

**ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ**  
**για ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ**

*Τεύχος 1*

## ΣΥΝΤΟΜΟ ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ

Ο Νικόλαος Ι. Ιωακειμίδης γεννήθηκε στην Καλλιθέα Αττικής το 1950. Τελείωσε το Γυμνάσιο (1965) και το Λύκειο (1968) στον Πειραιά. Είναι διπλωματούχος Μηχανολόγος-Ηλεκτρολόγος Μηχανικός (1973) του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου (Ε.Μ.Π.) και Διδάκτωρ Μηχανικός (1976) πάλι του Ε.Μ.Π. Η διπλωματική εργασία του (1973) και η διδακτορική διατριβή του (1976) αναφέρονται στην Ελαστικότητα και στη Θραυστομηχανική.

Από το 1970 σαν σπουδαστής ήταν ανεπίσημος συνεργάτης του Εργαστηρίου Αντοχής Υλικών του Ε.Μ.Π. Το 1976 υπήρξε ερευνητής στο ίδιο εργαστήριο. Από το 1976 μέχρι το 1980 ήταν Επιμελητής στις Έδρες Μηχανικής Α και Β του Ε.Μ.Π. Από το 1980 μέχρι το 1982 ήταν Έκτακτος Καθηγητής και από το 1982 μέχρι σήμερα είναι Καθηγητής της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Πατρών. Από το 1982 σαν Καθηγητής εργάζεται στο Γενικό Τμήμα στον Τομέα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Μηχανικής.

Στο Ε.Μ.Π. συμμετέσχε στα εργαστήρια Πειραματικής Αντοχής Υλικών και έκανε φροντιστήρια μαθημάτων Μηχανικής. Επίσης δίδαξε ένα εξάμηνο το μάθημα Αντοχή Υλικών. Στην Πολυτεχνική Σχολή του Πανεπιστημίου Πατρών δίδαξε μαθήματα Μαθηματικών, Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Πιθανοθεωρίας-Στατιστικής σε διάφορα τμήματα. Κατά τα τελευταία έτη διδάσκει αποκλειστικά στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών τα μαθήματα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II και III και εκτελεί τα σχετικά εργαστήρια στο Υπολογιστικό Κέντρο του Τμήματος. Διδάσκει επίσης το μεταπτυχιακό μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά πάλι στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών.

Το ερευνητικό έργο του αναφέρεται στη Μηχανική, τη Θραυστομηχανική, τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, τη Μιγαδική Ανάλυση, τις Ολοκληρωτικές Εξισώσεις, την Αριθμητική Ανάλυση (Αριθμητική Ολοκλήρωση και επίλυση Ολοκληρωτικών Εξισώσεων) και τους Συμβολικούς Υπολογισμούς στη Μηχανική. Είναι συγγραφέας και συσυγγραφέας πολλών επιστημονικών εργασιών που έχουν δημοσιευθεί στην Αγγλική γλώσσα σε πολλά διεθνή περιοδικά των πιο πάνω επιστημονικών περιοχών (και μία εργασία στη Θεωρία Προσεγγίσεως) σε διάφορες χώρες. Σαν μεγαλύτερη ερευνητική συμβολή του θεωρεί την αναγωγή προβλημάτων ρωγμών σε ιδιόμορφες και υπεριδιόμορφες ολοκληρωτικές εξισώσεις και την επίλυσή τους με χρήση της μεθόδου της αριθμητικής ολοκλήρωσεως.

Πέρα από τις επιστημονικές εργασίες του έχει κρίνει πολλές εργασίες άλλων συγγραφέων για διεθνή επιστημονικά περιοδικά της Μηχανικής, της Θραυστομηχανικής, των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και της Αριθμητικής Αναλύσεως. Υπήρξε κριτής για τα περιοδικά κριτικών *Applied Mechanics Reviews* και *Mathematical Reviews* και μέλος της Εκδοτικής Επιτροπής του περιοδικού *International Journal of Solids and Structures*.

Κατά τα τελευταία έτη καταβάλλει συστηματική προσπάθεια για την αναβάθμιση των μαθημάτων Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II και III που διδάσκει στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Πατρών: στην αίθουσα διδασκαλίας, στο εργαστήριο, μέσω συχνών εξετάσεων προόδου και εργαστηρίου και μέσω των διδακτικών αυτών βιβλίων Εφαρμοσμένων Μαθηματικών II και III που απευθύνονται αποκλειστικά σε Πολιτικούς Μηχανικούς και όχι γενικά σε Μηχανικούς. Στην προσπάθειά του αυτή έχει τύχει πολύτιμης βοήθειας και συμπαράστασής από κάθε μορφής από πολλούς συναδέλφους του καθώς και της ενεργής συμμετοχής των φοιτητών και φοιτητριών του Πολιτικών Μηχανικών και είναι ευγνώμων σε όλους και όλες γι' αυτά.

Τέλος στα Πανεπιστημιακά θέματα η θέση του ήταν και είναι υπέρ του Πανεπιστημίου στην κλασική του μορφή, όπως την έχει ζήσει και τη ζει και ο ίδιος επί πολλά χρόνια. Επομένως είναι εναντίον κάθε επιχειρηματικής ή οικονομικής διεισδύσεως τρίτων στον Πανεπιστημιακό χώρο. Είναι επίσης θερμός υποστηρικτής της ελεύθερης έρευνας στα Πανεπιστήμια με την έννοια ότι τα ερευνητικά αποτελέσματα πρέπει να είναι απόλυτα προσιτά σε κάθε μέρος του κόσμου χωρίς περιορισμούς μέσω της δημοσιεύσεώς τους είτε σε βιβλία είτε σε περιοδικά είτε στο διαδίκτυο. Τούτο έχει πράξει και ο ίδιος χωρίς καμία εξαίρεση.

---

# **ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ** *για ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ*

## *Τεύχος 1*

**ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ**

**ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ**

*για ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ*

---

***Νικόλαος Ι. Ιωακειμίδης***

*Τομέας Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Μηχανικής,  
Γενικό Τμήμα Πολυτεχνικής Σχολής Πανεπιστημίου Πατρών*

**Νικόλαος Ι. Ιωακειμίδης** (συγγραφέας, Γενικό Τμήμα, Πολυτεχνική Σχολή, Πανεπιστήμιο Πατρών)  
**ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ για ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ, Τεύχος 1:**  
**ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ για ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ**  
**1η Έκδοση: Φεβρουάριος 2008**

Copyright © 2008 GOTSIS Εκδόσεις

ISBN 978-960-98187-2-8 (Αυτό το τεύχος. Παράκληση για χρήση του ISBN για παραγγελίες.)

ISBN SET 978-960-98187-1-1 (Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙ για Πολιτικούς Μηχανικούς SET)

## **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ, ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑ ΜΕ ΤΟΝ ΕΚΔΟΤΗ**

Βιβλιοπωλείο «Γνώση», Οδός Αράτου 41, 262.21 ΠΑΤΡΑ

Τηλέφωνο: (+30) 2610 226453, Fax: (+30) 2610 226690,

E-mail: gnosis@otenet.gr

- Όλα τα δικαιώματα διατηρούνται από τις **GOTSIS Εκδόσεις**. Η πνευματική ιδιοκτησία αποκτάται χωρίς καμία διατύπωση και χωρίς την ανάγκη ρήτρας απαγορευτικής των προσβολών της. Σημειώνεται η ισχύς του Νόμου 2121/1993, όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει, και της διεθνούς συμβάσεως της Βέρνης για την πνευματική ιδιοκτησία, η οποία έχει κυρωθεί με το Νόμο 100/1975.
- Απαγορεύεται απολύτως η αναδημοσίευση ή η αναπαραγωγή αυτού του βιβλίου (ολική ή μερική είτε στην παρούσα μορφή του είτε σε παραφρασμένη ή διασκευασμένη μορφή του) ή η διανομή του με οποιοδήποτε τρόπο (αντιγραφή, φωτοτυπία, εκτύπωση, μικροφίλμ, σάρωση ή/και αποθήκευση σε αρχείο ή αρχεία υπολογιστή, διαθεσιμότητα σε ιστοσελίδα ή σε βάσεις δεδομένων, διανομή μέσω του διαδικτύου, ηχογράφηση ή γενικά με οποιοδήποτε μηχανικό ή ηλεκτρονικό ή άλλο τρόπο είτε ήδη διαθέσιμο σήμερα είτε που θα υπάρξει στο μέλλον) χωρίς τη ρητή γραπτή άδεια των **GOTSIS Εκδόσεις**. Επίσης ανάλογα απαγορεύεται και η ολική ή μερική μετάφραση του παρόντος βιβλίου και γενικότερα η κάθε μορφής εκμετάλλευσή του στο σύνολό του ή σε μέρος του.
- Εντούτοις χορηγείται από τώρα η άδεια συνηθισμένου απλού δανεισμού για μελέτη του βιβλίου αυτού από αναγνώστες και αναγνώστριες Πανεπιστημιακών και μη βιβλιοθηκών.

## **ΕΚΤΥΠΩΣΗ-ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ**

«Ταχύτυπο», Ταχυεκτυπώσεις – Γραβάνης Ε.Π.Ε., Πάροδος Διοδώρου 160, Βελβίτσι, 264.43 ΠΑΤΡΑ  
Τηλέφωνα: (+30) 2610 461780 έως (+30) 2610 461790, E-mail: info@tachytypo.gr

## **ΦΩΤΟΓΡΑΦΙΑ ΕΞΩΦΥΛΛΟΥ**

Η κεντρική είσοδος και ένα πολύ μικρό τμήμα του κτιρίου του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Πατρών στην Πανεπιστημιούπολη στο Ρίο Πατρών

## **ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑ ΜΕ ΤΟ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ**

**Νικόλαος Ι. Ιωακειμίδης**

Τομέας Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Μηχανικής

Γενικό Τμήμα, Πολυτεχνική Σχολή, Πανεπιστήμιο Πατρών

Πανεπιστημιούπολη Πατρών, 265.04 ΡΙΟ, ΠΑΤΡΑ

Τηλέφωνα: (+30) 2610 432257, (+30) 2610 997378,

E-mail: n.ioakimidis@upatras.gr, <http://www.des.upatras.gr/amm/ioakimidis/ioakimidis.htm>

## **ΑΠΟΠΟΙΗΣΗ ΕΥΘΥΝΗΣ**

Τόσο ο συγγραφέας όσο και ο εκδότης κατέβαλαν κάθε δυνατή προσπάθεια, ώστε το παρόν βιβλίο ακόμη και στην παρούσα 1η Έκδοσή του να μην περιέχει οποιασδήποτε μορφής λάθη. Εντούτοις είναι προφανές ότι αυτό δεν είναι απόλυτα δυνατόν να συμβεί. Επομένως δεν μπορούν να αναλάβουν καμιάς μορφής ευθύνη για οποιαδήποτε άμεση ή έμμεση ζημιά που θα μπορούσε να προκύψει στο χρήστη και στη χρήστρια αυτού του βιβλίου από λάθη που έχουν παρεισφύσει. Παράκληση για την ενημέρωσή τους για κάθε λάθος, ώστε αυτό να διορθωθεί στην επόμενη έκδοση.

**ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ**  
**για ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ**

**Τεύχος 1**

---

**Μέρος** *A*

**ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΣΥΝΗΘΕΙΣ**  
**ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ**  
**για ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ**

---

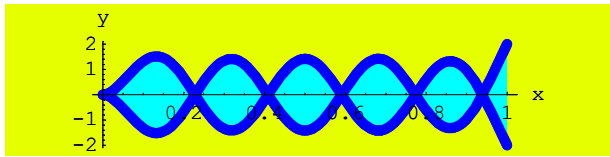
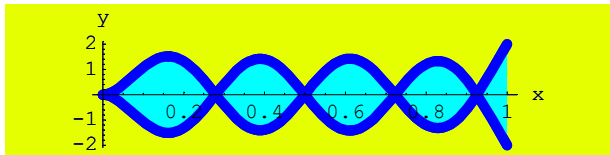
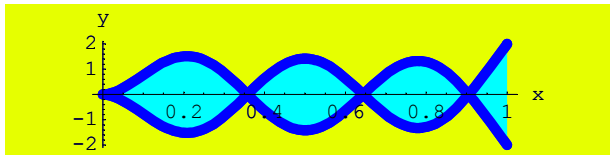
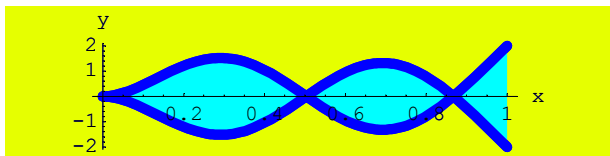
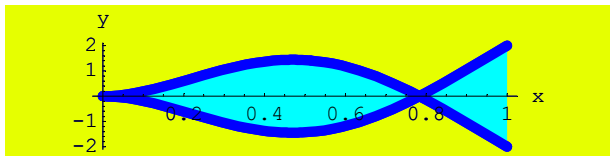
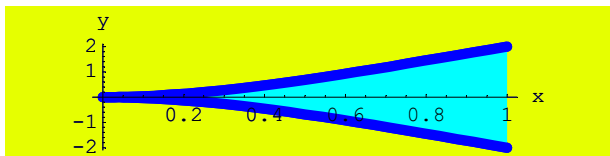
**ΙΔΙΟΜΟΡΦΕΣ ΚΑΜΠΤΙΚΩΝ ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ:** Οι ιδιομορφές των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων δοκού αποτελούν ενδιαφέρον θέμα του Πολιτικού Μηχανικού. Το όλο πρόβλημα ανάγεται τελικά σε συνήθη διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως, στην εξίσωση  $X''''(x) - \beta^4 X(x) = 0$  μαζί με τις αναγκαίες συνοριακές συνθήκες. Με τη χρήση της *Mathematica* προσδιορίστηκαν οι ιδιομορφές στις καμπτικές ιδιοταλαντώσεις του προβόλου του πρώτου σχήματος. Οι πρώτες έξι φαίνονται στα επόμενα έξι σχήματα.

```
Needs["Graphics`FilledPlot`"];
```

```
Plot[0, {x, 0, 1}, PlotStyle -> Thickness[0.06], AxesLabel -> {x, y},
  PlotLabel -> FontForm["CANTILEVER BEAM", {"Arial - BoldItalic", 16}],
  AspectRatio -> 0.25, Background -> RGBColor[0.9, 1, 0]];
```



```
Table[FilledPlot[{y[n, x] /. L -> 1, -y[n, x] /. L -> 1}, {x, 0, 1},
  PlotStyle -> Thickness[0.025], AxesLabel -> {x, y}, AspectRatio -> 0.25,
  Background -> RGBColor[0.9, 1, 0]], {n, 6}];
```



## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

• <b>ΙΔΙΟΜΟΡΦΕΣ ΚΑΜΠΤΙΚΩΝ ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ</b>	vi
• <b>ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ</b>	vii-x
• <b>ΠΡΟΛΟΓΟΣ</b>	xi-xii
• <b>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ</b>	xiii-xiv
• <b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α1: ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ</b>	<b>1-32</b>
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 32 σελίδες)</i>	1
A1.1. Εισαγωγικό Παράδειγμα: το Μηχανικό Σύστημα Μάζας-Ελατηρίου	2
A1.2. Ο Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα	4
A1.3. Ταξινομήσεις και Χαρακτηρισμοί Διαφορικών Εξισώσεων	6
A1.4. Γραμμικοποίηση Μη Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων	16
A1.5. Τριγωνομετρικές και Υπερβολικές Συναρτήσεις	17
A1.6. Λύσεις Διαφορικών Εξισώσεων	19
A1.7. Επαλήθευση Λύσεων Διαφορικών Εξισώσεων	21
A1.8. Σχηματισμός Διαφορικών Εξισώσεων	25
A1.9. Προβλήματα Αρχικών και Συνοριακών Τιμών	31
• <b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α2: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΠΟΛΙΤΙΚΟ ΜΗΧΑΝΙΚΟ</b>	<b>33-52</b>
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 20 σελίδες)</i>	33
A2.1. Μηχανική των Υλικών: Συνήθης Δοκός σε Κάμψη	33
A2.2. Ταλαντώσεις: Ενεργειακή Θεώρηση των Ελεύθερων Ταλαντώσεων	46
A2.3. Θεμελιώσεις: Αξονική Φόρτιση Πασσάλου	47
A2.4. Ρευστομηχανική: Ροή Νευτώνειου Ρευστού σε Σωλήνα	49
A2.5. Περιβαλλοντική Υδραυλική: Αποδόμηση Ρύπου σε Υδατόρρευμα	51
• <b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α3: ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ:</b>	
<b>ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ</b>	<b>53-98</b>
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 46 σελίδες)</i>	53
A3.1. Διαφορικές Εξισώσεις που Επιλύονται με Άμεση Ολοκλήρωση	54
A3.2. Διαφορικές Εξισώσεις Χωριζόμενων Μεταβλητών	59
A3.3. Ομογενείς Διαφορικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξεως	65
A3.4. Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξεως	68
A3.5. Διαφορικές Εξισώσεις Bernoulli	80
A3.6. Πλήρεις (ή Ακριβείς) Διαφορικές Εξισώσεις	87
A3.7. Ολοκληρωτικοί Παράγοντες	93
A3.8. Η Μέθοδος των Διαδοχικών Προσεγγίσεων του Picard	95
• <b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α4: ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ:</b>	
<b>ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ</b>	<b>99-110</b>
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 12 σελίδες)</i>	99
A4.1. Περιβαλλοντική Μηχανική: Αποδόμηση Ρύπου	100
A4.2. Ρευστομηχανική: Ταχύτητα Ιδεατού Ρευστού σε Άκρο Σωλήνα	101
A4.3. Δυναμική: Πτώση Υλικού Σημείου	103
A4.4. Ορθογώνιες Τροχιές και Εφαρμογές τους στη Ρευστομηχανική	106

• <b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α5: ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ:</b>	
<b>ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ</b>	<b>111-182</b>
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 72 σελίδες)</i>	111
A5.1. Γραμμικά Ανεξάρτητες Συναρτήσεις	112
A5.2. Η Ορίζουσα Wronski	115
A5.3. Θεωρία Λύσεων Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων	121
A5.4. Η Μέθοδος του Υποβιβασμού της Τάξεως	123
A5.5. Η Μέθοδος της Εκθετικής Αντικατάστασης	125
A5.6. Εξισώσεις Euler	145
A5.7. Μη Ομογενείς Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις	148
A5.8. Η Μέθοδος των Προσδιοριστέων Συντελεστών	150
A5.9. Η Μέθοδος της Μεταβολής των Παραμέτρων	173
• <b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α6: ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ:</b>	
<b>ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ</b>	<b>183-198</b>
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 16 σελίδες)</i>	183
A6.1. Αρμονική Φόρτιση Συστήματος Μάζας-Ελατηρίου-Αποσβεστήρα	183
A6.2. Γενική Φόρτιση Συστήματος Μάζας-Ελατηρίου-Αποσβεστήρα	195
• <b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α7: ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ:</b>	
<b>ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ</b>	<b>199-206</b>
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 8 σελίδες)</i>	199
A7.1. Δοκός-Στύλος με Αρχικό Βέλος Κάμψεως υπό Θλιπτικό Φορτίο	199
A7.2. Δοκός υπό Αυθαίρετη Κατανεμημένη Κάθετη Φόρτιση	203
• <b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α8: ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ:</b>	
<b>ΆΛΛΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ</b>	<b>207-212</b>
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 6 σελίδες)</i>	207
A8.1. Πλάκες: Κάμψη Κυκλικής Πλάκας υπό Ομοιόμορφη Φόρτιση	207
A8.2. Θεμελιώσεις: Αξονική Φόρτιση Πασσάλου	211
A8.3. Περιβαλλοντική Υδραυλική: Μεταφορά Ρύπου σε Υδατόρρευμα	212
• <b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α9: ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ</b>	<b>213-232</b>
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 20 σελίδες)</i>	213
A9.1. Ελαστική Ευστάθεια: Λυγισμός Στύλου	214
A9.2. Δυναμική των Κατασκευών: Καμπτικές Ιδιοταλαντώσεις Δοκού	226
• <b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α10: Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ LAPLACE:</b>	
<b>ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ</b>	<b>233-268</b>
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 36 σελίδες)</i>	233
A10.1. Ολοκληρωτικοί Μετασχηματισμοί	234
A10.2. Ο Μετασχηματισμός Laplace	235
A10.3. Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Laplace	242
A10.4. Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace	259
A10.5. Επίλυση Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων	261
A10.6. Η Συνάρτηση δέλτα του Dirac	264
A10.7. Πίνακες για το Μετασχηματισμό Laplace	266



● <b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α11: Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ LAPLACE: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ</b>	<b>269-314</b>
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 46 σελίδες)</i> .....	269
A11.1. Εισαγωγή .....	270
A11.2. Μετάδοση Θερμότητας: Ψύξη Υλικού Σημείου .....	271
A11.3. Κίνηση Υλικού Σημείου με Αντίσταση .....	276
A11.4. Ισοελαστικότητα .....	278
A11.5. Ελεύθερες Ταλαντώσεις χωρίς Απόσβεση .....	279
A11.6. Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις χωρίς Απόσβεση .....	281
A11.7. Ελεύθερες Ταλαντώσεις με Ασθενή Απόσβεση .....	284
A11.8. Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις με Ασθενή Απόσβεση .....	286
A11.9. Συντονισμός .....	288
A11.10. Ωστική Απόκριση Μηχανικού Συστήματος .....	294
A11.11. Ελαστική Γραμμή Δοκού σε Κάμψη .....	295
A11.12. Καμπτικές Ιδιοταλαντώσεις Δοκού .....	299
A11.13. Δοκός επί Ελαστικής Βάσεως .....	301
A11.14. Συγκεντρωμένο Φορτίο σε Πρόβολο .....	303
A11.15. Συναρτήσεις Macaulay .....	305
A11.16. Χημική Κινητική: Αποδόμηση Ρύπου Πρώτης Τάξεως .....	307
A11.17. Περιβαλλοντική Μηχανική: Μεταφορά Ρύπου σε Υδατόρρευμα .....	309
● <b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α12: ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΙΣΩΣΕΩΝ: ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ</b>	<b>315-364</b>
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 50 σελίδες)</i> .....	315
A12.1. Εισαγωγικό Παράδειγμα και οι Βασικές Έννοιες .....	316
A12.2. Το Σύστημα των Διαφορικών Εισώσεων στη Δοκό .....	321
A12.3. Χρήση Μητρώων σε Γραμμικά Συστήματα Διαφορικών Εισώσεων .....	324
A12.4. Παράδειγμα Συστήματος Διαφορικών Εισώσεων .....	327
A12.5. Η Μέθοδος της Απαλοιφής .....	329
A12.6. Η Μέθοδος του Μετασχηματισμού Laplace .....	334
A12.7. Η Μέθοδος της Εκθετικής Αντικαταστάσεως .....	343
A12.8. Η Μέθοδος της Τριγωνομετρικής Αντικαταστάσεως .....	351
A12.9. Η Μέθοδος της Διαγωνιοποίησης .....	354
A12.10. Σύγκριση των Μεθόδων και Συμπέρασμα .....	364
● <b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α13: ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΙΣΩΣΕΩΝ: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ</b>	<b>365-396</b>
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 32 σελίδες)</i> .....	365
A13.1. Μηχανικό Σύστημα Δύο Υλικών Σημείων και Δύο Ελατηρίων .....	366
A13.2. Ιδεατό Διώροφο Κτίριο Διατμήσεως .....	368
A13.3. Επίλυση του Συστήματος των Εισώσεων για το Διώροφο Κτίριο .....	373
A13.4. Η Μέθοδος της Διαγωνιοποίησης στη Δυναμική των Κατασκευών .....	384
● <b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α14: Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΩΝ</b>	<b>397-408</b>
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 12 σελίδες)</i> .....	397
A14.1. Δυναμοσειρές .....	398
A14.2. Εφαρμογή στο Μηχανικό Σύστημα Μάζας-Ελατηρίου-Αποσβεστήρα .....	399
A14.3. Εφαρμογή στις Καμπτικές Ιδιοταλαντώσεις Δοκού .....	402
A14.4. Εφαρμογή στη Συμμετρική Παραμόρφωση Ελαστικού Κυλίνδρου .....	406

• <b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α15: ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ LEGENDRE ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ BESSEL</b>	<b>409-426</b>
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 18 σελίδες)</i>	409
Α15.1. Πολυώνυμα Legendre	410
Α15.2. Συναρτήσεις Bessel	414
• <b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α16: Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΣΕΙΡΩΝ FOURIER:</b>	
<b>ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ</b>	<b>427-438</b>
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 12 σελίδες)</i>	427
Α16.1. Ορθογώνιες Συναρτήσεις	428
Α16.2. Σειρές Fourier	432
• <b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α17: Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΣΕΙΡΩΝ FOURIER:</b>	
<b>ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ</b>	<b>439-446</b>
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 8 σελίδες)</i>	439
Α17.1. Περιοδική Φόρτιση Συστήματος Μάζας-Ελατηρίου-Αποσβεστήρα	439
Α17.2. Απόκριση του Μηχανικού Συστήματος σε Περιοδική Φόρτιση	441
Α17.3. Μιγαδική ή Εκθετική Σειρά Fourier	444
Α17.4. Μιγαδική Έκφραση της Αποκρίσεως του Μηχανικού Συστήματος	446
• <b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α18: Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER:</b>	
<b>ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ</b>	<b>447-456</b>
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 10 σελίδες)</i>	447
Α18.1. Ο Μετασχηματισμός Fourier	447
Α18.2. Απλά Παραδείγματα Μετασχηματισμών Fourier	451
Α18.3. Βασικές Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier	453
• <b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α19: Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER:</b>	
<b>ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ</b>	<b>457-470</b>
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 14 σελίδες)</i>	457
Α19.1. Μη Περιοδική Φόρτιση Συστήματος Μάζας-Ελατηρίου-Αποσβεστήρα	458
Α19.2. Περιβαλλοντική Μηχανική: Αποδόμηση Ρύπου	461
Α19.3. Διακριτός και Ταχύς Μετασχηματισμός Fourier, Διακριτή Συνέλιξη	465
• <b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α20: ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ</b>	<b>471-478</b>
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 8 σελίδες)</i>	471
Α20.1. Προσεγγιστικές Μέθοδοι	472
Α20.2. Αριθμητικές Μέθοδοι	474
• <b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b> (4 σελίδες)	<b>479-482</b>

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το παρόν Τεύχος 1 του συγγράμματος **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II για Πολιτικούς Μηχανικούς** καλύπτει το Μέρος Α της θεωρίας των **Εφαρμοσμένων Μαθηματικών II και III για Πολιτικούς Μηχανικούς**, το οποίο αφορά στις **Εφαρμοσμένες Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις για Πολιτικούς Μηχανικούς**. Ειδικότερα στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πατρών το πιο πάνω σύγγραμμα **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II για Πολιτικούς Μηχανικούς** προορίζεται για το αντίστοιχο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II του δεύτερου εξαμήνου σπουδών.

Τα υπόλοιπα τρία μέρη της θεωρίας αφορούν στις **Εφαρμοσμένες Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους για Πολιτικούς Μηχανικούς** (το Μέρος Β), στις **Εφαρμοσμένες Ολοκληρωτικές Εξισώσεις για Πολιτικούς Μηχανικούς** (το Μέρος Γ) και στις **Εφαρμοσμένες Μηγαδικές Συναρτήσεις για Πολιτικούς Μηχανικούς** (το Μέρος Δ). Αυτά τα Μέρη Β, Γ και Δ αποτελούν (και τα τρία μαζί) το Τεύχος 1 του δεύτερου συγγράμματος **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III για Πολιτικούς Μηχανικούς**. Στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πατρών το σύγγραμμα αυτό προορίζεται για το επόμενο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III του τρίτου εξαμήνου σπουδών.

Σύμφωνα με τη σύγχρονη άποψη (που υιοθετείται και εδώ χωρίς επιφυλάξεις) σαν θεωρία στο παρόν Τεύχος 1 του συγγράμματος **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II για Πολιτικούς Μηχανικούς** δε νοείται μόνο η ίδια η θεωρία, αλλά και τα παραδείγματα και οι εφαρμογές στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού που τη συνοδεύουν. Οι εφαρμογές αυτές προέρχονται εδώ από τη Δυναμική και τις Ταλαντώσεις (πτώση υλικού σημείου, όλα τα βασικά είδη ταλαντώσεων και συντονισμός), τη Μηχανική των Υλικών (δοκοί, δοκοί επί ελαστικής βάσεως, λυγισμός στύλου στην Ελαστική Ευστάθεια, ισοελαστικότητα και ερπυσμός), τις Πλάκες (κυκλική πλάκα), τη Δυναμική των Κατασκευών (ταλαντώσεις ιδεατού κτιρίου διατμήσεως), τις Θεμελιώσεις (πάσσαλος θεμελιώσεως στο έδαφος), τη Ρευστομηχανική (μόνιμη ροή ιξώδους ρευστού σε σωλήνα, ταχύτητα ροής ιδεατού ρευστού από το άκρο σωλήνα, γραμμές ροής), την Περιβαλλοντική Υδραυλική (μεταφορά και αποδόμηση ρύπου σε υδατόρρευμα) και την Περιβαλλοντική Μηχανική γενικότερα (αποδόμηση ρύπου).

Το παρόν Τεύχος 1 των **Εφαρμοσμένων Μαθηματικών II για Πολιτικούς Μηχανικούς** συμπληρώνεται από δύο ακόμη (αλλά μικρότερα) τεύχη: Το Τεύχος 2 με τίτλο **Εφαρμοσμένες Ασκήσεις και Notebooks II**, το οποίο περιλαμβάνει τις άλυτες (αλλ' εφαρμοσμένες) ασκήσεις για το φοιτητή και τη φοιτήτρια Πολιτικό Μηχανικό και επίσης δύο notebooks της Mathematica με εφαρμογές και δύο ακόμη ανάλογα notebooks για animations (κινούμενα σχήματα). Τέλος το Τεύχος 3 με τίτλο **Χρήσιμες Εντολές της Mathematica** αποτελεί ουσιαστικά ένα εκτενές «ευρετήριο» των κυριότερων εντολών της Mathematica που χρειάζεται ο Πολιτικός Μηχανικός, ώστε να μπορεί να λύνει με χρήση της Mathematica ασκήσεις σχετικές με το παρόν μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II, αλλά και με το επόμενο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III και με άλλα μαθήματά του γενικότερα.

Εξαιρώντας την έμφαση η οποία δίνεται σ' αυτό το βιβλίο σε προβλήματα της Επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού, κατά τα λοιπά καλύπτεται σε μεγάλο μέρος η γνωστή ύλη των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων που είναι διαθέσιμη στα κλασικά διδακτικά βιβλία. Η ύλη του βιβλίου αυτού αναφέρεται εκτενώς στον πίνακα των περιεχομένων του στις προηγούμενες τέσσερις σελίδες, που δεν υπάρχει λόγος να επαναληφθεί, και κατανέμεται σε είκοσι κεφάλαια, άλλα μικρότερης κι άλλα μεγαλύτερης έκτασης. Σε ορισμένα σημεία η παρούσα ύλη υστερεί σχετικά με εκείνη στα κλασικά διδακτικά βιβλία. Τέτοιες περιπτώσεις αφορούν π.χ. σε ειδικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως, σε αρκετά θέματα της μεθόδου των δυναμοσειρών και σε θεωρητικές διερευνήσεις της υπάρξεως και μοναδικότητας των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων. Αυτά έχουν παραλειφθεί.

Αντίθετα έχουν περιληφθεί και κεφάλαια που σπάνια αποτελούν μέρος των διδακτικών βιβλίων για τις Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις, π.χ. η χρήση των μεθόδων των σειρών Fourier καθώς και του μετασχηματισμού Fourier στην επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων που φθάνουν μέχρι το διακριτό μετασχηματισμό Fourier και τη διακριτή συνέλιξη. Έντονη έμφαση δίνεται επίσης και σε προβλήματα συνοριακών τιμών και ιδιοτιμών του Πολιτικού Μηχανικού και ακόμη μεγαλύτερη έμφαση σε θέματα ταλαντώσεων ιδεατών κτιρίων διατήσεως στη Δυναμική των Κατασκευών. Βασικά ακολουθήθηκε η ακόμη και σήμερα πιο διαδεδομένη μέθοδος της αντιμετώπισης των προβλημάτων της Δυναμικής των Κατασκευών με τη χρήση συστημάτων διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξεως (εξαιτίας της ισχύος του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα) και όχι πρώτης τάξεως.

Πέρα από τον προσανατολισμό του παρόντος βιβλίου για τις Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού δίνεται επίσης έμφαση στη δυνατότητα σχετικά εύκολης κατανόησής του από το μέσο φοιτητή και τη μέση φοιτήτρια Πολιτικό Μηχανικό. Για το σκοπό αυτό έγινε μια έντονη προσπάθεια να είναι γραμμένο απλά, πάρα πολύ απλά, παρόλο που αυτό συνεπάγεται πολύ μεγαλύτερη έκτασή του, και επίσης σε όχι ιδιαίτερα υψηλό μαθηματικό επίπεδο.

Είμαι πραγματικά, ειλικρινέστατα πολύ ευτυχής για τη συνεχή ενθάρρυνση και τη βοήθεια που μου δόθηκε και μου δίνεται από τους συναδέλφους μου στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών ως προς τα μαθήματα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II και III που μου έχουν ανατεθεί μέσω του Γενικού Τμήματος. Ας μου επιτραπεί να αναφερθώ ιδιαίτερα στο συνάδελφο Καθηγητή κ. Δημήτριο Μπέσκο του Τομέα Κατασκευών και να τον ευχαριστήσω θερμά. Αυτός μου υπέδειξε την πιθανή χρησιμότητα μιας προσπάθειας προετοιμασίας διδακτικών συγγραμμάτων για τα δύο αυτά μαθήματα. Ακόμη όμως μεγαλύτερη ενθάρρυνση μου έδωσαν η συνεργασία, η συνέπεια κι ο ζήλος των φοιτητών και φοιτητριών μου Πολιτικών Μηχανικών στα μαθήματα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών II και III.

Θα αποτελούσε ιδιαίτερη χαρά και τιμή μου αν το παρόν βιβλίο για τις **Εφαρμοσμένες Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις για Πολιτικούς Μηχανικούς** μπορούσε να συμβάλει, έστω και πάρα πολύ λίγο, στην καλύτερη μελέτη του ενδιαφέροντος αυτού θέματος από τους φοιτητές και τις φοιτήτριες Πολιτικούς Μηχανικούς. Σ' αυτούς και σ' αυτές απευθύνεται το βιβλίο αυτό, όπως φαίνεται κι από τον τίτλο του, και όχι σε κάθε φοιτητή και φοιτήτρια έστω και Μηχανικό. Πρόκειται, νομίζω, για ένα βιβλίο κάπως διαφορετικό στο περιεχόμενό του και στους στόχους του από τα αναμφίβολα πάρα πολύ αξιολογότερα διδακτικά βιβλία για τις Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις που είναι διαθέσιμα.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τις GOTSIS Εκδόσεις στην Πάτρα και ιδιαίτερα τον υπεύθυνό τους κ. Άγγελο Γκότση για το ενδιαφέρον τους στο παρόν βιβλίο και την τόσο επιμελημένη προετοιμασία και εκτύπωσή του. Πρόκειται για μια ιδιαίτερα αξιέπαινη πρωτοβουλία των GOTSIS Εκδόσεων και μάλιστα ουσιαστικά χωρίς ιδιαίτερο οικονομικό όφελος. Το τελευταίο δυστυχώς ισχύει εξαιτίας του εξειδικευμένου χαρακτήρα των διδακτικών αυτών βιβλίων που δεν επιτρέπει τη διάθεσή τους σε ευρύ αναγνωστικό κοινό περιορίζοντάς τη σε Πολιτικούς Μηχανικούς.

Εντούτοις θεωρώ πως είναι προτιμότερο να διαθέτουν οι φοιτητές και οι φοιτήτριες Πολιτικού Μηχανικού τα «δικά τους» βιβλία Εφαρμοσμένων Μαθηματικών. Με τα συγγράμματα **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II και III για Πολιτικούς Μηχανικούς** γίνεται προσπάθεια να καταστεί εμφανές ότι τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II και III δεν είναι αποκομμένα από τα άλλα μαθήματα που διδάσκεται ο Πολιτικός Μηχανικός, αλλά είναι φυσιολογικά συνδεδεμένα με αυτά σε μια αλυσίδα γνώσεων.

Τελειώνοντας, θα ήθελα να σημειώσω ότι με πολύ μεγάλη χαρά μου θα δεχθώ κάθε υπόδειξη για τη βελτίωση αυτού του βιβλίου είτε με τη διόρθωση λαθών και σημείων με ασάφειες που έχουν παρεισφύσει είτε με ουσιαστικότερες υποδείξεις ως προς την επιλογή του περιεχομένου, των παραδειγμάτων και των εφαρμογών, κλπ. Θα είμαι πραγματικά ευγνώμων για κάθε τέτοια υπόδειξη!

Πάτρα, Φεβρουάριος 2008

Νικόλαος Ι. Ιωακείμης

e-mail: n.ioakimidis@upatras.gr

## ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

### • ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΓΙΑ ΤΟ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ

Το περιεχόμενο στο παρόν **Μέρος Α** των διδακτικών βιβλίων *Εφαρμοσμένων Μαθηματικών για Πολιτικούς Μηχανικούς*, που αφορά στις *Εφαρμοσμένες Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις για Πολιτικούς Μηχανικούς*, είναι απόλυτα κλασικό (τόσο στη θεωρία όσο και στις εφαρμογές) και βασίζεται στη σχετική εκτενέστατη μαθηματική και τεχνική βιβλιογραφία. Τα ίδια ισχύουν και για τα περιεχόμενα στο **Μέρος Β** για τις *Εφαρμοσμένες Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους για Πολιτικούς Μηχανικούς*, στο **Μέρος Γ** για τις *Εφαρμοσμένες Ολοκληρωτικές Εξισώσεις για Πολιτικούς Μηχανικούς* καθώς και **Μέρος Δ** για τις *Εφαρμοσμένες Μιγαδικές Συναρτήσεις για Πολιτικούς Μηχανικούς*. Η συμβολή του γράφοντα περιορίζεται απλά στον τρόπο παρουσίσεως της τόσο κλασικής αυτής ύλης, που δίνει έντονη έμφαση στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού.

### • ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΣΗ ΤΩΝ ΤΥΠΩΝ

Οι μαθηματικοί τύποι αριθμούνται ανά κεφάλαιο και ενότητα. Ο κάθε τύπος έχει το δικό του αριθμό στη μορφή: αριθμός κεφαλαίου, τελεία, αριθμός ενότητας, τελεία, αριθμός τύπου, όπως ακριβώς γίνεται και στα περισσότερα επιστημονικά βιβλία. Δεν υπάρχει έτσι περίπτωση συγχύσεως στην αρίθμηση των τύπων. Πολύτιμος βοηθός για τις αναφορές από το κείμενο σε μαθηματικούς τύπους (σε κάθε ενότητα χωριστά) υπήρξε το γνωστό πρόγραμμα στοιχειοθεσίας  $\text{\TeX}$ , το οποίο έχει φυσικά και το πλεονέκτημα ότι δεν κάνει λάθη σ' αυτό το τόσο χρήσιμο έργο του.

### • ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΓΙΑ ΤΗ ΣΤΟΙΧΕΙΟΘΕΣΙΑ

Η βασική γραμματοσειρά στα παρόντα διδακτικά βιβλία είναι η Optima, μια γραμματοσειρά κυρίως νεοκλασικού τύπου. Η Optima σχεδιάστηκε από το διάσημο σχεδιαστή γραμματοσειρών Hermann Zapf μεταξύ των ετών 1952 και 1955 και διατέθηκε εμπορικά αρχικά από την εταιρεία Linotype το 1958. Η Ελληνική παραλλαγή της, η MgOptima, που χρησιμοποιείται εδώ, διατίθεται από την εταιρεία Magenta στην Αθήνα σε CD-ROM Ελληνικών γραμματοσειρών. Και η Ελληνική παραλλαγή της Optima, η Optima Greek, σχεδιάστηκε αρχικά από τον ίδιο το Zapf και κυκλοφόρησε πρώτα επίσης από τη Linotype το 1971.<sup>1</sup> Το κείμενο και οι μαθηματικοί τύποι στοιχειοθετήθηκαν με τα προγράμματα στοιχειοθεσίας Y&Y  $\text{\TeX}$  και  $\text{\LaTeX}$  στην Ελληνική παραλλαγή τους. Τα προγράμματα αυτά είναι ισχυρότατα ιδίως για τη στοιχειοθεσία μαθηματικού κειμένου και υποστηρίζουν γραμματοσειρές PostScript. Τα τελικά αρχεία είναι σε μορφές DVI (Device Independent) και PDF (Portable Document Format). Φυσικά, όπως συμβαίνει συνήθως, στην τελική εκτύπωση χρησιμοποιήθηκε η μορφή PDF. Αυτή είναι και η πιο εύχρηστη και γενικά χρησιμοποιούμενη στις εκτυπώσεις.

<sup>1</sup>Όλες αυτές οι πληροφορίες για τη γραμματοσειρά Optima προέρχονται από το τόσο ενδιαφέρον βιβλίο του Brighurst, R. (2001), *Στοιχεία της Τυπογραφικής Τέχνης* (Ελληνική μετάφραση του Αγγλικού πρωτότυπου: *The Elements of Typographic Style*, 2η Έκδοση. Hartley & Marks, 1996). Εταιρεία Ελληνικών Τυπογραφικών Στοιχείων και Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, σ. 292.

Ενδιαφέροντα σχόλια για την Optima αναφέρονται επίσης και στο βιβλίο των Grosvenor, J., Morrison, K. and Pim, A. (1992), *The PostScript Font Handbook: A Directory of Type 1 Fonts* (αναθεωρημένη έκδοση). Addison-Wesley, Wokingham, England, σ. 308. Μεταξύ αυτών των σχολίων αναφέρεται ότι η Optima είναι ίσως η πιο πρωτότυπη σχεδίαση (γραμματοσειράς εννοείται) του Hermann Zapf. Επίσης η εμφάνισή της το 1958 προκάλεσε «θόρυβο» στον κόσμο της τυπογραφίας. Έχει αρκετά παχείς και σαφείς χαρακτήρες και θεωρείται κατάλληλη όχι μόνο για τίτλους, αλλά και για συνεχές κείμενο, όπως συμβαίνει εδώ.

• ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΓΙΑ ΤΟ ΣΧΗΜΑ ΣΤΗ ΣΕΛΙΔΑ ΠΡΙΝ ΤΑ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Το σχήμα αυτό αναφέρεται στις ιδιομορφές ταλαντώσεως προβόλου μοναδιαίου μήκους  $L = 1$  υπό καμπτικές ιδιοταλαντώσεις. Ο πρόβολος είναι πακτωμένος στο αριστερό του άκρο  $x = 0$  και ελεύθερος στο δεξιό του άκρο  $x = 1$ . Η σχετική συνήθης διαφορική εξίσωση έχει τη μορφή

$$X''''(x) - \beta^4 X(x) = 0.$$

Η σταθερά  $\beta$  εξαρτάται τόσο από τις ιδιότητες του προβόλου (διατομή και υλικό) όσο και από την (κυκλική) ιδιοσυχνότητα  $\omega$  των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων του προβόλου. Πρόκειται για μια ομογενή γραμμική συνήθη διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως με σταθερούς συντελεστές. Η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η θέση  $x$  κατά μήκος του προβόλου:  $0 \leq x \leq 1$ . Η άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) είναι η συνάρτηση των ιδιομορφών  $X(x)$ . Αυτή εκφράζει τη χωρική συνιστώσα των ιδιοταλαντώσεων του προβόλου, κάτι σαν το προσημασμένο εύρος τους.

