Προγραμματισμός & Εφαρμογές Η/Υ

Πολυώνυμα

- Πρόσθεση και αφαίρεση πολυωνύμων
- Πολλαπλασιαμός και διαίρεση πολυωνύμων
- Παραγώγιση πολυωνύμων
- Υπολογισμός των τιμών ενός πολυωνύμου
- Εύρεση ριζών πολυωνύμων

Μιγαδικοί αριθμοί

Π. Οικονόμου

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών

2023–2024

MATLAB®

Πολυώνυμα

Τα πολυώνυμα είναι από τις πιο χρήσιμες συναρτήσεις και τις συναντάμε συχνά σε πολλές εφαρμογές.

Το MATLAB αναγνωρίζει την σπουδαιότητα των πολυωνύμων και για το λόγο αυτό η διαχείρισή τους από το MATLAB είναι εξαιρετικά εύκολη.

Στην πραγματικότητα το MATLAB ερμηνεύει κάθε διάνυσμα σαν εν δυνάμει πολυώνυμο.

Πολυώνυμα

Πιο συγκεκριμένα, αν θέλουμε να δηλώσουμε στο MATLAB το πολυώνυμο

$$x^5 - 12x^3 + x^2 + 2x + 11$$

τότε εισάγουμε στο MATLAB την εντολή

```
>> p1=[1,0,-12,1,2,11];
```

η οποία αποθηκεύει στο διάνυσμα $p1$ τους συντελεστές του παραπάνω πολυωνύμου.

Αντίστοιχα, το διάνυσμα

```
>> p2=[-12,8,0,0,0];
```

αναπαριστά το $-12x^4 + 8x^3$.

Πρόσθεση και αφαίρεση πολυωνύμων

Το MATLAB δεν έχει έτοιμη συνάρτηση για την πρόσθεση και την αφαίρεση πολυωνύμων, παρόλα αυτά αυτές οι πράξεις μπορούν να γίνουν εύκολα προσθέτοντας ή αφαιρώντας τα διανύσματα των συντελεστών τους.

Αν τα πολυώνυμα δεν είναι του ίδιου βαθμού, τότε πρέπει να επεκτείνουμε το διάνυσμα του πολυωνύμου μικρότερης τάξης με μηδενικά στην αρχή του, έτσι ώστε να αποκτήσει την ίδια διάσταση με το διάνυσμα του πολυωνύμου μεγαλύτερης τάξης.

Πρόσθεση και αφαίρεση πολυωνύμων

Παράδειγμα: Να προσθέσετε τα πολυώνυμα

$$a(x) = -x^3 + x \qquad b(x) = x^6 + x^5 - 2x^3 + 5$$

```
>>a=[0,0,0,-1,0,1,0];
>>b=[1,1,0,-2,0,0,5];
>>c=a+b;
```

Πολλαπλασιαμός πολυωνύμων

Ο πολλαπλασιασμός δύο πολυωνύμων γίνεται με την εντολή

```
>> conv(a,b)
```

όπου τα a και b είναι τα διανύσματα των συντελεστών των δύο πολυωνύμων.

Παράδειγμα: Να βρείτε το γινόμενο των

$$a(x) = x^5 - x^3 + x \qquad b(x) = x^6 + x^5 - 11$$

```
>> a=[1,0,-1,0,1,0];
>> b=[1,1,0,0,0,0,-11]
>> conv(a,b)
ans =
     1     1    -1    -1     1     1   -11     0    11     0   -11     0
```

δηλαδή το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού των δύο αυτών πολυωνύμων είναι το ....

Διαίρεση πολυωνύμων

Με τη διαίρεση δύο πολυωνύμων ($\Delta(x)$ →διαιρετέος και $\delta(x)$ →διαιρέτης) εννοούμε την εύρεση δύο άλλων πολυωνύμων τέτοιων ώστε

$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$$

όπου το $\pi(x)$ είναι το πηλίκο και $\upsilon(x)$ το υπόλοιπο της διαίρεσης, το οποίο είναι μηδέν ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta(x)$.

