Προγραμματισμός & Εφαρμογές Η/Υ

Πίνακες

Π. Οικονόμου

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών

2020–2021

MATLAB®

Σχέδιο Σημειώσεων

- Ορισμός πινάκων
- Δείκτες – Υποπίνακες
- Ανάστροφος πίνακας
- Τροποποίηση πίνακα
  - Αντίγραφα γραμμών και στηλών
  - Διαγραφή γραμμών και στηλών
- Βασικοί πίνακες
- Πράξεις με πίνακες
- Επίλυση συστημάτων - Τετραγωνικοί πίνακες
  - Ορίζουσα
  - Αντίστροφος
- Στοιχείο προς στοιχείο πράξεις πινάκων

Ορισμός πινάκων

Σε προηγούμενα μαθήματα έχουμε αναφέρει τον τρόπο δημιουργίας αλλά και τον χειρισμό πινάκων στο MATLAB.
Στις επόμενες διαφάνειες παρουσιάζουμε ξανά κάποια από αυτά τα στοιχεία.

Υπενθυμίζεται ότι

- κάθε αριθμός είναι ένας 1x1 πίνακας
- κάθε διάνυσμα είναι ένας 1xc πίνακας
- κάθε διάνυσμα στήλη είναι ένας rx1 πίνακας
- κάθε rxc πίνακας έχει r γραμμές και c στήλες και δηλώνεται στο MATLAB ως

  ```
  >> mymatrix=[a11,a12,...,a1c; a21,a22,...,a2c; .... ;ar1,ar2,...,arc];
  ```

Παράδειγμα ενός 3x10 πίνακα είναι ο

```
>>mymatrix=[1:3:30;2:3:30;3:3:30];
```

Δείκτες

Μπορούμε να πάρουμε ένα μεμονωμένο στοιχείο ενός πίνακα καλώντας το όνομα του χρησιμοποιώντας δύο δείκτες (i, j)

Για παράδειγμα η εντολή $mymatrix(2, 3)$ επιστρέφει το στοιχείο του πίνακα *mymatrix* που βρίσκεται στη 2η γραμμή και στην 3η στήλη, δηλαδή στην προκειμένη περίπτωση το 8.

Το ίδιο στοιχείο μπορούμε να το πάρουμε πληκτρολογώντας $mymatrix(8)$, αφού αν καλέσουμε το όνομα ενός πίνακα με έναν δείκτη, τοτε το MATLAB επιστρέφει το ν-οστό στοιχείο μετρώντας τα στοιχεία κατά στήλες.

Υποπίνακες

Με την κατάλληλη χρήση δεικτών μπορούμε να πάρουμε ολόκληρες γραμμές ή στήλες από ένα πίνακα ή ακόμα και να δημιουργήσουμε από τον αρχικό πίνακα έναν μικρότερο πίνακα.

```
>> mymatrix(2,:)
ans =
     2     5     8    11    14    17    20    23    26    29
>> mymatrix(:,1)
ans =
     1
     2
     3
>> mymatrix(2,1:5)
ans =
     2     5     8    11    14
>> mymatrix(1:2,4:5)
ans =
    10    13
    11    14
>> mymatrix(1:2,4:2:8)
ans =
    10    16    22
    11    17    23
```

Ανάστροφος πίνακας

Ανάστροφος πίνακας ενός *mxn* πίνακα *A* ονομάζεται ο *nxm* πίνακας A' για τον οποίο

$$\alpha_{ij}^{'} = \alpha_{ji}.$$

Δηλαδή, ο ανάστροφος ενός πίνακα *A* προκύπτει αν οι γραμμές του πίνακα *A* γίνουν στήλες με την ίδια σειρά.
Ισοδύναμα, η αναστροφή ενός πινάκα πίνακα μια διαδικασία στην οποία οι γραμμές του πίνακα γίνονται στήλες και οι στήλες γραμμές.