Βέβαια η διαφορική αυτή εξίσωση, επειδή είναι τετάρτης τάξεως, απαιτεί τη διαθεσιμότητα και τεσσάρων συνθηκών. Οι συνθήκες αυτές είναι στο παρόν πρόβλημα συνοριακές συνθήκες και αναφέρονται και στα δύο άκρα του προβόλου. Συγκεκριμένα στο πακτωμένο αριστερό άκρο  $x = 0$  του προβόλου έχουμε μηδενικό βέλος κάμψεως  $X$  καθώς και μηδενική στροφή  $\theta$ . Έτσι προκύπτουν οι εξής δύο συνθήκες:

$$X(0) = 0 \quad \text{και επίσης} \quad \theta(0) = 0 \quad \implies \quad X'(0) = 0.$$

Επιπλέον στο ελεύθερο δεξιό άκρο  $x = 1$  του προβόλου έχουμε μηδενική καμπτική ροπή  $M$  καθώς και μηδενική τέννουσα δύναμη  $Q$ . Έτσι προκύπτουν οι ακόλουθες δύο συνθήκες:

$$M(1) = 0 \quad \implies \quad X''(1) = 0 \quad \text{και επίσης} \quad Q(1) = 0 \quad \implies \quad X'''(1) = 0.$$

Με διαθέσιμες πλέον τέσσερις συνολικά συνοριακές συνθήκες, μπορούμε να προσδιορίσουμε τις ιδιομορφές  $X_n(x)$  στο παρόν πρόβλημα συνοριακών τιμών. Ουσιαστικά έχουμε ένα πρόβλημα προσδιορισμού των ιδιοσυχνοτήτων  $\omega_n$  του προβόλου και μετά των αντίστοιχων ιδιομορφών  $X_n(x)$ . Τέτοια προβλήματα συνοριακών τιμών θα μάθουμε να αντιμετωπίζουμε στο Κεφάλαιο Α9.

Στο παρόν διδακτικό βιβλίο στη σελίδα πριν τα Περιεχόμενα απλά σχεδιάσαμε πρόχειρα τον πρόβολο (στο πρώτο σχήμα), φυσικά με τη βοήθεια της *Mathematica* σε όλους τους υπολογισμούς και στη σχεδίαση. Στη συνέχεια στα επόμενα έξι σχήματα σχεδιάσαμε τις έξι πρώτες ιδιομορφές ταλαντώσεως  $X_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots, 6$ ) στις παρούσες ιδιοταλαντώσεις του προβόλου. (Οι εντολές των υπολογισμών που έγιναν δεν αναφέρονται. Μόνο οι εντολές σχεδίασεως αναφέρονται!)

Το χαρακτηριστικό στις ιδιομορφές ταλαντώσεως  $X_n(x)$  του προβόλου αυτού είναι ότι το πακτωμένο άκρο του είναι ακίνητο, όπως παρατηρούμε. Πρόκειται για έναν κόμβο στις ιδιοταλαντώσεις αυτές. Βλέπουμε επίσης ότι το ελεύθερο άκρο του προβόλου  $x = 1$  κινείται σε όλες τις ιδιομορφές  $X_n(x)$ , έχει δηλαδή εγκάρσια μετατόπιση, δεν είναι κόμβος. Για κάθε ιδιομορφή  $X_n(x)$  τάξεως  $n$  ( $n = 1, 2, \dots, 6$ ) παρατηρούμε την ύπαρξη συνολικά  $n$  κόμβων  $x_{kn}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), δηλαδή  $n$  απολύτως ακίνητων σημείων κατά μήκος του προβόλου. Από τα σημεία αυτά το πρώτο  $x_{1n}$  είναι φυσικά το πακτωμένο αριστερό άκρο του προβόλου, δηλαδή το σημείο  $x_{1n} = 0$  σε όλες τις ιδιομορφές  $X_n(x)$ . Τέτοια δυναμικά προβλήματα ιδιομορφών παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τον Πολιτικό Μηχανικό στις κατασκευές του και εξετάζονται αναλυτικά στη Δυναμική των Κατασκευών. Παραπέρα έχουν εφαρμογή στον Αντισεισμικό Σχεδιασμό των Κατασκευών.

---

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ *A1*

## ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

---

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο κεφάλαιο αυτό ξεκινάμε από την κλασική διαφορική εξίσωση που διέπει το φαινόμενο των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων χωρίς απόσβεση σε σύστημα υλικού σημείου-ελατηρίου ή μάζας-ελατηρίου, όπως λέγεται συχνότερα. Ακολουθώντας αναφερόμαστε στον τόσο θεμελιώδη δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στη Μηχανική: δύναμη ίσον μάζα επί επιτάχυνση ή  $F = ma$ . Ο νόμος αυτός αποτελεί μια διαφορική εξίσωση, μόλις η επιτάχυνση  $a$  εκφρασθεί σαν δεύτερη παράγωγος της θέσεως  $u$ :  $a = \ddot{u}$  με  $u = u(t)$ , ή σαν πρώτη παράγωγος της ταχύτητας  $v$ :  $a = \dot{v}$  με  $v = v(t)$ .

Στη συνέχεια αναφερόμαστε στις ταξινομήσεις και στους χαρακτηρισμούς των διαφορικών εξισώσεων, πιο συγκεκριμένα: (α) Σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και σε διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους με τη διευκρίνιση ότι στο μάθημα αυτό, στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II, θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με τη μελέτη συνήθων διαφορικών εξισώσεων. (β) Στην τάξη μιας διαφορικής εξισώσεως. (γ) Στο βαθμό μιας διαφορικής εξισώσεως, (δ) Στις γραμμικές και στις μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Στις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις διακρίνουμε: (ε) τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές και με μη σταθερούς (μεταβλητούς) συντελεστές καθώς και (στ) τις ομογενείς και τις μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Στις μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις υπάρχει μερικές φορές και η δυνατότητα γραμμικοποίησής τους.

Στην επόμενη ενότητα αναφερόμαστε περιληπτικά στις τριγωνομετρικές (ή κυκλικές) συναρτήσεις και κυρίως στις υπερβολικές συναρτήσεις (συνημίτονο, ημίτονο, εφαπτομένη, κλπ.), που τόσο συχνά παρουσιάζονται στις λύσεις διαφορικών εξισώσεων, και σε βασικές ιδιότητές τους. Πιστεύουμε ότι η επανάληψη των υπερβολικών συναρτήσεων (που γενικά είναι συχνά κάπως παραμελημένες) και μια σύγκρισή τους με τις πιο γνωστές τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι ωφέλιμη.

Σε επόμενη ενότητα ορίζουμε τις έννοιες της γενικής λύσεως, της μερικής λύσεως (ή ειδικής λύσεως), της ιδιάζουσας λύσεως και της πλήρους λύσεως μιας διαφορικής εξισώσεως.

Εξηγούμε επίσης τη δυνατότητα επαληθεύσεως λύσεων διαφορικών εξισώσεων απλά με αντικατάστασή τους στη διαφορική εξίσωση. Ακολουθώντας εξετάζουμε την εξίσου σημαντική δυνατότητα σχηματισμού (ή κατασκευής ή μορφώσεως) διαφορικής εξισώσεως με απαλοιφή της παραμέτρου ή των παραμέτρων σε οικογένεια συναρτήσεων ή καμπύλων. (Ας σημειωθεί ότι μιλάμε για οικογένεια καμπύλων, κυρίως όταν αναφερόμαστε στις γραφικές παραστάσεις τους στο επίπεδο.)

Στην τελευταία ενότητα αναφερόμαστε εκτενώς (α) σε προβλήματα αρχικών τιμών (με αρχικές συνθήκες) καθώς και (β) σε προβλήματα συνοριακών τιμών (με συνοριακές συνθήκες).

Σε όλο το κεφάλαιο παρουσιάζουμε εφαρμογές από την Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού προσπαθώντας να δείξουμε την πολύ μεγάλη χρησιμότητα των διαφορικών εξισώσεων σ' αυτήν.

Η επίλυση διαφορικών εξισώσεων διαφόρων κατηγοριών (κυρίως πρώτης τάξεως και γραμμικών) με διάφορες κατάλληλες μεθόδους αποτελεί θέμα εκτενούς μελέτης στα επόμενα κεφάλαια.

---

**A1.1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΤΟ ΜΗΧΑΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΑΖΑΣ-ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ**

Έχουμε ήδη μια πολύ καλή γνώση των αλγεβρικών εξισώσεων. Για παράδειγμα η εξίσωση

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1.1.1)$$

με τα  $a$ ,  $b$  και  $c$  γνωστές σταθερές (πραγματικές ή μιγαδικές) είναι μια δευτεροβάθμια αλγεβρική εξίσωση ως προς τη μεταβλητή  $x$ , που έχει σαν λύσεις της (ή ρίζες της) τους αριθμούς

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (1.1.2)$$

Οι αριθμοί αυτοί  $x_{1,2}$  μπορούν να είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί και είναι συνήθως δύο, σπάνια, συγκεκριμένα μόνο αν  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ , ένας: διπλή ρίζα, η ρίζα  $x_{1,2} = -b/(2a)$ .

Μια αρκετά γενικότερη κατηγορία εξισώσεων αποτελούν οι διαφορικές εξισώσεις. Οι διαφορικές εξισώσεις είναι εξισώσεις που οπωσδήποτε περιέχουν την παράγωγο μιας άγνωστης (αλλά παραγωγίσιμης) συναρτήσεως (όχι πια άγνωστου αριθμού). Για παράδειγμα η εξίσωση

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \omega_0^2 u(t) = p^*(t) \quad \text{και ισοδύναμα} \quad \frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2 u = p^*(t) \quad (1.1.3)$$

είναι μια διαφορική εξίσωση θεωρώντας βέβαια τη συνάρτηση  $u = u(t)$  σαν άγνωστη συνάρτηση. Στην εξίσωση αυτή υποθέτουμε επίσης την ποσότητα  $\omega_0$  σαν γνωστή σταθερά και τη συνάρτηση  $p^*(t)$  στο δεξιό μέλος σαν γνωστή συνάρτηση.

Σε μια διαφορική εξίσωση, όπως είναι η εξίσωση (1.1.3), δε θέλουμε απλά να ισχύει αυτή για κάποιες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής (εδώ της μεταβλητής  $t$ ). Με τίποτε δεν αρκούμαστε σε κάτι τέτοιο! Θέλουμε η διαφορική εξίσωση να ισχύει εκ ταυτότητας, δηλαδή για κάθε τιμή της μεταβλητής  $t$  στο διάστημα (πεπερασμένο, ημίπειρο ή άπειρο) που μας ενδιαφέρει, π.χ. στο διάστημα  $(0, \infty)$  για τη μεταβλητή  $t$ . Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιούμε το σύμβολο της ταυτότητας  $\equiv$  αντί του συμβόλου της ισότητας = σε μια διαφορική εξίσωση, αν και δεν το κάνουμε.

Στην πραγματικότητα ο Πολιτικός Μηχανικός δεν αντιμετωπίζει αφηρημένα τις διαφορικές εξισώσεις. Τις έχει σαν εργαλείο στην επιστήμη του και, ειδικότερα, στους υπολογισμούς που κάνει στις μελέτες των τεχνικών έργων που αναλαμβάνει. Η πιο πάνω διαφορική εξίσωση (1.1.3) δε γράφτηκε τυχαία. Γράφτηκε με σκοπό όχι μόνο να χρησιμεύσει σαν ένα απλό παράδειγμα διαφορικής εξισώσεως, αλλ' επιπλέον και σαν ένα παράδειγμα εφαρμογής των διαφορικών εξισώσεων στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Πιο συγκεκριμένα η διαφορική αυτή εξίσωση (1.1.3) αφορά στην εξαναγκασμένη (υπό εξωτερική φόρτιση) ταλάντωση ενός υλικού σημείου  $M$  σε ένα απλό μηχανικό σύστημα που αποτελείται από ένα υλικό σημείο  $M$  (μια μάζα) και από ένα ελατήριο  $S$  είτε πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο είτε κατακόρυφα. Το ένα άκρο  $A$  του ελατηρίου  $S$  είναι σταθερό, ενώ το άλλο άκρο  $B$  του ίδιου ελατηρίου είναι αυτό που κρατάει το υλικό σημείο  $M$ .

Στη Δυναμική και τις Ταλαντώσεις γίνεται εκτενής αναφορά σε ελατήρια  $S$  (για την ακρίβεια σε γραμμικά ελαστικά ελατήρια), που χαρακτηρίζονται από μια σταθερά  $k$ . Τη σταθερά αυτή  $k$  την αποκαλούμε σταθερά του ελατηρίου. Φυσικά και το υλικό σημείο  $M$  έχει τη δική του σταθερά: αυτή είναι βέβαια η μάζα του  $m$ . Τόσο η σταθερά  $k$  του ελατηρίου  $S$  όσο και οι μάζα  $m$  του υλικού σημείου  $M$  είναι ιδιαίτερα σημαντικές ποσότητες για τον Πολιτικό Μηχανικό. Ειδικά στις ταλαντώσεις του μηχανικού συστήματος υλικού σημείου-ελατηρίου (ή μάζας-ελατηρίου) που περιγράψαμε από τις δύο αυτές ποσότητες  $k$  και  $m$  προκύπτει εύκολα η κυκλική ιδιοσυχνότητα  $\omega_0$  του μηχανικού αυτού συστήματος, η φυσική του συχνότητα. (Η λέξη κυκλική συνήθως παραλείπεται από τον Πολιτικό Μηχανικό.) Συγκεκριμένα, όπως θα αποδείξουμε αργότερα, η ιδιοσυχνότητα αυτή  $\omega_0$  δίνεται από τον πολύ απλό τύπο

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (1.1.4)$$



Η συνάρτηση  $u = u(t)$  στη διαφορική εξίσωση (1.1.3) είναι η άγνωστη συνάρτηση. Είναι συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής  $t$ , που εδώ παριστάνει το χρόνο συνήθως μάλιστα με  $t > 0$ . Η άγνωστη συνάρτηση  $u = u(t)$  καλείται αρκετές φορές στις διαφορικές εξισώσεις και εξαρτημένη μεταβλητή. Καλείται έτσι, γιατί το  $u$  (η άγνωστη συνάρτηση ή εξαρτημένη μεταβλητή) εξαρτάται από το χρόνο  $t$  (την ανεξάρτητη μεταβλητή) και συνήθως μεταβάλλεται με αυτόν. Έχουμε επομένως δύο μεταβλητές σε μια διαφορική εξίσωση, όπως είναι η εξίσωση (1.1.3): την ανεξάρτητη μεταβλητή, εδώ το  $t$ , και την εξαρτημένη μεταβλητή, εδώ το  $u = u(t)$ . Η ανεξάρτητη μεταβλητή  $t$  παριστάνει εδώ το χρόνο, όπως ήδη αναφέραμε. Η άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή)  $u = u(t)$  παριστάνει εδώ τη θέση του υλικού σημείου  $M$  (μάζας  $m$ ). Με κάπως ακριβέστερη διατύπωση παριστάνει τη μετατόπισή του από τη θέση ισορροπίας του στο μηχανικό μας σύστημα υλικού σημείου-ελατηρίου ή απλούστερα μάζας-ελατηρίου. Το σύστημα αυτό είναι ένα μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα του Πολιτικού Μηχανικού, επειδή έχει ένα μόνο βαθμό ελευθερίας, δηλαδή μία άγνωστη συνάρτηση: τη μετατόπιση  $u = u(t)$  του υλικού σημείου  $M$ . Τέλος στη διαφορική εξίσωση (1.1.3) στο δεξιό μέλος έχουμε μία ακόμη συνάρτηση: τη γνωστή συνάρτηση  $p^*(t)$ . Η συνάρτηση αυτή παριστάνει την εξωτερική φόρτιση (τη δύναμη)  $p(t)$  που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο  $M$  (στη μάζα  $m$ , όπως συνηθίζουμε να λέμε) και μάλιστα ανά μονάδα μάζας. Δηλαδή η συνάρτηση  $p^*(t)$  είναι η ανηγμένη στη μάζα  $m$  εξωτερική φόρτιση  $p(t)$  που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο  $M$  συγκεκριμένα

$$p^*(t) = \frac{p(t)}{m} . \tag{1.1.5}$$

Πρόκειται για μια γνωστή συνάρτηση. Άρα η ανηγμένη εξωτερική φόρτιση είναι και αυτή γνωστή συνάρτηση, η συνάρτηση  $p^*(t) = p(t)/m$ . Άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) είναι η μετατόπιση  $u(t)$  του υλικού σημείου  $M$  από τη θέση ισορροπίας του. Η άγνωστη συνάρτηση  $u(t)$  εμφανίζεται στην εξίσωση (1.1.3) και σε μορφή παραγώγου, συγκεκριμένα της δεύτερης χρονικής παραγώγου  $d^2u(t)/dt^2 \equiv \ddot{u}(t)$ . Για το λόγο αυτό η εξίσωση (1.1.3) είναι μια διαφορική εξίσωση: η άγνωστη συνάρτηση παρουσιάζεται και σε μορφή παραγώγου. Αν αντίθετα, υποθετικά, ξέραμε τη μετατόπιση  $u(t)$  συναρτήσει του χρόνου  $t$  και ζητούσαμε την ανηγμένη φόρτιση  $p^*(t)$ , η εξίσωση (1.1.3) θα ήταν ξανά το σωστό εργαλείο μας. Απλά θα υπολογίζαμε τότε το αριστερό μέλος της (που είναι βέβαια ίσο με το δεξιό) βρίσκοντας έτσι την ανηγμένη φόρτιση  $p^*(t)$ , δηλαδή

$$p^*(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \omega_0^2 u(t). \tag{1.1.6}$$

Στον υπολογισμό αυτό της ανηγμένης φορτίσεως  $p^*(t)$  η εξίσωση (1.1.3) ή ισοδύναμα η (1.1.6) δεν είναι πια διαφορική εξίσωση: η συνάρτηση  $p^*(t)$  δεν εμφανίζεται σε παράγωγο. Για να έχουμε διαφορική εξίσωση, πρέπει οπωσδήποτε να έχουμε σε μια εξίσωση την άγνωστη συνάρτηση που θέλουμε να προσδιορίσουμε και σε μορφή παραγώγου ή, έστω, μόνο σε μορφή παραγώγου. Άρα η εξίσωση (1.1.3) και η απόλυτα ισοδύναμή της (1.1.6) (ισχύει προφανώς η αντιμεταθετική ιδιότητα στην ισότητα:  $A = B \iff B = A$ ) είναι μια διαφορική εξίσωση, μόνο εφόσον η συνάρτηση  $u(t)$  είναι άγνωστη και η συνάρτηση  $p^*(t)$  είναι γνωστή. Αυτό ακριβώς υποθέτουμε ότι συμβαίνει εδώ.

Παρενθετικά ας αναφερθούμε σύντομα και σε μια εύλογη απορία που θα μπορούσε να έχει ο καλόπιστος πρωτοετής φοιτητής και φοιτήτρια Πολιτικός Μηχανικός: για ποιον ακριβώς λόγο τόση αναφορά στο μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου; Πού υπάρχουν ελατήρια σε μια κατασκευή του Πολιτικού Μηχανικού, όπως είναι ένα συνηθισμένο κτίριο ή το γενικά πολύ ωραιότερο Κτίριο του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών στην Πανεπιστημιούπολη Πατρών; Η απάντηση στην απορία αυτή είναι απλή: ναι, πραγματικά ένα κτίριο ούτε μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα είναι ούτε ελατήρια έχει. Ένα κτίριο είναι προσεγγιστικά ένα πολυβάθμιο μηχανικό σύστημα με έναν εξαιρετικά μεγάλο αριθμό βαθμών ελευθερίας, στην πραγματικότητα μάλιστα με άπειρους βαθμούς ελευθερίας: είναι ένα απειροβάθμιο μηχανικό σύστημα. Αυτό ασφαλώς συμβαίνει, επειδή πρόκειται για ένα συνεχές σύστημα. Στους βαθμούς ελευθερίας περιλαμβάνονται φυσικά οι τρεις

μετατοπίσεις  $u(t)$ ,  $v(t)$  και  $w(t)$  καθώς και οι αντίστοιχες στροφές των κόμβων του, δηλαδή των «σημαντικών» σημείων του (π.χ. τα άκρα μιας κολώνας), όπως τα επιλέγει ο Πολιτικός Μηχανικός.

Άρα ένα κτίριο σαν πολυβάθμιο μηχανικό σύστημα διέπεται από διαφορικές εξισώσεις πολύ πολυπλοκότερες από την απλή διαφορική εξίσωση (1.1.3). Έχει πολλές, μα πάρα πολλές άγνωστες συναρτήσεις (μετατοπίσεις και στροφές) και όχι μόνο μία: τη  $u(t)$ . Με την έννοια αυτή η διαφορική εξίσωση (1.1.3) είναι το απλούστερο δυνατό παράδειγμα μηχανικού συστήματος: αφορά απλά σε ένα μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα. Αντίθετα τα αληθινά κτίρια μοντελοποιούνται μαθηματικά σαν πολυβάθμια μηχανικά συστήματα. Άρα είναι πολύ γενικότερα, πολύ-πολύ πολυπλοκότερα.

Και γιατί άραγε θεωρήσαμε το ελατήριο  $S$  στο μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου που εξετάζουμε; Πού ακριβώς υπάρχουν ελατήρια σε ένα συνηθισμένο κτίριο και δεν είναι ορατά σε μας; Πού ακριβώς είναι κρυμμένα; Ας το ομολογήσουμε: δεν υπάρχουν ελατήρια, όπως τα φανταζόμαστε, σε ένα κτίριο. Υπάρχουν όμως κολώνες, υποστυλώματα τις αποκαλεί συνήθως ο Πολιτικός Μηχανικός. Όπως αποδεικνύεται στη Δυναμική των Κατασκευών (που είναι ένα πολύ σημαντικό μάθημα του 8ου Εξαμήνου Σπουδών), οι κολώνες (τα υποστυλώματα) έχουν στη συμπεριφορά τους ακριβώς την ίδια μαθηματική μοντελοποίηση με το παρόν μηχανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου, αν και από φυσικής απόψεως διαφέρουν έντονα. Μιλώντας πολύ χονδρικά, σε ένα κτίριο οι κολώνες (τα υποστυλώματα) είναι κατά κάποιον τρόπο τα «ελατήρια» και οι πλάκες (που θεωρούνται προσεγγιστικά απαραμόρφωτες, άκαμπτες) είναι οι «μάζες». (Σ' αυτές προστίθενται συνήθως κατάλληλα και οι ίδιες οι μάζες των υποστυλωμάτων.)

Σημειώνεται στο σημείο αυτό ότι οι υπολογισμοί των κατασκευών γίνονται κατά τέτοιον τρόπο από τον υπεύθυνο Πολιτικό Μηχανικό, που έχει αναλάβει τη σχετική μελέτη, ώστε να μπορούν να αντέχουν σε δυναμικές καταπονήσεις. Τέτοιες καταπονήσεις παρουσιάζονται κυρίως με τα σεισμικά φαινόμενα, που όλοι τόσο τα απευχόμαστε, και πολύ λιγότερο με ανέμους και με άλλα εξωτερικά φορτία. (Τέτοια φορτία είναι και τα αυτοκίνητα σε γέφυρες, όπως είναι η καλωδιωτή γέφυρα Ρίου-Αντιρρίου.) Αυτή είναι η απάντηση στην απορία του φοιτητή/της φοιτήτριας Πολιτικού Μηχανικού για τα ελατήρια στο μάθημα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ στο 2ο Εξάμηνο Σπουδών. Το ίδιο ακριβώς ισχύει βέβαια και στο μάθημα Δυναμική και Ταλαντώσεις στο μέρος του που αφορά στις Ταλαντώσεις. Κλείνει η παρένθεση.

## A1.2. Ο ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ

Πρόκειται σίγουρα για τον πιο θεμελιώδη νόμο στη Μηχανική. Εδώ αναφερόμαστε σε μονοδιάστατη κίνηση υλικού σημείου  $M$  κατά μήκος του άξονα  $Ox$ . Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα (Newton, J. S., *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Londini, Julii 5, 1686) ορίζει ότι η δύναμη  $F$  που ασκείται πάνω σε υλικό σημείο  $M$  μάζας  $m$  ισούται με τη μάζα  $m$  του υλικού σημείου (την υποθέτουμε εδώ συνεχώς σταθερή) επί την επιτάχυνση  $a$  του ίδιου υλικού σημείου, δηλαδή

$$F = ma. \quad (1.2.1)$$

Ο νόμος αυτός ισχύει κάθε χρονική στιγμή  $t$ . Όπως είναι γραμμένος πιο πάνω, ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα δεν αποτελεί διαφορική εξίσωση: δεν υπάρχουν καθόλου παράγωγοι σ' αυτόν. Γνωρίζουμε όμως ότι η επιτάχυνση  $a = a(t)$  ενός υλικού σημείου  $M$  είναι η (πρώτη) παράγωγος της ταχύτητάς του  $v = v(t)$ . Επίσης η ταχύτητα  $v = v(t)$  του ίδιου σημείου  $M$  είναι η (πρώτη) παράγωγος της θέσεώς του  $u = u(t)$ . Άρα η επιτάχυνση  $a = a(t)$  είναι η δεύτερη παράγωγος της θέσεως  $u = u(t)$  σε μονοδιάστατη κίνηση υλικού σημείου  $M$ . Συνοψίζοντας τα παραπάνω, έχουμε

$$a = \frac{dv}{dt}, \quad v = \frac{du}{dt} \implies a = \frac{d^2u}{dt^2}. \quad (1.2.2)$$

Τί ακριβώς είναι οι τρεις αυτές εξισώσεις; Διαφορικές εξισώσεις ή όχι; Έχουν βέβαια και οι τρεις παραγώγους: οι δύο πρώτες έχουν πρώτες παραγώγους, ενώ η τρίτη έχει δεύτερη παράγωγο.

**Απάντηση:** Και ναι και όχι ανάλογα με τις συνθήκες. Αν η ταχύτητα  $v$  στην πρώτη εξίσωση είναι γνωστή και απλά ζητείται η επιτάχυνση  $a$ , δεν έχουμε βέβαια διαφορική εξίσωση, αν και εκτελούμε μια παραγωγή, για να βρούμε την επιτάχυνση  $a$ . Ανάλογα και στη δεύτερη εξίσωση: αν η θέση  $u$  είναι γνωστή και ζητείται η ταχύτητα  $v$ , και πάλι προφανώς δεν έχουμε διαφορική εξίσωση. Το ίδιο και στην τρίτη εξίσωση, αυτή μετά το σύμβολο της συνεπαγωγής: αν η θέση  $u$  είναι γνωστή και ζητείται η επιτάχυνση  $a$ , ξανά δεν έχουμε διαφορική εξίσωση.

Για να έχουμε διαφορική εξίσωση, πρέπει η άγνωστη συνάρτηση στην εξίσωση να εμφανίζεται σε μορφή παραγώγου, συχνά και η ίδια η συνάρτηση (χωρίς παράγωγο), αλλ' οπωσδήποτε και σε μορφή παραγώγου. Η εμφάνιση παραγώγου της άγνωστης συναρτήσεως είναι αναγκαία σε μια εξίσωση, για να μπορεί να χαρακτηριστεί σαν διαφορική εξίσωση. Επομένως ναι, αν στην πρώτη εξίσωση (1.2.2) η επιτάχυνση  $a$  είναι γνωστή και ζητείται η εύρεση της ταχύτητας  $v$  από αυτήν, ναι έχουμε πραγματικά μια διαφορική εξίσωση. Αυτό συμβαίνει, επειδή η ταχύτητα  $v$  παρουσιάζεται σε παράγωγο, εδώ σε πρώτη παράγωγο. Ναι και στη δεύτερη εξίσωση (1.2.2). Είναι και αυτή διαφορική εξίσωση, όσες φορές γνωρίζουμε την ταχύτητα  $v$  και από αυτή ζητάμε να προσδιορίσουμε τη θέση  $u$ , που εμφανίζεται στην παράγωγο. Ανάλογα επίσης ναι και στην τρίτη εξίσωση (1.2.2). Είναι και αυτή διαφορική εξίσωση, εφόσον ξέρουμε την επιτάχυνση  $a$  του υλικού σημείου  $M$  και επιδιώκουμε να βρούμε από αυτήν τη θέση του  $u$ , της οποίας παρουσιάζεται η δεύτερη παράγωγος. Ξεκαθαρίσθηκε λοιπόν και το θέμα αυτό.

Επιστρέφουμε τώρα στο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα (1.2.1) με γνωστή τη συνάρτηση  $F$ . (Ας την υποθέσουμε εδώ προσωρινά απλά συνάρτηση του χρόνου  $t$ , δηλαδή  $F = F(t)$ .) Τώρα ας αναζητήσουμε την επιτάχυνση  $a = F/m$  του υλικού σημείου. Απλή διαίρεση, δεν έχουμε διαφορική εξίσωση. Αν όμως ζητάμε την ταχύτητα  $v$  του υλικού σημείου και χρησιμοποιήσουμε και την πρώτη σχέση (1.2.2), δηλαδή την εξίσωση  $a = dv/dt$  στο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα (1.2.1); Ναι, τότε τα πράγματα γίνονται διαφορετικά: πραγματικά παίρνουμε μια διαφορική εξίσωση, την εξίσωση

$$F(t) = m \frac{dv}{dt}, \quad \text{απόλυτα ισοδύναμα} \quad m \frac{dv}{dt} = F(t). \quad (1.2.3)$$

Και αν χρησιμοποιήσουμε την τρίτη σχέση (1.2.2) για την επιτάχυνση  $a$  του υλικού σημείου στο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα (1.2.1); Ναι, τότε προκύπτει διαφορική εξίσωση και πάλι (με γνωστή, επαναλαμβάνεται, τη δύναμη  $F = F(t)$ ), συγκεκριμένα η εξίσωση

$$F(t) = m \frac{d^2u}{dt^2}, \quad \text{απόλυτα ισοδύναμα} \quad m \frac{d^2u}{dt^2} = F(t). \quad (1.2.4)$$

Πήρε επομένως ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα (1.2.1) τη μορφή μιας διαφορικής εξισώσεως: εξίσωση (1.2.3) ή (1.2.4). Και στις δύο ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος  $t$ . (Συνήθως υποτίθεται μάλιστα ότι  $t > 0$ .) Επιπλέον στην πρώτη εξίσωση (1.2.3) άγνωστη συνάρτηση είναι η ταχύτητα  $v = v(t)$ , ενώ στη δεύτερη εξίσωση (1.2.4) άγνωστη συνάρτηση είναι η θέση  $u = u(t)$ .

Ας τολμήσουμε τώρα και μια γενίκευση. Συχνά η δύναμη  $F$  δεν εξαρτάται μόνο από το χρόνο  $t$ , αλλά μπορεί να εξαρτάται και από την άγνωστη θέση  $u$  του υλικού σημείου ή ακόμη και από την επίσης άγνωστη ταχύτητά του  $v = du/dt$ . Στ' αλήθεια; Ναι στ' αλήθεια και όχι μάλιστα και πολύ σπάνια και θα δώσουμε σχετικά παραδείγματα. Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$F = F(t, u, v) = F\left(t, u, \frac{du}{dt}\right) \quad (1.2.5)$$

(αφού  $v = du/dt$ ) και η διαφορική εξίσωση (1.2.4) γενικεύεται στη μορφή

$$m \frac{d^2u}{dt^2} = F\left(t, u, \frac{du}{dt}\right). \quad (1.2.6)$$

Στη γενική αυτή διαφορική εξίσωση η άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή), δηλαδή η θέση  $u = u(t)$ , παρουσιάζεται σε μορφή παραγώγου τόσο στο αριστερό μέλος (με τη δεύτερη

παράγωγο  $d^2u/dt^2$ ) όσο και στο δεξιό μέλος (με την πρώτη παράγωγο  $du/dt$ ). Θεωρητικά θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε και ένα ακόμη βήμα παραπέρα εισάγοντας και παραγώγους της θέσεως  $u = u(t)$  που να είναι ανώτερης τάξεως από την πρώτη παράγωγο  $v = du/dt$  στις μεταβλητές της δυνάμεως  $F$  στο δεξιό μέλος της διαφορικής εξίσωσης (1.2.6): του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα. Δε θα το κάνουμε όμως αυτό, επειδή μια τέτοια περίπτωση δεν παρουσιάζεται συχνά στην πράξη. Αυτό που κρατάμε πάντως στο μυαλό μας είναι ότι στη διαφορική εξίσωση (1.2.6) η άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή)  $u = u(t)$  εμφανίζεται και στο αριστερό μέλος και στο δεξιό. Βέβαια θεωρείται γνωστή η έκφραση της δυνάμεως, της συναρτήσεως  $F$  στο δεξιό μέλος, εδώ σαν συναρτήσεως τριών μεταβλητών: των  $t$  (χρόνου),  $u$  (θέσεως) και  $v$  (ταχύτητας).

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα: δύναμη ίσον μάζα επί επιτάχυνση:  $F = ma$ , είναι θεμελιώδης νόμος της Φυσικής (ειδικότερα της Μηχανικής) και εξίσου θεμελιώδους σημασίας για τον Πολιτικό Μηχανικό παρά την απλότητά του:  $F = ma$ . Στο παρόν μάθημα θα θεωρείται απόλυτα γνωστός.

### Α1.3. ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Οι διαφορικές εξισώσεις ταξινομούνται και διακρίνονται με βάση αρκετά κριτήρια, ονομασίες, κλπ. Τα σημαντικότερα από αυτά είναι τα εξής επτά:

#### Α1.3.1. Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους

Μια διαφορική εξίσωση που έχει μία μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή καλείται **συνήθης διαφορική εξίσωση**. Αντίθετα μια διαφορική εξίσωση που έχει δύο ή και περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές καλείται **διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους** (ή **μερική διαφορική εξίσωση**). Φυσικά στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις παρουσιάζονται συνήθεις παράγωγοι (που δηλώνονται με το σύμβολο  $d$ ), ενώ στις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους παρουσιάζονται μερικές παράγωγοι (που δηλώνονται με το σύμβολο  $\partial$ ). Αυτό είναι εύλογο, γιατί στις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους υπάρχουν εξ ορισμού πάνω από μία ανεξάρτητες μεταβλητές. Πρέπει επομένως να χρησιμοποιείται το σύμβολο της μερικής παραγωγίσεως  $\partial$ .

Στο παρόν μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με τις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις και τα Συστήματα Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων, δηλαδή με διαφορικές εξισώσεις (και αντίστοιχα συστήματα) με μία μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή. Τέτοια μεταβλητή μπορεί να είναι, π.χ., η θέση  $x$  ή ο χρόνος  $t$ . Αντίθετα στο πρώτο (και σημαντικότερο) μέρος του επόμενου μαθήματος Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III θα ασχοληθούμε με τις Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους (ή Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις), που έχουν δύο ή και περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές. Τέτοιες μεταβλητές είναι, π.χ., οι Καρτεσιανές συντεταγμένες  $x$ ,  $y$  και  $z$  και επίσης ο χρόνος  $t$ . Μερικές φορές χρησιμοποιούνται και άλλα συστήματα συντεταγμένων, όπως είναι οι πολικές συντεταγμένες, οι κυλινδρικές συντεταγμένες και οι σφαιρικές συντεταγμένες.

Ας τονίσουμε τέλος ότι και τα συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων (που θα τα εξετάσουμε κι αυτά στο παρόν μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II) έχουν επίσης μία μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή. Επειδή όμως αποτελούνται από δύο ή και περισσότερες συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, έχουν δύο ή και περισσότερες άγνωστες συναρτήσεις (ή εξαρτημένες μεταβλητές), όλες όμως συναρτήσεις της μοναδικής ανεξάρτητης μεταβλητής.

▼ **Εφαρμογή Α1.1 (Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις):**<sup>1</sup> Η διαφορική εξίσωση (1.1.3) των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων του μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου, την επαναλαμβάνουμε

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \omega_0^2 u(t) = p^*(t), \quad (1.3.1)$$

<sup>1</sup> Η αρχή ενός παραδείγματος ή μιας εφαρμογής δηλώνεται στα παρόντα διδακτικά βιβλία Εφαρμοσμένων Μαθηματικών II και III για Πολιτικούς Μηχανικούς με το σύμβολο ▼. Το τέλος τους δηλώνεται με το σύμβολο ▲. Η αρχή μιας παρατηρήσεως δηλώνεται με το σύμβολο ►.

είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση. Αυτό ισχύει, γιατί έχει μία μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή: το χρόνο  $t$ . Άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) είναι η μετατόπιση  $u = u(t)$  της μάζας από τη θέση ισορροπίας της. Η σταθερά  $\omega_0$  παριστάνει τη φυσική κυκλική συχνότητα του μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου και θεωρείται γνωστή σταθερά. Η συνάρτηση  $p^*(t)$  παριστάνει την ανηγμένη εξωτερική φόρτιση πάνω στη μάζα  $m$  και είναι γνωστή συνάρτηση. ▲

▼ **Εφαρμογή A1.2 (Δοκός επί ελαστικής βάσεως):** Επίσης η διαφορική εξίσωση

$$EI \frac{d^4 v(x)}{dx^4} + kv(x) = p(x) \quad (1.3.2)$$

της δοκού επί ελαστικής βάσεως (π.χ. πεδιλοδοκού στις Θεμελιώσεις ή σιδηροτροχιάς στη Σιδηροδρομική) είναι και αυτή συνήθης διαφορική εξίσωση. Αυτό συμβαίνει, επειδή και αυτή η διαφορική εξίσωση έχει μία μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή: τη θέση  $x$  κατά μήκος της δοκού. Άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) είναι το βέλος κάμψεως (ή βύθιση ή εγκάρσια μετατόπιση)  $v(x)$  της δοκού επί ελαστικής βάσεως. Αυτό το βέλος κάμψεως  $v(x)$  δημιουργεί την ελαστική γραμμή της δοκού. Οι ποσότητες  $EI$  και  $k$  είναι γνωστές σταθερές. Η συνάρτηση  $p(x)$  παριστάνει την κατανεμημένη κάθετη φόρτιση πάνω στη δοκό (σε kN/m) και είναι και αυτή γνωστή συνάρτηση. ▲

▼ **Εφαρμογή A1.3 (Διβάθμιο μηχανικό σύστημα):** Οι δύο διαφορικές εξισώσεις

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 u_1}{dt^2} + k_{11} u_1 + k_{12} u_2 &= p_1(t) \\ m_2 \frac{d^2 u_2}{dt^2} + k_{21} u_1 + k_{22} u_2 &= p_2(t) \end{aligned} \right\} \text{ με } u_1 = u_1(t) \text{ και } u_2 = u_2(t) \quad (1.3.3)$$

αποτελούν ένα σύστημα δύο συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Μιλάμε ξανά για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, επειδή έχουμε και στις δύο μόνο μία ανεξάρτητη μεταβλητή: το χρόνο  $t$ . Βέβαια εδώ έχουμε σύστημα δύο συνήθων διαφορικών εξισώσεων, δηλαδή έχουμε δύο άγνωστες συναρτήσεις (ή εξαρτημένες μεταβλητές): τις  $u_1 = u_1(t)$  και  $u_2 = u_2(t)$ . Συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων θα εξετάσουμε παρακάτω στο Κεφάλαιο A12 του διδακτικού αυτού βιβλίου.

Από της απόψεως του Πολιτικού Μηχανικού το πιο πάνω σύστημα (1.3.3) δύο συνήθων διαφορικών εξισώσεων με δύο άγνωστες συναρτήσεις είναι απόλυτα κλασικό και εξαιρετικά χρήσιμο. Συγκεκριμένα αφορά σε ένα διβάθμιο μηχανικό σύστημα, δηλαδή σε μηχανικό σύστημα με δύο βαθμούς ελευθερίας. Μιλάμε για δύο βαθμούς ελευθερίας, επειδή έχουμε δύο άγνωστες συναρτήσεις: τις μετατοπίσεις  $u_1 = u_1(t)$  και  $u_2 = u_2(t)$ . Επίσης οι γνωστές συναρτήσεις  $p_1(t)$  και  $p_2(t)$  στα δεξιά μέλη αφορούν στις γνωστές αντίστοιχες φορτίσεις. Το σύστημα αυτό μπορεί να αναφέρεται σε ένα διπλό σύστημα μαζών-ελατηρίων: δύο μάζες  $m_1$  και  $m_2$  και δύο ελατήρια με σταθερές  $k_1$  και  $k_2$ . Από τις σταθερές αυτές  $k_1$  και  $k_2$  σχετικά εύκολα προκύπτουν και οι τελικές σταθερές  $k_{11}$ ,  $k_{12} = k_{21}$  και  $k_{22}$ , που εμφανίζονται στο πιο πάνω σύστημα (1.3.3). Σημειώνεται ότι ισχύει και η ισότητα  $k_{12} = k_{21}$ . Αυτή είναι συνέπεια της αρχής (ή του θεωρήματος) της αμοιβαιότητας των Betti-Maxwell στη Μηχανική. Προκύπτει όμως και με πιο άμεσο τρόπο. Το ίδιο σύστημα (1.3.3) μπορεί επίσης να αναφέρεται και σε ένα πολύ απλό κτίριο διατμήσεως που προσεγγίζεται από απλό πλαίσιο διατμήσεως με δύο βαθμούς ελευθερίας στη Δυναμική των Κατασκευών.

Αν και ασφαλώς αρκετοί φοιτητές και φοιτήτριες Πολιτικοί Μηχανικοί διαφωνούν, ο διδάσκων έχει τη γνώμη ότι καλό είναι ακόμη και ο πρωτοετής φοιτητής και η πρωτοετής φοιτήτρια Πολιτικός Μηχανικός να ακούει στο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II έννοιες και να βλέπει διαφορικές εξισώσεις του Πολιτικού Μηχανικού. Αυτή είναι και η σημασία του σχετικά νέου μαθήματος του 1ου Εξαμήνου Σπουδών. Τώρα ως προς το συγκεκριμένο σύστημα (1.3.3), αυτό αποτελεί και μέρος της ύλης των Ταλαντώσεων στο μάθημα Δυναμική και Ταλαντώσεις του 2ου Εξαμήνου Σπουδών. Καθόλου δε βλάπτει λοιπόν, αλλά μάλλον ωφέλιμο είναι, να «εκτίθεται» κάπως ο φοιτητής και η φοιτήτρια Πολιτικός Μηχανικός σε έννοιες της Επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού ακόμη και

από το Α΄ Έτος Σπουδών. Αρκεί βέβαια η «έκθεση» αυτή να γίνεται με ήπιο τρόπο και αυτό αποτελεί επιδίωξη του γράφοντα στα παρόντα διδακτικά βιβλία Εφαρμοσμένων Μαθηματικών II και III για Πολιτικούς Μηχανικούς. ▲

▼ **Εφαρμογή A1.4 (Εξίσωση του Laplace):** Η διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{με} \quad u = u(x, y, z) \quad (1.3.4)$$

καλείται τριδιάστατη εξίσωση του Laplace σε Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y, z)$ . Η εξίσωση αυτή είναι φυσικά μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (όχι συνήθης διαφορική εξίσωση). Συγκεκριμένα έχει τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές: τις Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y, z)$ . Άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) είναι η συνάρτηση  $u = u(x, y, z)$ . Η εξίσωση του Laplace είναι μια πάρα πολύ γνωστή διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους και θα μελετηθεί εκτενώς στο επόμενο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III. Παρουσιάζεται σε πάρα πολλά προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού, όπως στη Ρευστομηχανική και στην Ελαστικότητα. ▲

▼ **Εφαρμογή A1.5 (Εξίσωση των καμπτικών ταλαντώσεων δοκού):** Η διαφορική εξίσωση

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p(x, t) \quad \text{με} \quad v = v(x, t) \quad (1.3.5)$$

καλείται εξίσωση των καμπτικών ταλαντώσεων δοκού. Και η εξίσωση αυτή είναι βέβαια μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. Συγκεκριμένα έχει δύο ανεξάρτητες μεταβλητές: τη θέση  $x$  κατά μήκος της δοκού και το χρόνο  $t$ . Άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) είναι το βέλος κάμψης (ή βύθιση ή εγκάρσια μετατόπιση)  $v = v(x, t)$  αυτής της δυναμικά καταπονούμενης σε κάμψη δοκού. Οι ποσότητες  $EI$  (δυσκαμψία της δοκού) και  $\rho A$  (γραμμική πυκνότητα της δοκού, δηλαδή μάζα ανά μονάδα μήκους της) είναι γνωστές και συνήθως σταθερές. Η συνάρτηση  $p(x, t)$  στο δεξιό μέλος είναι και αυτή γνωστή και παριστάνει την κατανεμημένη κάθετη φόρτιση που ασκείται πάνω στη δοκό. Και αυτή η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (1.3.5) θα μελετηθεί εκτενώς στο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III. Πρόκειται για μια ιδιαίτερα σημαντική και χρήσιμη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους για τον Πολιτικό Μηχανικό. ▲

► **Παρατήρηση A1.1:** Από το σημείο αυτό και μετά δε θα αναφερθούμε σχεδόν καθόλου σε διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους. (Όπως ήδη αναφέραμε, σ' αυτές θα επανέλθουμε στο επόμενο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III.) Εδώ θα περιορίσουμε την προσοχή μας αποκλειστικά στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Θα γράφουμε μάλιστα απλά **διαφορική εξίσωση** και θα εννοούμε συνεχώς **συνήθης διαφορική εξίσωση**. Θα γράφουμε επίσης **σύστημα διαφορικών εξισώσεων** και θα εννοούμε και πάλι συνεχώς **σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων**.