Η διαίρεση δύο πολυωνύμων στο MATLAB γίνεται με την εντολή *deconv*, η οποία επιστρέφει και το πηλίκο και το υπόλοιπο και για αυτό πρέπει να καλείται ως εξής

```
>> [p,u]=deconv(a,b)
```

όπου τα *a* και *b* είναι τα διανύσματα των συντελεστών των δύο πολυωνύμων.

Αν καλέσουμε τη συνάρτηση *deconv* χωρίς να κάνουμε ανάθεση των αποτελέσματων της σε δύο τιμές, τότε αυτή επιστρέφει μόνο το πηλίκο.

Διαίρεση πολυωνύμων –Παραδείγματα

Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις πολυωνύμων

- $(2x^3 + x^2 - 3x + 6) : (x + 2)$
- $(8x^4 + x + 1) : (x^2 + 2)$

Παραγώγιση πολυωνύμων

polyder

Για να παραγωγίσουμε ένα πολυώνυμο χρησιμοποιούμε την εντολή polyder.

Παράδειγμα: Βρείτε την παράγωγο του

$$a(x) = 5x^8 + 3x^7 - 5x^5 - x^3 + x + 1$$

```
>> a=[5,3,0,-5,0,-1,0,1,1];
>> da=polyder(a)
da =
    40    21     0   -25     0    -3     0     1
```

Υπολογισμών των τιμών ενός πολυωνύμου

polyval

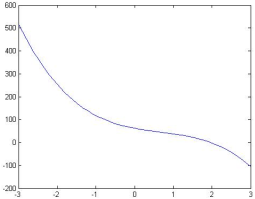
Για να βρούμε την τιμή ενός πολυωνύμου σε ένα σημείο χρησιμοποιούμε την εντολή polyval.

Παράδειγμα: Βρείτε την τιμή του πηλίκου της διαίρεσης

$$(8x^4 - 2x + 10) : (x + 2)$$

για $x = 1.9$ και σχεδιάστε τη γραφική παράσταση του πηλίκου της διαίρεσης στο $(-3, 3)$.

```
>> a=[-8,0,0,-2,10];
>> b=[1,2];
>> [p,u]=deconv(a,b)
p =
    -8    16   -32    62
u =
     0     0     0     0  -114
>> y=polyval(p,1.9)
y =
    4.0880
>> x=-3:0.1:3;
>> y=polyval(p,x);
>> plot(x,y)
```



Εύρεση ριζών πολυωνύμων

roots

Στο προηγούμενο παράδειγμα είναι φανερό (από τη γραφική παράσταση) ότι το πολυώνυμο

$$\pi(x) = -8x^3 + 16x^2 - 32x + 62$$

έχει μια πραγματική ρίζα κοντά στο 2.

Με την εντολή roots μπορούμε να βρούμε όλες τις ρίζες ενός πολυωνύμου.

Παραδείγματος χάριν, οι ρίζες του $\pi(x)$ μπορούν να βρεθούν με την εντολή

```
>> r=roots(p)
r =
   1.9682
   0.0159 + 1.9843i
   0.0159 - 1.9843i
```

η οποία μας δίνει σε ένα διάνυσμα-στήλη και τις τρεις ρίζες του πολυωνύμου.

Ανάκτηση του πολυωνύμου από τις ρίζες του

poly

Αν γνωρίζουμε τις ρίζες ενός πολυωνύμου, μπορούμε να ανακτήσουμε το πολυώνυμο με την εντολή poly.