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^{'} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Ανάστροφος πίνακας

Στο MATLAB ο ανάστροφος ενός πίνακα δηλώνεται με την εντολή *transpose* ή με το σύμβολο $'$.

```
>> a=[1,2,3;4,5,6]
a =
     1     2     3
     4     5     6
>> a'
ans =
     1     4
     2     5
     3     62
```

```
>> b=[10,40,20]
b =
    10    40    20
>> b'
ans =
    10
    40
    20
>> (b')'
ans =
    10    40    20
```

Αντίγραφα γραμμών και στηλών

Από ένα διάνυσμα ή από ένα διάνυσμα-στήλη ή ακόμα και από ένα πίνακα μπορούμε να φτιάξουμε πίνακες που να αποτελούν πολλαπλά αντίγραφα του αρχικού πίνακα.

Η διαδικασία αυτή γίνεται με την εντολή repmat.

Συντακτικό: repmat(,,) όπου A ο πίνακας του οποίου θέλουμε να κάνουμε MxN αντίγραφα.

Παράδειγμα:

```
>> a=[0,1;-1,0]
a =
     0     1
    -1     0
>> repmat(a,2,3)
ans =
     0     1     0     1     0     1
    -1     0    -1     0    -1     0
     0     1     0     1     0     1
    -1     0    -1     0    -1     0
```

Αντίγραφα γραμμών και στηλών - Άσκηση

Να δημιουργήσετε

- έναν $8x7$ πίνακα τα στοιχεία του οποίου να είναι ίσα με $-\pi$
- ένα αρχείο .*m* (script file) που θα ζητάει από τον χρήστη δύο αριθμούς *k* και *n* και θα επιστρέφει έναν πίνακα που θα επαναλαμβάνει *n* φορές το διάνυσμα με τους *k* πρώτους πρώτους αριθμούς. (απαραίτητη εντολή: isprime)

Διαγραφή γραμμών και στηλών

Η διαγραφή γραμμών ή στηλών ενός πίνακα γίνεται με τη χρήση της άνω-κάτω τελείας, ως ακολούθως.

```
>> a=[1,2,3;4,5,6]
a =
     1     2     3
     4     5     6
>> a(1,:)=[]
a =
     4     5     6
>> a(:,2)=[]
a =
     4     6
```

Άσκηση: Χρησιμοποιώντας το αρχείο *.m* που φτιάξαμε στη προηγούμενη διαφάνεια, να φτιάξετε έναν πίνακα που να επαναλαμβάνει δέκα φορές το διάνυσμα με τους πρώτους αριθμούς 3, 7 και 13.

Πίνακας Μονάδων – Πίνακας μηδενικών – Μοναδιαίος

Στο MATLAB υπάρχουν πολλές έτοιμες εντολές που δημιουργούν πίνακες με συγκεκριμένη μορφή/δομή, οι οποίοι χρησιμοποιούνται συχνά σε εφαρμογές.

Χαρακτηριστικά παραδείγματα, μερικά εκ των οποίων τα έχουμε ήδη δει, είναι ο *mxn* πίνακας μονάδων (ones(m,n)), ο *mxn* πίνακας μηδενικών (zeros(m,n)) και ο *nxn* ταυτοτικός ή μοναδιαίος πίνακας I_n.

Παράδειγμα:

```
>> ones(3,2)
ans =
     1     1
     1     1
     1     1
>> ones(3)
ans =
     1     1     1
     1     1     1
     1     1     1
```

```
>> zeros(2,3)
ans =
     0     0     0
     0     0     0
>> zeros(2)
ans =
     0     0
     0     0
```

```
>> eye(3)
ans =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
```

Πρόσθεση και αφαίρεση πινάκων

Η πρόσθεση και η αφαίρεση πινάκων γίνεται εφαρμόζοντας την αντίστοιχη πράξη στα στοιχεία των πινάκων που είναι στις ίδιες θέσεις (στοιχείο προς στοιχείο).