► **Παρατήρηση A1.2:** Επίσης για απλότητα στο συμβολισμό γενικά θα δηλώνουμε τις συνήθεις παραγώγους με τόνο/τόνους (ή με τελεία/τελείες) και όχι με το πλήρες σύμβολό τους με τη χρήση διαφορικών, π.χ.

$$y'''(x) \equiv \frac{d^3 y}{dx^3} \quad \text{ή} \quad \ddot{u}(t) \equiv \frac{d^2 u}{dt^2}. \quad (1.3.6)$$

Τις τελείες, όπως στο δεύτερο αμέσως πιο πάνω παράδειγμα (1.3.6), θα τις χρησιμοποιούμε αποκλειστικά σε παραγώγους ως προς το χρόνο  $t$ , σε χρονικές παραγώγους. Σε καμία άλλη περίπτωση!

### A1.3.2. Τάξη διαφορικής εξισώσεως

Τάξη μιας διαφορικής εξισώσεως καλείται η τάξη της παραγώγου μεγαλύτερης (υψηλότερης) τάξεως, της ανώτερης παραγώγου που εμφανίζεται στη διαφορική εξίσωση.

▼ **Παράδειγμα Α1.1:** Οι τρεις διαφορικές εξισώσεις

$$y'''(x) - 2y'(x) = 5y(x) - 10x + \sin(x^6), \quad y(x) = y'(x)\sqrt{y''(x)}, \quad u(z) = 2u'(z) + 3 \quad (1.3.7)$$

είναι τρίτης τάξεως, δευτέρας τάξεως και πρώτης τάξεως αντίστοιχα. ▲

▼ **Εφαρμογή Α1.6 (Δοκού):** Η διαφορική εξίσωση της συνήθους δοκού

$$EIv''''(x) = p(x) \quad (1.3.8)$$

με άγνωστη συνάρτηση  $v(x)$  το βέλος κάμψεως (βύθιση, εγκάρσια μετατόπιση) της δοκού,  $p(x)$  την κατανεμημένη κάθετη φόρτιση πάνω στη δοκό και  $EI$  τη δυσκαμψία της είναι τετάρτης τάξεως. Αυτό ισχύει, επειδή η μεγαλύτερης (υψηλότερης, ανώτερης) τάξεως παράγωγος στην εξίσωση αυτή είναι η τέταρτη παράγωγος  $v''''(x)$ .

Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και με την αντίστοιχη διαφορική εξίσωση της δοκού επί ελαστικής βάσεως

$$EIv''''(x) + kv(x) = p(x) \quad (1.3.9)$$

με επιπλέον όρο τον όρο  $kv(x)$ . Ο όρος αυτός εκφράζει την αντίδραση του εδάφους πάνω στη δοκό με  $k$  τη συνολική σχετική σταθερά εδάφους-δοκού (όχι απλά το σχετικό μέτρο του εδάφους).

Και στις δύο αυτές διαφορικές εξισώσεις δοκών (1.3.8) και (1.3.9) θα αναφερθούμε εκτενέστερα στο επόμενο Κεφάλαιο Α2: Παράγραφοι Α2.1.5 και Α2.1.7 αντίστοιχα. ▲

▼ **Εφαρμογή Α1.7 (Ταλαντώσεις):** Θεωρούμε τώρα τις διαφορικές εξισώσεις (α) των ιδιοταλαντώσεων και των ελεύθερων ταλαντώσεων και (β) των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων στο συνηθισμένο μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου ( $m, k$ ), δηλαδή τις εξισώσεις

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad \text{και} \quad m\ddot{u}(t) + ku(t) = p(t) \quad (1.3.10)$$

αντίστοιχα. Στις εξισώσεις αυτές η σταθερά  $m$  είναι η μάζα του υλικού σημείου, η σταθερά  $k$  είναι η σταθερά του ελατηρίου και τέλος η συνάρτηση  $p(t)$  (στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις) είναι η εξωτερική φόρτιση (η δύναμη) που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο. Επίσης, όπως ήδη γνωρίζουμε,  $u(t)$  είναι η μετατόπιση του υλικού σημείου και  $t$  ο χρόνος. Και οι δύο αυτές διαφορικές εξισώσεις είναι δευτέρας τάξεως, γιατί η μεγαλύτερης τάξεως παράγωγος που εμφανίζεται σ' αυτές είναι η δεύτερη παράγωγος  $\ddot{u}(t)$ : δεν υπάρχει άλλη ανώτερης τάξεως παράγωγος. ▲

### Α1.3.3. Βαθμός διαφορικής εξίσωσης

Θεωρούμε τώρα αποκλειστικά τις διαφορικές εξισώσεις που μπορούν να γραφούν σε μορφή πολυωνύμου ως προς την άγνωστη συνάρτηση και όλες τις παραγώγους της που παρουσιάζονται στη διαφορική εξίσωση. Ειδικά σε τέτοιες διαφορικές εξισώσεις (πολυωνυμικές ή αναγόμενες σε πολυωνυμικές) καλούμε βαθμό της διαφορικής εξίσωσης το βαθμό του σχετικού πολυωνύμου ως προς την ανώτερης τάξεως παράγωγο μόνο. Οι βαθμοί της ίδιας της άγνωστης συναρτήσεως και των χαμηλότερης τάξεως παραγώγων της δε μας ενδιαφέρουν στο ορισμό του βαθμού μιας διαφορικής εξίσωσης. Αντίθετα, εάν η διαφορική εξίσωση δεν είναι πολυωνυμική ούτε και μπορεί να αναχθεί σε πολυωνυμική, δεν ορίζεται ο βαθμός της. Ουσιαστικά όλες οι διαφορικές εξισώσεις που θα συναντήσουμε θα είναι πρώτου βαθμού. Τέλος θερμή, θερμότατη παράκληση να μη γίνεται σύγχυση ανάμεσα στην τάξη και στο βαθμό μιας διαφορικής εξίσωσης: πρόκειται για εντελώς διαφορετικές έννοιες.

▼ **Εφαρμογή Α1.8 (Ταλαντώσεις):** Και οι δύο διαφορικές εξισώσεις (1.3.10) στην άμέσως προηγούμενη εφαρμογή είναι πρώτου βαθμού, επειδή η μεγαλύτερης τάξεως παράγωγος σ' αυτές,

η δεύτερη παράγωγος  $\ddot{u}(t)$ , είναι υψωμένη στην πρώτη δύναμη. Δηλαδή αυτές οι δύο διαφορικές εξισώσεις είναι πολυώνυμα πρώτου βαθμού ως προς την ανώτερης τάξεως παράγωγο  $\ddot{u}(t)$ . ▲

▼ **Παράδειγμα Α1.2:** Οι τρεις διαφορικές εξισώσεις

$$y'^2(x) + y^{10}(x) = x^5, \quad y^6(x)y'''(x) = y''^8(x) + 5, \quad u(z) + u'^5(z) = u''^4(z)u^{10}(z) + \cosh z + 2 \quad (1.3.11)$$

είναι: (α) δευτέρου βαθμού, (β) πρώτου βαθμού και (γ) τετάρτου βαθμού αντίστοιχα. Αυτό συμβαίνει, επειδή καταρχήν έχουν και οι τρεις πολυωνυμική μορφή ως προς τις άγνωστες συναρτήσεις και όλες τις παραγώγους τους. Στη συνέχεια οι μεγαλύτερης τάξεως παράγωγοι που υπεισέρχονται σ' αυτές είναι: (α) η πρώτη παράγωγος υψωμένη στο τετράγωνο: διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως και δευτέρου βαθμού, (β) η τρίτη παράγωγος χωρίς να είναι υψωμένη σε δύναμη (ισοδύναμα υψωμένη στην πρώτη δύναμη): διαφορική εξίσωση τρίτης τάξεως και πρώτου βαθμού και (γ) η δεύτερη παράγωγος υψωμένη στην τέταρτη δύναμη: διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως και τετάρτου βαθμού αντίστοιχα. Στην τρίτη αυτή διαφορική εξίσωση ο όρος  $\cosh z$  αφορά στην ανεξάρτητη μεταβλητή  $z$  και όχι στην άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή)  $u(z)$ . Άρα δεν εμποδίζει στον ορισμό του βαθμού της διαφορικής αυτής εξίσωσης. Αντίθετη περίπτωση παρουσιάζεται στην αμέσως επόμενη εφαρμογή. ▲

▼ **Εφαρμογή Α1.9 (Απλό εκκρεμές):** Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση του απλού εκκρεμούς

$$\ddot{\theta}(t) + \omega_0^2 \sin \theta(t) = 0 \quad (1.3.12)$$

στις σχετικές ελεύθερες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση. Στη διαφορική αυτή εξίσωση ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος  $t$  και άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) είναι η γωνιακή απόκλιση  $\theta(t)$  του νήματος του εκκρεμούς από την κατακόρυφη θέση ισορροπίας του. Επίσης  $\omega_0$  είναι η σχετική φυσική σταθερά του εκκρεμούς (με διαστάσεις συχνότητας:  $\text{Hz} = 1/\text{sec}$ ). Αυτή προσδιορίζεται από τον τύπο

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (1.3.13)$$

Στον τύπο αυτό  $L$  είναι το μήκος του νήματος του απλού εκκρεμούς που εξετάζουμε (π.χ. σε m) και  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας (π.χ. σε  $\text{m}/\text{sec}^2$ , δηλαδή  $g = 9.81 \text{ m}/\text{sec}^2$ ). Η διαφορική αυτή εξίσωση (1.3.12) είναι προφανώς δευτέρας τάξεως, γιατί η μεγαλύτερης τάξεως παράγωγος σ' αυτήν είναι η δεύτερη παράγωγος: στον όρο  $\ddot{\theta}(t)$ . Ο βαθμός της όμως δε μπορεί να ορισθεί, γιατί δεν είναι σε πολυωνυμική μορφή ως προς την άγνωστη συνάρτηση  $\theta(t)$ . Συγκεκριμένα η άγνωστη συνάρτηση  $\theta(t)$  παρουσιάζεται μέσα σε ημίτονο:  $\sin \theta(t)$ . Ούτε βέβαια μπορεί η ίδια διαφορική εξίσωση να αναχθεί σε πολυωνυμική μορφή: άρα δεν έχει βαθμό.

Αντίθετα, αν θεωρήσουμε πολύ μικρές γωνίες  $\theta$  (π.χ.  $\theta < 0.1 \text{ rad}$ ) και χρησιμοποιήσουμε τη σχετική γνωστή προσέγγιση  $\sin \theta \approx \theta$  (τον πρώτο όρο στη σχετική σειρά Maclaurin), τότε από την αρχική διαφορική εξίσωση (1.3.12) παίρνουμε την ακόλουθη προσεγγιστική διαφορική εξίσωση:

$$\ddot{\theta}(t) + \omega_0^2 \theta(t) = 0. \quad (1.3.14)$$

Φυσικά η διαφορική αυτή εξίσωση συνεχίζει να είναι δευτέρας τάξεως. (Τίποτε απολύτως δεν έχει αλλάξει στη δεύτερη παράγωγο!) Τώρα όμως ορίζεται και ο βαθμός της, συγκεκριμένα είναι πρώτου βαθμού, γιατί: (α) είναι τώρα σε πολυωνυμική μορφή και (β) η μεγαλύτερης τάξεως παράγωγος  $\ddot{\theta}(t)$  (η δεύτερη παράγωγος) δεν είναι υψωμένη σε δύναμη. (Ισοδύναμα είναι υψωμένη στην πρώτη δύναμη.) ▲

#### Α1.3.4. Γραμμικές και μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

Μια θεμελιώδης διάκριση των διαφορικών εξισώσεων είναι σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και σε μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Συγκεκριμένα μια διαφορική εξίσωση η οποία μπορεί



να γραφεί σαν ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού (γραμμικό) ταυτόχρονα και ως προς την άγνωστη συνάρτηση (την εξαρτημένη μεταβλητή)  $y = y(x)$  και ως προς όλες τις παραγώγους της  $y^{(k)} = y^{(k)}(x)$  (με  $k = 1, 2, \dots, n$ , όπου  $n$  είναι η τάξη της διαφορικής εξίσωσης) καλείται **γραμμική διαφορική εξίσωση**. Άρα μια γραμμική διαφορική εξίσωση  $n$ -τάξεως έχει τη γενική μορφή

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = p(x). \quad (1.3.15)$$

Σ' αυτήν τη γραμμική διαφορική εξίσωση οι συναρτήσεις  $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_2(x), a_1(x)$  και  $a_0(x)$  είναι γνωστές συναρτήσεις (συνήθως τις υποθέτουμε και συνεχείς) και καλούνται **συντελεστές** της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης. Επίσης και η συνάρτηση  $p(x)$  στο δεξιό μέλος είναι και αυτή γνωστή συνάρτηση. Άγνωστη συνάρτηση είναι η μόνο η  $y(x)$ .

Παρατηρούμε ότι στις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεν παρουσιάζονται δυνάμεις (ακέραιες ή μη) της άγνωστης συναρτήσεως  $y(x)$  και όλων των παραγώγων της  $y^{(k)}(x)$  (με  $k = 1, 2, \dots, n$ ) ούτε παρουσιάζεται εμφάνισή τους μέσα σε ρίζες και σ' οποιοσδήποτε συναρτήσεις (εκθετικές, λογαριθμικές, τριγωνομετρικές, κλπ.). Επίσης δεν υπάρχουν καθόλου γινόμενα ή πηλίκα είτε της άγνωστης συναρτήσεως  $y(x)$  και των παραγώγων της  $y^{(k)}(x)$  είτε μόνο των παραγώγων της μεταξύ τους.

Πολύ συχνά υποθέτουμε τον πρώτο συντελεστή  $a_n(x)$  στην πιο πάνω γραμμική διαφορική εξίσωση (1.3.15) συνεχώς διάφορο του μηδενός στο διάστημα  $(a, b)$  της ανεξάρτητης μεταβλητής  $x$  που μας ενδιαφέρει:  $\forall x \in (a, b) a_n(x) \neq 0$ . Με τον τρόπο αυτό η γενική γραμμική διαφορική εξίσωση  $n$ -τάξεως (1.3.15) γράφεται συχνά και στη λίγο απλούστερη μορφή της

$$y^{(n)}(x) + b_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + b_2(x)y''(x) + b_1(x)y'(x) + b_0(x)y(x) = q(x). \quad (1.3.16)$$

Στη μορφή αυτή έχει γίνει απλά διαίρεση όλων των όρων της αρχικής γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (1.3.15) (και στο αριστερό και στο δεξιό μέλος της) με  $a_n(x)$ , δηλαδή

$$b_k(x) = \frac{a_k(x)}{a_n(x)} \quad \text{με } k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad \text{και } a_n(x) \neq 0 \quad \text{και επίσης } q(x) = \frac{p(x)}{a_n(x)}. \quad (1.3.17)$$

Τίποτε άλλο!

Κάθε διαφορική εξίσωση που δεν είναι γραμμική, δηλαδή δεν υπάρχει η δυνατότητα γραφής της στη γενική μορφή (1.3.15), καλείται **μη γραμμική διαφορική εξίσωση**.

Οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις υπερέρχουν των μη γραμμικών, επειδή καλύπτονται από πολύ πιο πλήρη θεωρία και, ίσως το σημαντικότερο για τον Πολιτικό Μηχανικό, επειδή είναι και απλούστερες στην επίλυσή τους. Ελάχιστες μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις μπορούν να επιλυθούν μέσω κλειστών τύπων. Μερικές από αυτές, που είναι πρώτης τάξεως, θα τις εξετάσουμε στο Κεφάλαιο Α3 παρακάτω. Εντούτοις το μεγαλύτερο μέρος αυτού του διδακτικού βιβλίου Εφαρμοσμένων Μαθηματικών II για Πολιτικούς Μηχανικούς θα αφιερωθεί στις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Αυτό ακριβώς συμβαίνει και στο μεγαλύτερο μέρος της σχετικής βιβλιογραφίας. Δηλαδή οι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις είναι κάπως παραμελημένες.

Ας προσθέσουμε ότι σχεδόν όλες οι διαφορικές εξισώσεις που έχει να αντιμετωπίσει ο Πολιτικός Μηχανικός στα τεχνικά προβλήματά του είναι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Για να είμαστε περισσότερο ειλικρινείς, πολλές φορές προσεγγίζουμε μια μη γραμμική διαφορική εξίσωση με γραμμική κάτω από κατάλληλες συνθήκες. Η διαδικασία αυτή καλείται **γραμμικοποίηση** και θα την εξετάσουμε στην αμέσως παρακάτω Ενότητα Α1.4.

► **Παρατήρηση Α1.3:** Προφανώς όλες οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις είναι πρώτου βαθμού.

▼ **Παράδειγμα Α1.3:** Οι διαφορικές εξισώσεις

$$y'''(x) + 2y''(x) + 3y(x) = 5, \quad \ddot{x}(t) = a + b\dot{x}(t) + cx(t), \quad u(v) + u'(v) = u''(v) \quad (1.3.18)$$

είναι και οι τρεις τους γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, επειδή είναι γραμμένες (η πρώτη) ή μπορούν να γραφούν (η δεύτερη και η τρίτη) στη γενική μορφή (1.3.15) της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης.

Αντίθετα οι διαφορικές εξισώσεις

$$y''(x) + \cos y(x) = 0, \quad y'^2(x) + y(x) = a, \quad y''(x) + \sqrt{y(x)} = y'(x) + b, \quad e^{y(x)} = y'(x) \quad (1.3.19)$$

δεν είναι γραμμικές, γιατί δεν είναι της γενικής μορφής (1.3.15) ούτε όμως και μπορούν να μετατραπούν στη μορφή αυτή. ▲

▼ **Εφαρμογή Α1.10 (Ταλαντώσεις):** Η γνωστή μας διαφορική εξίσωση των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων του μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = p^*(t) \quad (1.3.20)$$

είναι προφανώς μια γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως. ▲

▼ **Εφαρμογή Α1.11 (Δεύτερος νόμος του Νεύτωνα):** Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα

$$F = ma \implies F = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1.3.21)$$

αποτελεί μια διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως με άγνωστη συνάρτηση τη θέση  $x = x(t)$  του υλικού σημείου, εφόσον η δύναμη  $F$  είναι συνάρτηση αποκλειστικά του χρόνου  $t$ , δηλαδή  $F = F(t)$ . Τό ίδιο συμβαίνει και αν η δύναμη  $F$  είναι γραμμική συνάρτηση της θέσεως  $x$  ή και της ταχύτητας  $v = \dot{x}(t)$ , δηλαδή εάν

$$F = k_0 x(t) \quad \text{ή} \quad F = c_0 \dot{x}(t) \quad \text{ή γενικότερα} \quad F = k_0 x(t) + c_0 \dot{x}(t) \quad (1.3.22)$$

με τα  $k_0$  και  $c_0$  σταθερές ή ακόμη και συναρτήσεις του χρόνου  $t$ . Αυτό συμβαίνει π.χ. στη γενική περίπτωση  $F = k_0 x(t) + c_0 \dot{x}(t)$ , επειδή ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα (1.3.21) παίρνει στην περίπτωση αυτή τη μορφή

$$k_0 x(t) + c_0 \dot{x}(t) = m \ddot{x}(t) \implies m \ddot{x}(t) - c_0 \dot{x}(t) - k_0 x(t) = 0 \implies m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = 0 \quad (1.3.23)$$

με  $k = -k_0$  και  $c = -c_0$ . Πρόκειται προφανώς για γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως. ▲

### Α1.3.5. Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς και με μη σταθερούς συντελεστές

Μια γραμμική διαφορική εξίσωση καλείται **γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές**, εάν όλοι οι συντελεστές της είναι σταθεροί, δηλαδή δεν εξαρτώνται από την ανεξάρτητη μεταβλητή. (Φυσικά δεν πρέπει να εξαρτώνται ούτε και από την άγνωστη συνάρτηση. Αλλιώς η διαφορική εξίσωση δε θα ήταν γραμμική!) Αν ένας, έστω και ένας μόνο συντελεστής εξαρτάται από την ανεξάρτητη μεταβλητή, τότε έχουμε μια **γραμμική διαφορική εξίσωση με μη σταθερούς (ή μεταβλητούς) συντελεστές**.

Οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές είναι πολύ εύκολες στην επίλυσή τους και σ' αυτές θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας. Είναι μάλιστα και αυτές που συνήθως συναντά στα τεχνικά προβλήματά του ο Πολιτικός Μηχανικός. Όμως η ενδιαφέρουσα και κομψή γενική θεωρία των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων είναι εφαρμόσιμη και στις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μη σταθερούς συντελεστές και θα τη μελετήσουμε σύντομα και αυτή. Ας σημειώσουμε τέλος ότι μερικές φορές (όχι πολλές όμως) ο Πολιτικός Μηχανικός αντιμετωπίζει και γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μη σταθερούς συντελεστές. Δυστυχώς γενικά αυτές δεν είναι εύκολες στην επίλυσή τους ή απλά δεν έχουν λύσεις σε κλειστή μορφή. Για τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μη σταθερούς (με μεταβλητούς) συντελεστές η κλασική μέθοδος των δυναμοσειρών αποτελεί μια αναλυτική δυνατότητα επίλυσης πριν την προσφυγή στις αριθμητικές μεθόδους.

▼ **Παράδειγμα Α1.4:** Στις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

$$y''(x) + 2y'(x) + 3y(x) = 4x^2 \quad \text{και} \quad y''(x) + 2y'(x) + xy(x) = 4 \quad (1.3.24)$$

η πρώτη είναι με σταθερούς συντελεστές. (Το δεξιό μέλος της  $q(x) = 4x^2$  μεταβάλλεται βέβαια με την ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$ , δεν είναι όμως συντελεστής αυτής της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης!) Αντίθετα η δεύτερη γραμμική διαφορική εξίσωση είναι με μη σταθερούς (με μεταβλητούς) συντελεστές, γιατί στον όρο της  $xy(x)$  στο αριστερό μέλος ο συντελεστής  $x$  είναι μη σταθερός, εξαρτάται από την ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$ . Τέλος στη διαφορική εξίσωση

$$y''(x) + y(x)y'(x) = 1 \quad (1.3.25)$$

δεν έχει νόημα να μιλάμε για σταθερούς ή για μη σταθερούς (μεταβλητούς) συντελεστές, απλά επειδή η διαφορική αυτή εξίσωση δεν είναι γραμμική. Αυτό συμβαίνει εξαιτίας της παρουσίας του γινομένου  $y(x)y'(x)$  στο αριστερό μέλος της. ▲

▼ **Εφαρμογή Α1.12 (Δοκός επί ελαστικής βάσεως):** Θεωρούμε και πάλι δοκό επί ελαστικής βάσεως (π.χ. πεδילוδοκό ή σιδηροτροχιά) με γνωστή πλέον τη σχετική γραμμική διαφορική εξίσωση (1.3.2)

$$EI \frac{d^4v(x)}{dx^4} + kv(x) = p(x), \quad \text{απολύτως ισοδύναμα} \quad EIv''''(x) + kv(x) = p(x) \quad (1.3.26)$$

με  $v(x)$  το βέλος κάμψης (τη βύθιση) της δοκού. Αν η δυσκαμψία της δοκού  $EI$  είναι σταθερή κατά μήκος της και το ίδιο συμβαίνει και για τη σταθερά  $k$  εδάφους-δοκού, τότε έχουμε προφανώς μια γραμμική διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως με σταθερούς συντελεστές. (Η μεταβολή της κάθετης καταναμεμένης φορτίσεως  $p(x)$  στο δεξιό μέλος προφανώς δεν επηρεάζει τη σταθερότητα των συντελεστών  $EI$  και  $k$  της διαφορικής αυτής εξίσωσης.) Αν όμως η σταθερά  $k$  εδάφους-δοκού μεταβάλλεται με τη θέση  $x$  κατά μήκος της δοκού, είναι συνάρτηση  $k = k(x)$  της θέσεως  $x$ , τότε βέβαια η πιο πάνω γραμμική διαφορική εξίσωση (1.3.26) είναι με μη σταθερούς (μεταβλητούς) συντελεστές. Αυτό ισχύει ακόμη και αν η δυσκαμψία  $EI$  της δοκού είναι σταθερή κατά μήκος της.

Αν και η σταθερά  $k$  εδάφους-δοκού δε μεταβάλλεται συχνά με τη θέση  $x$ , κάπως πιο συνηθισμένη είναι η περίπτωση που η δυσκαμψία  $EI$  της δοκού μεταβάλλεται με τη θέση  $x$ . Η δυσκαμψία  $EI$  σε μια δοκό είναι το γινόμενο του μέτρου ελαστικότητας (ή μέτρου του Young)  $E$  του υλικού της<sup>2</sup> (που γενικά είναι απόλυτα σταθερό κατά μήκος της) επί τη ροπή αδρανείας  $I$  της διατομής της γύρω από τον ουδέτερο άξονά της  $Oz$  στην κάμψη. Αυτή η ροπή αδρανείας  $I$  είναι μερικές φορές μεταβλητή κατά μήκος της δοκού:  $I = I(x)$ . Η μεταβολή αυτή οφείλεται μάλιστα απλά στη μεταβολή των διαστάσεων της διατομής της δοκού κατά μήκος της. Ας γίνουμε λίγο πιο συγκεκριμένοι θεωρώντας δοκό με ορθογωνική διατομή πλάτους  $b$  και ύψους  $h$ . Αυτό που μπορεί να μεταβάλλεται σε μια δοκό κατά μήκος της είναι το ύψος  $h$ . Δηλαδή μπορεί να έχουμε  $h = h(x)$ . Τότε, έστω και με σταθερό το πλάτος  $b$  της δοκού, η δυσκαμψία  $EI$  της δοκού μεταβάλλεται με τη θέση  $x$  κατά μήκος της, δηλαδή  $EI = EI(x)$ .

Παρενθετικά ας σημειωθεί ότι είναι απαράδεκτη η χρήση διπλών πλάγιων συμβόλων, π.χ. του συμβόλου  $EI$ , στα μαθηματικά για μία ποσότητα. Εντούτοις ο Πολιτικός Μηχανικός χρησιμοποιεί πραγματικά το σύμβολο  $EI$  για τη δυσκαμψία. Έτσι κι αλλιώς πρόκειται απλά για το γινόμενο  $E$  επί  $I$ , τίποτε άλλο. Επομένως δε χάλασε ο κόσμος και αποδεχόμαστε το συμβολισμό αυτό.

Στην περίπτωση αυτή της μεταβαλλόμενης δυσκαμψίας  $EI = EI(x)$  η γραμμική διαφορική εξίσωση (1.3.26) καλείται με μη σταθερούς (μεταβλητούς) συντελεστές. Ας σημειωθεί τέλος ότι η μεταβολή του πλάτους  $b$  της δοκού (που την υποθέτουμε εδώ ορθογωνικής διατομής) επί ελαστικής βάσεως (συνήθως ελαστικού εδάφους) κατά μήκος της προκαλεί την ταυτόχρονη μεταβολή

<sup>2</sup>Εννοείται ότι εδώ υποθέτουμε το υλικό της δοκού πως είναι ισότροπο και γραμμικά ελαστικό.

(α) της δυσκαμψίας  $EI$  της δοκού και (β) της σταθεράς  $k$  εδάφους-δοκού. Αυτό συμβαίνει, απλά επειδή η αντίδραση του εδάφους  $-kn(x)$  (ανά μονάδα μήκους της δοκού) στη βύθιση της δοκού  $v(x)$  είναι ανάλογη του πλάτους  $b$  της δοκού και όχι μόνο των ιδιοτήτων του εδάφους. ▲

### A1.3.6. Ομογενείς και μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

Στις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις διακρίνουμε επίσης τις ομογενείς και τις μη ομογενείς. Ορίζουμε σαν **ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση** εκείνη τη γραμμική διαφορική εξίσωση όπου όλοι οι όροι της περιέχουν είτε την άγνωστη συνάρτηση είτε μια παράγωγό της (στην πρώτη δύναμη φυσικά!). Στην αντίθετη περίπτωση, εκείνη όπου ένας ή και περισσότεροι όροι της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεν περιέχουν την άγνωστη συνάρτηση ή μια παράγωγό της η εξίσωση καλείται **μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση**.

Πολύ συχνά στις ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις όλοι οι όροι (που περιέχουν βέβαια την άγνωστη συνάρτηση ή παράγωγό της) είναι συγκεντρωμένοι στο αριστερό μέλος, ενώ το δεξιό μέλος είναι μηδέν. (Εντούτοις με κανέναν τρόπο αυτό δεν είναι υποχρεωτικό!) Επίσης στις μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις στο δεξιό μέλος βρίσκεται συνήθως ο όρος ή οι όροι που καθιστούν τη γραμμική διαφορική εξίσωση μη ομογενή, δηλαδή οι όροι που δεν εξαρτώνται από την άγνωστη συνάρτηση. Ούτε κι αυτό είναι βέβαια υποχρεωτικό, αλλ' είναι συνηθισμένο.

▼ **Παράδειγμα A1.5:** Οι διαφορικές εξισώσεις

$$y''(x) = 3y(x), \quad y''''(x) - y'(x) = y''(x) - 4y(x), \quad a_2y''(x) + a_1y'(x) + a_0y(x) = 0 \quad (1.3.27)$$

είναι ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Αυτό συμβαίνει, γιατί όλες τους είναι πολυώνυμα πρώτου βαθμού ως προς την άγνωστη συνάρτηση και τις παραγώγους της και επίσης δεν υπάρχει κανένας όρος που να μην περιέχει την άγνωστη συνάρτηση ή παράγωγό της.

Αντίθετα οι διαφορικές εξισώσεις

$$y''(x) + 1 = 3y(x), \quad y''''(x) - y'(x) + \sin 1 = y''(x) - 4y(x) + 3, \quad a_2y''(x) + a_1y'(x) + a_0y(x) = b \quad (1.3.28)$$

(με  $b \neq 0$ ) είναι μεν γραμμικές, αλλά και μη ομογενείς, επειδή περιέχουν όρους (τον όρο 1 η πρώτη, τους όρους  $\sin 1$  και 3 η δεύτερη και τον όρο  $b$  η τρίτη) που δεν περιλαμβάνουν την άγνωστη συνάρτηση  $y(x)$  ή παράγωγό της. (Δεν έχει καμία απολύτως σημασία αν οι όροι αυτοί βρίσκονται στο αριστερό ή στο δεξιό μέλος της διαφορικής εξίσωσης, παρόλο που συνηθίζεται να βρίσκονται στο δεξιό μέλος.)

Τέλος η διαφορική εξίσωση

$$y'(x) = y^2(x) \quad (1.3.29)$$

δεν είναι γραμμική λόγω του όρου  $y^2(x)$  στο δεξιό μέλος της. Άρα δε μπορούμε να της δώσουμε χαρακτηρισμό ομογενής ή μη ομογενής. Αυτό συμβαίνει, επειδή ο χαρακτηρισμός αυτός δίνεται αποκλειστικά στις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. ▲

▼ **Εφαρμογή A1.13 (Δοκός επί ελαστικής βάσεως):** Θεωρούμε ξανά τη δοκό επί ελαστικής βάσεως (π.χ. πεδילוδοκό ή σιδηροτροχιά) με απόλυτα γνωστή τη σχετική γραμμική διαφορική εξίσωση (1.3.2) ή (1.3.26)

$$EIv''''(x) + kv(x) = p(x). \quad (1.3.30)$$

Πρόκειται ασφαλώς για μια γραμμική διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως λόγω της παρουσίας της τετάρτης παραγώγου  $v''''(x)$ . Επιπλέον, επειδή υπάρχει στο δεξιό μέλος και η κατανομημένη κάθετη εξωτερική φόρτιση  $p(x)$  (που συνήθως μετρείται σε kN/m), η εξίσωση αυτή είναι μη ομογενής. Το ίδιο συμβαίνει και για τη συνήθη διαφορική εξίσωση της δοκού (χωρίς την ελαστική βάση, δηλαδή με  $k = 0$ ):

$$EIv''''(x) = p(x). \quad (1.3.31)$$

Αντίθετα, αν δεν υπάρχει καθόλου ο μη ομογενής όρος  $p(x)$ , δηλαδή η δοκός δε φορτίζεται από κάποιο κατανεμημένο εξωτερικό φορτίο, οπότε  $p(x) \equiv 0$ , τότε οι αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις

$$EIv''''(x) + kv(x) = 0 \quad (1.3.32)$$

και

$$EIv''''(x) = 0 \quad (1.3.33)$$

είναι προφανώς ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Φυσικά σε μια τέτοια περίπτωση και πάλι μπορεί να υπάρχει φόρτιση της δοκού (άρα και καμπτική παραμόρφωσή της), π.χ. από ροπές κάμψεως (ή καμπτικές ροπές)  $M_{A,B}$  στα δύο άκρα της  $A$  και  $B$ . ▲

▼ **Εφαρμογή Α1.14 (Ταλαντώσεις):** Ανάλογα θεωρούμε και τη διαφορική εξίσωση των ταλαντώσεων χωρίς απόσβεση σε μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου-ελατηρίου ή μάζας-ελατηρίου  $(m, k)$ . Γνωρίζουμε ήδη ότι η εξίσωση αυτή έχει τη μορφή

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = p(t) \quad (1.3.34)$$

με  $u(t)$  τη μετατόπιση του υλικού σημείου και  $p(t)$  την εξωτερική φόρτιση του ίδιου σημείου, δηλαδή τη δύναμη που ασκείται σ' αυτό. (Οι δύο σταθερές  $m$  και  $k$  παριστάνουν, όπως ξέρουμε, τη μάζα του υλικού σημείου και τη σταθερά του ελατηρίου αντίστοιχα.)

Πρόκειται φυσικά για μια μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές: τους  $m$  και  $k$ . Το ότι είναι γραμμική και με σταθερούς συντελεστές είναι προφανές. Το ότι είναι μη ομογενής οφείλεται απλά στον όρο  $p(t)$  στο δεξιό μέλος, στην εξωτερική φόρτιση, στη δύναμη που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο.

Αντίθετα, αν  $p(t) \equiv 0$ , η πιο πάνω γραμμική διαφορική εξίσωση παίρνει την απλούστερη μορφή

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (1.3.35)$$

και μετατρέπεται σε μια ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση. Το ότι η διαφορική αυτή εξίσωση είναι ομογενής δε δηλώνει την υποχρεωτική ανυπαρξία κινήσεως του υλικού σημείου. Πραγματικά, μπορεί θαυμάσια το υλικό σημείο να κινείται με βάση την αρχική ενέργεια του μηχανικού συστήματος υλικού σημείου-ελατηρίου. Η ενέργεια αυτή αποτελείται από το άθροισμα  $U+T$  της δυναμικής ενέργειας  $U$  του ελατηρίου και της κινητικής ενέργειας  $T$  του υλικού σημείου. Και μάλιστα, επειδή δεν υπάρχει όρος αποσβέσεως στη διαφορική εξίσωση που να καταναλίσκει ενέργεια, θεωρητικά μιλώντας, το υλικό σημείο μπορεί να κινείται για πάντα! ▲

► **Παρατήρηση Α1.4:** Παρατηρούμε λοιπόν ότι στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού (αλλά και γενικότερα ισχύει αυτό) οι μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις έχουν κάποιον όρο (ή κάποιους όρους) που εκφράζουν εξωτερική δράση πάνω στο σύστημα που εξετάζουμε. Τέτοια δράση μπορεί να είναι: (α) η κατανεμημένη εξωτερική φόρτιση  $p(x)$  σε μια δοκό ή (β) η εξωτερική φόρτιση (δύναμη)  $p(t)$  πάνω σε ένα υλικό σημείο (π.χ. σε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις). Επίσης στη Μετάδοση Θερμότητας ο μη ομογενής όρος δηλώνει πηγή (ή απαγωγή) θερμότητας, ενώ στη Ρευστομηχανική (Μηχανική των Ρευστών) δηλώνει πηγή (ή απαγωγή) μάζας, εδώ ρευστού. Ανάλογα στην Περιβαλλοντική Υδραυλική ο μη ομογενής όρος δηλώνει την παραγωγή (αν έχει θετική τιμή) ή την καταστροφή (αν έχει αρνητική τιμή) ρύπου που κινείται μαζί με το ρευστό (μεταγωγή ρύπου) ή και διαχέεται σ' αυτό (διάχυση ρύπου).

► **Παρατήρηση Α1.5:** Σημειώνουμε επίσης ότι αντίθετα με τους καθαρά εξωτερικούς όρους (όπως είναι η εξωτερική φόρτιση σε δοκό ή σε μηχανικό σύστημα υλικού σημείου-ελατηρίου) οι όροι που είναι «εξ αντιδράσεως» δεν οδηγούν σε μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Σαν σχετικό παράδειγμα αναφέρουμε τον όρο  $kv(x)$  στη διαφορική εξίσωση της δοκού επί ελαστικής

βάσεως (1.3.32). Ο όρος αυτός φανερώνει την αντίδραση της ελαστικής βάσεως στη βύθιση της δοκού, ιδίως όταν γραφεί με πρόσημο πλην, δηλαδή  $-kv(x)$  (στο δεξιό μέλος). Παρατηρούμε ότι ο ίδιος όρος δεν καθιστά τη γραμμική διαφορική εξίσωση (1.3.32) μη ομογενή. Όμοια η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου  $ku(t)$  (και αυτή πρέπει να γραφεί με πρόσημο πλην,  $-ku(t)$ , αν τεθεί στο δεξιό μέλος της διαφορικής εξίσωσης (1.3.35)) επίσης δεν καθιστά την εξίσωση αυτή μη ομογενή. Μόνο η καθαρά εξωτερική φόρτιση (δύναμη)  $p(t)$  την καθιστά μη ομογενή: εξίσωση (1.3.34). Αντίθετα η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου  $-ku(t)$  απλά αντιδρά στη μετατόπιση του υλικού σημείου ως προς τη θέση ισορροπίας του  $u = 0$ , είναι δύναμη «εξ αντιδράσεως», εσωτερική δύναμη του μηχανικού συστήματος υλικού σημείου-ελατηρίου (ή, απλούστερα, μάζας-ελατηρίου). Δεν είναι εξωτερική δύναμη!

### A1.3.7. Ονομασίες ειδικών διαφορικών εξισώσεων

Στους πιο πάνω χαρακτηρισμούς των διαφορικών εξισώσεων (οι δύο τελευταίοι αναφέρονται μόνο στις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις) πρέπει να προσθέτουμε και την ονομασία κάθε ειδικής διαφορικής εξίσωσης, εφόσον υπάρχει τέτοια ονομασία. Πραγματικά θα δούμε παρακάτω ότι ορισμένες διαφορικές εξισώσεις έχουν ειδικές ονομασίες.

Στις διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως θα γνωρίσουμε στο Κεφάλαιο Α3 τις **διαφορικές εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών**, τις **ομογενείς διαφορικές εξισώσεις** (αλλά με εντελώς διαφορετική έννοια από εκείνη στην αμέσως πιο πάνω Παράγραφο Α1.3.6), τις **διαφορικές εξισώσεις Bernoulli** και τις **πλήρεις ή ακριβείς διαφορικές εξισώσεις**. Αντίθετα στο ίδιο Κεφάλαιο Α3 δε θα μελετήσουμε τις **διαφορικές εξισώσεις d'Alembert-Lagrange**, τις **διαφορικές εξισώσεις Clairaut** και τις **διαφορικές εξισώσεις Riccati**. Το ίδιο θα κάνουμε (δε θα τις μελετήσουμε) και για αρκετές άλλες λιγότερο γνωστές κατηγορίες διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως που δεν παρουσιάζουν όμως εξαιρετικά σημαντικό πρακτικό ενδιαφέρον για τον Πολιτικό Μηχανικό.

Στις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις στο Κεφάλαιο Α5 θα αναφερθούμε επίσης στις **διαφορικές εξισώσεις Euler (ή Cauchy-Euler)**. Οι εξισώσεις αυτές καλούνται (αν και πολύ λιγότερο συχνά) και **ισοδιάστατες διαφορικές εξισώσεις**. Αυτές είναι ειδικές γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, αλλά με μη σταθερούς (μεταβλητούς) συντελεστές. Παρουσιάζονται μερικές φορές στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού, ιδίως σε προβλήματα που έχουν σχέση με κυκλική (ή αξονική) συμμετρία, π.χ. σε προβλήματα υποστυλωμάτων με κυκλική διατομή υπό επίπεδη ελαστική καταπόνηση. Παρουσιάζονται επίσης και σε κυκλικές πλάκες.

## A1.4. ΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις είναι πάντα αυτές που θα προτιμούσαμε να έχουμε στα προβλήματά μας. Αυτό ισχύει, επειδή, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, είναι υπολογιστικά πολύ ευκολότερες στην επίλυσή τους, ιδίως μάλιστα όταν έχουν και σταθερούς συντελεστές. Επιπλέον διαθέτουν και ολοκληρωμένη και γενικής ισχύος θεωρία για τις λύσεις τους.

Μερικές φορές οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις παρουσιάζονται μόνες τους σε πρακτικά προβλήματα. Δυστυχώς όμως άλλες φορές είναι ανάγκη να κάνουμε ορισμένες υποθέσεις για την ισχύ τους. Παραδείγματος χάρη, υποθέτουμε ότι το ελατήριο έχει γραμμική ελαστική συμπεριφορά στο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου-ελατηρίου (ή μάζας-ελατηρίου).

Πέρα από τις αρχικές υποθέσεις που οδηγούν σε μια γραμμική διαφορική εξίσωση, μια άλλη περίπτωση αφορά στην καλούμενη γραμμικοποίηση μιας μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης. Προσεγγίζουμε δηλαδή μια μη γραμμική διαφορική εξίσωση από μια αντίστοιχη γραμμική. Προς το σκοπό αυτό κάνουμε ορισμένες λογικές υποθέσεις στην προσέγγιση αυτή και περιορίζουμε ανάλογα το «εύρος» της ισχύος της προσεγγιστικής γραμμικής διαφορικής εξίσωσης.

Μια τέτοια γραμμικοποίηση κάναμε ήδη στην Εφαρμογή Α1.9 στην Παράγραφο Α1.3.3 στο

πρόβλημα του απλού εκκρεμούς με τη γραμμική εξίσωση (1.3.14) να ισχύει για μικρές μόνο τιμές της γωνίας  $\theta$  που σχηματίζεται ανάμεσα στον κατακόρυφο άξονα και στο νήμα του εκκρεμούς.

Στο επόμενο Κεφάλαιο Α2, στην Παράγραφο Α2.1.3 θα αναφερθούμε εκτενώς σε μια πολύ σπουδαία γραμμικοποίηση μη γραμμικής διαφορικής εξισώσεως. Η γραμμικοποίηση αυτή αφορά στο σημαντικότερο πρόβλημα της συνήθους δοκού, όπου η καμπυλότητα της δοκού  $\kappa(x)$  προσεγγίζεται από τη δεύτερη παράγωγο  $v''(x)$  του βέλους κάμψεως. Η γραμμική διαφορική εξίσωση (2.1.34) που προκύπτει τελικά ισχύει για όχι πάρα πολύ μεγάλες κλίσεις ή γωνίες στροφής της δοκού και, για να είμαστε ειλικρινείς, είναι αυτή που χρησιμοποιείται από τον Πολιτικό Μηχανικό στην πράξη. Η ίδια γραμμικοποίηση χρησιμοποιείται και στην εξίσωση της δοκού επί ελαστικής βάσεως και σε παρόμοια προβλήματα ακόμη και στο λυγισμό ράβδου (ή στύλου ή υποστυλώματος ή κολώνας).