Παράδειγμα 1: Να βρεθεί το πολυώνυμο με τις ακόλουθες ρίζες

$$-1.7234,\ -0.9243-1.2402i,\ -0.9243+1.2402i$$

$$0.6058-1.2625i,\ 0.6058+1.2625i,\ 1.3604$$

```
>> r=[-1.7234, -0.9243 - 1.2402i,  -0.9243 + 1.2402i, 0.6058 - 1.2625i, 0.6058 + 1.2625i, 1.3604];
>> p=poly(r)
p =
    1.0000    1.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000   -0.0000  -11.0000
```

Παράδειγμα 2: Να βρεθεί το πολυώνυμο με τις ακόλουθες ρίζες

$$1.9682,\ 0.0159+1.9843i,\ 0.0159-1.9843i$$

```
>> poly([1.9682, 0.0159 + 1.9843i, 0.0159 - 1.9843i])
ans =
          1.00          -2.00           4.00          -7.75
```

Σχόλιο:....

Μιγαδικοί αριθμοί

Έχουμε ήδη δει πως ορίζονται οι μιγαδικοί αριθμοί στο MATLAB.

```
>> z1=3+i
>> z2=-1-3i
>> z3=-8i
```

↪ Για το σύμβολο της φανταστική μονάδας μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και το j

```
>> z4=2-j
```

Πράξεις με μιγαδικούς αριθμούς

Όλες οι πράξεις (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός,...) μεταξύ μιγαδικών αριθμών στο MATLAB εκτελούνται κανονικά με τα συνήθη σύμβολα.

```
>> z1+z2
ans =
   2.0000 - 2.0000i
>> z1-z3
ans =
   3.0000 + 9.0000i
>> z1/z4
ans =
   1.0000 + 1.0000i
>> z1*z4
ans =
   7.0000 - 1.0000i
>> z1^2
ans =
   8.0000 + 6.0000i
```

Συζυγής μιγαδικού

Για να πάρουμε τον συζυγή ενός μιγαδικού πρέπει να ακολουθήσουμε έναν από τους δύο ακόλουθους τρόπους:

```
>> z2=-1-3i;

>> conj(z2)
ans =
   -1.0000 + 3.0000i

>> z2'
ans =
   -1.0000 + 3.0000i
```

Πραγματικό και φανταστικό μέρος μιγαδικού

real – imag

Μπορούμε να βρούμε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού χρησιμοποιώντας τις εντολές real και imag, όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.

```
>> z2=(-1-3i)'
>> re=real(z2)
>> im=imag(z2)
```

↪ Για να εξετάσουμε αν ένας αριθμός έχει φανταστικό μέρος ίσο με το μηδέν (δηλαδή αν είναι πραγματικός) χρησιμοποιούμε την εντολή **isreal**, η οποία επιστρέφει την τιμή 1 αν είναι πραγματικός αριθμός και σε διαφορετική περίπτωση την τιμή μηδέν

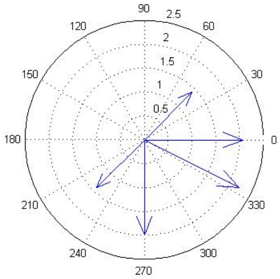
```
>> v=i^i;
>> isreal(v)
ans =
     1
```

Δισδιάστατο διάνυσμα μιγαδικού αριθμού

compass

Με την εντολή compass μπορούμε να παραστήσουμε γραφικά με ένα δισδιάστατο διάνυσμα έναν μιγαδικό αριθμό.
Αν χρησιμοποιήσουμε ένα διάνυσμα στηλη σαν όρισμα της εντολής compass τότε στη γραφική παράσταση εμφανίζονται όλοι οι μιγαδικοί αριθμοί.

```
>> z1=1+i;
>> z2=-1-1i;
>> z3=-2i;
>> z4=2-j;
>> z5=10*i^i;
>> compass([z1;z2;z3;z4;z5])
```