Βασική προϋπόθεση οι πίνακες να έχουν την ίδια διάσταση.

```
>> a=[1,2,3;4,5,6]
a =
     1     2     3
     4     5     6

>> c=ones(2,3)
c =
     1     1     1
     1     1     1
```

```
>> a+c
ans =
     2     3     4
     5     6     7

>> a-2*c
ans =
    -1     0     1
     2     3     4
```

```
>> a+c'
Error using  +
Matrix dimensions must agree.
```

Πολλαπλασιασμός πινάκων

Ο πολλαπλασιασμός δυο πινάκων ορίζεται μόνο όταν οι στήλες του πρώτου ισούνται με τις γραμμές του δεύτερου.
Ο πολλαπλασιασμός του *mxn* πινάκα $A = (\alpha_{ij})$ με τον *nxk* πίνακα $B = (\beta_{jk})$ έχει ως αποτέλεσμα τον *mxk* πίνακα $AB = (c_{ik})$ με στοιχεία

$$c_{ik} = \alpha_{i1}\beta_{1k} + \alpha_{i2}\beta_{2k} + \cdots + \alpha_{mn}\beta_{nk} = \sum_{r=1}^{n} \alpha_{ir}\beta_{rk}.$$

```
>> a=[1,2,3;4,5,6]
a =
     1     2     3
     4     5     6

>> c=ones(2,3)
c =
     1     1     1
     1     1     1
```

```
>> a*c'
ans =
     6     6
    15    15

>> a*c
Error using  *
Inner matrix dimensions must agree.
```

Δύναμη πινάκων

Με τον όρο δύναμη πινάκων εννοούμε τον πολλαπλασιασμό ενός πίνακα με τον εαυτό του.
Προφανώς η πράξη αυτή μπορεί να εκτελεστεί μόνο αν το πλήθος των γραμμών ισούται με το πλήθος των στηλών του πίνακα (**Τετραγωνικοί πίνακες**).

Παράδειγμα

```
>> A=[1,-1;2,2];
>> A^2
ans =
    -1    -3
     6     2

>> A*A
ans =
    -1    -3
     6     2

>> A^4
ans =
   -17    -3
     6   -14
```

```
>> B=[0,1,1;0,0,1;0,0,0]
B =
     0     1     1
     0     0     1
     0     0     0
>> B^2
ans =
     0     0     1
     0     0     0
     0     0     0
>> B^3
ans =
     0     0     0
     0     0     0
     0     0     0
```

```
>>C=[2,-3,-5;-1,4,5;1,-3,-4]
C =
     2    -3    -5
    -1     4     5
     1    -3    -4

>> C^2
ans =
     2    -3    -5
    -1     4     5
     1    -3    -4
```

Εφαρμογή συνάρτησης σε πίνακα

Οι περισσότερες συναρτήσεις στο MATLAB εφαρμόζονται σε κάθε στοιχείο του πίνακα ξεχωριστά, όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.

```
>>  a=[1,2,3;4,5,6]
a =
     1     2     3
     4     5     6

>> exp(a)
ans =
    2.7183    7.3891   20.0855
   54.5982  148.4132  403.4288

>> sqrt(a)
ans =
    1.0000    1.4142    1.7321
    2.0000    2.2361    2.4495
```

Σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους

Έστω το ακόλουθο σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \\ -5x_2 + 2x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Με τους παρακάτω πίνακες

```
>> A=[2,3,-1;-3,1,2;0,-5,2]
A =
     2     3    -1
    -3     1     2
     0    -5     2
>> b=[5;5;-3]
b =
     5
     5
    -3
```

το σύστημα περιγράφεται από την σχέση $Ax = b$, όπου $x = (x_1, x_2, x_3)'$.

Σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους

Η επίλυση του συστήματος γίνεται με την εντολή

```
>> x=A\b
x =
    1.2593
    1.9630
    3.4074
```

η οποία μας δίνει έναν 3x1 πίνακα (διάνυσμα-στήλη), ο οποίος αποτελεί τη λύση του συστήματος όπως μπορούμε να επιβεβαιώσουμε με την ακόλουθη εντολή.

```
>> A*x
ans =
    5.0000
    5.0000
   -3.0000
```

Σχόλιο: Όπως φαίνεται και από το παραπάνω παράδειγμα η 'διαίρεση' $A\backslash b$ εκτελεί μια διαφορετική πράξη από αυτή που ίσως πιστεύαμε βλέποντας το σύμβολο της διαίρεσης.