Δυστυχώς όμως στο λυγισμό για μεγάλα βέλη η γραμμικοποιημένη διαφορική εξίσωση δεν έχει και τρομερή επιτυχία, αν και έχει αρκετή επιτυχία και αυτή ως προς την εκτίμηση του πρώτου (του βασικού) κρίσιμου φορτίου λυγισμού  $P_{cr,1}$ . Από 'κεί και πέρα όμως είναι προτιμότερη η χρήση της σχετικής ακριβούς, αλλά μη γραμμικής, διαφορικής εξισώσεως, που οδηγεί τελικά στο ακριβές σχήμα (ελαστική γραμμή) της ράβδου που λύγισε: στην καλούμενη *elastica*. Το διάσημο πρόβλημα της *elastica* μελετήθηκε πρώτα από τον Euler το 1744 και μετά από το Lagrange το 1770.

Παρά ταύτα είναι πολύ σημαντική η γραμμικοποίηση μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, αρκεί βέβαια να είμαστε προσεκτικοί ως προς τα όρια της ισχύος της γραμμικής διαφορικής εξισώσεως που προκύπτει χωρίς να έχουμε σημαντικά σφάλματα. Δυστυχώς οι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις είναι συνήθως πολύ δύσκολες στην επίλυσή τους, αν είναι εφικτή και αυτή. Εύλογο είναι να προτιμάμε τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις έστω και με θυσία στην ακρίβεια των λύσεων που βρίσκουμε. Άρα μας «λύνει τα χέρια» η γραμμικοποίηση μιας μη γραμμικής διαφορικής εξισώσεως με προσοχή όμως, π.χ. όχι σε δοκούς με πολύ μεγάλα βέλη κάμψεως.

## A1.5. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΙ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

### A1.5.1. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Από την Τριγωνομετρία έχουμε ήδη μια πολύ καλή γνώση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων συνημίτονο (σύμβολο  $\cos$ ), ημίτονο (σύμβολο  $\sin$ ), εφαπτομένη (σύμβολο  $\tan$ ), συνεφαπτομένη (σύμβολο  $\cot$ ), τέμνουσα (σύμβολο  $\sec$ ) και συντέμνουσα (σύμβολο  $\csc$ ) με

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x := \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}, \quad \sec x := \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x := \frac{1}{\sin x}. \quad (1.5.1)$$

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις καλούνται μερικές φορές και κυκλικές συναρτήσεις, γιατί σχετίζονται με τον κύκλο. Έχουν μάλιστα πάρα πολλές αξιοσημείωτες ιδιότητες, όπως είναι οι εξής:

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x, \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \text{κλπ.} \quad (1.5.2)$$

Για τις τριγωνομετρικές (ή κυκλικές) συναρτήσεις ισχύει επίσης και ο γνωστός τύπος του Euler<sup>3</sup>

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{με} \quad i = \sqrt{-1} \quad \text{τη φανταστική μονάδα.} \quad (1.5.3)$$

Θέτοντας  $-x$  αντί για  $x$  στον τύπο αυτό του Euler, παίρνουμε και τον αντίστοιχο τύπο

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x. \quad (1.5.4)$$

<sup>3</sup>Ένας εντελώς διαφορετικός, αλλ' εξίσου χρήσιμος (ίσως και χρησιμότερος όσον αφορά στον Πολιτικό Μηχανικό), τύπος του Euler ισχύει στο πρόβλημα του λυγισμού μιας ευθύγραμμης ράβδου (ή στύλου ή υποστυλώματος) στη Μηχανική των Υλικών. Στο πρόβλημα αυτό ο σχετικός τύπος του Euler δίνει το κρίσιμο φορτίο λυγισμού  $P_{cr}$ . Ο τύπος αυτός του Euler διδάσκεται επίσημα στη Μηχανική των Υλικών στο 4ο Εξάμηνο Σπουδών. Θα αναφερθούμε όμως συνοπτικά σ' αυτόν και στο Κεφάλαιο Α9 παρακάτω, όπου και θα τον αποδείξουμε.

### A1.5.2. Υπερβολικές συναρτήσεις

Εκτός από τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις πολύ σημαντικές για τον Πολιτικό Μηχανικό (και όχι μόνο ...) είναι και οι καλούμενες υπερβολικές συναρτήσεις. Αυτές ονομάζονται έτσι, επειδή σχετίζονται με την υπερβολή, ακριβώς όπως οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις σχετίζονται με τον κύκλο.

Οι βασικές δύο υπερβολικές συναρτήσεις είναι το υπερβολικό συνημίτονο (σύμβολο  $\cosh$ ) και το υπερβολικό ημίτονο (σύμβολο  $\sinh$ ). Οι συναρτήσεις αυτές μπορούν εύκολα να ορισθούν με τη βοήθεια της εκθετικής συναρτήσεως  $e^x \equiv \exp x$  ως εξής:

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \quad (1.5.5)$$

Αθροίζοντας και αφαιρώντας αυτούς τους δύο τύπους ορισμού, έχουμε αμέσως και τις ιδιότητες

$$e^x = \cosh x + \sinh x, \quad e^{-x} = \cosh x - \sinh x. \quad (1.5.6)$$

Οι ιδιότητες αυτές σίγουρα μας θυμίζουν τους τύπους του Euler (1.5.3) και (1.5.4) για τις αντίστοιχες τριγωνομετρικές συναρτήσεις  $\cos x$  και  $\sin x$ .

Στη συνέχεια με τη βοήθεια των δύο αυτών υπερβολικών συναρτήσεων,  $\cosh x$  και  $\sinh x$ , μπορούν εύκολα να ορισθούν και οι υπόλοιπες υπερβολικές συναρτήσεις. Αυτές είναι η υπερβολική εφαπτομένη (σύμβολο  $\tanh$ ), η υπερβολική συνεφαπτομένη (σύμβολο  $\coth$ ), η υπερβολική τέμνουσα (σύμβολο  $\operatorname{sech}$ ) και η υπερβολική συντέμνουσα (σύμβολο  $\operatorname{csch}$ ). Για τις τέσσερις αυτές υπερβολικές συναρτήσεις ισχύουν οι εξής σχέσεις ορισμού τους:

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{1}{\tanh x}, \quad \operatorname{sech} x := \frac{1}{\cosh x}, \quad \operatorname{csch} x := \frac{1}{\sinh x}. \quad (1.5.7)$$

Παρατηρούμε ότι οι σχέσεις αυτές είναι απόλυτα ανάλογες με τις αντίστοιχες σχέσεις (1.5.1), οι οποίες ισχύουν για τις αντίστοιχες τριγωνομετρικές συναρτήσεις (χωρίς το  $h$  στα σύμβολά τους).

Οι υπερβολικές συναρτήσεις έχουν και αυτές πολλές αξιοσημείωτες ιδιότητες που είναι αρκετά ανάλογες (αν και συνήθως όχι ολόιδιες) με τις αντίστοιχες ιδιότητες στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Παραδείγματος χάρη, ισχύουν οι ιδιότητες

$$\cosh(-x) = \cosh x, \quad \sinh(-x) = -\sinh x, \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x, \quad (1.5.8)$$

κλπ., που είναι αρκετά ανάλογες με τις αντίστοιχες ιδιότητες (1.5.2) για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις. **Προσοχή όμως στις διαφορές**, π.χ. υπάρχει το πρόσημο μείον ( $-$ ) στην τόσο σημαντική ιδιότητα  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$  των υπερβολικών συναρτήσεων αντί για το πρόσημο συν ( $+$ ) στην αντίστοιχη ιδιότητα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, δηλαδή

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad \text{ενώ τώρα} \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1. \quad (1.5.9)$$

Είναι προφανές ότι στις διαφορικές εξισώσεις έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον οι τύποι παραγωγίσεως των υπερβολικών συναρτήσεων. Συγκεκριμένα για το υπερβολικό συνημίτονο ( $\cosh$ ) και το υπερβολικό ημίτονο ( $\sinh$ ) από τους τύπους ορισμού τους (1.5.5) προκύπτουν αμέσως οι πρώτες παράγωγοί τους

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \frac{d}{dx} \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \quad (1.5.10)$$

και ανάλογα

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \frac{d}{dx} \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x. \quad (1.5.11)$$

Εύκολα μπορούμε να προχωρήσουμε τώρα και σε παραγώγους ανωτέρας τάξεως.



► **Παρατήρηση Α1.6:** Συγκρίνοντας τους δύο προηγούμενους τύπους παραγωγίσεως (1.5.10) και (1.5.11) με τους αντίστοιχους τύπους για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, παρατηρούμε ότι έχουμε και στους δύο συν. Δηλαδή η παράγωγος του υπερβολικού συνημιτόνου είναι το υπερβολικό ημίτονο χωρίς όμως μείον. Ανάλογα και η παράγωγος του υπερβολικού ημιτόνου είναι το υπερβολικό συνημίτονο (τώρα ακριβώς όπως ισχύει και στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις).

Όπως συμβαίνει στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, έτσι και εδώ στις υπερβολικές συναρτήσεις ορίζονται βέβαια και οι αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

$$\cosh^{-1} x, \quad \sinh^{-1} x, \quad \tanh^{-1} x, \quad \coth^{-1} x, \quad \operatorname{sech}^{-1} x, \quad \operatorname{csch}^{-1} x. \quad (1.5.12)$$

► **Παρατήρηση Α1.7:** Στις συναρτήσεις αυτές (όπως και στις αντίστοιχες τριγωνομετρικές συναρτήσεις) τονίζεται **με πολύ μεγάλη έμφαση** ότι ο εκθέτης  $-1$  δε δηλώνει δύναμη: δηλώνει απλά αντίστροφη συνάρτηση. Για παράδειγμα (στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις)

$$\cos^{-1} x \equiv \arccos x, \quad \sin^{-1} x \equiv \arcsin x, \quad \tan^{-1} x \equiv \arctan x, \quad \text{κλπ.} \quad (1.5.13)$$

Προσοχή λοιπόν στο σημείο αυτό (των αντίστροφων συναρτήσεων) και στις τριγωνομετρικές, αλλά και στις υπερβολικές συναρτήσεις! Ας αποφευχθούν τα σχετικά λάθη! Κρίμα είναι να γίνονται τέτοια λάθη και, δυστυχώς, έχουν γίνει τέτοια λάθη στο παρελθόν! Ας τα αποφύγουμε λοιπόν!

## Α1.6. ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΙΣΩΣΕΩΝ

Μια διαφορική εξίσωση μπορεί να μην έχει καμία λύση, να έχει μία λύση, περισσότερες λύσεις ή και άπειρες λύσεις. Συνήθως όμως έχει άπειρες λύσεις. Τις λύσεις των διαφορικών εξισώσεων (που τις αποκαλούμε μερικές φορές και ολοκληρώματα των διαφορικών εξισώσεων) τις διακρίνουμε: (α) σε γενικές λύσεις, (β) σε μερικές λύσεις (ή ειδικές λύσεις), (γ) σε ιδιάζουσες λύσεις και (δ) σε πλήρεις λύσεις.

Πιο συγκεκριμένα για τη διαφορική εξίσωση  $n$ -τάξεως της γενικής μορφής

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.6.1)$$

διακρίνουμε

- Τη **γενική λύση** της πιο πάνω διαφορικής εξισώσεως (1.6.1). Η γενική αυτή λύση  $y_g(x)$  εξαρτάται από  $n$  αυθαίρετες σταθερές  $C_1, C_2, \dots, C_n$  που ο αριθμός τους δε μπορεί να μειωθεί σε λιγότερες από  $n$ . Η γενική αυτή λύση πρέπει να μπορεί να επαληθεύει όχι μόνο την ίδια τη διαφορική εξίσωση (1.6.1), αλλά και  $n$  αρχικές συνθήκες (στο σημείο  $x = x_0$ ) της μορφής

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y_n(x_0) = y_0^{(n)} \quad (1.6.2)$$

με γνωστές τις  $n$  σταθερές  $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n)}$ . Για να επαληθεύονται οι  $n$  αυτές αρχικές συνθήκες, θα πρέπει βέβαια να μπορούν να επιλεγούν κατάλληλα οι  $n$  σταθερές  $C_1, C_2, \dots, C_n$ .

- Τις **μερικές λύσεις (ή ειδικές λύσεις)** της ίδιας διαφορικής εξισώσεως (1.6.1). Μια μερική λύση  $y_p(x)$  της διαφορικής αυτής εξισώσεως (1.6.1) προέρχεται από τη γενική λύση της  $y_g(x)$  με καθορισμό των αυθαίρετων σταθερών  $C_1, C_2, \dots, C_n$  σ' αυτήν. Έτσι μια μερική λύση  $y_p(x)$  επαληθεύει ασφαλώς και αυτή (όπως και η γενική λύση  $y_g(x)$ ) τη διαφορική εξίσωση (1.6.1), δεν περιέχει όμως τις  $n$  αυθαίρετες σταθερές  $C_1, C_2, \dots, C_n$ .
- Τις **ιδιάζουσες λύσεις** της ίδιας διαφορικής εξισώσεως (1.6.1). Μια ιδιάζουσα λύση  $y_s(x)$  είναι μια συγκεκριμένη λύση της διαφορικής εξισώσεως (1.6.1) που δε μπορεί όμως να προκύψει από τη γενική λύση της  $y_g(x)$  με καθορισμό των σταθερών  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , δηλαδή δεν είναι μερική λύση  $y_p(x)$ . Μια ιδιάζουσα λύση  $y_s(x)$  είναι εντελώς διαφορετικής μορφής από τη γενική

λύση  $y_g(x)$  της διαφορικής εξίσωσης (1.6.1) και τις μερικές λύσεις της  $y_p(x)$  που προέρχονται από αυτήν. Οι πιο πολλές διαφορικές εξισώσεις και όλες οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεν έχουν ιδιαίζουσες λύσεις: σπάνια μια διαφορική εξίσωση έχει ιδιαίζουσα λύση.

- Την **πλήρη λύση** της διαφορικής εξίσωσης (1.6.1). Η πλήρης αυτή λύση  $y_c(x)$  είναι το σύνολο όλων των λύσεων της, δηλαδή και της γενικής λύσεως  $y_g(x)$  (που μας δίνει και όλες τις μερικές λύσεις  $y_p(x)$ ) και των ιδιαίζουσών λύσεων  $y_s(x)$ , εφόσον υπάρχουν. Η πλήρης λύση  $y_c(x)$  περιλαμβάνει επομένως **όλες ανεξαιρέτως** τις λύσεις μιας διαφορικής εξίσωσης. Αντίθετα αυτό μπορεί να μη συμβαίνει με τη γενική λύση  $y_g(x)$  σε περίπτωση υπάρξεως μιας ιδιαίζουσας λύσεως  $y_s(x)$  ή και περισσότερων ιδιαίζουσών λύσεων.

▼ **Εφαρμογή Α1.15 (Ελεύθερες ταλαντώσεις):** Η γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0 \quad (1.6.3)$$

αφορά στις ελεύθερες ταλαντώσεις του υλικού σημείου σε ένα μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου-ελατηρίου (ή μάζας-ελατηρίου). Η σχετική κυκλική ιδιοσυχνότητα (ή φυσική κυκλική συχνότητα) είναι ίση με  $\omega_0$  ( $\omega_0 > 0$ ). Αποδεικνύεται ότι η διαφορική αυτή εξίσωση (1.6.3) έχει την εξής γενική λύση:

$$u_g(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t. \quad (1.6.4)$$

Η λύση αυτή  $u_g(t)$  περιέχει δύο αυθαίρετες σταθερές, τις  $C_1$  και  $C_2$ , όπως πραγματικά αναμέναμε, επειδή η διαφορική εξίσωση (1.6.3) είναι δευτέρας τάξεως. Επομένως εκφράζει μια διπλή απειρία συναρτήσεων (ή καμπύλων στο επίπεδο). Το ότι η συνάρτηση αυτή  $u_g(t)$  είναι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (1.6.3) θα το αποδείξουμε στη σχετική Εφαρμογή Α1.16 της επόμενης Ενότητας Α1.7.

Δίνοντας τώρα συγκεκριμένες τιμές στις δύο αυθαίρετες σταθερές  $C_1$  και  $C_2$  της πιο πάνω γενικής λύσεως  $u_g(t)$ , παίρνουμε μερικές λύσεις (ή ειδικές λύσεις) της διαφορικής εξίσωσης (1.6.3). Για παράδειγμα για  $C_1 = 2$  και  $C_2 = -5$  παίρνουμε τη μερική λύση (ή ειδική λύση)

$$u_{p1}(t) = 2 \cos \omega_0 t - 5 \sin \omega_0 t. \quad (1.6.5)$$

Επίσης για  $C_1 = u_0$  και  $C_2 = 0$  παίρνουμε τη μερική λύση

$$u_{p2}(t) = u_0 \cos \omega_0 t, \quad (1.6.6)$$

όπου το  $u_0$  θεωρείται συγκεκριμένη γνωστή (και όχι αυθαίρετη) σταθερά.

Τέλος, επειδή η διαφορική εξίσωση των ελεύθερων ταλαντώσεων (1.6.3) που εξετάζουμε είναι γραμμική, δεν έχει καμία ιδιαίζουσα λύση. Άρα η πλήρης λύση της  $u_c(t)$  συμπίπτει με τη γενική λύση της  $u_g(t)$ . ▲

▼ **Παράδειγμα Α1.6:** Θεωρούμε τώρα τη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως

$$y(x) = xy'(x) - y'^2(x). \quad (1.6.7)$$

Μπορεί να διαπιστωθεί ότι η γενική λύση της  $y_g(x)$  έχει τη μορφή

$$y_g(x) = Cx - C^2, \quad (1.6.8)$$

είναι δηλαδή μια μονοπαραμετρική οικογένεια ευθειών στο επίπεδο  $Oxy$  με παράμετρο την αυθαίρετη σταθερά  $C$ . Για παράδειγμα, για  $C = 4$  από τη γενική αυτή λύση  $y_g(x)$  παίρνουμε τη μερική λύση (ή ειδική λύση)

$$y_p(x) = 4x - 16. \quad (1.6.9)$$

Αυτή είναι μια συγκεκριμένη ευθεία στο επίπεδο  $Oxy$ .

Όμως η παραπάνω διαφορική εξίσωση (1.6.7) δεν είναι γραμμική. Άρα δεν αποκλείεται να έχει και ιδιάζουσα λύση ή ιδιάζουσες λύσεις. Πραγματικά μπορεί να αποδειχθεί ότι η διαφορική αυτή εξίσωση (1.6.7) έχει και την ιδιάζουσα λύση

$$y_s(x) = \frac{x^2}{4} \tag{1.6.10}$$

πέρα από τη γενική λύση της  $y_g(x) = Cx - C^2$ .

Παρατηρούμε επίσης ότι η μεν γενική λύση  $y_g(x)$  καθορίζει μια μονοπαραμετρική οικογένεια ευθειών (με παράμετρο την αυθαίρετη σταθερά  $C$ ), ενώ η ιδιάζουσα λύση  $y_s(x) = x^2/4$  είναι μια παραβολή (και όχι πια ευθεία). Φυσικά με κανέναν τρόπο δε μπορεί άμεσα να προκύψει η ιδιάζουσα αυτή λύση  $y_s(x)$  από τη γενική λύση  $y_g(x)$ , δηλαδή απλά σαν μια μερική λύση. Εντούτοις μπορεί να αποδειχθεί ότι η ιδιάζουσα αυτή λύση  $y_s(x)$  είναι η **περιβάλλουσα** των ευθειών της γενικής λύσεως  $y_g(x)$  στο επίπεδο, δηλαδή εφάπτεται σε καθεμία από τις ευθείες αυτές.

Η ένωση της μονοπαραμετρικής οικογένειας των λύσεων που δίνει η γενική λύση  $y_g(x)$  μαζί με την ιδιάζουσα λύση  $y_s(x)$  (ας θεωρηθούν οι λύσεις αυτές σαν σύνολα) αποτελεί την πλήρη λύση  $y_c(x)$  της παραπάνω διαφορικής εξισώσεως (1.6.7).

Δεν έχουμε την πρόθεση να αναφερθούμε περισσότερο σε ιδιάζουσες λύσεις διαφορικών εξισώσεων, που πολύ σπάνια παρουσιάζονται στην πράξη. Ας σημειώσουμε τέλος ότι η διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως (1.6.7) στο παράδειγμα αυτό είναι μια εξίσωση Clairaut. Δεν πρόκειται να μελετήσουμε περισσότερο τις εξισώσεις Clairaut ούτε και να παρουσιάσουμε τη γενική μέθοδο επιλύσεώς τους, αν και πρέπει να ομολογήσουμε ότι δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολη. ▲

### Α1.7. ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ ΛΥΣΕΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΙΣΩΣΕΩΝ

Εάν έχουμε δοσμένη την πιθανή λύση μιας γνωστής διαφορικής εξισώσεως, τότε μπορούμε εύκολα να την επαληθεύσουμε υπολογίζοντας τις αναγκαίες παραγώγους της και αντικαθιστώντας τη λύση και τις παραγώγους που χρειάζονται στη γνωστή διαφορική εξίσωση. Αν η λύση που μας δίνεται (ή που υποψιαζόμαστε ότι ισχύει) είναι πραγματικά λύση της διαφορικής εξισώσεως, τότε η διαφορική εξίσωση πρέπει να ισχύει εκ ταυτότητας. Πρέπει δηλαδή να ισχύει για κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής, π.χ. της μεταβλητής  $x$ , μέσα στο διάστημα  $(a, b)$  που μας ενδιαφέρει:  $\forall x \in (a, b)$ . Τούτο αποτελεί την επαλήθευση της δοθείσας λύσεως. Στην ενότητα αυτή θα περιορίσουμε την προσοχή μας στην επαλήθευση λύσεων που δίνονται. Το πάρα πολύ πιο δύσκολο έργο της ευρέσεως λύσεων διαφορικών εξισώσεων θα μας απασχολήσει στα επόμενα κεφάλαια.

▼ **Παράδειγμα Α1.7:** Να επαληθευθεί ότι η συνάρτηση

$$y_s(x) = \frac{ax^3}{6} + C_1x + C_2 \tag{1.7.1}$$

είναι λύση της διαφορικής εξισώσεως

$$y''(x) = ax \tag{1.7.2}$$

με το  $a$  γνωστή συγκεκριμένη σταθερά και τα  $C_1$  και  $C_2$  δύο αυθαίρετες σταθερές. (Σημειώνεται επίσης ότι ο δείκτης  $s$  στην προς επαλήθευση πιο πάνω λύση  $y_s(x)$  αποτελεί απλά σύντμηση με ένα γράμμα της Αγγλικής λέξεως solution, που σημαίνει λύση.)

**Λύση:** Η γνωστή διαφορική εξίσωση (1.7.2) είναι δευτέρας τάξεως, επειδή η μεγαλύτερης τάξεως παράγωγος που παρουσιάζεται σ' αυτήν είναι η δεύτερη παράγωγος  $y''(x)$ . Πρέπει επομένως να υπολογίσουμε τη δεύτερη παράγωγο της συναρτήσεως  $y_s(x)$  που μας δόθηκε στη σχέση (1.7.1) και πιθανώς αποτελεί λύση της διαφορικής εξισώσεως (1.7.2). Προς το σκοπό αυτό εκτελούμε τις

σχετικές παραγωγίσεις και βρίσκουμε εύκολα ότι

$$y'_s(x) = \frac{3ax^2}{6} + C_1 + 0 = \frac{ax^2}{2} + C_1 \implies y''_s(x) = \frac{2ax}{2} + 0 = ax. \quad (1.7.3)$$

Από τη δεύτερη σχέση (1.7.3), συγκρίνοντάς την με τη διαφορική εξίσωση (1.7.2), διαπιστώνουμε αμέσως ότι πραγματικά η συνάρτηση  $y_s(x)$  που ορίστηκε στη σχέση (1.7.1) είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης (1.7.2). Μπορεί επίσης εύκολα να αποδειχθεί ότι η λύση αυτή  $y_s(x)$ , η οποία περιέχει μάλιστα δύο αυθαίρετες σταθερές, τις  $C_1$  και  $C_2$ , είναι η γενική λύση  $y_g(x)$  της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης (1.7.2). ▲

▼ **Παράδειγμα Α1.8:** (α) Να επαληθευθεί ότι η συνάρτηση

$$y_1(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \quad (1.7.4)$$

(με τα  $C_1$  και  $C_2$  δύο αυθαίρετες σταθερές) είναι λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$y''(x) - y(x) = 0. \quad (1.7.5)$$

(β) Το ίδιο ακριβώς ερώτημα και για τη συνάρτηση

$$y_2(x) = D_1 \cosh x + D_2 \sinh x \quad (1.7.6)$$

με τα  $D_1$  και  $D_2$  επίσης δύο αυθαίρετες σταθερές.

**Λύση:** (α) Η πιο πάνω γραμμική διαφορική εξίσωση (1.7.5) είναι προφανώς δευτέρας τάξεως. Άρα παραγωγίζουμε δύο φορές την πιθανή λύση της  $y_1(x)$ , σχέση (1.7.4), βρίσκοντας εύκολα ότι

$$y'_1(x) = C_1 e^x - C_2 e^{-x} \implies y''_1(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}. \quad (1.7.7)$$

Αντικαθιστούμε τώρα την προς επαλήθευση λύση  $y_1(x)$  (ασφαλώς και τη δεύτερη παράγωγο της  $y''_1(x)$ ) στη διαφορική εξίσωση (1.7.5). Διαπιστώνουμε έτσι ότι

$$y''_1(x) - y_1(x) = (C_1 e^x + C_2 e^{-x}) - (C_1 e^x + C_2 e^{-x}) = 0 \quad (1.7.8)$$

για κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής  $x$ . Επομένως επαληθεύθηκε πλήρως η λύση (1.7.4). Έτσι κι αλλιώς είναι εμφανές από τη δεύτερη παράγωγο  $y''_1(x)$  που βρήκαμε στη σχέση (1.7.7) ότι

$$y''_1(x) = y_1(x) \implies y''_1(x) - y_1(x) = 0. \quad (1.7.9)$$

Αυτός είναι ένας κάπως κομψότερος τρόπος επαληθεύσεως της ίδιας λύσεως  $y_1(x)$  στο παρόν παράδειγμα. Μπορεί επίσης να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση  $y_1(x)$  (με δύο αυθαίρετες σταθερές: τις  $C_1$  και  $C_2$ ) αποτελεί τη γενική λύση  $y_g(x)$  της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (1.7.5).

(β) Εντελώς ανάλογα εργαζόμαστε και για την πιθανή λύση  $y_2(x)$  που ορίστηκε στη σχέση (1.7.6) με τη χρήση των συναρτήσεων υπερβολικό συνημίτονο ( $\cosh x$ ) και υπερβολικό ημίτονο ( $\sinh x$ ). Απλά την παραγωγίζουμε δύο φορές (με τη χρήση και των δύο τύπων παραγωγίσεως (1.5.10) και (1.5.11)) και βρίσκουμε αμέσως ότι

$$y'_2(x) = D_1 \sinh x + D_2 \cosh x \implies y''_2(x) = D_1 \cosh x + D_2 \sinh x = y_2(x), \quad (1.7.10)$$

οπότε

$$y''_2(x) - y_2(x) = 0 \quad (1.7.11)$$

και μάλιστα για κάθε τιμή του  $x$ : εκ ταυτότητας. Έτσι ολοκληρώθηκε η σχετική επαλήθευση της λύσεως  $y_2(x)$ . ▲

► **Παρατήρηση Α1.8:** Λαμβάνουμε υπόψη μας τους τύπους (1.5.5) ορισμού των υπερβολικών συναρτήσεων  $\cosh x$  και  $\sinh x$  καθώς και τους παραπέρα σχετικούς τύπους (1.5.6). Με βάση τους τύπους αυτούς είναι προφανές ότι μια γενική λύση γραμμικής διαφορικής εξίσωσης σε εκθετική μορφή, όπως είναι η γενική λύση (1.7.4), μπορεί εύκολα να μετατραπεί σε αντίστοιχη υπερβολική μορφή, όπως είναι η γενική λύση (1.7.6), και αντίστροφα ασφαλώς.

▼ **Εφαρμογή Α1.16 (Ελεύθερες ταλαντώσεις):** (α) Να επαληθευθεί ότι η συνάρτηση

$$u_s(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad (1.7.12)$$

(με τα  $A$  και  $B$  αυθαίρετες σταθερές και  $\omega_0 > 0$ ) είναι λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0 \quad \text{με} \quad \omega_0 > 0. \quad (1.7.13)$$

(β) Να αποδειχθεί επίσης ότι η παραπάνω λύση  $u_s(t)$  είναι η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης (1.7.13).

**Λύση:** Καταρχήν παρατηρούμε ότι πρόκειται για τη διαφορική εξίσωση των ιδιοταλαντώσεων και γενικότερα των ελεύθερων ταλαντώσεων (χωρίς απόσβεση) στο μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου-ελατηρίου (ή μάζας-ελατηρίου). Αρκεί βέβαια να θεωρήσουμε ότι

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.7.14)$$

με  $m$  ( $m > 0$ ) τη μάζα του υλικού σημείου και  $k$  ( $k > 0$ ) τη σταθερά του ελατηρίου. Η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος  $t$  (συνήθως μάλιστα υποτίθεται ότι  $t > 0$ ) και η άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) είναι η μετατόπιση  $u(t)$  της μάζας από τη θέση ισορροπίας της. Είναι επομένως πάρα πολύ ενδιαφέρουσα για τον Πολιτικό Μηχανικό η εφαρμογή αυτή. Ακολουθούν οι απαντήσεις στα δύο ερωτήματά της.

(α) Είναι προφανές ότι πρέπει να υπολογίσουμε τη δεύτερη παράγωγο της δοθείσας πιθανής λύσεως (solution)  $u_s(t)$ . Ασφαλώς είναι πολύ εύκολο το καθήκον αυτό. Με βάση τη δοθείσα σχέση ορισμού (1.7.12) της συναρτήσεως  $u_s(t)$  προκύπτει εύκολα ότι

$$\dot{u}_s(t) = -A\omega_0 \sin \omega_0 t + B\omega_0 \cos \omega_0 t \quad (1.7.15)$$

και με μία ακόμη παραγωγή

$$\ddot{u}_s(t) = -A\omega_0^2 \cos \omega_0 t - B\omega_0^2 \sin \omega_0 t = -\omega_0^2 (A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t) = -\omega_0^2 u_s(t). \quad (1.7.16)$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή της δευτέρας παραγώγου  $\ddot{u}_s(t)$  στη διαφορική εξίσωση (1.7.13), διαπιστώνουμε αμέσως ότι

$$\ddot{u}_s(t) + \omega_0^2 u_s(t) = -\omega_0^2 u_s(t) + \omega_0^2 u_s(t) = 0. \quad (1.7.17)$$

Έτσι συμπληρώθηκε η επαλήθευση της λύσεως (1.7.12).

Είναι μάλλον τετριμμένο το καθήκον της επαληθεύσεως λύσεων διαφορικών εξισώσεων ιδίως μάλιστα με τη χρήση ενός ισχυρού προγράμματος συμβολικών υπολογισμών (computer algebra system, σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας), όπως είναι η *Mathematica* και η *Maxima*. Αρκεί να εκτελεστούν οι αναγκαίες παραγωγίσεις και να αντικατασταθεί η προς επαλήθευση λύση μαζί με όποιες παραγώγους της χρειάζονται στη διαφορική εξίσωση. Κάπως πιο ενδιαφέρον είναι το δεύτερο ερώτημα της παρούσας εφαρμογής. Ας προχωρήσουμε λοιπόν και σ' αυτό.

(β) Θα αποδείξουμε τώρα ότι η λύση  $u_s(t)$  που δίνεται από τη σχέση (1.7.12) είναι η γενική λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (1.7.13). Υπενθυμίζεται ότι πρόκειται για την εξίσωση των

ιδιοταλαντώσεων και γενικότερα των ελεύθερων ταλαντώσεων (χωρίς απόσβεση) του απλού μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος υλικού σημείου-ελατηρίου ή πιο απλά μάζας-ελατηρίου ( $m, k$ ).

Προς το σκοπό αυτό παρατηρούμε καταρχήν ότι η διαφορική εξίσωση (1.7.13) είναι δευτέρας τάξεως. Περιμένουμε επομένως η γενική λύση της  $u_g(t)$  να περιέχει δύο αυθαίρετες σταθερές, ας τις καλέσουμε  $A$  και  $B$ , και αυτό πραγματικά συμβαίνει με τη λύση  $u_s(t)$  στη σχέση (1.7.12). Τη λύση αυτή ήδη την επαληθεύσαμε απλά σαν λύση στο προηγούμενο ερώτημα (α), αλλ' ακόμη όχι και σαν γενική λύση. Για να βεβαιωθούμε ότι πραγματικά πρόκειται για τη γενική λύση, αρκεί να αποδείξουμε ότι η λύση αυτή  $u_s(t)$  μπορεί να ικανοποιήσει οποιοσδήποτε δύο αυθαίρετες αρχικές συνθήκες της μορφής

$$u(t_0) = u_0 \quad \text{και} \quad \dot{u}(t_0) = v_0 \quad (1.7.18)$$

για αρχική χρονική στιγμή  $t = t_0$ . Τόσο η αρχική αυτή θέση  $u_0$  όσο και η αρχική ταχύτητα  $v_0$  της μάζας  $m$  θεωρούνται γνωστές ποσότητες την αρχική χρονική στιγμή  $t = t_0$ .

Για την απόδειξη αυτή αντικαθιστούμε τη λύση  $u_s(t)$  στις αρχικές αυτές συνθήκες. Παίρνουμε έτσι το ακόλουθο σύστημα δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων ως προς τις σταθερές  $A$  και  $B$ :

$$A \cos \omega_0 t_0 + B \sin \omega_0 t_0 = u_0, \quad (1.7.19)$$

$$-A\omega_0 \sin \omega_0 t_0 + B\omega_0 \cos \omega_0 t_0 = v_0 \quad (1.7.20)$$

έχοντας χρησιμοποιήσει και την πρώτη παράγωγο (1.7.15), την οποία ήδη υπολογίσαμε.

Έχουμε τώρα προς επίλυση ένα απλό σύστημα δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων ως προς τις δύο άγνωστες σταθερές  $A$  και  $B$ . Ζητάμε να τις προσδιορίσουμε κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες (1.7.18) για οποιοσδήποτε τιμές της αρχικής θέσεως  $u_0$  και της αρχικής ταχύτητας  $v_0$ . Όπως γνωρίζουμε από τη Γραμμική Άλγεβρα, για να έχει το πιο πάνω σύστημα μία και μοναδική λύση, θα πρέπει η ορίζουσα  $D$  των συντελεστών των αγνώστων  $A$  και  $B$  σ' αυτό να είναι διάφορη του μηδενός:  $D \neq 0$ . Πραγματικά ισχύει αυτό και μάλιστα για οποιαδήποτε αρχική χρονική στιγμή  $t_0$ , επειδή

$$D = \begin{vmatrix} \cos \omega_0 t_0 & \sin \omega_0 t_0 \\ -\omega_0 \sin \omega_0 t_0 & \omega_0 \cos \omega_0 t_0 \end{vmatrix} = \omega_0 \cos^2 \omega_0 t_0 + \omega_0 \sin^2 \omega_0 t_0 = \omega_0 \cdot 1 = \omega_0 \neq 0, \quad (1.7.21)$$

αφού ξέρουμε ότι  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ .

Το συμπέρασμά μας είναι λοιπόν ότι οποιοσδήποτε τιμές  $u_0$  και  $v_0$  κι αν έχουν η μετατόπιση  $u(t)$  και η ταχύτητα  $\dot{u}(t) = v(t)$  της μάζας  $m$  αντίστοιχα την αρχική χρονική στιγμή  $t_0$ , πάντα μα πάντα είναι δυνατόν να προσδιορισθούν οι δύο αυθαίρετες σταθερές  $A$  και  $B$  στη λύση (1.7.12). Έτσι πάντα μπορεί να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών (1.7.13) και (1.7.18), δηλαδή το πρόβλημα

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0, \quad u(t_0) = u_0, \quad \dot{u}(t_0) = v_0, \quad (1.7.22)$$

αρκεί βέβαια να ισχύει  $\omega_0 \neq 0$ . Όμως τούτος ο περιορισμός ισχύει πάντοτε στο μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου λόγω της σχέσεως (1.7.14):  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ , όπου η σταθερά  $k$  του ελατηρίου και η μάζα  $m$  του υλικού σημείου είναι θετικές ποσότητες. Άρα και η σταθερά  $\omega_0$  (στην πραγματικότητα η κυκλική συχνότητα των ταλαντώσεων) είναι και αυτή θετική ποσότητα, οπότε δεν είναι ίση με το μηδέν. Τούτο το έχουμε ήδη υποθέσει στην εκφώνηση της παρούσας εφαρμογής, συγκεκριμένα κάτω από τη λύση (1.7.12) καθώς και στη διαφορική εξίσωση (1.7.13).

Από μαθηματικής απόψεως ας ασχοληθούμε προς στιγμή και με την πάρα πολύ ειδική περίπτωση όπου  $\omega_0 = 0$ , αν και αυτή, όπως ήδη είδαμε, δεν παρουσιάζει κανένα ενδιαφέρον στις Ταλαντώσεις στο μηχανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου. Σ' αυτήν την ειδική περίπτωση ( $\omega_0 = 0$ ) η προς επαλήθευση λύση (1.7.12), δηλαδή η λύση

$$u_s(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad (1.7.23)$$

απλοποιείται στη μορφή

$$u_{s0}(t) = A, \tag{1.7.24}$$

αφού  $\cos 0 = 1$  και  $\sin 0 = 0$ . Άρα απομένει μία μόνο αυθαίρετη σταθερά, η σταθερά  $A$ , στη λύση  $u_{s0}(t)$ . Επίσης στην παρούσα ειδική περίπτωση όπου  $\omega_0 = 0$  η διαφορική εξίσωση (1.7.13) απλοποιείται και αυτή στη μορφή

$$\ddot{u}(t) = 0. \tag{1.7.25}$$

Συνεχίζει εντούτοις να είναι μια διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως και επομένως απαιτεί από τη γενική λύση της να περιέχει οπωσδήποτε δύο αυθαίρετες σταθερές  $A_0$  και  $B_0$ . Άρα είναι φανερό ότι η λύση (1.7.24),  $u_{s0}(t) = A$ , είναι βέβαια μια λύση της παραπάνω απλής διαφορικής εξισώσεως (1.7.25), αλλ' όχι και η γενική λύση της. Η γενική λύση της εξισώσεως αυτής (1.7.25) προκύπτει πάρα πολύ εύκολα με δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις της ως εξής:

$$\ddot{u}(t) = 0 \implies \dot{u}(t) = A_0 \implies u(t) = A_0 t + B_0 \tag{1.7.26}$$

με τα  $A_0$  και  $B_0$  δύο νέες αυθαίρετες σταθερές. Πάντως το αξιοσημείωτο είναι πως για  $\omega_0 = 0$  η αρχική μας τριγωνομετρική γενική λύση (1.7.23) δε μεταπίπτει άμεσα στη συγκεκριμένη γενική λύση (1.7.26), η οποία ισχύει για  $\omega_0 = 0$ . Άρα χρειάζεται να εκτελεσθεί πρώτα η σχετική οριακή διαδικασία, όταν  $\omega_0 \rightarrow 0$ , κάτι βέβαια που δε μας ενδιαφέρει άμεσα στις Ταλαντώσεις. ▲

### Α1.8. ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Μερικές φορές είναι ενδιαφέρον να δούμε ποια διαφορική εξίσωση επαληθεύει μια ολόκληρη οικογένεια συναρτήσεων (ή καμπύλων στο επίπεδο) που περιέχει μία παράμετρο  $C$  ή και περισσότερες παραμέτρους  $C_1, C_2$ , κλπ. Ένα τέτοιο πρόβλημα καλείται πρόβλημα σχηματισμού (ή κατασκευής ή μορφώσεως) διαφορικής εξισώσεως και μας οδηγεί σε μια διαφορική εξίσωση.

Πιο συγκεκριμένα στη γνωστή περίπτωση μιας μονοπαραμετρικής οικογένειας συναρτήσεων της μορφής

$$F(x, y, C) = 0 \tag{1.8.1}$$

(με παράμετρο τη σταθερά  $C$ ) παραγωγίζουμε ως προς τη μεταβλητή  $x$  θεωρώντας τη μεταβλητή  $y$  σαν εξαρτημένη από την ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$ , δηλαδή  $y = y(x)$ . Έτσι παίρνουμε την οικογένεια των διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως

$$G(x, y, y', C) = 0, \tag{1.8.2}$$

όπου εξακολουθεί να υπάρχει η παράμετρος  $C$ . Φυσικά δε μας αρέσει καθόλου μα καθόλου αυτό! Ξεκινήσαμε με την πρόθεση να σχηματίσουμε μια διαφορική εξίσωση που να εκφράζει ολόκληρη τη μονοπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων (1.8.1) που είχαμε αρχικά. Επομένως πρέπει να απαλείψουμε τώρα την παράμετρο  $C$  μεταξύ της αρχικής οικογένειας συναρτήσεων (1.8.1) και της αντίστοιχης οικογένειας (1.8.2) που προέκυψε μετά την παραγωγή ως προς  $x$ . Με την απαλοιφή αυτή της παραμέτρου  $C$ , που την υποθέτουμε εφικτή, οδηγούμαστε στη διαφορική εξίσωση

$$H(x, y, y') = 0 \tag{1.8.3}$$

με τη νέα αυτή διαφορική εξίσωση να μην περιέχει καθόλου την παράμετρο  $C$ .

Αυτή είναι η διαφορική εξίσωση που ζητούσαμε να βρούμε. Προέκυψε αποκλειστικά από την αρχική οικογένεια συναρτήσεων  $F(x, y, C) = 0$  και δεν περιέχει την παράμετρο  $C$ , απλά επειδή την απαλείψαμε. Με τον τρόπο αυτό γλυτώσαμε από την παράμετρο  $C$ , αλλά βρεθήκαμε με την παράγωγο  $y' = y'(x)$ , καταλήξαμε δηλαδή σε μια διαφορική εξίσωση. Όμως η διαφορική αυτή

εξίσωση (1.8.3) είναι γενική: δεν εξαρτάται από απολύτως καμία παράμετρο  $C$ . Ίσως μάλιστα να εκφράζει κατά κάποιον τρόπο και ένα γενικό φυσικό νόμο, στον οποίο πρέπει να υπακούνε όλες οι συναρτήσεις (ή καμπύλες στο επίπεδο)  $F(x, y, C) = 0$  ανεξάρτητα μάλιστα από την τιμή της παραμέτρου  $C$ : όλες οι συναρτήσεις είπαμε! Θα γίνουμε σαφέστεροι παρακάτω στις εφαρμογές.

Σημειώνουμε βέβαια ότι κανένας δε μας εμποδίζει από μαθηματικής απόψεως να εκτελέσουμε την παραγωγή (1.8.2) όχι ως προς τη μεταβλητή  $x$ , αλλ' ως προς τη μεταβλητή  $y$ . Αυτό σημαίνει ότι θεωρούμε τώρα ανεξάρτητη μεταβλητή την  $y$  και εξαρτημένη την  $x$ , δηλαδή  $x = x(y)$ . Με τον τρόπο αυτό οι διαφορικές εξισώσεις (1.8.2) και (1.8.3) θα πάρουν τις τροποποιημένες μορφές τους

$$\hat{G}(x, x', y, C) = 0 \quad (1.8.4)$$

και

$$\hat{H}(x, x', y) = 0 \quad (1.8.5)$$

αντίστοιχα. Βέβαια η προτίμησή μας στη διαφορική εξίσωση  $H(x, y, y') = 0$  στη σχέση (1.8.3) ή στη διαφορική εξίσωση  $\hat{H}(x, x', y) = 0$  στη σχέση (1.8.5) εξαρτάται και από την ευκολία στην εκτέλεση των υπολογισμών. Πιο σημαντικό όμως είναι το τί ακριβώς επιδιώκουμε να δείξουμε, ποια είναι η επιθυμητή εξαρτημένη μεταβλητή μας: η  $x$  ή η  $y$ ; Παραδείγματος χάρη, στην ευθύγραμμη κίνηση ενός υλικού σημείου προτιμάμε ασφαλώς να έχουμε τελικά τη θέση  $x$  σαν συνάρτηση του χρόνου  $t$ , δηλαδή  $x = x(t)$ , παρά το αντίστροφο, δηλαδή  $t = t(x)$ . Δεν είναι έτσι;

Μια τρίτη και τελευταία δυνατότητα αποτελεί η διαφορίση της αρχικής οικογένειας συναρτήσεων  $F(x, y, C) = 0$  στη σχέση (1.8.1), οπότε διατηρείται η συμμετρία (λόγω των διαφορικών  $dx$  και  $dy$ ) μέχρι και τη διαφορική εξίσωση η οποία θα προκύψει. Στο τέλος μπορούμε ασφαλώς να εκφράσουμε την προτίμησή μας για την άγνωστη συνάρτηση (εξαρτημένη μεταβλητή) και την ανεξάρτητη μεταβλητή διαιρώντας με  $dx$ : άγνωστη συνάρτηση η  $y = y(x)$ , ή αντίθετα διαιρώντας με  $dy$ : άγνωστη συνάρτηση η  $x = x(y)$ .