Μέτρο και όρισμα μιγαδικού αριθμού

abs – angle

Το μέτρο και το όρισμα του μιγαδικού αριθμού

$$z = a + bi$$

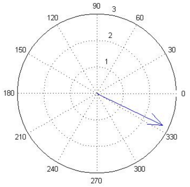
δίνονται από τις σχέσεις

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad Argz = tan^{-1}(b/a).$$

Στο MATLAB το μέτρο και το όρισμα ενός μιγαδικού αριθμού υπολογίζονται με τις εντολές abs και angle αντίστοιχα.

```
>> z=2.5-1.2i;
>> abs(z)
ans =
    2.7731
>> angle(z) % returns the angle in radians
ans =
   -0.4475
>> radtodeg(angle(z)) % Convert angles
                      % from radians to degrees
ans =
  -25.6410
```

```
>> compa
```



᾿σκηση

Να βρείτε το μέτρο και το όρισμα όλων των ριζών του πολυωνύμου με συντελεστές

$$1,\ \ 1,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ -11$$

Παλιά θέματα

Ποια από τις παρακάτω εντολές επιστρέφει το μέτρο των ριζών του πολυωνύμου $3x^4 + x^2 + x$;

```
1) abs(roots([3 1  1]))
2) roots(abs([3 1  1]))
3) abs(roots([3 0 1  1]))
4) roots(abs([3 0 1  1]))
5) other. . . . . . . . .
```

Παλιά θέματα

Να γραφεί ένα πρόγραμμα (αρχείο .m) το οποίο

1. θα ζητάει από το χρήστη να εισάγει έναν $nx4$ πίνακα, (θεωρούμε ότι ο πίνακας αυτός περιέχει τους συντελεστές ν πολυωνύμων 3ου βαθμού, άρα θεωρούμε ότι κάθε σειρά αποτελείται από τους συντελεστές ενός πολυωνύμου 3ου βαθμού).
2. Στη περίπτωση που ο χρήστης δεν εισάγει έναν $nx4$ πίνακα, το πρόγραμμα θα πρέπει να ζητάει επανειλημμένως από τον χρήστη να εισάγει έναν $nx4$ πίνακα μέχρις ότου αυτός το πράξει.
3. Στη συνέχεια το πρόγραμμα θα πρέπει να επιστρέφει τις ρίζες κάθε πολυωνύμου υπό μορφή ενός $nx3$ πίνακα.

Παλιά θέματα

Στις επόμενες διαφάνειες παρουσιάζεται ένα *script* αρχείο *m* που στόχο έχει την κατασκευή της γραφικής παράστασης ενός πολυωνύμου πάνω από ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ που ορίζει ο χρήστης καθώς και την σημείωση (με μια κάθετη γραμμή) των πραγματικών ριζών (αν υπάρχουν) του πολυωνύμου στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.
Ωστόσο, κάποια κομμάτια του μπορεί να είναι λάθος ή λείπουν κι έχουν αντικατασταθεί με ερωτηματικά (?)*.
Διορθώστε και συμπληρώστε το αρχείο.

Παλιά θέματα

```
coef=?('give the coefficients of an nth degree polynomial:');

? min(size(coef))~=1
    coef=?('give the coefficients of an nth degree polynomial:');
end

range=?('type the range [a,b] over which the polynomial will be plotted:');

? range(2)<=range(1) || size(range,1)==1 || size(range,2)==2
    ?('please type [a,b] with a<b')
    range=?('type the range [a,b] over which the polynomial will be plotted:');
end
a=range(1);
b=range(2);

rp=?(coef); %finds the roots

real_r=rp(?); %finds the real roots

m=0;
```

Παλιά θέματα

```
m= 0;
? k = 1:length(real_roots)
    ? real_r(k)<b && real_r>a
        m=m+1;
        roottoplot(m) = real_r(k);
    end
end

x = a:0.01:b;
plot(x,?(coef,x))
yLimits  =  get(gca,'YLim');
if ?
    for k = 1:length(roottoplot)
        line([roottoplot(k) roottoplot(k)], [yLimits(1) yLimits(2)])
?
```