με $A \neq 0$ και $B \neq 0$.

Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το ακόλουθο:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ Ένας πίνακας με όλα τα στοιχεία του ίσα με το μηδέν ονομάζεται *μηδενικός πίνακας*.

Ειδικοί πίνακες

1. **Τετραγωνικός πίνακας** (Square matrix)

   Ένας πίνακας με τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών ονομάζεται τετραγωνικός.

   $\hookrightarrow$ **Δύναμη πίνακα** Οι δυνάμεις πινάκων ορίζονται μόνο για τετραγωνικούς πίνακες ως ακολουθώς

   $$A^2 = A \cdot A \;\; A^3 = A^2 \cdot A, \cdots$$

2. **Διαγώνιος πίνακας** (Diagonal matrix)

   Ένας τετραγωνικός πίνακας, του οποίου όλα τα εκτός της κύριας διαγωνίου στοιχεία του ισούνται με το μηδέν, ονομάζεται διαγώνιος, δηλαδή

   $$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix},$$

   ο οποίος συμβολίζεται και ως $\mathrm{diag}(d_i)$.

3. **Μοναδιαίος πίνακας** (Identity matrix)

   Ένας $n \times n$ διαγώνιος πίνακας, του οποίου όλα τα διαγώνια στοιχεία είναι ίσα με τη μονάδα, ονομάζεται μοναδιαίος ή ταυτοτικός και συμβολίζεται με $\mathbf{I}_n$ ή πιο απλά με $\mathbf{I}$.

   Για έναν οποιοδήποτε $n \times m$ πίνακα $\mathbf{A}$ ισχύει $\mathbf{IA} = \mathbf{A}$ και για έναν οποιδήποτε $m \times n$ πίνακα $\mathbf{B}$ ισχύει $\mathbf{BI} = \mathbf{B}$.

4. **Πίνακας μονάδων** (Matrix of ones)

   Ένας πίνακας με m γραμμές και n στήλες, του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ίσα με τη μονάδα, ονομάζεται πίνακας μονάδων και συμβολίζεται με $\mathbf{J}_{mn}$. Στην περίπτωση τετραγωνικών πινάκων χρησιμοποιείται συχνά ο συμβολισμός $\mathbf{J}_n$ αντί του $\mathbf{J}_{nn}$ ή ακόμα και ο $\mathbf{J}$.

5. **Συμμετρικός πίνακας** (Symmetric matrix)

   Ένας τετραγωνικός πίνακας ονομάζεται συμμετρικός, αν ισούται με τον ανάστροφό του, δηλαδή αν $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$. Τότε ισχύει $a_{ij} = a_{ji}$.

6. **Ταυτοδύναμος πίνακας** (Idempotent matrix)

   Ένας τετραγωνικός πίνακας ονομάζεται ταυτοδύναμος, αν $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}.\mathbf{A} = \mathbf{A}$. Για τους ταυτοδύναμους πίνακες ισχύει ότι

   - ο $\mathbf{A}'$ είναι ταυτοδύναμος, αν και μόνο αν ο $\mathbf{A}$ είναι ταυτοδύναμος και

   - ο $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ είναι ταυτοδύναμος, αν και μόνο αν ο $\mathbf{A}$ είναι ταυτοδύναμος.

7. **Ανάστροφος πίνακας** (Transposition)

   Ο ανάστροφος ενός $m \times n$ πίνακα $\mathbf{A}$ είναι ένας $n \times m$ πίνακας, του οποίου το ij στοιχείο είναι το ji στοιχείο του $\mathbf{A}$. Ο ανάστροφος του $\mathbf{A}$ συμβολίζεται με $\mathbf{A}'$. Για τους ανάστροφους ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες

   - $(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}$

   - $(\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$

   - $(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$

Επιπλέον στοιχεία πινάκων

1. **Ίχνος τετραγωνικού πίνακα** (Trace)

   Το ίχνος ενός τετραγωνικού πίνακα $\mathbf{A}$ με στοιχεία α_{ij} ορίζεται ως το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του, δηλαδή ως

$$\mathrm{tr}\,(\mathbf{A}) = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \cdots + \alpha_{nn}\,.$$

- Αν $\mathbf{A}$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας και $\mathbf{B}$ ένας $n \times n$ πίνακας τότε

$$\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA})\,.$$

- Έστω $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ δύο $k \times k$ πίνακες και σταθερές a και b, τότε

$$\mathrm{tr}(a\mathbf{A} + b\mathbf{B}) = a\ \mathrm{tr}(\mathbf{A}) + b\ \mathrm{tr}(\mathbf{B})\,.$$

2. **Ορίζουσα πίνακα** (Determinant)

- Η ορίζουσα $|\mathbf{A}|$ ή $\det(\mathbf{A})$ ενός 2×2 πίνακα ορίζεται ως εξής

$$\det\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}\,.$$

- Η ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα μπορεί να οριστεί ως ακολούθως

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} &= \alpha_{11}\det\begin{pmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} - \alpha_{12}\det\begin{pmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{pmatrix} + \\ &+ \alpha_{13}\det\begin{pmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{pmatrix} \\ &= \alpha_{11}\det(\mathbf{A}_{11}) - \alpha_{12}\det(\mathbf{A}_{12}) + \alpha_{13}\det(\mathbf{A}_{13})\ ,\end{aligned}$$

  όπου $\mathbf{A}_{ij}$ είναι ο 2×2 πίνακας που προκύπτει από τον $\mathbf{A}$, αν διαγράψουμε την i γραμμή και την j στήλη του.