Σημειώνουμε επίσης ότι αντίστροφα η διαφορική εξίσωση (1.8.3) ή (1.8.5) που προέκυψε τελικά (ή η αντίστοιχη εξίσωση με διαφορικά  $dx$  και  $dy$ ) πρέπει να έχει σαν γενική λύση της την οικογένεια των συναρτήσεων (1.8.1):  $F(x, y, C) = 0$ .

Παραπάνω υποθέσαμε την ύπαρξη μιας μόνο παραμέτρου  $C$  στην οικογένεια των συναρτήσεων  $F(x, y, C) = 0$ , η οποία είναι μια μονοπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων. Χρειασθήκαμε επομένως μια μόνο παραγωγή (ως προς  $x$  ή ως προς  $y$ ), ώστε να μπορέσουμε να την απαλείψουμε. Έτσι φθάσαμε τελικά σε μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως: στη διαφορική εξίσωση  $H(x, y, y') = 0$  ή στη διαφορική εξίσωση  $\hat{H}(x, x', y) = 0$ . Σωστά, ωραία! Αν έχουμε όμως περισσότερες παραμέτρους  $C_1, C_2, \dots, C_n$  (με το  $n$  φυσικό αριθμό μεγαλύτερο του ένα:  $n > 1$ ) προς απαλοιφή; Απλά τότε για την απαλοιφή τους θα πρέπει να παραγωγίσουμε  $n$  φορές ως προς  $x$  θεωρώντας ότι  $y = y(x)$  ή ως προς  $y$  υποθέτοντας ότι  $x = x(y)$ . Με τον τρόπο αυτό θα έχουμε τελικά  $n + 1$  παραμετρικές εξισώσεις με παραμέτρους τις  $C_1, C_2, \dots, C_n$ : την αρχική παραμετρική οικογένεια συναρτήσεων  $F(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$  και τις  $n$  πρώτες παραγωγούς της ως προς  $x$  (ή ως προς  $y$ ). Απαλείφοντας τις  $n$  παραμέτρους  $C_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) μεταξύ αυτών των  $n + 1$  εξισώσεων (από τις οποίες μόνο η πρώτη δεν είναι διαφορική), θα πάρουμε τελικά τη διαφορική εξίσωση  $n$  τάξεως

$$H^*(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.8.6)$$

ή την αντίστοιχη της με άγνωστη συνάρτηση την  $x = x(y)$ . Εδώ το βασικό πρόβλημα είναι απλά το υπολογιστικό πρόβλημα της απαλοιφής των παραμέτρων  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , που μπορεί να είναι δύσκολο ή και πρακτικά ακατόρθωτο.

Ας προχωρήσουμε τώρα και σε παραδείγματα καθώς και σε εφαρμογές στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Αυτά θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε καλύτερα τα παραπάνω.



▼ **Παράδειγμα Α1.9:** Θεωρούμε την οικογένεια των συναρτήσεων (ή καμπύλων στο επίπεδο)

$$x(t) = Ae^{-ct} \quad (1.8.7)$$

με παράμετρο μόνο το  $A$  και γνωστή σταθερά τη  $c$ : μονοπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων (ή καμπύλων). Ζητούνται: (α) Να σχηματισθεί η σχετική διαφορική εξίσωση. (β) Ανάλογο ερώτημα θεωρώντας τώρα παραμέτρους και το  $A$  και το  $c$ : διπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων (ή καμπύλων).

**Λύση:** (α) Καταρχήν θα παραγωγίσουμε ως προς τη μεταβλητή  $t$ , ας πούμε το χρόνο. Έτσι βρίσκουμε άμεσα ότι

$$\dot{x}(t) = -cAe^{-ct}. \quad (1.8.8)$$

Τώρα έχουμε βέβαια δύο εξισώσεις: τις (1.8.7) και (1.8.8). Και οι δύο περιέχουν την παράμετρο  $A$  που θέλουμε να απαλείψουμε. Προς το σκοπό αυτό λύνουμε ως προς  $A$  την εξίσωση (1.8.7) και παίρνουμε

$$A = x(t)e^{ct}. \quad (1.8.9)$$

Αντικαθιστούμε τέλος την έκφραση αυτή της παραμέτρου  $A$  στην εξίσωση (1.8.8) και παίρνουμε την τελική μας διαφορική εξίσωση

$$\dot{x}(t) = -c[x(t)e^{ct}]e^{-ct} = -cx(t)(e^{ct}e^{-ct}) = -cx(t)e^{ct-ct} = -cx(t)e^0 = -cx(t) \quad (1.8.10)$$

και σε κάπως καλύτερη τελική μορφή

$$\dot{x}(t) + cx(t) = 0. \quad (1.8.11)$$

Η τελική αυτή διαφορική εξίσωση είναι φυσικά μια συνήθης διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως και πρώτου βαθμού, γραμμική, ομογενής και με σταθερούς συντελεστές: τους 1 και  $c$ . Μπορούμε μάλιστα να αποδείξουμε ότι η γενική λύση της είναι η  $x(t) = Ae^{-ct}$ , δηλαδή η μονοπαραμετρική οικογένεια των εκθετικών συναρτήσεων (1.8.7), από την οποία έχουμε ξεκινήσει. Όλες αυτές οι συναρτήσεις  $x(t)$  επαληθεύουν λοιπόν την ίδια διαφορική εξίσωση (1.8.11) οποιαδήποτε και αν είναι η τιμή της παραμέτρου  $A$ .

Ας σημειώσουμε επίσης ότι η ίδια διαφορική εξίσωση (1.8.11) θα μπορούσε να είχε κατασκευασθεί λίγο ευκολότερα από υπολογιστικής απόψεως απλά έχοντας διαιρέσει κατά μέλη τις δύο εξισώσεις (1.8.8) και (1.8.7), οπότε

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = -c \implies \dot{x}(t) = -cx(t) \implies \dot{x}(t) + cx(t) = 0. \quad (1.8.12)$$

Καταλήξαμε δηλαδή και πάλι στην ίδια διαφορική εξίσωση (1.8.11). Αν θέλουμε μάλιστα, τη γράφουμε και στη μορφή

$$\frac{dx}{dt} = -cx \quad \text{ισοδύναμα} \quad dx = -cxd t \quad (1.8.13)$$

χρησιμοποιώντας τα διαφορικά  $dx$  και  $dt$  βέβαια με  $\dot{x}(t) = dx/dt$ .

Ας επιχειρήσουμε τώρα να κάνουμε και ένα τελευταίο βήμα. Η τελευταία μορφή της διαφορικής εξισώσεώς μας,  $dx = -cxd t$ , δηλώνει ότι η φυσική ποσότητα  $x$  μεταβάλλεται (διαφορικό  $dx$ ) σε απειροστό χρόνο (διαφορικό  $dt$ ) ανάλογα με την υπάρχουσα ποσότητα  $x$ . Ο συντελεστής αναλογίας είναι η σταθερά  $c$ . (Σωστότερα η σταθερά  $-c$ .) Πρόκειται για έναν κλασικό φυσικό νόμο, ο οποίος ισχύει σε πολλά φυσικά φαινόμενα. Με την έννοια αυτή ίσως είναι πραγματικά σκόπιμο να προτιμάμε να χρησιμοποιούμε τη διαφορική εξίσωση (1.8.11) ή (1.8.13) παρά τη γενική λύση της: τη μονοπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων (1.8.7), έστω κι αν μας είναι γνωστή.

(β) Από καθαρά μαθηματικό ενδιαφέρον (και όχι από φυσικής σκοπιάς) θέσαμε στη εκφώνηση του παραδείγματος αυτού και το δεύτερο ερώτημα (β). Θα απαλείψουμε τώρα και τις δύο ποσότητες  $A$  και  $c$ , θεωρώντας τις σαν δύο παραμέτρους. Ασφαλώς μπορούμε να εκτελέσουμε άλλη μια παραγωγή ως προς  $t$  της πρώτης παραγωγού (1.8.8) αυτήν τη φορά. Έτσι έχουμε διαθέσιμη και την εξίσωση:

$$\ddot{x}(t) = c^2 A e^{-ct}. \quad (1.8.14)$$

Από την αρχική εξίσωση (1.8.7), την εξίσωση  $x(t) = A e^{-ct}$ , έχουμε διαθέσιμη όλη την ποσότητα  $A e^{-ct} = x(t)$ . Την αντικαθιστούμε λοιπόν και στις δύο διπαραμετρικές διαφορικές εξισώσεις (1.8.8) και (1.8.14) και παίρνουμε

$$\dot{x}(t) = -cx(t) \quad \text{και} \quad \ddot{x}(t) = c^2 x(t). \quad (1.8.15)$$

Προχωρήσαμε ήδη αρκετά: η παράμετρος  $A$  είναι απύσαστα στις δύο αυτές εξισώσεις (1.8.15). Απομένει η απαλοιφή της δεύτερης παραμέτρου  $c$  μεταξύ τους. Λύνουμε την πρώτη ως προς  $c$ :

$$\dot{x}(t) = -cx(t) \implies c = -\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} \quad (1.8.16)$$

και αντικαθιστούμε στη δεύτερη. Έτσι παίρνουμε

$$\ddot{x}(t) = c^2 x(t) \implies \ddot{x}(t) = \left(-\frac{\dot{x}(t)}{x(t)}\right)^2 x(t) = \frac{\dot{x}^2(t)}{x(t)} \implies x(t)\ddot{x}(t) = \dot{x}^2(t). \quad (1.8.17)$$

Συνεπώς προέκυψε μια μη γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερας τάξεως καθόλου κλασική. Πάρα πολύ σπάνια ο Πολιτικός Μηχανικός θα πρέπει να αντιμετωπίσει τόσο παράξενες διαφορικές εξισώσεις σε αντίθεση βέβαια με το Μαθηματικό που οι διαφορικές εξισώσεις είναι δουλειά του.

Ας παρατηρήσουμε πάντως πως η παραπάνω μη γραμμική διαφορική εξίσωση (1.8.17) θα μπορούσε να είχε σχηματισθεί πολύ ευκολότερα απλά παραγωγίζοντας ως προς  $t$  την πρώτη διαφορική εξίσωση (1.8.12), οπότε

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = -c \implies \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} \right) = 0 \implies \frac{\ddot{x}(t)x(t) - \dot{x}^2(t)}{x^2(t)} = 0 \implies x(t)\ddot{x}(t) = \dot{x}^2(t). \quad (1.8.18)$$

Και αυτός ο τρόπος απαλοιφής μιας παραμέτρου, εδώ της  $c$ , είναι ενδιαφέρων, συνηθισμένος και εύχρηστος. Δηλαδή απομονώνουμε την παράμετρο την οποία θέλουμε να απαλείψουμε στο ένα μέλος της εξίσωσης, εδώ της εξίσωσης  $\dot{x}(t)/x(t) = -c$ , και στη συνέχεια παραγωγίζουμε ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή, εδώ το  $t$ . Τότε το μέλος της εξίσωσης (συνήθως το δεξιό) που περιέχει την παράμετρο (εδώ τη  $c$ ) μηδενίζεται και η παράμετρος εξαλείφεται. Το ποιος ακριβώς τρόπος απαλοιφής πρέπει να χρησιμοποιείται κάθε φορά για το μικρότερο υπολογιστικό κόστος εξαρτάται βέβαια από τις συνθήκες. Μάλιστα μερικές φορές αφήνουμε όλο αυτό το καθήκον στον υπολογιστή: σε ένα πρόγραμμα συμβολικών υπολογισμών, όπως είναι η *Mathematica*. Από ένα σημείο και μετά ίσως να είναι καλύτερα έτσι για τον Πολιτικό Μηχανικό. Ακόμη και σε σχετικά απλές πολυωνυμικές εξισώσεις η απαλοιφή κάποιος ποσότητας δεν είναι απλή και απαιτεί τη χρήση εξειδικευμένων και ιδιαίτερα χρονοβόρων υπολογιστικών αλγορίθμων. Η περιγραφή τέτοιων αλγορίθμων σαφώς ξεφεύγει από τα πλαίσια των μαθημάτων των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών! ▲

▼ **Παράδειγμα Α1.10:** Στη διπαραμετρική οικογένεια των συναρτήσεων

$$y(x) = A e^x + B e^{2x} \quad (1.8.19)$$

ζητείται ο σχηματισμός της σχετικής διαφορικής εξίσωσης με απαλοιφή των παραμέτρων  $A$  και  $B$ .

**Λύση:** Προφανώς, επειδή οι παράμετροι είναι δύο, οι  $A$  και  $B$ , η διαφορική εξίσωση που ζητείται θα είναι δευτέρας τάξεως. Καταρχήν απαιτούνται δύο παραγωγίσεις της οικογένειας των συναρτήσεων (1.8.19). Έτσι προκύπτουν οι δύο διαφορικές εξισώσεις

$$y'(x) = Ae^x + 2Be^{2x}, \quad (1.8.20)$$

$$y''(x) = Ae^x + 4Be^{2x}. \quad (1.8.21)$$

Με κανέναν τρόπο η πιο πάνω εξίσωση (1.8.21) δεν είναι η διαφορική εξίσωση που ζητάμε. Ούτε βέβαια και η εξίσωση (1.8.20). Αυτό συμβαίνει, αφού και οι δύο αυτές εξισώσεις να μεν είναι διαφορικές εξισώσεις, αλλ' όμως περιέχουν και τις παραμέτρους  $A$  και  $B$ , τις οποίες θέλουμε να απαλείψουμε. Εμείς θέλουμε να σχηματίσουμε τη διαφορική εξίσωση όλης της οικογένειας των συναρτήσεων (1.8.19), που να την επαληθεύουν όλες τούτες οι συναρτήσεις για οποιοσδήποτε τιμές των παραμέτρων  $A$  και  $B$ . Δε θέλουμε να εμφανίζονται οι παράμετροι αυτές στη διαφορική εξίσωση! Αυτό θα ήταν ένα πολύ μεγάλο λάθος!

Μια πρώτη και πολύ λογική δυνατότητα για την απαλοιφή των παραμέτρων  $A$  και  $B$  είναι να λύσουμε τις δύο εξισώσεις (1.8.19) και (1.8.20) ως προς τις παραμέτρους αυτές και να αντικαταστήσουμε τις τιμές τους στην εξίσωση (1.8.21). Θα προκύψει έτσι μια διαφορική εξίσωση προφανώς δευτέρας τάξεως, γιατί ήδη υπάρχει η δεύτερη παράγωγος  $y''(x)$  στην εξίσωση (1.8.21). Και μάλιστα δε θα παρουσιάζονται στη διαφορική αυτή εξίσωση οι παράμετροι  $A$  και  $B$ , ακριβώς όπως επιθυμούμε.

Δε θα ακολουθήσουμε όμως τη δυνατότητα αυτή, επειδή μας προσφέρεται και μια δεύτερη, πιο κομψή και υπολογιστικά πιο αποτελεσματική δυνατότητα από τις γνώσεις μας στη Γραμμική Άλγεβρα. Εδώ έχουμε τρεις γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις, τις (1.8.19), (1.8.20) και (1.8.21), και θέλουμε αυτές να ισχύουν ταυτόχρονα ως προς τις δύο παραμέτρους  $A$  και  $B$ , που είναι κατά κάποιον τρόπο οι άγνωστοι στις εξισώσεις αυτές. Θα πρέπει επομένως η ορίζουσα  $D$  των συντελεστών των  $A$  και  $B$  και των όρων που είναι ανεξάρτητοι από τα  $A$  και  $B$  να είναι μηδενική. Επομένως

$$D = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & y(x) \\ e^x & 2e^{2x} & y'(x) \\ e^x & 4e^{2x} & y''(x) \end{vmatrix} = 0. \quad (1.8.22)$$

Την ορίζουσα αυτή μπορούμε εύκολα να την υπολογίσουμε βγάζοντας κοινό παράγοντα το  $e^x$  και επίσης το  $e^{2x}$  από τις δύο πρώτες στήλες της αντίστοιχα, οπότε

$$D = e^x e^{2x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & y(x) \\ 1 & 2 & y'(x) \\ 1 & 4 & y''(x) \end{vmatrix} = e^{3x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & y(x) \\ 1 & 2 & y'(x) \\ 1 & 4 & y''(x) \end{vmatrix} = 0. \quad (1.8.23)$$

Επειδή μάλιστα η εκθετική συνάρτηση  $e^{3x}$  δε μηδενίζεται ποτέ, θα πρέπει οπωσδήποτε να μηδενίζεται η τροποποιημένη (πολλαπλασιασμένη επί  $e^{-3x}$ ) ορίζουσα

$$D^* = e^{-3x} D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & y(x) \\ 1 & 2 & y'(x) \\ 1 & 4 & y''(x) \end{vmatrix} = 0 \implies y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0. \quad (1.8.24)$$

Αυτή είναι η διαφορική εξίσωση που ζητούσαμε να βρούμε: μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως με σταθερούς συντελεστές: 1,  $-3$  και 2. Αν είχαμε μάλιστα και τις επιπλέον απαιτούμενες γνώσεις (δυστυχώς δεν τις έχουμε ακόμη!), θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι η γενική λύση  $y_g(x)$  της διαφορικής αυτής εξισώσεως (1.8.24) είναι πραγματικά η διπαραμετρική οικογένεια των συναρτήσεων (1.8.19). Αυτές τις γνώσεις θα τις αποκτήσουμε παρακάτω στο Κεφάλαιο Α5, το οποίο αφορά στις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. ▲

▼ **Εφαρμογή Α1.17 (Δυναμική):** Στην κατακόρυφη κίνηση υλικού σημείου  $M$  μάζας  $m$  στο γήινο πεδίο βαρύτητας (με επιτάχυνση  $g$ ) από την αρχική θέση  $x_0$  (για  $t = 0$ ) και με αρχική ταχύτητα  $v_0$  προκύπτει η εξής διπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων για τη θέση  $x(t)$  του υλικού σημείου:

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (1.8.25)$$

με θετική διεύθυνση προς τα πάνω. Ζητούνται: (α) Η σχετική διαφορική εξίσωση με απαλοιφή των παραμέτρων  $x_0$  και  $v_0$ . Ποιο φυσικό νόμο εκφράζει; (β) Η αντίστοιχη διαφορική εξίσωση σε οποιοδήποτε πεδίο βαρύτητας, δηλαδή με απαλοιφή και της επιταχύνσεως της βαρύτητας  $g$ .

**Λύση:** (α) Στην τόσο απλή αυτή εφαρμογή αρκεί να παραγωγίσουμε δύο φορές τη δοθείσα οικογένεια συναρτήσεων της κατακόρυφης κινήσεως του υλικού σημείου  $M$ , για να σχηματίσουμε (κατασκευάσουμε, μορφώσουμε) τη σχετική διαφορική εξίσωση. Έτσι βρίσκουμε

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \implies \frac{dx}{dt} = v_0 - g t \implies \frac{d^2x}{dt^2} = -g. \quad (1.8.26)$$

Η τελευταία αυτή εξίσωση είναι η διαφορική εξίσωση που ζητάμε. Είναι προφανώς δευτέρας τάξεως, γιατί είχαμε δύο παραμέτρους προς απαλοιφή: τις αρχικές συνθήκες  $x_0$  και  $v_0$ . Με τον πολλαπλασιασμό της διαφορικής αυτής εξισώσεως επί τη μάζα  $m$  του υλικού σημείου, προκύπτει

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg \quad \text{ισοδύναμα} \quad ma = -W \quad \text{με} \quad a = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{και} \quad W = mg, \quad (1.8.27)$$

δηλαδή ο κλασικός δεύτερος νόμος του Νεύτωνα με εξωτερική δύναμη το βάρος  $W = mg$  του υλικού σημείου  $M$ .

(β) Με μια ακόμη παραγωγή, τώρα της τελευταίας από τις σχέσεις (1.8.26), μπορούμε να απαλείψουμε και την επιτάχυνση της βαρύτητας  $g$  παίρνοντας

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 0. \quad (1.8.28)$$

Δυστυχώς το ενδιαφέρον της τελευταίας αυτής διαφορικής εξισώσεως, που είναι τρίτης τάξεως, δεν είναι κατά βάση φυσικό: είναι κυρίως μαθηματικό. ▲

▼ **Εφαρμογή Α1.18 (Ρευστομηχανική):** Οι γραμμές ροής σε επίπεδη και μόνιμη ροή ιδεατού ρευστού που προκαλείται από δίνη με κέντρο την αρχή των συντεταγμένων  $O = (0, 0)$  είναι περιφέρειες με κέντρο το σημείο  $O$  της δίνης. Ζητείται η σχετική διαφορική εξίσωση.

**Λύση:** Επειδή οι γραμμές ροής είναι περιφέρειες με κέντρο την αρχή των συντεταγμένων  $O$ , θα έχουν εξισώσεις της μορφής

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (1.8.29)$$

με παράμετρο  $a$  την ακτίνα κάθε περιφέρειας ( $a > 0$ ). Πρόκειται για μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων (των γραμμών ροής) με παράμετρο την ακτίνα  $a$ . Διαφορίζοντας την εξίσωση (1.8.29) της οικογένειας αυτής, βρίσκουμε την αντίστοιχη διαφορική εξίσωση

$$2x dx + 2y dy = 0 \quad \text{και διαιρώντας δια 2:} \quad x dx + y dy = 0. \quad (1.8.30)$$

Επιλέγοντας σαν άγνωστη συνάρτηση την  $y = y(x)$  ή την  $x = x(y)$  και διαιρώντας την πιο πάνω διαφορική εξίσωση (1.8.30) με  $dx$  ή  $dy$  αντίστοιχα, παίρνουμε τις ισοδύναμες διαφορικές εξισώσεις

$$x + y(x)y'(x) = 0 \quad (\text{ή} \quad y(x)y'(x) + x = 0) \quad \text{και} \quad x(y)x'(y) + y = 0. \quad (1.8.31)$$

Στην πρώτη διαφορική εξίσωση ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το  $x$ , ενώ στη δεύτερη είναι το  $y$ . Και στην εφαρμογή αυτή προέκυψε πολύ εύκολα η σχετική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως. ▲

## Α1.9. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΡΧΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

### Α1.9.1. Προβλήματα αρχικών τιμών

Πολύ συχνά μια διαφορική εξίσωση  $n$ -τάξεως (γραμμική ή μη γραμμική) της γενικής μορφής

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.9.1)$$

συνοδεύεται από  $n$  επιπλέον συνθήκες. Οι συνθήκες αυτές αφορούν στην άγνωστη συνάρτηση ή/και στις παραγώγους της ή/και σε συνδυασμούς της άγνωστης συναρτήσεως και των παραγώγων της. Εάν τούτες οι συνθήκες αναφέρονται αποκλειστικά σε ένα μόνο σημείο  $x = x_0$  του διαστήματος ισχύος της διαφορικής εξίσωσης, τότε τις αποκαλούμε **αρχικές συνθήκες** και αναφερόμαστε σε ένα **πρόβλημα αρχικών τιμών**: διαφορική εξίσωση  $n$ -τάξεως και  $n$  αρχικές συνθήκες. Στα προβλήματα αρχικών τιμών συνήθως δίνονται σαν αρχικές συνθήκες οι τιμές  $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$  της άγνωστης συναρτήσεως  $y(x)$  και των  $n - 1$  πρώτων παραγώγων της στο σημείο  $x = x_0$ , δηλαδή

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y_{n-1}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (1.9.2)$$

Στο διδακτικό αυτό βιβλίο λέγοντας αρχικές συνθήκες, θα εννοούμε συνθήκες αποκλειστικά της μορφής (1.9.2). Επίσης λέγοντας πρόβλημα αρχικών τιμών, θα εννοούμε τη διαφορική εξίσωση  $n$ -τάξεως (1.9.1) μαζί με τις  $n$  αρχικές συνθήκες (1.9.2) που τη συνοδεύουν:  $n + 1$  σχέσεις συνολικά.

Φυσικά, επειδή μια διαφορική εξίσωση  $n$ -τάξεως περιέχει στη γενική λύση της  $n$  αυθαίρετες σταθερές  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , προφανώς απαιτούνται  $n$  αρχικές συνθήκες για τον πλήρη προσδιορισμό των  $n$  αυτών σταθερών σε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών.

▼ **Παράδειγμα Α1.11:** Η παρακάτω γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως μαζί με την αρχική συνθήκη που τη συνοδεύει

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x), \quad y(x_0) = y_0 \quad (1.9.3)$$

αποτελούν ένα απλό πρόβλημα αρχικής τιμής. ▲

▼ **Εφαρμογή Α1.19 (Δυναμική):** Κατά την κατακόρυφη κίνηση υλικού σημείου στο γήινο πεδίο βαρύτητας (με κατεύθυνση  $x(t)$  προς τα πάνω) ισχύει η διαφορική εξίσωση

$$\ddot{x}(t) = -g \quad (\text{διαφορική εξίσωση}) \quad (1.9.4)$$

με  $g$  την επιτάχυνση της βαρύτητας (με κατεύθυνση προς τα κάτω). Σε ένα τέτοιο απόλυτα συγκεκριμένο πρόβλημα του Πολιτικού Μηχανικού υπάρχουν και δύο αρχικές συνθήκες την αρχική χρονική στιγμή  $t = 0$  (πολύ συχνά θεωρούμε σαν αρχική χρονική στιγμή την  $t = 0$ ): (α) η αρχική θέση  $x_0$  και (β) η αρχική ταχύτητα  $v_0$  του υλικού σημείου, δηλαδή

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad (\text{αρχικές συνθήκες}). \quad (1.9.5)$$

Στην εφαρμογή αυτή οι αρχικές συνθήκες είναι δύο, γιατί και η διαφορική εξίσωση (1.9.4) είναι δευτέρας τάξεως. Η διαφορική εξίσωση (1.9.4) μαζί με τις δύο αρχικές συνθήκες (1.9.5) που τη συνοδεύουν, δηλαδή από κοινού και οι τρεις σχέσεις

$$\ddot{x}(t) = -g, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad (1.9.6)$$

συνιστούν το παρόν πρόβλημα αρχικών τιμών. Μπορεί μάλιστα να επαληθευθεί ότι η συνάρτηση

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (1.9.7)$$

είναι η (μοναδική) λύση του παρόντος προβλήματος αρχικών τιμών, που έχει βέβαια μία λύση. ▲

### A1.9.2. Προβλήματα συνοριακών τιμών

Αναφερόμαστε και πάλι στη γενική διαφορική εξίσωση  $n$ -τάξεως (1.9.1). Στη γενική λύση της περιέχονται  $n$  αυθαίρετες σταθερές  $C_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Σε ένα πλήρως καθορισμένο πρόβλημα που έχει μια μοναδική λύση για τον προσδιορισμό των σταθερών αυτών  $C_k$  απαιτούνται  $n$  συμπληρωματικές συνθήκες που να αφορούν στην άγνωστη συνάρτηση ή/και στις παραγώγους της. Μερικές φορές και οι  $n$  αυτές συμπληρωματικές συνθήκες αναφέρονται σε ένα μόνο σημείο  $x = x_0$  του διαστήματος ισχύος της διαφορικής εξίσωσης. Στην περίπτωση αυτή είδαμε στην αμέσως προηγούμενη Παράγραφο Α1.9.1 της παρούσας Ενότητας Α1.9 ότι έχουμε  $n$  αρχικές συνθήκες και ένα πρόβλημα αρχικών τιμών: μία διαφορική εξίσωση και  $n$  αρχικές συνθήκες:  $n + 1$  σχέσεις.

Αρκετές φορές όμως οι  $n$  συνθήκες αφορούν σε δύο ή/και σε περισσότερα σημεία (γενικά όμως μόνο σε δύο σημεία  $x_1$  και  $x_2$ ) του διαστήματος ισχύος της διαφορικής εξίσωσης (1.9.1). Στην περίπτωση αυτή τις αποκαλούμε **συνοριακές συνθήκες**. Επίσης καλούμε **πρόβλημα συνοριακών τιμών** το όλο πρόβλημα της διαφορικής εξίσωσης και των  $n$  συνοριακών συνθηκών:  $n + 1$  σχέσεις.

Τα προβλήματα συνοριακών τιμών είναι γενικά δυσκολότερα στην επίλυσή τους από τα προβλήματα αρχικών τιμών. Παρουσιάζουν όμως και τα μεν και τα δε ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού, ακριβώς όπως και σε πολλές άλλες επιστήμες.

▼ **Παράδειγμα Α1.12:** Η παρακάτω γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως μαζί με τις δύο συνοριακές συνθήκες (στα δύο διαφορετικά σημεία  $x_1$  και  $x_2$ ) που τη συνοδεύουν

$$y''(x) + p(x)y(x) = q(x), \quad y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2 \quad \text{με} \quad x_1 \neq x_2 \quad (1.9.8)$$

αποτελούν (και οι τρεις τους) ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών. ▲

▼ **Εφαρμογή Α1.20 (Μηχανική των Υλικών: Δοκού):** Τη διαφορική εξίσωση της συνήθους δοκού

$$EIv''''(x) = p(x) \quad (1.9.9)$$

θα τη μελετήσουμε εκτενώς στο επόμενο Κεφάλαιο Α2: εξίσωση (2.1.34) της Παραγράφου Α2.1.5. Στην εξίσωση αυτή η σταθερά  $EI$  καλείται δυσκαμψία της δοκού. Η άγνωστη συνάρτηση  $v(x)$  παριστάνει το βέλος κάμψεως (την εγκάρσια μετατόπιση) της δοκού. Επίσης η συνάρτηση  $p(x)$  δηλώνει τη γνωστή καταναμεμημένη κάθετη φόρτιση (σε kN/m) κατά μήκος της δοκού. Πρόκειται φυσικά για διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως λόγω της παραγώγου  $v''''(x)$ . Άρα απαιτούνται τέσσερις συνθήκες για τον πλήρη καθορισμό της λύσεώς της. Σχεδόν πάντοτε έχουμε τέσσερις συνοριακές συνθήκες. Θεωρώντας συνήθη δοκό μήκους  $L$  (με  $0 \leq x \leq L$ ) έχουμε δύο συνθήκες στο αριστερό άκρο της  $x = 0$  κι άλλες δύο συνθήκες στο δεξιό άκρο της  $x = L$ . Η διαφορική εξίσωση της συνήθους δοκού (1.9.9) μαζί με τις τέσσερις αυτές συνθήκες (πέντε συνολικά σχέσεις) απαρτίζουν το αντίστοιχο πρόβλημα συνοριακών τιμών. Συνηθισμένα παραδείγματα συνοριακών συνθηκών:

$$\begin{aligned} v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v(L) = 0, \quad v'(L) = 0 &: \text{σε αμφίπακτη δοκό,} \\ v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v(L) = 0, \quad v''(L) = 0 &: \text{σε μονόπακτη αριστερά υπερστατική δοκό,} \\ v(0) = 0, \quad v''(0) = 0, \quad v(L) = 0, \quad v''(L) = 0 &: \text{σε αμφιέριστη δοκό,} \\ v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v''(L) = 0, \quad v'''(L) = 0 &: \text{σε πρόβολο με πάκτωση αριστερά.} \end{aligned} \quad (1.9.10)$$

Όλες αυτές τις συνοριακές συνθήκες: (α) πάκτωση, (β) απλή στήριξη: άρθρωση ή κύλιση, και (γ) ελεύθερο άκρο θα τις εξηγήσουμε λεπτομερώς στο επόμενο Κεφάλαιο Α2. Σημειώνουμε επίσης ότι κάθε παράγωγος σε άκρο του διαστήματος ισχύος της διαφορικής εξίσωσης νοείται σαν η σχετική μονόπλευρη παράγωγος, π.χ. από δεξιά για  $x = 0$  και από αριστερά για  $x = L$  στην παρούσα δοκό  $[0, L]$ . Παρουσιάζονται βέβαια και πολυπλοκότερες συνθήκες σε άκρα δοκών, π.χ.

$$EIv'''(L) - kv(L) = 0 : \text{σε ελαστική στήριξη στο άκρο} \quad x = L \text{ δοκού,} \quad (1.9.11)$$

δηλαδή δοκού με ελαστική στήριξη: στήριξη σε ένα κατακόρυφο ελαστικό ελατήριο σταθεράς  $k$ . ▲

---

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ *A2*

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΠΟΛΙΤΙΚΟ ΜΗΧΑΝΙΚΟ

---

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Υπάρχουν εκατοντάδες (ίσως και χιλιάδες) προβλήματα στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού σε πάρα πολλούς τομείς της δραστηριότητάς του όπου παρουσιάζονται συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε σε πέντε τέτοια παραδείγματα όπου παρουσιάζονται συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και θα καταστρώσουμε τις εξισώσεις αυτές. Πιο συγκεκριμένα στην Ενότητα Α2.1 θα αναφερθούμε στις κλασικές διαφορικές εξισώσεις που αφορούν σε μια συνήθη δοκό (ένα τόσο σημαντικό και χρήσιμο γραμμικό φορέα στις κατασκευές του Πολιτικού Μηχανικού) στην Τεχνική Θεωρία της Κάμψεως στη Μηχανική των Υλικών. Σχετική γενίκευση γίνεται επίσης σε δοκό επί ελαστικής βάσεως (θεμελιώσεως, θεμελίου, όπως είναι το έδαφος) σύμφωνα με την κλασική υπόθεση του Winkler (1867) για τη συμπεριφορά της ελαστικής βάσεως στη δοκό. Τέτοιες δοκοί είναι οι πεδילוδοκοί στις Κατασκευές και οι σιδηροτροχιές στη Σιδηροδρομική. Στην Ενότητα Α2.2 θα αναφερθούμε στις Ταλαντώσεις και θα καταστρώσουμε τη διαφορική εξίσωση των ελεύθερων ταλαντώσεων μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος υλικού σημείου-ελατηρίου μέσω ενεργειακής μεθόδου και όχι μέσω του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα. Στην Ενότητα Α2.3 θα αναφερθούμε στις Θεμελιώσεις και στην κατάστρωση της διαφορικής εξίσωσης που ισχύει για θλιπτική αξονική φόρτιση κατακόρυφου πασσάλου στο έδαφος. Στην Ενότητα Α2.4 θα αναφερθούμε στη Ρευστομηχανική στην κατανομή της ταχύτητας (προκύπτει παραβολική, όχι ομοιόμορφη) σε μόνιμη ροή Νευτώνειου (όχι ιδεατού) ρευστού σε σωλήνα κυκλικής διατομής. Τέλος στην Ενότητα Α2.5 θα αναφερθούμε στην Περιβαλλοντική Υδραυλική στη διαφορική εξίσωση που ισχύει κατά την κίνηση ρύπου σε μόνιμη ροή σε υδατόρρευμα με μεταγωγή του ρύπου και ταυτόχρονη αποδόμησή του.

---

### Α2.1. ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ: ΣΥΝΗΘΗΣ ΔΟΚΟΣ ΣΕ ΚΑΜΨΗ

#### Α2.1.1. Η συνήθης δοκός και οι δυνατότητες στηρίζεώς της

Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε στις τόσο στοιχειώδεις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα της συνήθους δοκού στην Τεχνική Θεωρία της Κάμψεως Δοκών στη Μηχανική των Υλικών. Λέγοντας συνήθη δοκό συμφωνούμε να εννοούμε εδώ μια απλή, αρκετά λεπτή, ευθύγραμμη δοκό μήκους  $L$  κατά μήκος του άξονα  $Ox$  (συνήθως με  $0 \leq x \leq L$ ) από ομογενές, ισότροπο και γραμμικά ελαστικό υλικό με σταθερή διατομή καθ' όλο το μήκος της και, φυσικά, με δύο άκρα: συνήθως  $x = 0$  και  $x = L$ . Η συνήθης αυτή δοκός (που είναι ένας γραμμικός φορέας) θεωρείται ότι βρίσκεται υπό την επίδραση κατανεμημένης κάθετης στατικής φορτίσεως  $p = p(x)$  (σε  $N/m$  ή μάλλον σε  $kN/m$ ).<sup>1</sup> Για τις στηρίξεις της δοκού αυτής θεωρούμε ότι, εάν υπάρχουν,

---

<sup>1</sup> Πολύ συχνά χρησιμοποιείται και το σύμβολο  $q$  αντί του  $p$  στη Στατική. Όμως στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά το σύμβολο  $q$  θα χρησιμοποιηθεί σε άλλη περίπτωση, συγκεκριμένα για τις κύριες συντεταγμένες  $q_n(t)$  στις ταλαντώσεις δοκών στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙΙ. Αυτό το θέμα εξετάζεται λεπτομερέστερα στη Δυναμική των Κατασκευών.

περιορίζονται στα άκρα της  $x = 0$  και  $x = L$  (δεν υπάρχουν δηλαδή ενδιάμεσες στηρίξεις). Για τα άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  της ίδιας δοκού υπάρχουν οι εξής τέσσερις κυριότερες και απόλυτα αποδεκτές από στατικής απόψεως δυνατότητες:

1. Πακτωμένο (με πάκτωση) το αριστερό άκρο  $x = 0$  και ελεύθερο το δεξιό  $x = L$  ή αντίστροφα. Τότε η δοκός καλείται πρόβολος.
2. Πακτωμένο (με πάκτωση) το αριστερό άκρο  $x = 0$  και με κύλιση το δεξιό  $x = L$  ή αντίστροφα. Τότε η δοκός καλείται μονόπακτη υπερστατική δοκός.
3. Πακτωμένα (με πάκτωση) και τα δύο άκρα  $x = 0$  και  $x = L$ . Τότε η δοκός καλείται αμφίπακτη (αμφίπακτη δοκός).
4. Αρθρωμένο (με άρθρωση) το αριστερό άκρο  $x = 0$  και με κύλιση το δεξιό  $x = L$  ή αντίστροφα. Τότε η δοκός (που έχει απλές στηρίξεις και στα δύο άκρα της) καλείται αμφιέρειστη (αμφιέρειστη δοκός).

Σημειώνεται ότι η πρώτη και η τέταρτη από τις πιο πάνω στατικά αποδεκτές δυνατότητες αναφέρονται σε ισοστατικές δοκούς, ενώ η δεύτερη και η τρίτη σε υπερστατικές δοκούς.

Υπάρχουν επίσης και οι εξής τέσσερις απαράδεκτες από στατικής απόψεως δυνατότητες:

1. Αρθρωμένο (με άρθρωση) το αριστερό άκρο  $x = 0$  και ελεύθερο το δεξιό  $x = L$  ή αντίστροφα.
2. Με κύλιση το αριστερό άκρο  $x = 0$  και ελεύθερο το δεξιό  $x = L$  ή αντίστροφα.
3. Με κύλιση και τα δύο άκρα  $x = 0$  και  $x = L$ .
4. Ελεύθερα και τα δύο άκρα  $x = 0$  και  $x = L$ .

Οι δυνατότητες αυτές δεν εξασφαλίζουν τη στατική ισορροπία στη Στατική, γιατί οι στηρίξεις της δοκού είναι στατικά ελλειπίες. Μπορεί επομένως να υπάρξει κίνηση της δοκού, περιστροφική (στην 1η δυνατότητα) ή μεταφορική (στην 3η δυνατότητα) ή/και τα δύο ταυτόχρονα (στη 2η και στην 4η δυνατότητα). Αντίθετα στη Δυναμική επιτρέποντας την κίνηση της δοκού (υπό περιορισμούς ή απόλυτα ελεύθερη) όλες αυτές οι δυνατότητες είναι καθ' όλα αποδεκτές.

### A2.1.2. Τα βασικά μεγέθη κατά μήκος της δοκού

Στην παρούσα συνήθη δοκό υπό στατική φόρτιση  $p = p(x)$  τα εξής μεγέθη είναι σημαντικά κατά μήκος της ( $0 \leq x \leq L$ ):

- Το **βέλος κάμψεως**  $v = v(x)$ , που δημιουργεί την ελαστική γραμμή της δοκού, όπως αποκαλεί ο Πολιτικός Μηχανικός το σχήμα, τη μορφή που παίρνει η δοκός μετά την παραμόρφωσή της εξαιτίας της κάμψεώς της.<sup>2</sup>
- Η **κλίση**  $v' = v'(x)$  της δοκού και η σχετική με αυτή **γωνία στροφής** (ή **γωνία κλίσεως** ή απλά **στροφή**)  $\theta = \theta(x)$ . Η σχέση που τις συνδέει είναι προφανώς η εξής:

$$v'(x) = \tan \theta(x). \quad (2.1.1)$$

- Η **καμπυλότητα**  $\kappa = \kappa(x)$  κατά μήκος της δοκού (μετά την παραμόρφωσή της φυσικά). Η σχετική ακτίνα καμπυλότητας  $R = R(x)$  (που υποτίθεται εδώ θετική) υπολογίζεται από το γνωστό τύπο

$$R(x) = \frac{1}{|\kappa(x)|}. \quad (2.1.2)$$

<sup>2</sup>Συμβολίζουμε εδώ το βέλος κάμψεως με  $v$ , γιατί παριστάνει τη μετατόπιση κατά τον άξονα  $Oy$  (κάθετη, εγκάρσια μετατόπιση ως προς τον ουδέτερο άξονα της δοκού, δηλαδή ως προς τις νοητές ίνες της που ούτε εφελκούνται, αλλ' ούτε θλίβονται κατά την κάμψη) κατά μήκος της δοκού. Γενικότερα οι μετατοπίσεις κατά τους άξονες  $Ox$ ,  $Oy$  και  $Oz$  συμβολίζονται στη Μηχανική των Υλικών με  $u$ ,  $v$  και  $w$  αντίστοιχα. Είναι κατανοητό βέβαια ότι το ίδιο σύμβολο  $v$  δηλώνει σε προβλήματα Κινηματικής-Δυναμικής και την ταχύτητα υλικού σημείου. Εντούτοις ελπίζεται να μην υπάρξει σύγχυση:  $v = v(x)$  (ανεξάρτητη μεταβλητή η θέση  $x$ ) το βέλος κάμψεως σε δοκούς, ενώ  $v = v(t)$  (ανεξάρτητη μεταβλητή ο χρόνος  $t$ ) η ταχύτητα υλικού σημείου.



- Η **καμπτική ροπή** (ή **ροπή κάμψεως**)  $M = M(x)$  κατά μήκος της δοκού.
- Η **τέμνουσα δύναμη** (ή **διατμητική δύναμη**)  $Q = Q(x)$  κατά μήκος της δοκού.<sup>3</sup>
- Η **κατανεμημένη κάθετη φόρτιση**  $p = p(x)$  κατά μήκος της δοκού, στην οποία ήδη αναφερθήκαμε. Συχνά σ' αυτήν ο Πολιτικός Μηχανικός συμπεριλαμβάνει με κατάλληλο τρόπο συγκεντρωμένα φορτία  $P_k$  και ροπές  $M_k$  κατά μήκος της δοκού. (Λεπτομέρειες για το πώς μπορεί να επιτευχθεί αυτό θα αναφερθούν στις Ενότητες A11.14 και A11.15 του Κεφαλαίου A11.)