Ορίζουσα πίνακα

Η ορίζουσα ενός πίνακα υπολογίζεται με την εντολή det.

```
>> A=[2,3,-1;-3,1,2;0,-5,2]

>> det(A)
ans =
    27
```

Η εντολή det εφαρμόζεται αποκλειστικά
σε τετραγωνικούς πίνακες

Αντίστροφος τετραγωνικού πίνακα

Ένας *nxn* τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν υπάρχει ένας *nxn* τετραγωνικός πίνακας A^{-1}, τέτοιος ώστε

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Αν A αντιστρέψιμος τότε

- $det(A) \neq 0$

Στο MATLAB ο αντίστοφος ενός πίνακα βρίσκεται με την εντολή inv.

```
>> A=[2,3,-1;-3,1,2;0,-5,2]
>> inv(A)
ans =
    0.4444   -0.0370    0.2593
    0.2222    0.1481   -0.0370
    0.5556    0.3704    0.4074
```

Σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους

Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος τότε το γραμμικό σύστημα

$$Ax = b$$

έχει μοναδική λύση την

$$x = A^{-1}b.$$

Πράγματι, για το σύστημα της διαφάνειας 16 έχουμε ότι

```
>> A=[2,3,-1;-3,1,2;0,-5,2];
>> b=[5;5;-3];
>> inv(A)*b
ans =
    1.2593
    1.9630
    3.4074
```

η οποία ταυτίζεται με τη λύση της διαφάνειας 17.

$\hookrightarrow$ Επομένως η 'διαίρεση' $A\backslash b$ είναι ισοδύναμη με τη σχέση $A^{-1}b$.

Στοιχείο προς στοιχείο πράξεις πινάκων

Πέρα από τις συνήθεις πράξεις του πολλαπλασιασμού, της δύναμης και της διαίρεσης (όπως την περιγράψαμε νωρίτερα) πινάκων, το MATLAB μπορεί να εκτελέσει και πράξεις στοιχείο προς στοιχείο μεταξύ πινάκων ίδιας διάστασης.

Οι πράξεις αυτές συμβολίζονται με (.*), (.^), (./) και (.\).

Παράδειγμα

```
>> B=[1,-1;2,2];
>> C=2*ones(2);

>> B.*C
ans =
     2    -2
     4     4
```

```
>> B.^C
ans =
     1     1
     4     4

>> B./C
ans =
    0.5000   -0.5000
    1.0000    1.0000
```

```
>> B.\C
ans =

     2    -2
     1     1
```

Άλλες εντολές για πίνακες

- *diag* (τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα)
- *tril* (κάτω τριγωνικός)
- *triu* (άνω τριγωνικός)
- *fliplr* (αναδίπλωση πίνακα από αριστερά στα δεξιά)
- *flipud* (αναδίπλωση πίνακα από πάνω προς τα κάτω)
- *trace* (ίχνος πίνακα)
- *eig* (ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα πίνακα)
- ...

Πολυδιάστατοι πίνακες

Οι πίνακες μπορούν να έχουν παραπάνω από 2 διαστάσεις. Παραδείγματος χάριν η εντολή

```
>> A(:,:,2)=[9,9,9;10,10,10;11,11,11];
```

προσθέτει στον πίνακα $A = [2, 3, -1; -3, 1, 2; 0, -5, 2]$ μια τρίτη διάσταση με αποτέλεσμα τον ακόλουθο πίνακα A

```
A(:,:,1) =
     2     3    -1
    -3     1     2
     0    -5     2

A(:,:,2) =
     9     9     9
    10    10    10
    11    11    11
```