- Με παρόμοιο τρόπο μπορεί να οριστεί και η ορίζουσα ενός $n \times n$ πίνακα $\mathbf{A}$, δηλαδή

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\,\alpha_{1j}\det(\mathbf{A}_{1j})\ .$$

- Αν $|\mathbf{A}| \neq 0$, τότε ο πίνακας $\mathbf{A}$ ονομάζεται μη ιδιάζων (nonsingular).

- Αν $\mathbf{A}$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας και a μια σταθερά, τότε $|\mathbf{A}'| = |\mathbf{A}|$ και $|a\mathbf{A}| = a^n |\mathbf{A}|$.

3. **Τάξη ενός πίνακα** (Rank)

   Τάξη ενός πίνακα ονομάζεται το πλήθος των γραμμικών ανεξάρτητων στηλών (ή γραμμών) του.

   - Για ένα $m \times n$ πίνακα $\mathbf{A}$ ισχύει
   $$\operatorname{rank}(\mathbf{A}) \leq \min(m, n) \ .$$

   - Για ένα ταυτοδύναμο πίνακα $\mathbf{A}$ ισχύει $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A})$.

4. **Αντίστροφος πίνακας** (Inverse)

   - Ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbf{A}$ λέγεται αντιστρέψιμος, αν υπάρχει ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbf{B}$ τέτοιος ώστε
   $$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}.$$
   Ο πίνακας $\mathbf{B}$ ονομάζεται αντίστροφος πίνακας του $\mathbf{A}$, είναι μοναδικός και συμβολίζεται ως $\mathbf{A}^{-1}$.

     Ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

   - Αν ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμος, τότε ισχύει $(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})'$ και $|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1}$. Αν είναι και συμμετρικός τότε είναι και ο $\mathbf{A}^{-1}$, αφού $(\mathbf{A}^{-1})' = (\mathbf{A}')^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$.

5. **Τετραγωνική μορφή** (Quadratic form)

   Έστω $\mathbf{A} = (\alpha_{ij})$ ένας $n \times n$ πίνακας, τότε η συνάρτηση που αντιστοιχεί κάθε διάνυσμα $\mathbf{x}' = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ στο βαθμωτό

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i,j} \alpha_{ij} x_i x_j = \sum_i \alpha_{ii} x_i^2 + \sum_{i \neq j} \alpha_{ij} x_i x_j$$

ονομάζεται τετραγωνική μορφή (για το $\mathbf{x}$). Ο πίνακας $\mathbf{A}$ αναφέρεται ως ο πίνακας της τετραγωνικής μορφής.

6. **Μη αρνητικά ορισμένος πίνακας** (Nonnegative definite)

   Ένας $n \times n$ συμμετρικός πίνακας $\mathbf{A}$ ονομάζεται μη αρνητικά ορισμένος, αν η τετραγωνική μορφή $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ ικανοποιεί τη σχέση

   $$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$$

   για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

   Το μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ικανοποιεί τη σχέση $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ για κάθε πίνακα $\mathbf{A}$. Αν ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι μη αρνητικά ορισμένος και το μηδενικό διάνυσμα είναι το μοναδικό διάνυσμα που ικανοποιεί τη σχέση $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$, τότε ο πίνακας $\mathbf{A}$ ονομάζεται θετικά ορισμένος. Ένας πίνακας που είναι μη αρνητικά ορισμένος αλλά όχι θετικά ορισμένος, ονομάζεται θετικά ημι–ορισμένος.

   Ανάλογα μπορούν να οριστούν οι έννοιες μη θετικά ορισμένος, αρνητικά ορισμένος και αρνητικά ημι–ορισμένος.

7. **Παραγώγιση**

   Έστω $\mathbf{A}$ ένας $n \times n$ πίνακας, $\boldsymbol{\gamma}$ ένα $n \times 1$ διάνυσμα σταθερών και $\mathbf{x}$ ένα n–διάστατο διάνυσμα μεταβλητών, τότε ισχύει

   - $\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}'\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \boldsymbol{\gamma}$
   - $\frac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{x}$
   - $\frac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}'\mathbf{x}\,.$

     Αν ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι και συμμετρικός τότε $\frac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A}\mathbf{x}\,.$