Παρατηρούμε πως από τα έξι πιο πάνω μεγέθη τα τρία πρώτα, δηλαδή: (α) το βέλος κάμψεως  $v(x)$ , (β) η κλίση  $v'(x)$  και η σχετιζόμενη με αυτή γωνία στροφής (ή γωνία κλίσεως ή απλά στροφή)  $\theta(x)$  καθώς και (γ) η καμπυλότητα  $\kappa(x)$  είναι γεωμετρικής φύσεως. (Αφορούν δηλαδή στη Γεωμετρία της δοκού που λόγω της κάμψεώς της έχει παραμορφωθεί.) Αντίθετα τα τρία τελευταία μεγέθη, δηλαδή: (α) η καμπτική ροπή (ή ροπή κάμψεως)  $M(x)$ , (β) η τέμνουσα δύναμη (ή διατμητική δύναμη)  $Q(x)$  και (γ) η κατανεμημένη κάθετη φόρτιση  $p(x)$  είναι μηχανικής φύσεως. (Αφορούν δηλαδή σε στατικά, μηχανικά μεγέθη κατά μήκος της παραμορφωθείσας δοκού.)

### A2.1.3. Οι γεωμετρικές διαφορικές εξισώσεις

Ας υπενθυμίσουμε και πάλι ότι στο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II λέγοντας διαφορικές εξισώσεις αναφερόμαστε στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Αυτές είναι διαφορικές εξισώσεις με μία μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή, όπως είναι εδώ η θέση  $x$  κατά μήκος της δοκού:  $0 \leq x \leq L$ .

Καταρχήν, η ήδη αναφερθείσα σχέση (2.1.1)

$$v'(x) = \tan \theta(x) \quad (2.1.3)$$

αποτελεί μια πρώτη διαφορική εξίσωση κατά μήκος της δοκού:  $0 < x < L$ . Η διαφορική αυτή εξίσωση συνδέει το βέλος κάμψεως  $v(x)$  (στο αριστερό μέλος) με τη γωνία στροφής (ή γωνία κλίσεως ή στροφή)  $\theta(x)$  στο δεξιό μέλος. Υποθέτουμε τη γωνία στροφής (ή γωνία κλίσεως ή στροφή)  $\theta(x)$  γνωστή συνάρτηση και το βέλος κάμψεως  $v(x)$  άγνωστη. Έτσι διαπιστώνουμε αμέσως ότι πρόκειται για μια πάρα πολύ απλή γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως (και πρώτου βαθμού φυσικά) με άγνωστη συνάρτηση το βέλος κάμψεως  $v(x)$  και γνωστή τη γωνία στροφής  $\theta(x)$ .

Σε μια αρχικά ευθύγραμμη δοκό, όπως εξ υποθέσεως είναι η παρούσα συνήθης δοκός, αρχικά με  $v(x) \equiv 0$ , η ελαστική παραμόρφωσή της εξαιτίας της κάμψεώς της οδηγεί συνήθως σε πολύ μικρές γωνίες στροφής  $\theta(x)$ , οπότε δεχόμαστε ότι

$$\tan \theta(x) \approx \theta(x). \quad (2.1.4)$$

Αυτό είναι εύλογο, όπως ήδη ξέρουμε και όπως προκύπτει και από τη γνωστή σειρά Maclaurin (σειρά Taylor στο σημείο  $\theta = 0$ ) της συναρτήσεως  $\tan \theta$ . Αυτή η σειρά Maclaurin έχει τη μορφή

$$\tan \theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \frac{17\theta^7}{315} + \frac{62\theta^9}{2835} + O(\theta^{11}) \quad (2.1.5)$$

με πρώτο όρο το  $\theta$ .

Επομένως η διαφορική εξίσωση (2.1.3) παίρνει την κάπως απλούστερη προσεγγιστική μορφή

$$v'(x) = \theta(x). \quad (2.1.6)$$

Αυτή είναι η μορφή που υποθέτει συνήθως ότι ισχύει ο Πολιτικός Μηχανικός και στην οποία εκ προθέσεως (για διευκόλυνσή μας) αντικαταστήσαμε το σύμβολο της προσεγγίσεως  $\approx$  με το σύμβολο της ισότητας  $=$ . Βέβαια πρόκειται για διαφορική εξίσωση μόνο εάν η γωνία στροφής  $\theta(x)$  είναι γνωστή συνάρτηση και το βέλος κάμψεως  $v(x)$  (η παράγωγός του  $v'(x)$ ) είναι η κλίση της δοκού, όπως

<sup>3</sup>Συχνά για την τέμνουσα δύναμη χρησιμοποιείται και το σύμβολο  $V$  αντί του  $Q$  ιδίως στην Αμερικανική βιβλιογραφία.

αναφέραμε) είναι η άγνωστη συνάρτηση. Τότε πρέπει να λύσουμε τη διαφορική εξίσωση (2.1.3), για να προσδιορίσουμε το βέλος κάμψεως  $v(x)$ . Αντίθετα είναι δυνατόν το βέλος κάμψεως  $v(x)$  να είναι αυτό που είναι γνωστό κατά μήκος της δοκού, έστω από μετρήσεις στην ελαστική γραμμή της, δηλαδή στο σχήμα της παραμορφωμένης δοκού μετά την κάμψη της. Στην περίπτωση αυτή ζητείται η γωνία στροφής  $\theta(x)$  και η εξίσωση (2.1.3) δεν αποτελεί πια διαφορική εξίσωση, επειδή η παράγωγος  $v'(x)$  θεωρείται γνωστή (με παραγωγή του γνωστού βέλους κάμψεως  $v(x)$ ). Τότε η εξίσωση (2.1.3) είναι απλά ένας τύπος που μας δίνει εύκολα τη γωνία στροφής  $\theta(x)$ .

Στην περίπτωση της διαφορικής εξισώσεως (2.1.6) πρόκειται για μια ιδιαίτερα απλή γραμμική διαφορική εξίσωση, η οποία εύκολα λύνεται με κατευθείαν ολοκλήρωση ως προς τη θέση  $x$ . Η ολοκλήρωση αυτή μας δίνει αμέσως

$$v(x) = \int_0^x \theta(\xi) d\xi + C \quad (2.1.7)$$

φυσικά με την υπόθεση ότι η γνωστή γωνία στροφής  $\theta(x)$  είναι κατάλληλη προς ολοκλήρωση συνάρτηση, π.χ. τμηματικά συνεχής συνάρτηση. Κάτι τέτοιο (η δυνατότητα ολοκληρώσεως της γνωστής συναρτήσεως  $\theta(x)$ ) στα μεν μαθηματικά αποτελεί απλά υπόθεση, στη δε Μηχανική των Υλικών αναγκαία απαίτηση του Πολιτικού Μηχανικού σε ένα καλά ορισμένο (καλά τοποθετημένο) πρόβλημα δοκού και θεωρείται ότι ισχύει.

Στη λύση αυτή (2.1.7) το μεν ολοκλήρωμα γράφτηκε σαν ένα συνηθισμένο ολοκλήρωμα, αλλ' εδώ με το άνω όριο ολοκληρώσεως  $x$  μεταβλητό. Σαν κάτω όριο ολοκληρώσεως τέθηκε το  $x = 0$  θεωρώντας σαν αριστερό άκρο της δοκού το σημείο  $x = 0$ . Για να αποφευχθεί σύγχυση μεταξύ του μεταβλητού άνω ορίου ολοκληρώσεως  $x$  και της μεταβλητής ολοκληρώσεως, χρησιμοποιήθηκε για τη μεταβλητή ολοκληρώσεως το νέο, βοηθητικό σύμβολο  $\xi$ , που και αυτό βέβαια δηλώνει θέση κατά μήκος της δοκού. Προφανώς  $0 \leq \xi \leq x$  στο ολοκλήρωμα της λύσεως (2.1.7).

Ας σημειωθεί σχετικά ότι στα μαθήματα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών II και III η μαθηματική σχέση

$$v(x) = \int_0^x \theta(x) dx + C \quad (2.1.8)$$

θα θεωρείται μαθηματικό λάθος. Αυτό συμβαίνει, επειδή η μεταβλητή ολοκληρώσεως  $x$  πρέπει να μεταβάλλεται στο διάστημα  $[0, x]$  με δεξιό άκρο το σημείο  $x$  και τούτο προκαλεί ίσως σύγχυση. Αναγνωρίζεται εντούτοις ότι, αν και μαθηματικά εσφαλμένη, η σχέση (2.1.8) συχνά χρησιμοποιείται στην τεχνική (και όχι μόνο) βιβλιογραφία αντί για την αντίστοιχη σωστή σχέση (2.1.7).

Στην ίδια λύση (2.1.7) προστέθηκε βέβαια και μια σταθερά ολοκληρώσεως: η  $C$ . Αυτό είναι εύλογο μετά την ολοκλήρωση και αναγκαίο, ώστε η λύση αυτή να αποτελεί τη γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως (2.1.6), που μπορεί έτσι κι αλλιώς να επαληθευθεί με παραγωγή. Τότε, δηλαδή παραγωγίζοντας ως προς τη μεταβλητή  $x$ , εύκολα επιστρέφουμε από τη γενική λύση (2.1.7) στη διαφορική εξίσωση (2.1.6), από την οποία ξεκινήσαμε.

Βέβαια σχεδόν πάντοτε ο Πολιτικός Μηχανικός δεν ενδιαφέρεται για τη γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως (2.1.6), αλλά μόνο για μια μερική λύση (ή ειδική λύση) της ίδιας διαφορικής εξισώσεως όπου δε θα υπεισέρχεται καμία σταθερά. Έτσι, υποθέτοντας εδώ ότι γνωρίζουμε την τιμή  $v_0$  του βέλους κάμψεως  $v(x)$  στο αριστερό άκρο  $x = 0$  της δοκού, δηλαδή ότι

$$v(0) = v_0, \quad (2.1.9)$$

εύκολα διαπιστώνουμε (θέτοντας  $x = 0$ ) ότι η γενική λύση (2.1.7) παίρνει στο άκρο  $x = 0$  τη μορφή

$$v(0) = v_0 = 0 + C = C \implies C = v_0. \quad (2.1.10)$$

Άρα (με  $C = v_0$ ) προκύπτει η εξής μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης (2.1.6), που συμπεριλαμβάνει τώρα και την αρχική συνθήκη (2.1.9):

$$v(x) = v_0 + \int_0^x \theta(\xi) d\xi. \quad (2.1.11)$$

Τη συγκεκριμένη αυτή λύση την αποκαλούμε επίσης και λύση του προβλήματος αρχικής τιμής (2.1.6) και (2.1.9), δηλαδή του προβλήματος

$$v'(x) = \theta(x), \quad v(0) = v_0. \quad (2.1.12)$$

Το πρόβλημα αυτό αποτελείται από μία γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως (την εξίσωση (2.1.6)) και μία αρχική συνθήκη (τη συνθήκη (2.1.9)). Φυσικά, αν η διαφορική εξίσωση ήταν δευτέρας τάξεως, θα χρειαζόμασταν δύο αρχικές συνθήκες, αν ήταν τρίτης, τρεις συνθήκες, κλπ.

Ξεκινήσαμε από την πάρα πολύ απλή διαφορική εξίσωση (2.1.3) και την αντίστοιχή της προσεγγιστική διαφορική εξίσωση (2.1.6), που αφορούν σε γεωμετρικά μεγέθη κατά μήκος της δοκού: στο βέλος κάμψεως  $v(x)$  και στην αντίστοιχη γωνία στροφής (ή γωνία κλίσεως ή απλά στροφή)  $\theta(x)$ . Πιστεύουμε ότι τα μεγέθη αυτά είναι κατανοητά σαν έννοιες από τη γεωμετρία ακόμη και στον πρωτοετή φοιτητή/στην πρωτοετή φοιτήτρια Πολιτικό Μηχανικό.

Λίγο δυσκολότερη έννοια, γεωμετρική και αυτή πάντως, είναι η καμπυλότητα  $\kappa = \kappa(x)$  μιας καμπύλης (εδώ της ελαστικής γραμμής της δοκού). Είναι γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά I ότι η καμπυλότητα  $\kappa = \kappa(x)$  μιας καμπύλης  $y = y(x)$  δίνεται από τον τύπο

$$\kappa(x) = \frac{y''(x)}{[1 + y'^2(x)]^{3/2}} \equiv \frac{y''(x)}{[\sqrt{1 + y'^2(x)}]^3} \quad (2.1.13)$$

με τη χρήση και του συμβόλου της τετραγωνικής ρίζας.

Για την παρούσα συνήθη δοκό, απλά γράφοντας  $v$  αντί  $y$ , επαναλαμβάνουμε τον πιο πάνω τύπο στη μορφή

$$\kappa(x) = \frac{v''(x)}{[1 + v'^2(x)]^{3/2}} \equiv \frac{v''(x)}{[\sqrt{1 + v'^2(x)}]^3}. \quad (2.1.14)$$

Ο τύπος αυτός μας δίνει την καμπυλότητα  $\kappa(x)$  της παραμορφωμένης (λόγω της κάμψέως της) δοκού σε κάθε σημείο της  $x$  με  $0 \leq x \leq L$  (με  $L$ , επαναλαμβάνεται, το μήκος της δοκού). Από την αντίστροφη άποψη, που προς το παρόν ίσως συναντά την αδιαφορία (ή ακόμη και τη δυσσάρεσκεια) του πρωτοετούς φοιτητή και της πρωτοετούς φοιτήτριας Πολιτικού Μηχανικού (και τούτο είναι κατανοητό), ο ίδιος τύπος (2.1.14) μπορεί να αποτελεί μια διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως. Στην εξίσωση αυτή άγνωστη συνάρτηση είναι η  $v(x)$  (εξαρτημένη μεταβλητή η  $v$ ) και ανεξάρτητη μεταβλητή η  $x$ . Κάτι τέτοιο ισχύει, όταν είναι γνωστή η καμπυλότητα  $\kappa(x)$  και άγνωστο το βέλος κάμψεως  $v(x)$ , δηλαδή είναι άγνωστη η ελαστική γραμμή της δοκού. Δε φτάνει που είναι δευτέρας τάξεως διαφορική εξίσωση η εξίσωση (2.1.14), είναι επιπλέον και μη γραμμική λόγω του μη γραμμικού όρου  $v'^2(x)$  στη ρίζα του παρονομαστή. Ας σημειωθεί βέβαια παρενθετικά ότι με την εξής αλλαγή της εξαρτημένης μεταβλητής:  $z = v'$  (οπότε και  $z' = v''$ ) η τάξη της διαφορικής εξίσωσης (2.1.14) μειώνεται αμέσως από δεύτερη σε πρώτη, γιατί τώρα

$$\kappa(x) = \frac{z'(x)}{[1 + z^2(x)]^{3/2}} \equiv \frac{z'(x)}{[\sqrt{1 + z^2(x)}]^3}. \quad (2.1.15)$$

Όμως στις συνήθεις δοκούς, όπως ήδη αναφέρθηκε, η κλίση τους  $v'(x)$  μετά την καμπτική παραμόρφωσή τους (οπότε παίρνουν το σχήμα της ελαστικής γραμμής τους στη συγκεκριμένη κάμψη τους) είναι πολύ μικρή, ας πούμε  $|v'(x)| < 1/10$ . Τότε το τετράγωνό της είναι πολύ-πολύ μικρότερο, συγκεκριμένα  $v'^2(x) < 1/100$  για  $|v'(x)| < 1/10$ . Επομένως, συγκρινόμενο με τη μονάδα στην τετραγωνική ρίζα του παρονομαστή στη σχέση (2.1.14), απλά μπορεί να αγνοηθεί και

πραγματικά πάντοτε αγνοείται από τον Πολιτικό Μηχανικό. Με τον τρόπο αυτό η μη γραμμική διαφορική εξίσωση (2.1.14) προσεγγίζεται από την αντίστοιχη και τόσο απλή γραμμική διαφορική εξίσωση

$$\kappa(x) = v''(x) \iff v''(x) = \kappa(x). \quad (2.1.16)$$

Η διαδικασία αυτή της προσεγγιστικής αντικαταστάσεως μιας μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης από γραμμική ονομάζεται **γραμμικοποίηση** της διαφορικής εξίσωσης. Η γραμμικοποίηση είναι υπολογιστικά πολύ ωφέλιμη, επειδή οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις συνήθως λύνονται πολύ πιο εύκολα από τις μη γραμμικές. Αντίθετα οι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις συνήθως δε μπορούν να επιλυθούν με κλειστό τύπο, αλλά και αριθμητικά είναι πολύ πιο δύσκολες στην επίλυσή τους από τις γραμμικές. Τονίζεται επίσης ότι, όπως ήδη διευκρινίσθηκε, το σφάλμα στην παραπάνω προσέγγιση (2.1.16) είναι κυριολεκτικά ελάχιστο για αρχικά ευθύγραμμες δοκούς υπό συνηθισμένη ελαστική καμπτική καταπόνηση. Άρα η γραμμικοποίηση δεν εισάγει καθόλου σημαντικό σφάλμα στις συνήθεις (και αρχικά ευθύγραμμες) δοκούς που συναντά ο Πολιτικός Μηχανικός. Πρέπει επομένως αυτός να θεωρεί τον εαυτό του πολύ τυχερό απ' αυτής της απόψεως.

Αυτή είναι η εξίσωση την οποία θα χρησιμοποιούμε από δω και πέρα: η γραμμική διαφορική εξίσωση (2.1.16), η οποία προέκυψε από τη γραμμικοποίηση της μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (2.1.14). Αν και η εξίσωση (2.1.16) είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερας τάξεως, εντούτοις καμία υπολογιστική δυσκολία δεν παρουσιάζει. Απλά απαιτούνται για την εύρεση της γενικής λύσεώς της  $v(x)$  δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις, κατά τις οποίες παρουσιάζονται προφανώς και δύο σταθερές ολοκληρώσεως  $C_1$  και  $C_2$ . Πιο συγκεκριμένα η πρώτη ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης (2.1.16) οδηγεί στη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως

$$v'(x) = \int_0^x \kappa(\xi) d\xi + C_1 \quad (2.1.17)$$

με τη χρήση και της βοηθητικής μεταβλητής, μεταβλητής ολοκληρώσεως  $\xi$ . Στη συνέχεια η δεύτερη ολοκλήρωση οδηγεί στη γενική λύση

$$v(x) = \int_0^x \left[ \int_0^\eta \kappa(\xi) d\xi \right] d\eta + C_1 x + C_2 \quad (2.1.18)$$

με τη χρήση και δεύτερης βοηθητικής μεταβλητής, μεταβλητής ολοκληρώσεως  $\eta$  στη δεύτερη ολοκλήρωση στο διαδοχικό ολοκλήρωμα αυτής της γενικής λύσεως (2.1.18).

Ο προσδιορισμός των δύο σταθερών  $C_1$  και  $C_2$  μπορεί εύκολα να γίνει με τη χρήση δύο συνθηκών, π.χ. των αρχικών συνθηκών

$$v(0) = v_0, \quad v'(0) = \theta_0 \quad (2.1.19)$$

(βέλος κάμψεως και γωνία στροφής αντίστοιχα) στο αριστερό άκρο  $x = 0$  της δοκού που εξετάζουμε υπό την παραδοχή (2.1.6) ( $v'(x) = \theta(x)$ ) που ήδη έγινε. Επομένως, εξαιτίας της δεύτερης αρχικής συνθήκης (2.1.19), η ενδιαμέση σχέση (2.1.17) παίρνει την εξής μορφή στο άκρο  $x = 0$ :

$$v'(0) = \theta_0 = 0 + C_1 = C_1 \implies C_1 = \theta_0 \implies v'(x) = \int_0^x \kappa(\xi) d\xi + \theta_0. \quad (2.1.20)$$

Στη συνέχεια, εξαιτίας και της πρώτης αρχικής συνθήκης (2.1.19), η γενική λύση (2.1.18) μας δίνει στο άκρο  $x = 0$

$$v(0) = v_0 = 0 + 0 + C_2 = C_2 \implies C_2 = v_0 \implies v(x) = \int_0^x \left[ \int_0^\eta \kappa(\xi) d\xi \right] d\eta + \theta_0 x + v_0, \quad (2.1.21)$$

όπου πήραμε το θάρρος να χρησιμοποιήσουμε και την ήδη ευρεθείσα τιμή  $C_1 = \theta_0$  της σταθεράς  $C_1$ . Επομένως η μερική λύση (ή ειδική λύση) της διαφορικής εξίσωσης (2.1.16) που αντιστοιχεί στις δύο αρχικές συνθήκες (2.1.19) ή, με άλλες λέξεις, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$v''(x) = \kappa(x), \quad v(0) = v_0, \quad v'(0) = \theta_0 \quad (2.1.22)$$

είναι η εξής:

$$v(x) = v_0 + \theta_0 x + \int_0^x \left[ \int_0^\eta \kappa(\xi) d\xi \right] d\eta. \quad (2.1.23)$$

Στη λύση αυτή πήραμε την πρωτοβουλία να αλλάξουμε και τη σειρά των προσθετέων στο δεξιό μέλος, ώστε να ταιριάζει με τη μορφή που θα ήθελε να έχει μπροστά του ο Πολιτικός Μηχανικός.

Ας σημειωθεί τέλος ότι η λύση αυτή (2.1.23) επαληθεύει την αρχική συνθήκη  $v(0) = v_0$ , όπως προκύπτει αμέσως θέτοντας σ' αυτήν  $x = 0$ . Παραγωγίζοντας την ίδια λύση μία φορά ως προς  $x$  (μη λησμονώντας βέβαια τα της παραγωγίσεως ενός ολοκληρώματος με μεταβλητό το άνω όριο ολοκλήρωσεως, εδώ το  $x$ ), οδηγούμαστε στην παράγωγο

$$v'(x) = \theta_0 + \int_0^x \kappa(\xi) d\xi, \quad (2.1.24)$$

που ήδη είχαμε στη σχέση (2.1.20). Από την παράγωγο αυτή διαπιστώνουμε άμεσα (θέτοντας και πάλι  $x = 0$ ) την ισχύ και της δεύτερης αρχικής συνθήκης  $v'(0) = \theta_0$ . Και μία ακόμη παραγωγή, αυτήν τη φορά της σχέσεως (2.1.24), μας οδηγεί στην τελική σχέση

$$v''(x) = \kappa(x), \quad (2.1.25)$$

δηλαδή στην ίδια τη διαφορική μας εξίσωση (2.1.16) (την πρώτη από τις εξισώσεις (2.1.22)).

Επαληθεύθηκε επομένως η λύση (2.1.23) του προβλήματος αρχικών τιμών (2.1.22) και ως προς τη διαφορική εξίσωση και ως προς τις δύο αρχικές συνθήκες. Η επαλήθευση αυτή που κάναμε ήταν αρκετά απλή ίσως με εξαίρεση την παραγωγή του ολοκληρώματος. Εντούτοις ο Πολιτικός Μηχανικός έχοντας να επιτελέσει τόσο υπεύθυνο τεχνικό έργο πρέπει πάντοτε να επαληθεύει τις λύσεις που βρίσκει στα τεχνικά προβλήματα που αντιμετωπίζει. Η επαλήθευση αυτή μπορεί να είναι είτε άμεση, όπως έγινε εδώ, είτε με τη χρήση μιας εντελώς διαφορετικής μεθόδου επίλυσεως, που πρέπει όμως να οδηγεί ουσιαστικά στα ίδια αποτελέσματα. Η χρήση διαφορετικής μεθόδου μπορεί να αφορά, π.χ. στην επίλυση μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (όπως η παρούσα) με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace, στην οποία όμως δεν έχουμε ακόμη αναφερθεί. Υπάρχει επίσης η δυνατότητα επιλογής και μιας άλλης εντελώς διαφορετικής μαθηματικής μοντελοποίησης του τεχνικού προβλήματος, π.χ. με ολοκληρωτική εξίσωση<sup>4</sup> αντί για διαφορική στο παρόν πρόβλημα αρχικών τιμών. Ανάλογα μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος των Συνοριακών Στοιχείων για την επαλήθευση αποτελεσμάτων που βρέθηκαν με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων (ή το αντίστροφο), π.χ. σ' ένα δίσκο (επίπεδο μέσον χωρίς κάθετη φόρτιση), σε μια πλάκα (αυτή και με κάθετη φόρτιση) ή σ' ένα κέλυφος σε μια κατασκευή, κλπ.

Στο σημείο αυτό είναι σκόπιμο να κάνουμε και τις εξής τρεις παρατηρήσεις:

(α) Εννοείται ότι σε όλες τις παραπάνω διαφορικές εξισώσεις και τις λύσεις τους η μεταβλητή  $x$  μεταβάλλεται μόνο κατά μήκος της δοκού στο διάστημα  $0 \leq x \leq L$ . Εάν έχουμε κάποια παράγωγο στα άκρα της δοκού  $x = 0$  και  $x = L$ , πρέπει να την ερμηνεύσουμε σαν μονόπλευρη (όχι δίπλευρη όπως συνήθως) παράγωγο, δηλαδή παράγωγο από τα δεξιά στο αριστερό άκρο της δοκού  $x = 0$  και παράγωγο από τα αριστερά στο δεξιό άκρο της δοκού  $x = L$ . Η δοκός μας είναι πεπερασμένη ( $0 \leq x \leq L$ ): δεν έχει επομένως κανένα νόημα να χρησιμοποιούμε σημεία  $x$  (ή  $\xi$  ή  $\eta$ ) εκτός αυτής.

(β) Παρατηρούμε επίσης ότι το διαδοχικό ολοκλήρωμα στη λύση (2.1.23) μπορεί αρκετά εύκολα να μετατραπεί σε απλό ολοκλήρωμα με τη χρήση παραγοντικής ολοκλήρωσεως.

(γ) Ας σημειώσουμε τέλος ότι πέρα από τις δύο διαφορικές εξισώσεις (2.1.6) (την εξίσωση  $v'(x) = \theta(x)$ ) και (2.1.16) (την εξίσωση  $v''(x) = \kappa(x)$ ), ισχύει και η εξίσου απλή διαφορική εξίσωση

$$\theta'(x) = \kappa(x). \quad (2.1.26)$$

<sup>4</sup>Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις αποτελούν μέρος της ύλης του μαθήματος Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III. Η μελέτη τους και εφαρμογές του Πολιτικού Μηχανικού περιλαμβάνονται στο Μέρος Γ των διδακτικών αυτών βιβλίων.

Η διαφορική αυτή εξίσωση προκύπτει άμεσα παραγωγίζοντας την εξίσωση (2.1.6) και αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα  $v''(x) = \theta'(x)$  στην εξίσωση (2.1.16). Εννοείται ότι είναι και αυτή προσεγγιστική διαφορική εξίσωση, που όμως ισχύει αρκετά καλά σε προβλήματα συνήθων δοκών. Θα ήταν όμως λάθος να ισχυρισθούμε ότι είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στον Πολιτικό Μηχανικό από πρακτικής απόψεως: δεν είναι! Εδώ την αναφέραμε απλά για λόγους πληρότητας της παραγράφου αυτής ως προς τα τρία γεωμετρικά μεγέθη:  $v(x)$  (βέλος κάμψης),  $\theta(x)$  (γωνία στροφής ή γωνία κλίσεως ή στροφή) και  $\kappa(x)$  (καμπυλότητα) κατά μήκος της καμφθείσας συνήθους δοκού που εξετάζουμε.

#### A2.1.4. Οι στατικές διαφορικές εξισώσεις

Θα προχωρήσουμε τώρα στη χρήση και των τριών στατικών, μηχανικών μεγεθών κατά μήκος της δοκού: της καμπτικής ροπής (ή ροπής κάμψης)  $M(x)$  (συχνά σε kN m), της τέμνουσας δύναμης  $Q(x)$  (συχνά σε kN) και της κάθετης κατανεμημένης φορτίσεως  $p(x)$  (συχνά σε kN/m) κατά μήκος της δοκού. Οι σχετικές βασικές γραμμικές διαφορικές εξισώσεις είναι γνωστές από το μάθημα της Τεχνικής Μηχανικής-Στατικής του 1ου Εξαμήνου Σπουδών. Οι εξισώσεις αυτές προέρχονται από τη στατική ισορροπία στοιχειώδους, απειροστού τμήματος  $dx$  της δοκού. Πρόκειται για την εξίσωση

$$M'(x) = Q(x), \quad (2.1.27)$$

που εκφράζει την ισορροπία των καμπτικών ροπών (ροπών κάμψης) στο στοιχείο μήκους  $dx$  της δοκού, καθώς και την εξίσωση

$$Q'(x) = p(x), \quad (2.1.28)$$

που δηλώνει την ισορροπία των κάθετων δυνάμεων: της κάθετης κατανεμημένης φορτίσεως  $p(x)$  και των τεμνουσών δυνάμεων  $Q(x)$  (ή  $V(x)$ ) στο ίδιο στοιχειώδες μήκος  $dx$  της δοκού. (Υποτίθεται βέβαια ότι δεν υπάρχει αξονική φόρτιση  $N$  της δοκού ούτε εφελκυστική, αλλ' ούτε και θλιπτική.)

Συνδυάζοντας τις δύο αυτές διαφορικές εξισώσεις (2.1.27) και (2.1.28), δηλαδή παραγωγίζοντας την πρώτη (ως προς τη θέση  $x$  φυσικά,  $0 \leq x \leq L$ ) και αντικαθιστώντας την τέμνουσα δύναμη  $Q(x)$  στη δεύτερη, προκύπτει και η εξής τρίτη διαφορική εξίσωση:

$$M''(x) = p(x). \quad (2.1.29)$$

Και στους τρεις αυτούς τύπους (2.1.27), (2.1.28) και (2.1.29) υποθέτουμε βέβαια ότι η συνάρτηση στο αριστερό μέλος είναι η άγνωστη συνάρτηση και η συνάρτηση στο δεξιό μέλος η γνωστή συνάρτηση. Τότε μόνο μπορούμε να μιλάμε για διαφορικές εξισώσεις.

Και οι τρεις πιο πάνω διαφορικές εξισώσεις (2.1.27), (2.1.28) και (2.1.29) είναι απλές γραμμικές διαφορικές εξισώσεις που άμεσα μπορούν να επιλυθούν με μία κατευθείαν ολοκλήρωση για τις δύο πρώτες: τις (2.1.27) και (2.1.28) και με δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις για την τρίτη: τη (2.1.29). Αυτά είναι εντελώς ανάλογα με ό,τι ήδη παρουσιάστηκε στην προηγούμενη Παράγραφο Α2.1.3 εκεί για τις διαφορικές εξισώσεις (2.1.6), (2.1.26) και (2.1.16), που υπολογιστικά είναι εντελώς ανάλογες με τις (2.1.27), (2.1.28) και (2.1.29) αντίστοιχα.

#### A2.1.5. Οι τελικές διαφορικές εξισώσεις

Στο σημείο αυτό πρέπει βέβαια να σημειωθεί ότι οι τρεις διαφορικές εξισώσεις (2.1.6), (2.1.26) και (2.1.16) αφορούσαν στα γεωμετρικά μεγέθη  $v(x)$ ,  $\theta(x)$  και  $\kappa(x)$  κατά μήκος της δοκού ( $0 \leq x \leq L$ ). Αντίθετα οι διαφορικές εξισώσεις (2.1.27), (2.1.28) και (2.1.29) αφορούν στα μηχανικά, στατικά μεγέθη  $M(x)$ ,  $Q(x)$  και  $p(x)$  κατά μήκος της ίδιας δοκού. Απομένει η σύνδεση, ο συνδετικός κρίκος μεταξύ γεωμετρικών και στατικών μεγεθών, η οποία είναι εφικτή με το θεμελιώδη τύπο

$$\kappa(x) = \frac{M(x)}{EI} \iff M(x) = EI \kappa(x). \quad (2.1.30)$$

Θα ήταν ανειλικρινής ο διδάσκων, εάν ισχυριζόταν ότι ο τύπος αυτός είναι γνωστός από την Τεχνική Μηχανική-Στατική: δεν είναι! Είναι τύπος της Μηχανικής των Υλικών στο 4ο Εξάμηνο Σπουδών, αλλ' είναι τόσο απλός, ιδίως αν παραλειφθεί η μεταβλητή  $x$ , δηλαδή αν γράψουμε

$$\kappa = \frac{M}{EI} \iff M = EI\kappa. \quad (2.1.31)$$

Πρόκειται για ένα στοιχειώδη γραμμικό τύπο (και χωρίς παραγώγους βέβαια), που μας λέει πως η καμπτική ροπή (ροπή κάμψεως)  $M$  είναι ανάλογη της καμπυλότητας  $\kappa$  της ελαστικής γραμμής της συνήθους δοκού που εξετάζουμε. Ο συντελεστής αναλογίας  $EI$  είναι η καλούμενη δυσκαμψία (και όχι ακαμψία<sup>5</sup>) της ελαστικά παραμορφούμενης παρούσας συνήθους δοκού υπό συνθήκες κάμψεως. Στη Μηχανική των Υλικών αποδεικνύεται ότι η δυσκαμψία  $EI$  της παρούσας συνήθους δοκού είναι το γινόμενο του μέτρου ελαστικότητας  $E$  (που μετρείται σε  $\text{Pa} = \text{N/m}^2$  ή σε πολλαπλάσιά του, π.χ. σε  $\text{kPa}$ ) του ομογενούς, ισότροπου και γραμμικά ελαστικού υλικού της επί τη ροπή αδρανείας  $I$  (που μετρείται σε  $\text{m}^4$ ) της διατομής της ως προς τον ουδέτερο άξονά της κατά την κάμψη. Στις συνήθεις δοκούς η δυσκαμψία  $EI$  υποτίθεται σταθερή κατά μήκος της δοκού.

Ας σημειωθεί επίσης ότι ο πιο πάνω θεμελιώδης τύπος (2.1.30) (ή (2.1.31)) προκύπτει στη Μηχανική των Υλικών υπό ορισμένες απλοποιητικές παραδοχές για τη δοκό και την καμπτική καταπόνησή της. Αυτές όμως γίνονται γενικά δεκτές στην Τεχνική Θεωρία της Κάμψεως συνήθων δοκών από τον Πολιτικό Μηχανικό. Πολύ ακριβέστεροι τύποι προκύπτουν στην αντιμετώπιση δοκών στη Μηχανική των Υλικών μέσω της Μαθηματικής Θεωρίας της Ελαστικότητας αντί της πολύ απλούστερης Τεχνικής Θεωρίας της Κάμψεως. Δεν υπάρχει όμως λόγος στο παρόν μάθημα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών II να υπεισέλθουμε σε σχετικές λεπτομέρειες. Δε μας αφορούν!

Εν πάση περιπτώσει, χρησιμοποιώντας το γραμμικό τύπο (2.1.30) (ισοδύναμα (2.1.31)), που συνδέει την καμπυλότητα  $\kappa(x)$  με την καμπτική ροπή (ή ροπή κάμψεως)  $M(x)$ , μπορούμε πλέον πολύ εύκολα να κατασκευάσουμε και διαφορικές εξισώσεις που συνδέουν γεωμετρικά και στατικά μεγέθη. Η πιο σημαντική από αυτές προκύπτει, μόλις θέσουμε  $\kappa(x) = M(x)/(EI)$  (τύπος (2.1.30)) στη διαφορική εξίσωση (2.1.16) ( $v''(x) = \kappa(x)$ ) και έχει τη μορφή

$$v''(x) = \frac{M(x)}{EI}. \quad (2.1.32)$$

Πρόκειται για τη διαφορική εξίσωση που συνδέει το βέλος κάμψεως  $v(x)$  με την καμπτική ροπή  $M(x)$  και είναι πραγματικά μια πολύ σημαντική διαφορική εξίσωση. Παραγωγίζοντάς την (ως προς  $x$  εννοείται) και λαμβάνοντας υπόψη τη βασική σχέση (2.1.27) ( $M'(x) = Q(x)$ ) μεταξύ καμπτικής ροπής  $M(x)$  και τέμνουσας δύναμης  $Q(x)$ , βρίσκουμε αμέσως ότι

$$v'''(x) = \frac{Q(x)}{EI}. \quad (2.1.33)$$

Με ακόμη μία παραγωγή ως προς  $x$  και παίρνοντας υπόψη και τη σχέση (2.1.28) ( $Q'(x) = p(x)$ ), που συνδέει την τέμνουσα δύναμη  $Q(x)$  με την κατανεμημένη κάθετη φόρτιση  $p(x)$ , οδηγούμαστε στη διαφορική εξίσωση

$$EIv''''(x) = p(x), \quad \text{ισοδύναμα} \quad v''''(x) = \frac{p(x)}{EI}. \quad (2.1.34)$$

<sup>5</sup>Οι λέξεις άκαμπος και ακαμψία αναφέρονται σε ένα απόλυτα στερεό σώμα, που δε μπορεί να καμφθεί καθόλου, είναι απαράμορφωτο. Αντίθετα, οι λέξεις δύσκαμπος και δυσκαμψία αναφέρονται σε ένα παραμορφώσιμο στερεό σώμα, όπως η παρούσα συνήθης δόκος, που δεν είναι απόλυτα στερεό και μπορεί επομένως να καμφθεί, παρόλο βέβαια που παρουσιάζει μικρή ή μεγάλη αντίσταση στην κάμψη εξαιτίας της δυσκαμψίας του. Εδώ στην περίπτωση ενός απλού γραμμικού φορέα: της συνήθους δοκού, το μέτρο δυσκαμψίας της δοκού ισούται με το γινόμενο  $EI$ , που για απλότητα καλείται και αυτό δυσκαμψία (αντί μέτρο δυσκαμψίας). Χρησιμοποιείται δηλαδή ο ίδιος όρος: δυσκαμψία τόσο για την ιδιότητα της δυσκαμψίας όσο και το μέτρο της ιδιότητας αυτής, εδώ, στη δοκό, το γινόμενο  $EI$ . Ανάλογα και σε επιφανειακούς φορείς του Πολιτικού Μηχανικού: πλάκες και κελύφη, που παρουσιάζουν και αυτοί δυσκαμψία (με εντελώς διαφορετικά μέτρα δυσκαμψίας φυσικά!), κλπ. Ας σημειωθεί τέλος ότι στην περίπτωση μας η κάμψη της δοκού είναι αυτή που δημιουργεί την ελαστική γραμμή της  $v(x)$ , δηλαδή το σχήμα της, τη μορφή της μετά την παραμόρφωση.

Φυσικά οι παράγωγοι σε όλες αυτές τις διαφορικές εξισώσεις μπορούν κάλλιστα να γραφούν και με το πιο επίσημο σύμβολο  $d$  για τη συνήθη παραγωγή, δηλαδή

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}, \quad \frac{d^3v(x)}{dx^3} = \frac{Q(x)}{EI}, \quad \frac{d^4v(x)}{dx^4} = \frac{p(x)}{EI}. \quad (2.1.35)$$

Εάν παραλείψουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$  (που δηλώνει τη θέση κατά μήκος της δοκού:  $0 \leq x \leq L$ ) στις μεταβλητές των συναρτήσεων  $v = v(x)$ ,  $M = M(x)$ ,  $Q = Q(x)$  και  $p = p(x)$ , οι ίδιες διαφορικές εξισώσεις παίρνουν τις κάπως απλούστερες (αλλ' απόλυτα ισοδύναμες) μορφές τους

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}, \quad \frac{d^3v}{dx^3} = \frac{Q}{EI}, \quad \frac{d^4v}{dx^4} = \frac{p}{EI}. \quad (2.1.36)$$

Αυτό το κάνουμε με την ελπίδα ότι δε θα υπάρξει κάποια παρερμηνεία, π.χ. η παρερμηνεία πως η κατανεμημένη κάθετη φόρτιση  $p = p(x)$  είναι απλά μια σταθερά στην τρίτη από τις διαφορικές αυτές εξισώσεις.

Διαθέτουμε λοιπόν τρεις διαφορικές εξισώσεις για τον προσδιορισμό του βέλους κάμψεως  $v(x)$  σε συνήθη δοκό υπό κάμψη. Ποια θα πρέπει να προτιμήσει ο Πολιτικός Μηχανικός; Η γνώμη του γράφοντα είναι η εξής: εκείνη τη διαφορική εξίσωση της οποίας ξέρει το δεξιό μέλος, δηλαδή: (α) Εάν αρχικά γνωρίζει την καμπτική ροπή (ή ροπή κάμψεως)  $M(x)$  κατά μήκος της δοκού, την πρώτη διαφορική εξίσωση (2.1.32), (β) Εάν αρχικά γνωρίζει την τέμνουσα δύναμη  $Q(x)$ , τη δεύτερη διαφορική εξίσωση (2.1.33), και (γ) Εάν αρχικά γνωρίζει την κάθετη κατανεμημένη φόρτιση  $p(x)$ , την τρίτη διαφορική εξίσωση (2.1.34). Αυτή είναι η γνώμη του γράφοντα και πολλών άλλων.

Υπάρχει ασφαλώς (και είναι και αρκετά δημοφιλής μάλιστα) και η αντίθετη γνώμη, που παροτρύνει τον Πολιτικό Μηχανικό να χρησιμοποιεί πάντοτε την πρώτη από τις τρεις αυτές διαφορικές εξισώσεις, την εξίσωση (2.1.32), γιατί είναι μόλις δευτέρας τάξεως (έναντι τρίτης και τετάρτης των επόμενων δύο αντίστοιχα). Η δεύτερη αυτή δυνατότητα απαιτεί βέβαια τον προσδιορισμό της καμπτικής ροπής  $M(x)$  από την τέμνουσα δύναμη  $Q(x)$  (αν είναι γνωστή) με ολοκλήρωση (αναλυτικά ή και γραφικά). Αν είναι η κατανεμημένη κάθετη φόρτιση  $p(x)$  η αρχικά γνωστή συνάρτηση, απαιτούνται δύο ολοκληρώσεις για τον προσδιορισμό της καμπτικής ροπής  $M(x)$  πριν από την πραγματική χρήση της πρώτης διαφορικής εξισώσεως (2.1.32): αυτής με την καμπτική ροπή  $M(x)$  στο δεξιό μέλος της. Αυτονόητο είναι βέβαια ότι η πρώτη διαφορική εξίσωση από τις (2.1.35) ή (2.1.36) (η διαφορική εξίσωση (2.1.32)) για τον προσδιορισμό του βέλους κάμψεως (της ελαστικής γραμμής)  $v(x)$  απαιτεί τη χρήση δύο συνθηκών (επειδή είναι δευτέρας τάξεως), η δεύτερη τριών συνθηκών (επειδή είναι τρίτης τάξεως) και η τρίτη τεσσάρων συνθηκών, επειδή είναι τετάρτης τάξεως. Οι συνθήκες αυτές είναι απόλυτα αναγκαίες, ώστε να έχουμε τελικά τη ζητούμενη μερική λύση (ή ειδική λύση) στο συγκεκριμένο πρόβλημα συνήθους δοκού που εξετάζουμε, και θα αναφερθούμε εκτενώς σ' αυτές αμέσως πιο κάτω.

Ας σημειωθεί επίσης ότι σε όλες τις πιο πάνω διαφορικές εξισώσεις οι θετικές φορές θεωρήθηκαν προς τα επάνω (δηλαδή χρησιμοποιήθηκε συνηθισμένο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων  $Oxy$ ). Πάρα πολλές φορές όμως σε δοκούς (αλλά και σε πλάκες) ο Πολιτικός Μηχανικός θεωρεί τον άξονα  $Oy$  προς τα κάτω (σε πλάκες τον άξονα  $Oz$ ). Έτσι έχει πιο συχνά θετικά βέλη κάμψεως και επίσης η κατανεμημένη κάθετη φόρτιση  $p(x)$  έχει θετικό πρόσημο, όταν κατευθύνεται προς τα κάτω, όπως και πραγματικά συνήθως συμβαίνει στην πράξη του Πολιτικού Μηχανικού. Ας γίνει κατανοητό ότι σ' αυτές τις περιπτώσεις ορισμένα πρόσημα στις προηγούμενες διαφορικές εξισώσεις αλλάζουν, γίνονται πλην ( $-$ ) αντί συν ( $+$ ). Εδώ τα πράγματα είναι πιο απλά από της μαθηματικής σκοπιάς (δυστυχώς όμως όχι και από της καθαρά τεχνικής σκοπιάς του Πολιτικού Μηχανικού): συνεχώς πρόσημο συν ( $+$ ) και συνηθισμένο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$ , όπως το ξέρουμε στα Μαθηματικά. Αυτό προτιμήθηκε και ίσως να είναι καλύτερα έτσι!



**A2.1.6. Οι συνοριακές συνθήκες στα άκρα της δοκού**

Σχεδόν πάντοτε (και στη Στατική πάντοτε) μια συνήθης δοκός είναι στερεωμένη, ώστε να μη μπορεί να κινηθεί. Εδώ περιοριζόμαστε στην πολύ απλή περίπτωση στηρίξεως της δοκού μόνο στα άκρα της ή με πάκτωση στο ένα άκρο της και με ελεύθερο το άλλο άκρο της. Στην περίπτωση αυτή αναφερθήκαμε ήδη προηγουμένως στην πρώτη Παράγραφο Α2.1.1 τούτης της ενότητας.

Έχουμε επομένως τρεις περιπτώσεις άκρων δοκού (θεωρώντας ενδιάμεσα τη δοκό απόλυτα ελεύθερη), είτε αριστερών είτε δεξιών άκρων στη δοκό, και τις σχετικές συνθήκες, που καλούνται **συνοριακές συνθήκες**, εφόσον αφορούν και στα δύο άκρα (στα «όρια», στα «σύνορα») της δοκού.

1. Άκρο  $x = a$  με πάκτωση (πακτωμένο άκρο), οπότε

$$v(a) = 0 \quad \text{και} \quad \theta(a) = 0 \quad \iff \quad v(a) = 0 \quad \text{και} \quad v'(a) = 0 \quad (2.1.37)$$

εξαιτίας του τύπου (2.1.6):  $\theta(x) = v'(x)$ .

2. Άκρο  $x = a$  με άρθρωση (αρθρωμένο άκρο) ή με κύλιση (κυλιόμενο άκρο), οπότε

$$v(a) = 0 \quad \text{και} \quad M(a) = 0 \quad \iff \quad v(a) = 0 \quad \text{και} \quad v''(a) = 0 \quad (2.1.38)$$

εξαιτίας του τύπου (2.1.32):  $M(x) = EIv''(x)$  με  $EI$  τη δυσκαμψία της δοκού. Ας σημειωθεί εδώ ότι η άρθρωση και η κύλιση είναι ισοδύναμες από απόψεως συνοριακών συνθηκών σε δοκό που κάμπτεται, αλλά χωρίς αξονική φόρτιση.

3. Ελεύθερο άκρο  $x = a$  (άκρο χωρίς καμία στήριξη)

$$M(a) = 0 \quad \text{και} \quad Q(a) = 0 \quad \iff \quad v''(a) = 0 \quad \text{και} \quad v'''(a) = 0 \quad (2.1.39)$$

εξαιτίας και των δύο τύπων (2.1.32):  $M(x) = EIv''(x)$  και (2.1.33):  $Q(x) = EIv'''(x)$ . Εννοείται βέβαια ότι εάν το ένα άκρο  $x = a$  μιας δοκού είναι ελεύθερο, το άλλο άκρο  $x = b$  (με  $b > a$  ή  $b < a$ ) πρέπει να είναι πακτωμένο για ισοστατική δοκό. Μια τέτοια δοκός (με το ένα άκρο πακτωμένο και το άλλο ελεύθερο) καλείται πρόβολος, όπως ήδη αναφέρθηκε στην πρώτη Παράγραφο Α2.1.1 αυτής εδώ της Ενότητας Α2.1.

Αυτές είναι οι συνθήκες: συνοριακές συνθήκες που πρέπει να συνοδεύουν τη βασική διαφορική εξίσωση (2.1.34):  $v''''(x) = p(x)/(EI)$  της κάμψεως συνήθους δοκού κατά την επίλυσή της και στο ένα άκρο της (έστω το  $x = 0$ ) και στο άλλο (έστω το  $x = L$ ). Έχουμε επομένως ένα **πρόβλημα συνοριακών τιμών** που αποτελείται από μία διαφορική εξίσωση και τέσσερις συνοριακές συνθήκες, ανά δύο στο κάθε άκρο της δοκού. Είναι απόλυτα σωστό αυτό, γιατί η διαφορική εξίσωση (2.1.34) είναι τετάρτης τάξεως και επομένως η γενική λύση της περιέχει τέσσερις αυθαίρετες σταθερές  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Άρα απαιτούνται τέσσερις συνθήκες για την επίλυσή της. Θα μπορούσαν να ήσαν τέσσερις αρχικές συνθήκες στο αριστερό άκρο της δοκού (ανάλογα και στο δεξιό). Στην πράξη όμως ο Πολιτικός Μηχανικός έχει διαθέσιμες σε συνήθεις δοκούς τέσσερις συνοριακές συνθήκες (ανά δύο και στα δύο άκρα της δοκού). Αυτές διαφέρουν μάλιστα ανάλογα με τα είδη των δύο στηρίξεων της δοκού στα άκρα της (ή της ελλείψεως στηρίξεως στο ένα από αυτά σε πρόβολο): (α) πάκτωση: συνθήκες (2.1.37) ή (β) άρθρωση ή κύλιση: συνθήκες (2.1.38) ή, τέλος, (γ) ελεύθερο άκρο (χωρίς καμία στήριξη) σε πρόβολο: συνθήκες (2.1.39).

Παραδείγματος χάρη, θεωρούμε έναν πρόβολο μήκους  $L$ , με σταθερή δυσκαμψία  $EI$  καθ' όλο το μήκος του ( $0 \leq x \leq L$ ), με στήριξη στο αριστερό άκρο του  $x = 0$  και επομένως με ελεύθερο το δεξιό άκρο του  $x = L$  και υπό κάθετη κατανεμημένη φόρτιση  $p(x)$ . Τότε η βασική διαφορική εξίσωση της κάμψεως συνήθους δοκού (2.1.34)

$$EIv''''(x) = p(x) \quad \text{με} \quad 0 \leq x \leq L \quad (2.1.40)$$

θα συνοδεύεται από τις εξής τέσσερις συνοριακές συνθήκες:

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v''(L) = 0, \quad v'''(L) = 0. \quad (2.1.41)$$

Οι δύο πρώτες από τις συνθήκες αυτές αναφέρονται στο αριστερό άκρο (στο σημείο πακτώσεως)  $x = 0$  του προβόλου: είναι οι συνθήκες (2.1.37) και εκφράζουν την ανυπαρξία βέλους κάμψεως  $v$  και γωνίας στροφής (ή γωνίας κλίσεως ή στροφής)  $\theta$  στο πακτωμένο αυτό άκρο  $x = 0$ . Στη συνέχεια οι δύο τελευταίες από τις συνθήκες (2.1.41) αναφέρονται στο δεξιό άκρο του προβόλου (στο ελεύθερο άκρο του)  $x = L$ : είναι οι συνθήκες (2.1.39) και εκφράζουν την ανυπαρξία καμπτικής ροπής  $M$  και τέμνουσας δύναμης  $Q$  στο ελεύθερο αυτό άκρο  $x = L$ .

Απαιτούνται πραγματικά τέσσερις συνθήκες είτε αρχικές είτε συνοριακές (εδώ έχουμε διαθέσιμες συνοριακές συνθήκες, όχι αρχικές), επειδή η διαφορική αυτή εξίσωση της κάμψεως (2.1.40) είναι τετάρτης τάξεως. Έχει επομένως τέσσερις προς προσδιορισμό σταθερές  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) στη γενική λύση της. Από τη γενική λύση ο Πολιτικός Μηχανικός επιθυμεί να πάρει τη μερική λύση (ή ειδική λύση) που αντιστοιχεί στις πραγματικές συνοριακές συνθήκες που ισχύουν στα άκρα της δοκού, εδώ στον παρόντα πρόβολο στις συνοριακές συνθήκες (2.1.41). Με κανέναν τρόπο δεν είναι επιθυμητό στην τελική λύση ενός τεχνικού προβλήματος (εν προκειμένω ενός προβλήματος συνήθους προβόλου σε κάμψη) να είναι ακόμη παρούσες αυθαίρετες σταθερές, έστω και μία.

### A2.1.7. Δοκός επί ελαστικής βάσεως

Σε ορισμένες περιπτώσεις (όπως σε επιφανειακές θεμελιώσεις στις Θεμελιώσεις και σε σιδηροτροχιές στη Σιδηροδρομική) μια συνήθης δοκός μήκους  $L$  ( $0 \leq x \leq L$ ) υποστηρίζεται από ελαστική βάση (ή θεμελίωση, ισοδύναμα θεμέλιο, όπως είναι το έδαφος σε μια επιφανειακή θεμελίωση). Στις περιπτώσεις αυτές μιλάμε για **δοκό επί ελαστικής βάσεως (beam on elastic foundation)**, που παρουσιάζει και αυτή αρκετό ενδιαφέρον στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Ειδικότερα στις Θεμελιώσεις μιλάμε για **πεδιλοδοκό** (ή σπάνια για **θεμελιοδοκό**, που είναι ισοδύναμος όρος).

Η θεωρία για τη δοκό επί ελαστικής βάσεως βασίζεται και σήμερα συνήθως στην κλασική **υπόθεση του Winkler** (1867). Σύμφωνα με την υπόθεση αυτή σε μια δοκό επί ελαστικής βάσεως η αντίδραση της βάσεως (συνήθως του εδάφους) σε κάθε σημείο  $x$  της ελαστικής γραμμής της παραμορφωθείσας δοκού (λόγω της κάμψεώς της εξαιτίας της κάθετης φορτίσεώς της  $p(x)$ ) είναι ανάλογη του βέλους κάμψεως  $v(x)$  στο σημείο αυτό. Επομένως στην παρούσα περίπτωση δοκού η θεμελιώδης διαφορική εξίσωση της κάμψεως συνήθους δοκού (2.1.34) τροποποιείται στη μορφή

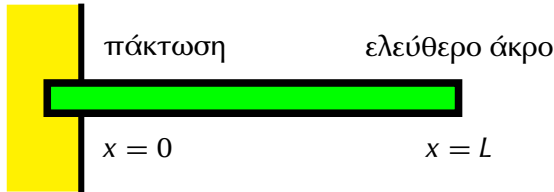
$$v''''(x) = \frac{p(x) - kv(x)}{EI} \iff EIv''''(x) + kv(x) = p(x) \quad \text{με} \quad 0 \leq x \leq L. \quad (2.1.42)$$

Ο νέος όρος στη διαφορική αυτή εξίσωση (που παραμένει γραμμική και τετάρτης τάξεως) είναι ο όρος  $kv(x)$  της αντιδράσεως της ελαστικής βάσεως (συνήθως του εδάφους). Είναι και αυτή μια κατανομημένη κάθετη φόρτιση πάνω στη δοκό (στην κάτω πλευρά της φυσικά) όπως και η κατανομημένη φόρτιση  $p(x)$  (στην πάνω πλευρά της). Η σταθερά αναλογίας  $k$  είναι σταθερά του εδάφους, που εξαρτάται από τις ιδιότητές του. Είναι επίσης ανάλογη προς το πάχος  $b$  της δοκού.

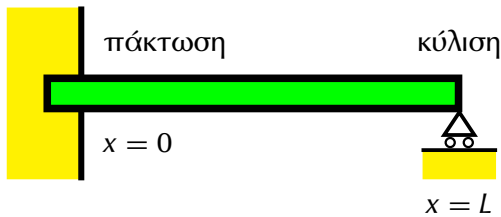
Η υπόθεση του Winkler είναι μια απλή υπόθεση που μοντελοποιεί την ελαστική βάση σαν ένα συνεχές σύνολο ελατηρίων, κάτι που δεν είναι βέβαια απόλυτα ακριβές σύμφωνα με τη Θεωρία της Ελαστικότητας. Είναι εντούτοις επαρκώς ακριβές για τον Πολιτικό Μηχανικό.<sup>6</sup> Επομένως η διαφορική εξίσωση (2.1.42) είναι αυτή που χρησιμοποιείται σχεδόν πάντοτε στην πράξη. Μερικές φορές βέβαια είναι δυνατόν η δοκός να μην εφάπτεται σε ορισμένα τμήματά της επί της ελαστικής βάσεως εξαιτίας της φορτίσεώς της  $p(x)$  (ίσως κάπου προς τα επάνω, όχι προς την ελαστική

<sup>6</sup>Με τον τρόπο αυτό το έδαφος δε θεωρείται συνεχές μέσον (ενώ είναι!), αλλ' απλά ένα σύνολο (σύστημα) κατακόρυφων ελατηρίων παράλληλων το ένα στο άλλο που δεν αλληλοεπηρεάζονται. Εντούτοις η προσέγγιση αυτή του Winkler (η υπόθεση του Winkler, όπως συνήθως λέγεται) δίνει αρκετά καλά αποτελέσματα στην πράξη και σπάνια απαιτείται η χρήση των ακριβών εξισώσεων της Θεωρίας της Ελαστικότητας σε προβλήματα δοκών επί ελαστικής βάσεως.

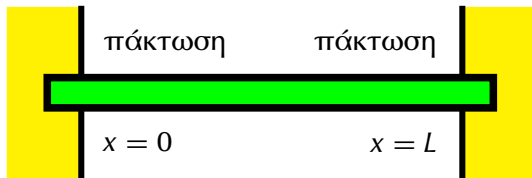
βάση). Σε τέτοιες περιπτώσεις ειδικά στα τμήματα αυτά δεν υπάρχει βέβαια αντίδραση  $kv(x)$  της ελαστικής βάσεως που να ασκείται πάνω στη δοκό. Τότε ο σχετικός όρος  $kv(x)$  πρέπει να παραλείπεται στα τμήματα αυτά. Ας τονισθεί τέλος ότι σε δοκό επί ελαστικής βάσεως λόγω της υποστηρίξεως της δοκού από την ελαστική βάση μπορούν ακόμη και τα δύο άκρα της δοκού να είναι ελεύθερα. Βέβαια τούτο δεν είναι αποδεκτό στη Στατική για δοκό χωρίς την ελαστική βάση.



**Σχήμα A2.1: Πρόβολος.** Συνοριακές συνθήκες:  $v(0) = 0, \theta(0) = 0, M(L) = 0, Q(L) = 0$ , ισοδύναμα:  $v(0) = 0, v'(0) = 0, v''(L) = 0, v'''(L) = 0$ .



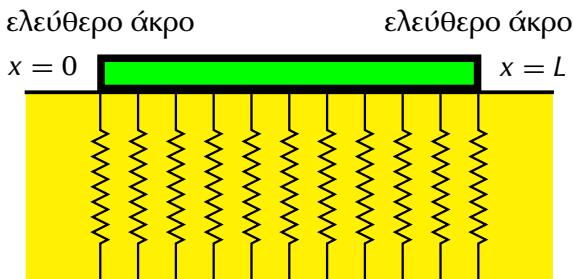
**Σχήμα A2.2: Μονόπακτη υπερστατική δοκός.** Συνοριακές συνθήκες:  $v(0) = 0, \theta(0) = 0, v(L) = 0, M(L) = 0$ , ισοδύναμα:  $v(0) = 0, v'(0) = 0, v(L) = 0, v''(L) = 0$ .



**Σχήμα A2.3: Αμφίπακτη δοκός.** Συνοριακές συνθήκες:  $v(0) = 0, \theta(0) = 0, v(L) = 0, \theta(L) = 0$ , ισοδύναμα:  $v(0) = 0, v'(0) = 0, v(L) = 0, v'(L) = 0$ .



**Σχήμα A2.4: Αμφιέρειστη δοκός.** Συνοριακές συνθήκες:  $v(0) = 0, M(0) = 0, v(L) = 0, M(L) = 0$ , ισοδύναμα:  $v(0) = 0, v''(0) = 0, v(L) = 0, v''(L) = 0$ . (Οι συνοριακές αυτές συνθήκες δεν αλλάζουν ακόμη κι αν η άρθρωση είναι δεξιά και η κύλιση αριστερά.)

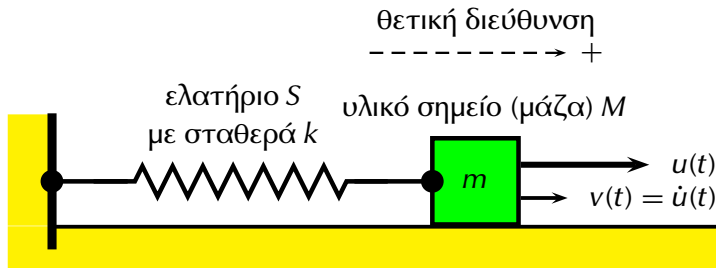


**Σχήμα A2.5: Δοκός επί ελαστικής βάσεως** με την ισχύ της υποθέσεως του Winkler (ελατήρια) και με ελεύθερα και τα δύο άκρα της. Συνοριακές συνθήκες:  $M(0) = 0, Q(0) = 0, M(L) = 0, Q(L) = 0$ , ισοδύναμα:  $v''(0) = 0, v'''(0) = 0, v''(L) = 0, v'''(L) = 0$ . (Πολύ συχνά η ελαστική βάση είναι το ίδιο το έδαφος.)

Στα πιο πάνω σχήματα παρουσιάζουμε ορισμένες συνήθεις δοκούς: (α) Πρόβολο: Σχήμα A2.1, (β) Μονόπακτη υπερστατική δοκό: Σχήμα A2.2, (γ) Αμφίπακτη δοκό: Σχήμα A2.3 και (δ) Αμφιέρειστη δοκό: Σχήμα A2.4 αναφέροντας και τις τέσσερις συνοριακές συνθήκες στα δύο άκρα τους. Επίσης μια δοκό επί ελαστικής βάσεως με ελεύθερα και τα δύο άκρα της: Σχήμα A2.5. Σημειώνουμε ότι αυτό είναι γενικά δυνατόν (όχι όμως πάντοτε), επειδή μια δοκός επί ελαστικής βάσεως στηρίζεται στην ελαστική βάση (π.χ. στο έδαφος). Επομένως δεν έχει ανάγκη επιπλέον στηρίξεων.

## Α2.2. ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ: ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗ ΘΕΩΡΗΣΗ ΤΩΝ ΕΛΕΥΘΕΡΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

Θεωρούμε **μονοβάθμιο** (με ένα μόνο βαθμό ελευθερίας) **μηχανικό σύστημα** υλικού σημείου  $M$  (μάζας  $m$ ) και ελατηρίου  $S$  (γραμμικά ελαστικού και σταθεράς  $k$ ) χωρίς απόσβεση και σε **ελεύθερες ταλαντώσεις** (χωρίς εξωτερική φόρτιση): Σχήμα Α2.6. Ενδιαφερόμαστε για την κίνηση του υλικού σημείου  $M$ , συγκεκριμένα για τη μετατόπισή του  $u = u(t)$  ως προς τη θέση ισορροπίας του  $u = 0$ .



**Σχήμα Α2.6:** Μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου  $M$  (μάζας  $m$ ) και ελατηρίου  $S$  (γραμμικά ελαστικού και με σταθερά  $k$ ) σε ελεύθερες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση. (Δεν υπάρχουν καθόλου τριβές!) Άγνωστη είναι η μετατόπιση  $u(t)$  του υλικού σημείου  $M$  ως προς τη θέση ισορροπίας του.

Ήδη από την πρώτη Ενότητα Α1.1 του διδακτικού αυτού βιβλίου έχουμε αναφερθεί στη διαφορική εξίσωση των ταλαντώσεων. Εδώ τη γράφουμε στη μορφή της (1.3.35), που αφορά σε ελεύθερες ταλαντώσεις

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0. \quad (2.2.1)$$

Η διαφορική αυτή εξίσωση μπορεί βέβαια να προκύψει από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. Όμως στην ενότητα αυτή την προσδιορίζουμε εναλλακτικά με τη χρήση ενεργειακής μεθόδου. Ξεκινάμε!

Κατά την κίνηση του υλικού σημείου  $M$  αυτό έχει ταχύτητα  $v = v(t)$  και **κινητική ενέργεια**

$$T = \frac{1}{2}mv^2. \quad (2.2.2)$$

Επίσης το ελατήριο «περικλείει» (εξαιτίας της παραμορφώσεώς του) **δυναμική ενέργεια** ελαστικής παραμορφώσεως  $V$ . Στη Μηχανική των Υλικών αποδεικνύεται ότι αυτή δίνεται από τον τύπο

$$V = \frac{1}{2}ku^2. \quad (2.2.3)$$

Έχουμε όμως υποθέσει ότι δεν υπάρχει απόσβεση (δεν υπάρχει αποσβεστήρας) και επίσης ότι το ελατήριο έχει μόνο **ελαστική παραμόρφωση** (όχι και **πλαστική παραμόρφωση**). Άρα δεν υπάρχουν τριβές ούτε κι απώλεια ενέργειας λόγω πλαστικότητας στο ελατήριο. Επομένως η συνολική ενέργεια  $E = T + V$  του παρόντος μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος υλικού σημείου-ελατηρίου (ή μάζας-ελατηρίου, όπως αυτό αποκαλείται πολύ συχνότερα) θα είναι σταθερή. Κατά συνέπεια

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ku^2 = \frac{1}{2}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}ku^2 = \text{σταθερά}, \quad (2.2.4)$$

αφού η ταχύτητα  $v = v(t)$  είναι η πρώτη παράγωγος της μετατόπισεως  $u = u(t)$ , δηλαδή  $v = \dot{u}$  ή  $v(t) = \dot{u}(t)$ . Άρα καταλήξαμε στην εξής διαφορική εξίσωση των ελεύθερων ταλαντώσεων χωρίς απόσβεση:

$$\frac{1}{2}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}ku^2 = E \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad m\dot{u}^2(t) + ku^2(t) = 2E, \quad (2.2.5)$$

εάν προτιμάμε τη δεύτερη γραφή. Είναι μια μη γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως και δευτέρου βαθμού, γιατί είναι πολυωνυμικής μορφής με την παράγωγο  $\dot{u}$  υψωμένη στο τετράγωνο.

Εάν όμως δε μας πολυαρέσει που δεν είναι γραμμική (καθόλου απίθανο αυτό!), μπορούμε εδώ να τη μετασχηματίσουμε σε γραμμική με παραγώγισή της ως προς το χρόνο  $t$ . Προκύπτει εύκολα

$$m\dot{u}(t)\ddot{u}(t) + ku(t)\dot{u}(t) = 0 \quad \text{και με παραγοντοποίηση} \quad \dot{u}(t)[m\ddot{u}(t) + ku(t)] = 0. \quad (2.2.6)$$

Αυτά ισχύουν, επειδή η συνολική ενέργεια  $E$  είναι σταθερή. Τελικά, αφού υποθέσαμε ότι υπάρχει ταλάντωση, δε μπορεί να είναι  $\dot{u}(t) = 0$ , δηλαδή το υλικό σημείο  $M$  δε μπορεί να είναι ακίνητο. Επομένως πρέπει ο δεύτερος παράγοντας  $m\ddot{u}(t) + ku(t)$  να ισούται με μηδέν. Συνεπώς προέκυψε η διαφορική εξίσωση (2.2.1) με ενεργειακό τρόπο: διατήρηση της συνολικής ενέργειας  $E = T + V$ .

Το κέρδος μας είναι ότι έχουμε τώρα μια απλή ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση και μάλιστα με σταθερούς συντελεστές  $m$  και  $k$ : τη διαφορική εξίσωση (2.2.1). Έχουμε επίσης «απαλλαγεί» από τη συνολική ενέργεια (εδώ υπάρχει μόνο μηχανική ενέργεια)  $E = T + V$  στο δεξιό μέλος της μη γραμμικής διαφορικής εξισώσεως (2.2.5), η οποία μπορεί να μη μας είναι απ' την αρχή γνωστή. Αλλ' από την άλλη πλευρά είχαμε μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως: τη (2.2.5) και δυστυχώς οδηγηθήκαμε τώρα σε μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξεως: τη (2.2.1). Πολύ συχνά (αν κι όχι πάντα!) αυτό συμβαίνει: το «κέρδος» έχει κάποιο «κόστος», π.χ. η μόρφωση μελέτη. Τί να κάνουμε;

Ας σημειώσουμε επίσης ότι η μη γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερου βαθμού (2.2.5) γράφεται και στην ισοδύναμη **λυμένη** μορφή (εδώ ως προς  $\dot{u} \equiv du/dt$ : την παράγωγο ανωτέρας τάξεως)

$$\frac{du}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2E - ku^2}{m}} \quad \text{και παραπέρα} \quad \sqrt{m} \frac{du}{\sqrt{2E - ku^2}} = \pm dt. \quad (2.2.7)$$

Στο επόμενο Κεφάλαιο Α3, συγκεκριμένα στην Ενότητα Α3.2 θα μάθουμε πως η διαφορική αυτή εξίσωση πρώτης τάξεως είναι χωριζόμενων μεταβλητών. Επομένως μπορεί να λυθεί αρκετά εύκολα με ολοκληρώσεις αριστερά: ως προς  $u$  και δεξιά: ως προς  $t$ . Εντούτοις ο υποψήφιος λύτης θα πρέπει να θυμηθεί στην Ενότητα Α3.2 τον ένα ή τον άλλο από τους δύο παραπλήσιους τύπους

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C_1 \quad \text{ή} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\cos^{-1} \frac{x}{a} + C_2 \quad (2.2.8)$$

με  $\sin^{-1} y \equiv \arcsin y$ ,  $\cos^{-1} y \equiv \arccos y$  και τα  $C_1$  και  $C_2$  δύο αυθαίρετες σταθερές ολοκληρώσεως.

► **Παρατήρηση Α2.1:** Πέρα από την πιο πάνω μετατροπή της «ενεργειακής» διαφορικής εξισώσεως (2.2.5) στην πιο «Νευτώνεια» διαφορική εξίσωση (2.2.1) ισχύει φυσικά και το αντίστροφο. Συγκεκριμένα, πολλαπλασιάζοντας τη διαφορική εξίσωση (2.2.1) επί  $\dot{u}(t)$ , εξίσωση (2.2.6), και ολοκληρώνοντας έπειτα ως προς  $t$ , καταλήγουμε στη διαφορική εξίσωση (2.2.5) με  $E$  τη σταθερά ολοκληρώσεως. Δηλαδή με μια ελεύθερη διατύπωση ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα και η αρχή διατηρήσεως της ενεργείας οδηγούν στο παρόν πρόβλημα σε ισοδύναμες διαφορικές εξισώσεις.  $E$ , αλλιώς δε μπορεί, θα είχαμε κάνει (*υπερσυντέλικος ... , ευτυχώς δεν κάναμε*) κάπου λάθος!

### Α2.3. ΘΕΜΕΛΙΩΣΕΙΣ: ΑΞΟΝΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ ΠΑΣΣΑΛΟΥ

Σ' αυτήν την εφαρμογή θεωρούμε το πρόβλημα γραμμικά ελαστικού πασσάλου μήκους  $L$  μέσα στο έδαφος, όπως φαίνεται στο Σχήμα Α2.7: με  $0 \leq z \leq L$ . Ο πάσσαλος χρησιμεύει για τη θεμελίωση κατασκευής και δέχεται αξονικό θλιπτικό φορτίο  $P_0$  ( $P_0 > 0$ ) στο πάνω άκρο του  $z = 0$ , που συμπίπτει με την επιφάνεια του εδάφους. Στόχο μας αποτελεί η εύρεση της σχετικής διαφορικής εξισώσεως ως προς την αξονική (τη διαμήκη) μετατόπιση  $w = w(z)$  (με  $0 \leq z \leq L$ ) των σημείων του πασσάλου. Το πρόβλημα θεωρείται εδώ στατικό (όχι δυναμικό): ανεξάρτητο από το χρόνο  $t$ . Επίσης για διευκόλυνση στους υπολογισμούς θεωρούμε τον πάσσαλο κυλινδρικό με ακτίνα  $a$ .<sup>7</sup>

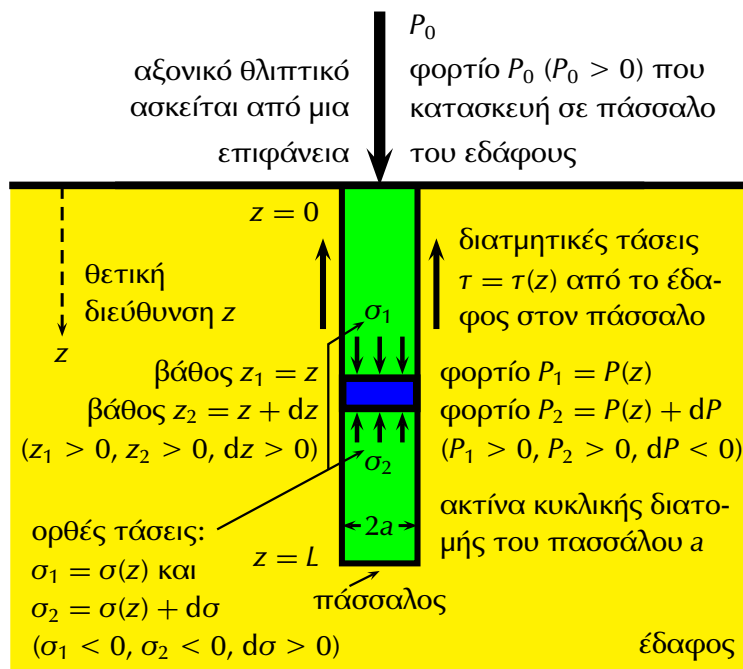
Για το σχηματισμό της διαφορικής εξισώσεως που προαναφέραμε θεωρούμε τον τρόπο που το έδαφος θα «απορροφήσει» βαθμιαία (καθώς μεγαλώνει το βάθος  $z$ ) το θλιπτικό φορτίο  $P_0$  στο πάνω άκρο του πασσάλου  $z = 0$  στην επιφάνεια του εδάφους. Πρόκειται απλά για ένα πρόβλημα στατικής ισορροπίας. Η αντίδραση του εδάφους παρουσιάζεται κυρίως με τις διατμητικές τάσεις  $\tau$  (δυνάμεις ανά μονάδα επιφανείας). Αυτές αναπτύσσονται ανάμεσα στον πάσσαλο και στο

<sup>7</sup>Το κλασικό αυτό πρόβλημα πασσάλου αναφέρεται στο ενδιαφέρον πρόσφατο σύγγραμμα: Muir Wood, D. (2004), *Geotechnical Modelling* (Applied Geotechnics: Volume 1), 1η έκδοση. Spon Press, London, Παράγραφος 8.2.3, σσ. 396-398.

εδάφος στην παράπλευρη κυλινδρική επιφάνεια του πασσάλου και παράλληλα μ' αυτήν (κατά την κατεύθυνση του άξονα Oz): Σχήμα Α2.7. Για τις διατμητικές αυτές τάσεις  $\tau$  ισχύει ο τύπος

$$\tau = kG_s \frac{w}{a} \quad \text{με} \quad \tau = \tau(z) \quad \text{και} \quad w = w(z) \quad (2.3.1)$$

τη μετατόπιση των σημείων του πασσάλου κατά μήκος του κατακόρυφου άξονα  $z$  προς τα κάτω: αξονική μετατόπιση. Στον τύπο αυτό το  $k$  δηλώνει μια σταθερά (έχει βρεθεί ότι  $k \approx \frac{1}{4}$ ), το  $G_s$  το μέτρο διατμήσεως του εδάφους (soil) και το  $a$ , όπως προαναφέραμε, την ακτίνα της κυκλικής διατομής του κυλινδρικού πασσάλου, που είναι σταθερή. (Εδώ κάνουμε την παραδοχή ότι το μέτρο διατμήσεως  $G_s$  του εδάφους παραμένει σταθερό ακόμη και κοντά στον πάσσαλο. Αυτό όμως δεν είναι απόλυτα ακριβές: στην πραγματικότητα ο πάσσαλος επηρεάζει τις ιδιότητες του εδάφους.)



**Σχήμα Α2.7:** Αξονική θλιπτική φόρτιση  $P_0$  κυλινδρικού πασσάλου εντός του εδάφους από κατασκευή που έχει θεμελιωθεί με πασσάλους. Το μήκος του πασσάλου είναι  $L$  και η ακτίνα της κυκλικής διατομής του  $a$ . Για μεγάλο μήκος  $L$  του πασσάλου η αξονική θλιπτική φόρτιση  $P_0$  εξισορροπείται κυρίως από τις αναπτυσσόμενες διατμητικές τάσεις  $\tau = \tau(z)$ , που ασκεί το έδαφος στον πάσσαλο. Στον πάσσαλο αναπτύσσονται επίσης (εσωτερικά) και θλιπτικές ορθές τάσεις  $\sigma = \sigma(z)$  με μέτρο το οποίο μειώνεται με το βάθος  $z$  εντός του εδάφους.

Θεωρούμε τώρα ένα στοιχειώδη κύλινδρο στον πάσσαλο απειροστού ύψους  $dz$  και φυσικά ακτίνας  $a$ . Η διατμητική τάση  $\tau = \tau(z)$  δίνεται βέβαια από τον παραπάνω τύπο (2.3.1) και έχει διεύθυνση προς τα πάνω: αντιστέκεται στο θλιπτικό φορτίο  $P_0$ , προσπαθεί να το ισορροπήσει. Αλλ' η παράπλευρη επιφάνεια του στοιχειώδους κυλίνδρου μας είναι  $dS = 2\pi a dz$ . Άρα η σχετική δύναμη  $dF$  από την αντίδραση του εδάφους (μέσω της διατμητικής τάσεως  $\tau$ ) στο θλιπτικό φορτίο  $P_0$  θα είναι

$$dF = -\tau dS = -kG_s \frac{w(z)}{a} (2\pi a dz) = -2\pi k G_s w(z) dz \quad (2.3.2)$$

έχοντας λάβει υπόψη και τον τύπο (2.3.1). Το πρόσημο πλην αναφέρεται στο ότι έχουμε επιλέξει τη θετική διεύθυνση προς τα κάτω, Σχήμα Α2.7, ενώ η στοιχειώδης δύναμη  $dF$  είναι προς τα πάνω.

Ας δούμε τώρα τί γίνεται στην πάνω κυκλική βάση  $z$  και στην κάτω κυκλική βάση  $z + dz$  του στοιχειώδους κυλίνδρου του Σχήματος Α2.7. Στην πάνω βάση  $z$  ασκείται το θλιπτικό φορτίο  $P(z)$  (προς τα κάτω). Στην κάτω βάση  $z + dz$  ασκείται το θλιπτικό φορτίο  $P(z) + dP$  (εδώ προς τα πάνω στο στοιχειώδη κύλινδρο βάσει της αρχής δράσεως και αντίδρασεως) με  $dP$  τη μεταβολή (μείωση) του θλιπτικού φορτίου  $P = P(z)$ . Τώρα από την ισορροπία κατά τον άξονα  $z$  θα έχουμε τελικά

$$P(z) + dF - [P(z) + dP] = 0, \quad \text{οπότε} \quad dP = dF = -2\pi k G_s w(z) dz \quad \text{ή} \quad \frac{dP}{dz} = -2\pi k G_s w(z) \quad (2.3.3)$$

φυσικά με τη χρήση και του αποτελέσματος (2.3.2) στη μεσαία σχέση του τύπου αυτού (2.3.3).

Για να σχηματίσουμε τη διαφορική εξίσωση, χρειαζόμαστε στο σημείο αυτό και μερικά στοιχεία από τη Μηχανική των Υλικών. Έχουμε ήδη υποθέσει τον πάσσαλο ότι είναι ελαστικός και κυλινδρικός ακτίνας  $a$ . Το εμβαδόν της διατομής του είναι  $A = \pi a^2$ . Η **ορθή τάση**  $\sigma_z$ , δύναμη δια επιφάνειας, είναι βέβαια εδώ αρνητική εξαιτίας του θλιπτικού φορτίου  $P = P(z)$  και δίνεται από τον τύπο

$$\sigma_z = -\frac{P}{A} = -\frac{P}{\pi a^2} \quad \text{και ισοδύναμα} \quad \sigma_z(z) = -\frac{P(z)}{\pi a^2}, \quad \text{γιατί} \quad \sigma_z = \sigma_z(z) \quad \text{και} \quad P = P(z). \quad (2.3.4)$$

Αφού όμως ο πάσσαλος έχει υποθεθεί γραμμικά ελαστικός, ισχύει ο θεμελιώδης **νόμος του Hooke**

$$\sigma_z = E_p \varepsilon_z \quad \text{με} \quad \sigma_z = \sigma_z(z) \quad \text{την τάση,} \quad \varepsilon_z = \varepsilon_z(z) := \frac{dw}{dz} \quad \text{την αντίστοιχη} \quad \text{παραμόρφωση} \quad (2.3.5)$$

(ορισμός της παραμορφώσεως  $\varepsilon_z$ ) και  $E_p$  το **μέτρο ελαστικότητας** (ή **μέτρο του Young**) του πασσάλου (pile) που εξετάζουμε. (Αυτό είναι ένα χαρακτηριστικό μέγεθος του ελαστικού υλικού του.)

Αντικαθιστούμε τώρα στο νόμο του Hooke  $\sigma_z = E_p \varepsilon_z$ , πρώτη σχέση (2.3.5), την τάση  $\sigma_z$  από τη σχέση (2.3.4) και την παραμόρφωση  $\varepsilon_z$  από τη δεξιά σχέση (2.3.5). Έτσι παίρνουμε

$$\sigma_z = E_p \varepsilon_z \implies -\frac{P}{\pi a^2} = E_p \frac{dw}{dz} \quad \text{και με παραγωγή ως προς } z \quad \frac{d^2 w}{dz^2} = -\frac{1}{\pi a^2 E_p} \frac{dP}{dz}. \quad (2.3.6)$$

Τώρα αρκεί να αντικαταστήσουμε την παράγωγο  $dP/dz$  από την τελευταία σχέση (2.3.3). Με τον τρόπο αυτό προκύπτει η διαφορική εξίσωση για τον πάσσαλο που ζητούσαμε να σχηματίσουμε:

$$\frac{d^2 w(z)}{dz^2} = \frac{2kG_s}{a^2 E_p} w(z) \quad \text{και ισοδύναμα} \quad \frac{d^2 w(z)}{dz^2} = \eta^2 w(z) \quad \text{ή} \quad \frac{d^2 w}{dz^2} = \eta^2 w \quad \text{με} \quad \eta := \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2kG_s}{E_p}}. \quad (2.3.7)$$

Πρόκειται βέβαια για μια ομογενή γραμμική συνήθη διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως με δύο σταθερούς συντελεστές: τους 1 και  $\eta^2$ . Για τη λύση της θα επανέλθουμε στην Ενότητα Α8.2 του Κεφαλαίου Α8, αφού θα έχουμε μάθει να λύνουμε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις: Κεφάλαιο Α5.

#### Α2.4. ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ: ΡΟΗ ΝΕΥΤΩΝΕΙΟΥ ΡΕΥΣΤΟΥ ΣΕ ΣΩΛΗΝΑ

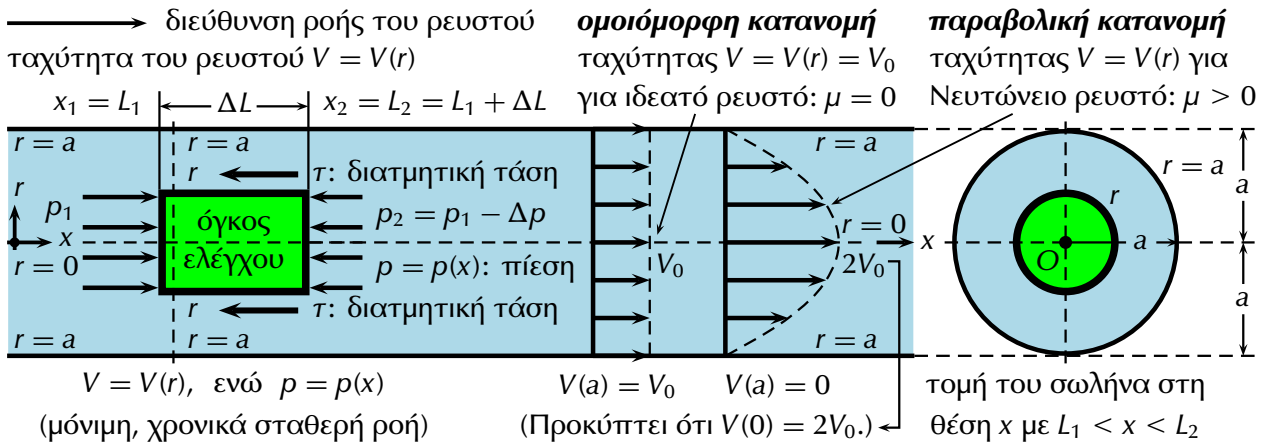
Στην ενότητα αυτή θεωρούμε τη μόνιμη (σταθερή) ροή **Νευτώνειου ρευστού** σε οριζόντιο σωλήνα σταθερής κυκλικής διατομής ακτίνας  $a$  κατά μήκος του άξονα  $x$ . Ένα Νευτώνειο ρευστό έχει **συνεκτικότητα** (ή **ιξώδες**)  $\mu$ . Νευτώνειο ρευστό καλείται το ρευστό όπου αναπτύσσονται **διατμητικές τάσεις**  $\tau$  με βάση το νόμο του Νεύτωνα για τη συνεκτικότητα. Σύμφωνα με το νόμο αυτό

$$\tau = \mu \frac{dv(y)}{dy} : \quad \text{νόμος του Νεύτωνα για τη συνεκτικότητα (το ιξώδες)} \quad (2.4.1)$$

για ροή ρευστού κατά μήκος του άξονα  $x$  μεταξύ δύο πλακών σε απόσταση  $y = d$  με ταχύτητα  $V = V(y)$ . Σημειώνουμε ότι αντίθετα με τα **Νευτώνεια ρευστά**, που έχουν συνεκτικότητα:  $\mu > 0$  (όπως είναι ο αέρας και το νερό), τα **ιδεατά ρευστά** δεν έχουν συνεκτικότητα:  $\mu = 0$ . Έτσι δεν αναπτύσσονται διατμητικές τάσεις  $\tau$ . Τα Νευτώνεια ρευστά τα θεωρούμε εδώ και **ασυμπύεστα**: με πυκνότητα  $\rho = \text{σταθερά}$ . Τούτο ισχύει έτσι κι αλλιώς για τα ιδεατά ρευστά (από τον ορισμό τους).

Στην παρούσα εφαρμογή θεωρούμε μόνιμη (σταθερή) ροή σε έναν οριζόντιο σωλήνα κυκλικής διατομής ακτίνας  $a$  (Σχήμα Α2.8 στην επόμενη σελίδα). Τη ροή την υποθέτουμε **στρωτή**, δηλαδή οι **γραμμές ροής** του ρευστού είναι όλες παράλληλες μεταξύ τους και με τον άξονα  $x$  του σωλήνα.

Εάν το ρευστό ήταν ιδεατό, τότε δε θα είχε συνεκτικότητα (ή ιξώδες):  $\mu = 0$ . Άρα δε θα αναπτύσσονταν διατμητικές τάσεις  $\tau$  σύμφωνα με το νόμο του Νεύτωνα για τη συνεκτικότητα (2.4.1). Επίσης θα λάμβανε χώρα **ομοιόμορφη ροή** του ρευστού με ταχύτητα  $V = V(r) = V_0 = \text{σταθερά}$ , ανεξάρτητη από την πολική ακτίνα  $r$  με  $0 \leq r \leq a$ , δηλαδή σε ολόκληρη την κυκλική διατομή του σωλήνα. Τούτο το δείχνουμε επίσης στο Σχήμα Α2.8 στην επόμενη σελίδα. Εδώ όμως υποθέσαμε ασυμπύεστο Νευτώνειο ρευστό και μόνιμη (σταθερή) στρωτή ροή στον κυλινδρικό σωλήνα. Επομένως η ταχύτητα  $V$  του ρευστού θα είναι συνάρτηση μόνο της πολικής ακτίνας  $r$ , δηλαδή  $V = V(r)$ .



**Σχήμα Α2.8:** Μόνιμη (σταθερή) ροή σε οριζόντιο σωλήνα ακτίνας  $a$  ( $0 \leq r \leq a$ ). Σαν όγκο ελέγχου λαμβάνεται ο κύλινδρος  $L_1 \leq x \leq L_2$  ακτίνας  $r$  ( $0 < r < a$ ). Δεξιά φαίνεται η κάθετη τομή στην περιοχή του όγκου ελέγχου. Για Νευτώνειο ρευστό η κατανομή ταχύτητας είναι παραβολική.

Για τη μόνιμη ροή Νευτώνειου ρευστού που υποθέσαμε (με συνεκτικότητα, ιξώδες  $\mu > 0$ ) θα προσδιορίσουμε την κατανομή της ταχύτητάς του  $V = V(r)$  στην κυκλική διατομή του σωλήνα μας (Σχήμα Α2.8), που είναι χρονικά σταθερή. Προς το σκοπό αυτό θεωρούμε έναν κυλινδρικό **όγκο ελέγχου** μήκους  $\Delta L$  και ακτίνας  $r$  (Σχήμα Α2.8) και εξετάζουμε την ισορροπία των δυνάμεων στον όγκο αυτό. Στην αριστερή βάση  $x_1 = L_1$  (με εμβαδόν  $A_1 = \pi r^2$ ) του όγκου ελέγχου έχουμε δύναμη  $F_1 = p_1(\pi r^2)$  (προς τα δεξιά). Αυτή οφείλεται στην πίεση  $p_1$  του ρευστού στη θέση  $x_1 = L_1$ . Ανάλογα στη δεξιά βάση  $x_2 = L_2$  του ίδιου όγκου ελέγχου έχουμε δύναμη  $F_2 = -p_2(\pi r^2)$  (προς τα αριστερά). Αυτή οφείλεται στην πίεση  $p_2$  του ρευστού στη θέση  $x_2 = L_2$ . (Αποδεικνύεται ότι  $p = p(x)$  μόνο.)

Τέλος, επειδή το Νευτώνειο ρευστό έχει συνεκτικότητα (ιξώδες):  $\mu > 0$ , ασκούνται και διατμητικές τάσεις  $\tau$  μεταξύ των «στρωμάτων» του ρευστού. Συγκεκριμένα στον κυλινδρικό όγκο ελέγχου μας ασκούνται διατμητικές τάσεις  $\tau = \tau(r)$  από το ρευστό έξω από τον όγκο ελέγχου στο ρευστό μέσα στον όγκο ελέγχου (και αντίστροφα φυσικά: δράση-αντίδραση). Η παράπλευρη επιφάνεια του όγκου ελέγχου είναι  $\Delta S = (2\pi r)\Delta L$  (εδώ βέβαια ύψος είναι το μήκος  $\Delta L$ ). Επίσης οι διατμητικές αυτές τάσεις  $\tau$  δίνονται από το νόμο του Νεύτωνα για Νευτώνεια ρευστά, σχέση (2.4.1) και εδώ

$$\tau = \mu \frac{dV(r)}{dr} \quad (\text{εδώ } \tau < 0), \quad \text{οπότε } F_\tau = \tau \Delta S = \mu \frac{dV(r)}{dr} (2\pi r)\Delta L = 2\pi\mu r \Delta L \frac{dV(r)}{dr} \quad (\text{εδώ } F_\tau < 0) \quad (2.4.2)$$

για τη συνολική **διατμητική δύναμη**  $F_\tau$  (ή  $Q_\tau$ ) στην παράπλευρη επιφάνεια  $\Delta S$  του όγκου ελέγχου.

Αλλ' έχουμε υποθέσει μόνιμη ροή. Άρα δεν υπάρχει καμία επιτάχυνση και επομένως οι τρεις δυνάμεις  $F_1$ ,  $F_2$  και  $F_\tau$  που ασκούνται πάνω στον όγκο ελέγχου πρέπει να ισορροπούν. Συνεπώς

$$F_1 + F_2 + F_\tau = 0 \implies p_1(\pi r^2) - p_2(\pi r^2) + 2\pi\mu r \Delta L \frac{dV(r)}{dr} = 0 \implies \frac{dV(r)}{dr} = -\frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{\Delta L} r \quad (2.4.3)$$

με  $\Delta p := p_1 - p_2 > 0$  (**πτώση πίεσεως**) και  $\Delta L := L_2 - L_1 > 0$  (μήκος του όγκου ελέγχου).

Καταλήξαμε λοιπόν σε μια πάρα πολύ εύκολη γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως ως προς την άγνωστη κατανομή ταχύτητας  $V = V(r)$ . Μπορούμε να κάνουμε άμεση ολοκλήρωση για την επίλυσή της, όπως θα δούμε και λίγο παρακάτω στην Ενότητα Α3.1 του Κεφαλαίου Α3. Επομένως εδώ απλά ολοκληρώνουμε τη σχέση (2.4.3) ως προς την πολική ακτίνα  $r$ . Έτσι βρίσκουμε

$$V(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{\Delta L} r^2 + C \quad \text{με το λόγο } \frac{\Delta p}{\Delta L} \text{ σταθερό} \quad (2.4.4)$$

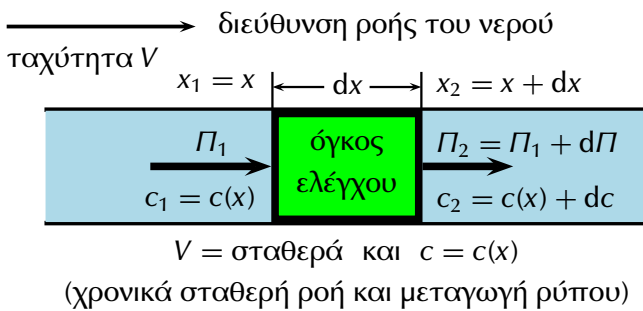
και  $C$  την αυθαίρετη σταθερά ολοκληρώσεως. Λόγω της συνεκτικότητας (του ιξώδους) του Νευτώνειου ρευστού δε μπορεί να υπάρχει ταχύτητα στο τοίχωμα του σωλήνα, δηλαδή  $V(a) = 0$ . Αυτή είναι η **συνοριακή συνθήκη** που ισχύει. Με τη χρήση της προσδιορίζουμε εύκολα τη σταθερά  $C$ :

$$-\frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{\Delta L} a^2 + C = 0 \implies C = \frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{\Delta L} a^2 \implies V(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{\Delta L} (a^2 - r^2): \text{παραβολική κατανομή.} \quad (2.4.5)$$



**A2.5. ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΗ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ: ΑΠΟΔΟΜΗΣΗ ΡΥΠΟΥ ΣΕ ΥΔΑΤΟΡΡΕΥΜΑ**

Στην Περιβαλλοντική Υδραυλική θεωρούμε ένα υδατόρρευμα (π.χ. έναν ποταμό) με ροή του νερού σ' αυτό με σταθερή ταχύτητα  $V$ . Το εμβαδόν της διατομής του υδατορρέυματος όπου ρέει το νερό είναι  $A$  και θεωρείται επίσης σταθερό. Στο νερό υπάρχει επίσης ρύπος με χρονικά σταθερή (αλλά χωρικά μεταβλητή) συγκέντρωση  $c = c(x)$  (π.χ. σε  $g/m^3$  ή σε  $mg/L$ ) για  $x \geq 0$ . Η μόλυνση του νερού με το ρύπο αυτό οφείλεται σε πηγή του ρύπου (π.χ. μια βιομηχανία), η οποία βρίσκεται στη θέση  $x = 0$ . Υπάρχει επίσης και **αποδόμηση** (καταστροφή, διάλυση) του ρύπου καθώς αυτός κινείται με την ταχύτητα του νερού κατά μήκος του υδατορρέυματος με χημική αντίδραση πρώτης τάξεως: **ρύπος**  $\rightarrow$  **παράγωγα της αποδομίσσεως** και με **σταθερά του ρυθμού αποδομίσσεως**  $k$ . (Το  $k$  είναι μια θετική σταθερά:  $k > 0$ .) Εδώ σκοπεύουμε να καταστρώσουμε τη σχετική διαφορική εξίσωση ως προς την άγνωστη συγκέντρωση  $c(x)$ . Για να δούμε τί γίνεται τώρα ως προς το ρύπο.



**Σχήμα A2.9:** Υδατόρρευμα με σταθερή ροή με ταχύτητα  $V$  και μεταγωγή ρύπου. Υπάρχει επίσης αποδόμηση του ρύπου. Η συγκέντρωση  $c = c(x)$  του ρύπου είναι χρονικά σταθερή. Στο υδατόρρευμα αυτό παίρνουμε πρισματικό όγκο ελέγχου απειροστού μήκους  $dx$  για το σχηματισμό της διαφορικής εξίσωσης για την άγνωστη συγκέντρωση  $c(x)$  του ρύπου.

Προς το σκοπό αυτό θεωρούμε τη σταθερή ροή στο υδατόρρευμα και παίρνουμε ένα στοιχειώδη πρισματικό **όγκο ελέγχου** απειροστού μήκους  $dx$  κατά μήκος του υδατορρέυματος στη θέση  $x$  (Σχήμα A2.9). Το όλο πρόβλημα, επαναλαμβάνουμε, θεωρήθηκε μόνιμο, ανεξάρτητο από το χρόνο  $t$ . Η συγκέντρωση του ρύπου  $c$  είναι συνάρτηση μόνο της θέσεως  $x$  κατά μήκος του υδατορρέυματος:  $c = c(x)$ . Πόση ποσότητα ρύπου  $\Pi_1$  ανά μονάδα χρόνου εισέρχεται στον όγκο ελέγχου μας από την αριστερή πλευρά του στη θέση  $x_1 = x$ ; Μα, αφού  $V$  είναι η ταχύτητα του νερού και  $A$  το εμβαδόν της διατομής του υδατορρέυματος,

**Είσοδος ρύπου:**  $\Pi_1 = VAc(x)$  με πιθανή μονάδα  $\frac{m}{sec} m^2 \frac{g}{m^3} = \frac{g}{sec}$  ευτυχώς σωστή! (2.5.1)

Και τώρα πόση ποσότητα ρύπου  $\Pi_2$  ανά μονάδα χρόνου εξέρχεται από τον όγκο ελέγχου που θεωρούμε (μήκους  $dx$ ) από τη δεξιά πλευρά του στη θέση  $x_2 = x + dx$ ; Ανάλογα θα έχουμε

**Έξοδος ρύπου:**  $\Pi_2 = VAc(x + dx) = VA[c(x) + dc]$  με  $dc = c(x + dx) - c(x) = c'(x)dx$ , (2.5.2)

αφού θεωρήσαμε απειροστό το μήκος  $dx$  του όγκου ελέγχου και πήραμε υπόψη το γνωστό ορισμό της παραγώγου

$$c'(x) \equiv \frac{dc}{dx} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(x+h) - c(x)}{h} \quad (2.5.3)$$

(Υποθέτουμε φυσικά τη συγκέντρωση  $c(x)$  του ρύπου όχι μόνο συνεχή, αλλά και παραγωγίσιμη συνάρτηση. Άμα δεν ήταν παραγωγίσιμη, μην ψάχνουμε να καταστρώσουμε διαφορική εξίσωση!)

Εύλογα σχηματίζουμε τώρα με βάση τις παραπάνω σχέσεις (2.5.2) και (2.5.1) τη διαφορά

$$d\Pi := \Pi_2 - \Pi_1 = VA[c(x) + dc] - VAc(x) = VA dc = VA c'(x) dx. \quad (2.5.4)$$

Είναι προφανές ότι η διαφορά αυτή  $d\Pi$  οφείλεται απλά στο γεγονός της αποδομίσσεως μιας μικρής ποσότητας ρύπου μέσα στον πρισματικό όγκο ελέγχου μας μήκους  $dx$  και εμβαδού διατομής  $A$  στο Σχήμα A2.9. Καί πόση ποσότητα ρύπου αποδομείται σ' αυτόν τον όγκο ελέγχου; Μα προφανώς

$$d\Pi = -kc(x)(A dx), \quad \text{αφού το } A dx \text{ δηλώνει αυτόν τον όγκο.} \quad (2.5.5)$$

Υπενθυμίζουμε πως το  $k$  έχει ορισθεί σαν η σταθερά του ρυθμού αποδομήσεως. Άρα το  $kc(x)$  δηλώνει την ποσότητα του ρύπου που αποδομείται στη μονάδα του χώρου ανά μονάδα χρόνου. Επομένως το  $kc(x)(Adx)$  δηλώνει την αντίστοιχη ποσότητα σε ολόκληρο τον όγκο ελέγχου στο Σχήμα Α2.9 (σε g/sec). Βέβαια, αφού ο ρύπος αποδομείται, η πιο πάνω «αύξηση»  $d\Gamma := \Gamma_2 - \Gamma_1$  του ρύπου από τη θέση  $x_1 = x$  μέχρι τη θέση  $x_2 = x + dx$  θα είναι αρνητική, θα έχουμε μείωση της συγκεντρώσεως του ρύπου. Γι' αυτό υπάρχει και το πρόσημο πλιν στην πιο πάνω σχέση (2.5.5).

Σχεδόν τελειώσαμε. Απλά εξισώνουμε τις εκφράσεις της ποσότητας  $d\Gamma$  στις δύο παραπάνω σχέσεις (2.5.4) και (2.5.5). Έτσι προκύπτει η διαφορική εξίσωση που θέλουμε να καταστρώσουμε:

$$d\Gamma = VAc'(x)dx = -kc(x)(Adx) \quad (2.5.6)$$

κι απλοποιώντας τον όρο  $Adx$ ,

$$Vc'(x) = -kc(x) \quad \text{ισοδύναμα} \quad Vc'(x) + kc(x) = 0 \quad \text{ή} \quad V \frac{dc}{dx} + kc = 0 \quad \text{ή} \quad V \frac{dc}{c} = -kdx. \quad (2.5.7)$$

Η τελευταία μορφή μας δείχνει τη διαφορική εξίσωση στην οποία καταλήξαμε σαν διαφορική εξίσωση **χωριζόμενων μεταβλητών**: η συγκέντρωση  $c$  είναι αριστερά, ενώ η θέση  $x$  είναι δεξιά. Αυτές τις εξισώσεις: των χωριζόμενων μεταβλητών θα τις δούμε λίγο παρακάτω στην Ενότητα Α3.2 του επόμενου Κεφαλαίου Α3. Φυσικά η εξίσωση (2.5.7) είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση, πρώτης τάξεως, πρώτου βαθμού, γραμμική, ομογενής, με σταθερούς συντελεστές (την ταχύτητα  $V$  του νερού και τη σταθερά  $k$  του ρυθμού αποδομήσεως του ρύπου) και βέβαια, όπως ήδη αναφέραμε, χωριζόμενων μεταβλητών. Ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η θέση  $x$  και άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) είναι η συγκέντρωση  $c(x)$  του ρύπου κατά μήκος του υδατορρεύματος.

► **Παρατήρηση Α2.2:** Στον παραπάνω σχηματισμό της διαφορικής εξίσωσης (2.5.7) αγνοήσαμε τα δύο φαινόμενα **διαχύσεως** και **διασποράς** του ρύπου κατά μήκος του υδατορρεύματος. Υποθέσαμε δηλαδή πως η κίνηση του ρύπου προς την εκβολή του υδατορρεύματος οφείλεται αποκλειστικά στη μεταφορά του μαζί με το νερό και με την ταχύτητα  $V$  του νερού. Αυτό το είδος μετακινήσεως του ρύπου ονομάζεται στην Περιβαλλοντική Υδραυλική (και στην Περιβαλλοντική Μηχανική, Environmental Engineering, γενικότερα) **μεταγωγή**. Εδώ λοιπόν θεωρήσαμε μετακίνηση του ρύπου μόνο με μεταγωγή. Αν είχαμε λάβει υπόψη και τη διάχυση ή τη διασπορά του ρύπου ή και τα δυο τους μαζί με συνολικό συντελεστή  $D$ , θα είχε προκύψει η πιο γενική διαφορική εξίσωση

$$Dc''(x) - Vc'(x) - kc(x) = 0 \quad \text{ισοδύναμα} \quad D \frac{d^2c}{dx^2} - V \frac{dc}{dx} - kc = 0. \quad (2.5.8)$$

Αυτή είναι βέβαια μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση, αλλ' είναι τώρα δευτέρας τάξεως. Εάν τέλος είχαμε θεωρήσει τη συγκέντρωση  $c$  του ρύπου ότι εξαρτάται τόσο από τη θέση  $x$  όσο και από το χρόνο  $t$ :  $c = c(x, t)$ ,  $\varepsilon$ , τότε θα είχαμε καταλήξει σε μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. Συγκεκριμένα θα είχαμε και μια χρονική παράγωγο  $\partial c / \partial t$ , που θα αφορούσε στον όρο **συσσωρεύσεως** του ρύπου: θετικής ή αρνητικής χρονικής συσσωρεύσεως. Τις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους θα τις μελετήσουμε εκτενώς στο Μέρος Β των διδακτικών αυτών βιβλίων: στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙΙ για Πολιτικούς Μηχανικούς

► **Παρατήρηση Α2.3:** Ας σημειώσουμε τέλος ότι σε τούτη την εφαρμογή και στην προπρωγουμένη εφαρμογή χρησιμοποιήσαμε απευθείας απειροστές ποσότητες, εδώ το μήκος  $dx$  του όγκου ελέγχου. Αυτό το κάναμε για μαθηματική διευκόλυνση, συγκεκριμένα για να αποφύγουμε τις οριακές διαδικασίες. Εντούτοις μαθηματικά πολύ σωστότερο θα ήταν να είχαμε χρησιμοποιήσει μικρό μεν αλλά πεπερασμένο (όχι απειροστό) μήκος  $\Delta x$  (αντί  $dx$ ) και στο τέλος να είχαμε πάρει το όριο καθώς  $\Delta x \rightarrow 0$ . Φυσικά θα καταλήγαμε κι έτσι στην ίδια ακριβώς διαφορική εξίσωση (2.5.7), αλλά με πολύ αυστηρότερη δικαιολόγησή της. Παρά ταύτα στην πράξη ο Πολιτικός Μηχανικός πάρα πολλές φορές χρησιμοποιεί τον παρόντα τρόπο εργασίας ξεκινώντας από την αρχή με απειροστές ποσότητες, εδώ  $dx$  αντί  $\Delta x$ . Μ' αυτόν τον τρόπο αποφεύγει τις οριακές διαδικασίες, εδώ  $\Delta x \rightarrow 0$ .

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α3

## ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ: ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την επίλυση ορισμένων απλών κατηγοριών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως. Συγκεκριμένα θα μελετήσουμε τις ακόλουθες έξι σημαντικές κατηγορίες διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως:

1. Διαφορικές εξισώσεις που επιλύονται με άμεση ολοκλήρωση
2. Διαφορικές εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών
3. Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως
4. Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως
5. Διαφορικές εξισώσεις Bernoulli και
6. Πλήρεις (ή ακριβείς) διαφορικές εξισώσεις.

Θα αναφερθούμε επίσης σύντομα στη μέθοδο των ολοκληρωτικών παραγόντων (ή πολλαπλασιαστών του Euler) για την αναγωγή μιας μη πλήρους (ή μη ακριβούς) διαφορικής εξισώσεως πρώτης τάξεως σε πλήρη (ή ακριβή). Τη μέθοδο αυτή θα την εφαρμόσουμε και στην επίλυση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως πρώτης τάξεως.

Επίσης θα εξετάσουμε σύντομα τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων του Picard για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως.

Πέρα από τη θεωρία, τις σχετικές παρατηρήσεις και τα μαθηματικά παραδείγματα θα αναφέρουμε και μερικές συγκεκριμένες εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως σε προβλήματα της Επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού. Οι εφαρμογές αυτές θα αφορούν κυρίως σε προβλήματα Δοκών στη Μηχανική των Υλικών και σε προβλήματα Δυναμικής.

Περισσότερες εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως θα περιληφθούν στο επόμενο Κεφάλαιο Α4, που θα αφορά αποκλειστικά σε εφαρμογές. Αυτές οι εφαρμογές θα αφορούν: (α) στην αποδόμηση ρύπου στην Περιβαλλοντική Μηχανική, (β) στην ταχύτητα ιδεατού ρευστού σε άκρο σωλήνα στη Ρευστομηχανική, (γ) στην πτώση υλικού σημείου με αντίσταση του αέρα στη Δυναμική και (δ) στις **ορθογώνιες τροχιές** με δύο εφαρμογές τους στη διδιάστατη μόνιμη ροή στη Ρευστομηχανική. Παρουσιάζονται βέβαια και πολλές άλλες εφαρμογές, που δε θα τις εξετάσουμε.

Θεωρήσαμε ότι οι έξι κατηγορίες των διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως που αναφέραμε πιο πάνω και εξετάζουμε σ' αυτό εδώ το Κεφάλαιο Α3 είναι οι πιο σημαντικές για τον Πολιτικό Μηχανικό (παρουσιάζονται συχνότερα) και ταυτόχρονα διαθέτουν σχετικά απλές μεθόδους επίλυσεως. Γι' αυτό και περιοριζόμαστε στις έξι αυτές βασικές κατηγορίες. Θα παραλείψουμε έτσι τη μελέτη άλλων και μάλιστα ιδιαίτερα γνωστών κατηγοριών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως, όπως είναι, π.χ., οι πολύ γνωστές διαφορικές εξισώσεις των d'Alembert-Lagrange, Clairaut και Riccati.

**Α3.1. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΕΠΙΛΥΟΝΤΑΙ ΜΕ ΑΜΕΣΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ****Α3.1.1. Επίλυση διαφορικών εξισώσεων με άμεση ολοκλήρωση**

Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε απλά σε διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως της μορφής

$$y'(x) = q(x), \quad (3.1.1)$$

όχι σε πλήρεις (ή ακριβείς) διαφορικές εξισώσεις, τις οποίες θα εξετάσουμε αργότερα. Στη διαφορική εξίσωση (3.1.1) άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) είναι η  $y = y(x)$  και ανεξάρτητη μεταβλητή η  $x$ . Αντίθετα η συνάρτηση  $q(x)$  στο δεξιό μέλος θεωρείται γνωστή τμηματικά συνεχής συνάρτηση, όποτε είναι και ολοκληρώσιμη.

Είναι ομολογουμένως πάρα πολύ απλές οι διαφορικές εξισώσεις της μορφής (3.1.1) ως προς την επίλυσή τους. Πραγματικά απλά πρέπει να ολοκληρώσουμε ως προς  $x$  και το αριστερό και το δεξιό μέλος τους. Έτσι παίρνουμε αμέσως τη γενική λύση τους

$$y(x) = \int q(x) dx + C \quad (3.1.2)$$

σε μορφή αόριστου ολοκληρώματος. Στη γενική αυτή λύση  $y(x)$  έχουμε μια αυθαίρετη σταθερά ή παράμετρο, τη  $C$ , δηλαδή έχει προκύψει μια μονοπαραμετρική οικογένεια λύσεων.

Υποθέτουμε τώρα ότι έχουμε και μία αρχική συνθήκη στο σημείο  $x = x_0$  της μορφής

$$y(x_0) = y_0 \quad (3.1.3)$$

με το  $y_0$  γνωστή σταθερά. Σ' αυτήν την περίπτωση είναι καλύτερα να γράψουμε την παραπάνω γενική λύση (3.1.2) σε ισοδύναμη μορφή, αλλά με τη χρήση ορισμένου ολοκληρώματος με κάτω όριο ολοκληρώσεως το  $x_0$  και με μεταβλητό το πάνω όριο ολοκληρώσεως  $x$ , συγκεκριμένα στη μορφή

$$y(x) = \int_{x_0}^x q(\xi) d\xi + C. \quad (3.1.4)$$

Σ' αυτήν τη μορφή της γενικής λύσεως  $y(x)$  θέσαμε σαν μεταβλητή ολοκληρώσεως το  $\xi$  αντί για το  $x$ , γιατί το  $x$  είναι εδώ το πάνω όριο ολοκληρώσεως. Συγκεκριμένα η μεταβλητή ολοκληρώσεως  $\xi$  μεταβάλλεται στο ολοκλήρωμα αυτό στο διάστημα  $[x_0, x]$ .

Θέσαμε επίσης σαν κάτω όριο ολοκληρώσεως το σημείο  $x_0$ , στο οποίο έχει δοθεί η αρχική συνθήκη (3.1.3). Με τον τρόπο αυτό είναι πολύ εύκολο από τη διαθέσιμη γενική λύση (3.1.4) να προσδιορίσουμε την αντίστοιχη μερική λύση  $y_p(x)$  που επαληθεύει και την αρχική συνθήκη (3.1.3), δηλαδή τη συνθήκη  $y(x_0) = y_0$ . Για την εύρεση αυτής της μερικής λύσεως απλά θέτουμε  $x = x_0$  και  $y(x) = y(x_0) = y_0$  στη γενική λύση (3.1.4). Τότε παίρνουμε

$$y_0 = 0 + C \implies C = y_0, \quad (3.1.5)$$

αφού για  $x = x_0$  το πάνω και το κάτω όριο του ολοκληρώματος στη γενική λύση (3.1.4) είναι και τα δύο  $x_0$ , συμπίπτουν, άρα το ολοκλήρωμα μηδενίζεται. Επομένως με  $C = y_0$  η γενική λύση (3.1.4) μετατρέπεται στη μερική λύση

$$y_p(x) = y_0 + \int_{x_0}^x q(\xi) d\xi. \quad (3.1.6)$$

Αυτή η μερική λύση  $y_p(x)$  της διαφορικής εξισώσεως (3.1.1) είναι και η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής που αποτελείται από την ίδια τη διαφορική εξίσωση (3.1.1) και την αρχική συνθήκη της (3.1.3), δηλαδή από τις εξής δύο εξισώσεις:

$$y'(x) = q(x), \quad y(x_0) = y_0. \quad (3.1.7)$$

Ας επαληθεύσουμε την παραπάνω λύση (3.1.6) ως προς το πρόβλημα αρχικής τιμής (3.1.7). Προς το σκοπό αυτό πρέπει να επαληθεύσουμε τη λύση αυτή  $y_p(x)$  και ως προς τη διαφορική εξίσωση  $y'(x) = q(x)$ , αλλά και ως προς την αρχική συνθήκη  $y(x_0) = y_0$ . Πρώτα για την επαλήθευση της διαφορικής εξισώσεως  $y'(x) = q(x)$  απλά παραγωγίζουμε τη μερική λύση  $y_p(x)$  που δίνεται στη σχέση (3.1.6) ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$ . Παρατηρούμε ότι η παράγωγος σταθεράς (εδώ της  $y_0$ ) είναι μηδέν και επίσης ότι η παράγωγος ως προς  $x$  ενός ορισμένου ολοκληρώματος, αλλά με πάνω όριο ολοκληρώσεως τη μεταβλητή  $x$ , είναι η ολοκληρωτέα συνάρτηση στη θέση  $x$ . Επομένως έχουμε

$$\frac{dy_0}{dx} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x q(\xi) d\xi = q(x). \quad (3.1.8)$$

Με βάση αυτές τις δύο απλές ιδιότητες στις παραγώγους η παράγωγος της λύσεως  $y_p(x)$  στη σχέση (3.1.6) παίρνει τη μορφή

$$y_p'(x) = q(x). \quad (3.1.9)$$

Επαληθεύεται επομένως από τη λύση αυτή  $y_p(x)$  η αρχική διαφορική εξίσωση (3.1.1). Απομένει τώρα να επαληθευθεί και η αρχική συνθήκη (3.1.3), δηλαδή η συνθήκη  $y(x_0) = y_0$ . Για την επαλήθευση αυτή απλά θέτουμε  $x = x_0$  στη λύση  $y_p(x)$  στη σχέση (3.1.6). Τότε το ολοκλήρωμα μηδενίζεται, γιατί το κάτω και το πάνω όριο ολοκληρώσεως είναι και τα δύο ίσα με  $x_0$ , συμπίπτουν. Επομένως

$$y_p(x_0) = y_0. \quad (3.1.10)$$

Άρα επαληθεύεται και η αρχική συνθήκη  $y(x_0) = y_0$ .

Το συμπέρασμά μας είναι ότι η συνάρτηση  $y_p(x)$  που προσδιορίστηκε στη σχέση (3.1.6) επαληθεύει τόσο τη διαφορική εξίσωση (3.1.1), αυτό αποδείχθηκε στη σχέση (3.1.9), όσο και την αρχική συνθήκη (3.1.3), αυτό αποδείχθηκε στη σχέση (3.1.10). Με αυτά τα δεδομένα στις επαληθεύσεις διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση  $y_p(x)$  είναι η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής (3.1.7).

Μια ενδιαφέρουσα εναλλακτική δυνατότητα για την επίλυση του παρόντος προβλήματος αρχικής τιμής (3.1.7) αποτελεί η ολοκλήρωση της διαφορικής εξισώσεως  $y'(x) = q(x)$  στο πρόβλημα αυτό από  $x_0$  μέχρι  $x_1$ . Λαμβάνουμε επίσης υπόψη ότι

$$\int_a^b y'(x) dx = y(x) \Big|_a^b = y(b) - y(a) \quad (3.1.11)$$

και έτσι παίρνουμε

$$\int_{x_0}^{x_1} y'(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} q(x) dx \implies y(x) \Big|_{x_0}^{x_1} = \int_{x_0}^{x_1} q(x) dx \implies y(x_1) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} q(x) dx. \quad (3.1.12)$$

Επειδή μάλιστα  $y(x_0) = y_0$  (αρχική συνθήκη στο πρόβλημα αρχικής τιμής (3.1.7)), η σχέση (3.1.12) γράφεται και στη μορφή

$$y(x_1) = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} q(x) dx. \quad (3.1.13)$$

Στο σημείο αυτό είναι σκόπιμο να αλλάξουμε λίγο το συμβολισμό. Συγκεκριμένα θέτουμε  $\xi$  αντί για  $x$  σαν τη μεταβλητή ολοκληρώσεως κι έπειτα θέτουμε  $x$  αντί για  $x_1$  σαν τη μεταβλητή στη συνάρτηση  $y(x_1)$  κι επίσης σαν το πάνω όριο ολοκληρώσεως  $x_1$ . Έτσι η λύση (3.1.13) του προβλήματος αρχικής τιμής που μελετάμε μπορεί να γραφεί και στην απόλυτα ισοδύναμη μορφή της

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x q(\xi) d\xi. \quad (3.1.14)$$

Η λύση αυτή  $y(x)$  του προβλήματος αρχικής τιμής (3.1.7) συμπίπτει ασφαλώς με την αντίστοιχη λύση (3.1.6) του ίδιου προβλήματος αρχικής τιμής. Τούτο το αναμέναμε, γιατί το παρόν πρόβλημα αρχικής τιμής έχει μία και μοναδική λύση. Η μόνη διαφορά ήταν στη διαδικασία. Συγκεκριμένα για

την εύρεση της λύσεως (3.1.6) η αρχική συνθήκη χρησιμοποιήθηκε κατάλληλα για τον προσδιορισμό της αυθαίρετης σταθεράς  $C$  της γενικής λύσεως (3.1.4) της διαφορικής εξίσωσης  $y'(x) = q(x)$ . Αντίθετα στην παρούσα λύση (3.1.14) έγινε ορισμένη ολοκλήρωση (όχι αόριστη) από  $x_0$  έως  $x$  και στα δύο μέλη και λήφθηκε υπόψη κατά την ολοκλήρωση αυτή η αρχική συνθήκη  $y(x_0) = y_0$ . Με τον τρόπο αυτό παρακάμφθηκε η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης  $y'(x) = q(x)$  και προσδιορίστηκε κατευθείαν η μερική λύση της ίδιας διαφορικής εξίσωσης που πληροί όμως και την αρχική συνθήκη  $y(x_0) = y_0$ . Για το σκοπό αυτό, επαναλαμβάνεται, έγινε ορισμένη ολοκλήρωση αντί για αόριστη ολοκλήρωση στα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης (3.1.1).

Ολόκληρη η παραπάνω απλή μέθοδος αναφερόταν στην αρχική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως  $y'(x) = q(x)$ . Είναι εντούτοις προφανές ότι μπορεί άμεσα να γενικευθεί και σε διαφορικές εξισώσεις οποιασδήποτε τάξεως (γενικά  $n$ -τάξεως) της μορφής

$$y^{(n)}(x) = q(x) \quad (3.1.15)$$

με άγνωστη συνάρτηση την  $y(x)$  και γνωστή συνάρτηση το δεξιό μέλος  $q(x)$ . Όμως στην περίπτωση αυτή θα απαιτηθεί μία ολοκλήρωση, για να προκύψει η  $(n-1)$ -τάξεως παράγωγος  $y^{(n-1)}(x)$ , μία ακόμη ολοκλήρωση, για να προκύψει η  $(n-2)$ -τάξεως παράγωγος  $y^{(n-2)}(x)$ , κλπ. Εργαζόμενοι με τον τρόπο αυτό χρειαζόμαστε συνολικά  $n$  ολοκληρώσεις: ακριβώς τόσες ολοκληρώσεις όση είναι και η τάξη της διαφορικής εξίσωσης (3.1.15). Έτσι θα μπορέσουμε να προσδιορίσουμε τελικά τη γενική λύση  $y_g(x)$  της διαφορικής αυτής εξίσωσης, η οποία θα έχει τη μορφή

$$y_g(x) = \hat{Q}_n(x) + p_{n-1}(x, C_1, C_2, \dots, C_n). \quad (3.1.16)$$

Στη μορφή αυτή με  $\hat{Q}_n(x)$  έχει δηλωθεί το ολοκλήρωμα της γνωστής συναρτήσεως  $q(x)$ , αλλά μετά από  $n$  διαδοχικές ολοκληρώσεις. Επίσης το πολυώνυμο  $p_{n-1}$  έχει μεταβλητή το  $x$ , περιέχει όμως και  $n$  σταθερές  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , δηλαδή τις αυθαίρετες σταθερές των  $n$  διαδοχικών ολοκληρώσεων. Οι  $n$  αυτές σταθερές μπορούν βέβαια να προσδιορισθούν από  $n$  αρχικές συνθήκες σε ένα σημείο  $x = x_0$ , π.χ. από τις  $n$  συνθήκες

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (3.1.17)$$

### A3.1.2. Εφαρμογές

▼ **Εφαρμογή A3.1 (Δοκοί):** Σε συνήθη δοκό θεωρούμε μια γραμμικά κατανεμημένη κάθετη φόρτιση  $p(x)$  (σε kN/m) της μορφής

$$p(x) = ax + b \quad (3.1.18)$$

με τις σταθερές  $a$  και  $b$  σ' αυτήν γνωστές. Ξέρουμε όμως από το προηγούμενο Κεφάλαιο Α2, Παράγραφος Α2.1.4, ότι ισχύει η διαφορική εξίσωση (2.1.28) ανάμεσα στην τέμνουσα δύναμη  $Q(x)$  (ή ισοδύναμα  $V(x)$ ) και στην κατανεμημένη κάθετη φόρτιση  $p(x)$ . Επομένως έχουμε

$$Q'(x) = p(x) \implies Q'(x) = ax + b. \quad (3.1.19)$$

Η διαφορική αυτή εξίσωση είναι πραγματικά της μορφής (3.1.1) και επομένως μπορούμε να τη λύσουμε άμεσα με μία απλή ολοκλήρωση. Έτσι βρίσκουμε τη γενική λύση της

$$Q_g(x) = \frac{ax^2}{2} + bx + C_1 \quad (3.1.20)$$

με το  $C_1$  τη σχετική σταθερά ολοκληρώσεως. Υποθέτοντας επιπλέον ότι ξέρουμε και την τέμνουσα δύναμη  $Q(0) = Q_0$  στο αριστερό άκρο  $x = 0$  της δοκού, έχουμε το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$Q'(x) = ax + b, \quad Q(0) = Q_0. \quad (3.1.21)$$

Η αρχική συνθήκη  $Q(0) = Q_0$  δεν έχει ληφθεί ακόμη υπόψη στη γενική λύση  $Q_g(x)$ . Αν όμως ληφθεί, όπως απαιτεί το πρόβλημα αρχικής τιμής (3.1.21), τότε θα επιτρέψει τον προσδιορισμό της σταθεράς  $C_1$ . Πραγματικά, εάν θέσουμε  $x = 0$  και  $Q_g(0) = Q_0$  στη γενική λύση  $Q_g(x)$  της σχέσεως (3.1.20), θα έχουμε

$$Q_0 = C_1 \iff C_1 = Q_0 \implies Q_p(x) = \frac{ax^2}{2} + bx + Q_0. \quad (3.1.22)$$

Με αλλαγή της σειράς των όρων

$$Q_p(x) = Q_0 + bx + \frac{ax^2}{2} \quad (3.1.23)$$

παίρνουμε την ισοδύναμη λύση του προβλήματος αρχικής τιμής (3.1.21).

Από τη λύση αυτή  $Q_p(x)$  διαπιστώνουμε ότι η τέμνουσα δύναμη  $Q_p(x)$  που βρήκαμε στην παρούσα συνήθη δοκό που εξετάζουμε παίρνει την αρχική τιμή  $Q_0$  στο αριστερό άκρο  $x = 0$  της δοκού, ακριβώς όπως θέλουμε να συμβαίνει. Επιπλέον όμως επαληθεύει και τη διαφορική εξίσωση (3.1.19), γιατί

$$Q'_p(x) = b + ax = ax + b = p(x) \quad (3.1.24)$$

στην παρούσα ειδική περίπτωση γραμμικής κάθετης κατανεμημένης φορτίσεως  $p(x) = ax + b$ .

Παρατηρούμε επίσης ότι η κάθετη κατανεμημένη φόρτιση  $p(x)$  μεταβάλλεται γραμμικά με τη θέση  $x$  στην παρούσα ειδική περίπτωση, όπου δεχθήκαμε ότι  $p(x) = ax + b$ . Εντούτοις η γραφική παράσταση της τέμνουσας δύναμης  $Q(x)$  είναι παραβολική (πολυώνυμο δευτέρου βαθμού).

Φυσικά, λαμβάνοντας υπόψη όλα όσα αναφέραμε για τις διαφορικές εξισώσεις των συνήθων δοκών στο προηγούμενο Κεφάλαιο A2, μπορούμε με όμοιο τρόπο να προσδιορίσουμε (με διαδοχικές ολοκληρώσεις): (α) τη ροπή κάμψεως (ή καμπτική ροπή) της δοκού  $M(x)$ , (β) τη γωνία στροφής της δοκού  $\theta(x)$  και (γ) το βέλος κάμψεως της δοκού (την ελαστική γραμμή της)  $v(x)$ . Αρκεί βέβαια να έχουμε διαθέσιμες τις σχετικές συνθήκες στο αριστερό άκρο  $x = 0$  της δοκού ή και στα δύο άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  της δοκού. Γνωρίζοντας τη φόρτιση  $p(x) = ax + b$ , σχέση (3.1.18), έχουμε ανάγκη από τέσσερις συνθήκες (συνήθως από δύο συνθήκες και στα δύο άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  της δοκού, επομένως τέσσερις συνθήκες συνολικά). Έτσι θα μπορέσουμε να προσδιορίσουμε μέχρι και το βέλος κάμψεως  $v(x)$  της δοκού. Θα γίνουμε σαφέστεροι στην αμέσως επόμενη εφαρμογή. ▲

▼ **Εφαρμογή A3.2 (Πρόβολος):** Θεωρούμε το πρόβλημα του προβόλου, που είναι μια συνήθης δοκός μήκους  $L$  και σταθερής δυσκαμψίας  $EI$ . Το αριστερό άκρο του προβόλου  $x = 0$  θεωρείται πακτωμένο, ενώ το δεξιό άκρο του  $x = L$  ελεύθερο. Πάνω στον πρόβολο ασκείται κάθετη κατανεμημένη φόρτιση

$$p(x) = ax + b, \quad (3.1.25)$$

η ίδια ακριβώς φόρτιση με τη φόρτιση (3.1.18), εκείνη της προηγούμενης εφαρμογής. Υπό τις συνθήκες αυτές ζητείται το βέλος κάμψεως του  $v(x)$ , που σχηματίζει την ελαστική γραμμή του.

**Λύση:** Γνωρίζουμε από το προηγούμενο Κεφάλαιο A2, εξίσωση (2.1.34), ότι η διαφορική εξίσωση της συνήθους δοκού είναι τετάρτης τάξεως και έχει τη μορφή

$$EIv''''(x) = p(x) \implies v''''(x) = \frac{1}{EI}(ax + b) \quad (3.1.26)$$

λόγω και της φορτίσεως (3.1.25).

Πολύ εύκολα μπορούμε να λύσουμε τη διαφορική αυτή εξίσωση προχωρώντας σε τέσσερις διαδοχικές ολοκληρώσεις και αναγνωρίζοντας το γεγονός ότι καθεμία από αυτές θα εισάγει και από μία αυθαίρετη σταθερά στη λύση. Με τις ολοκληρώσεις αυτές, που είναι πολύ εύκολες στην παρούσα εφαρμογή σε πρόβολο, προσδιορίζουμε πρώτα την τρίτη παράγωγο  $v'''(x)$ :

$$v'''(x) = \frac{1}{EI} \left( \frac{ax^2}{2} + bx + C_1 \right). \quad (3.1.27)$$

Έπειτα, ολοκληρώνοντας ξανά, βρίσκουμε τη δεύτερη παράγωγο  $v''(x)$ :

$$v''(x) = \frac{1}{EI} \left( \frac{ax^3}{6} + \frac{bx^2}{2} + C_1x + C_2 \right). \quad (3.1.28)$$

Στη συνέχεια, και πάλι με άμεση ολοκλήρωση, υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο  $v'(x)$ :

$$v'(x) = \frac{1}{EI} \left( \frac{ax^4}{24} + \frac{bx^3}{6} + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3 \right). \quad (3.1.29)$$

Στο τέλος, ξαναολοκληρώνοντας, προσδιορίζουμε την ίδια την άγνωστη συνάρτηση, το βέλος κάμψεως  $v(x)$  του προβόλου, το οποίο δημιουργεί την ελαστική γραμμή του:

$$v(x) = \frac{1}{EI} \left( \frac{ax^5}{120} + \frac{bx^4}{24} + \frac{C_1x^3}{6} + \frac{C_2x^2}{2} + C_3x + C_4 \right). \quad (3.1.30)$$

Αυτή είναι λοιπόν η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης τετάρτης τάξεως (3.1.26) υπό τη γραμμική κατανεμημένη κάθετη φόρτιση  $p(x)$  της σχέσεως (3.1.25). Προσδιορίσαμε λοιπόν τη γενική λύση  $v_g(x)$  της διαφορικής εξίσωσης τετάρτης τάξεως που είχαμε. Έχουμε και τέσσερις αυθαίρετες σταθερές:  $C_1, C_2, C_3$  και  $C_4$  στη γενική αυτή λύση, ακριβώς όπως περιμέναμε. Είμαστε λοιπόν ευχαριστημένοι; Όχι, με τίποτε! Δεν είναι δυνατόν σε ένα πρόβλημα δοκού (εδώ προβόλου) να έχουμε στη λύση του τέσσερις αυθαίρετες σταθερές:  $C_1, C_2, C_3$  και  $C_4$ . Ένας πρόβλος έχει συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες: εδώ πάκτωση στο αριστερό άκρο του  $x = 0$  και ελεύθερο το δεξιό άκρο του  $x = L$ . Αυτές τις συνοριακές συνθήκες πρέπει να τις πάρουμε υπόψη μας, για να καθορίσουμε πλήρως τη συνάρτηση  $v(x)$  του βέλους κάμψεως του προβόλου, που δημιουργεί την ελαστική γραμμή του. Αυτό είναι το καθήκον μας και θα προχωρήσουμε αμέσως τώρα σ' αυτό.

Πρέπει λοιπόν τώρα να καθορίσουμε συγκεκριμένες τιμές στις αυθαίρετες σταθερές  $C_1, C_2, C_3$  και  $C_4$ , έτσι ώστε να ικανοποιούνται και οι τέσσερις συνοριακές συνθήκες στα δύο άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  του προβόλου. Ο πρόβλος αυτός έχει πακτωμένο το αριστερό άκρο του  $x = 0$ . Άρα ισχύουν σ' αυτό οι δύο συνθήκες

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad (3.1.31)$$

δηλαδή μηδενικό βέλος κάμψεως ( $v = 0$ ) και μηδενική κλίση ή στροφή ( $\theta = 0$ ) στο άκρο αυτό  $x = 0$ . Έχει επίσης ελεύθερο το δεξιό άκρο του  $x = L$ . Επομένως ισχύουν σ' αυτό οι δύο συνθήκες

$$v''(L) = 0, \quad v'''(L) = 0, \quad (3.1.32)$$

δηλαδή μηδενική καμπτική ροπή ή ροπή κάμψεως ( $M = 0$ ) και ταυτόχρονα μηδενική τέμνουσα δύναμη ( $Q = 0$ ) στο άκρο αυτό  $x = L$ . Και τις τέσσερις αυτές συνθήκες για πρόβλο με πάκτωση στο αριστερό άκρο του  $x = 0$  και ελεύθερο το δεξιό άκρο του  $x = L$  τις έχουμε αναφέρει στην Παράγραφο Α1.9.2 στην τελευταία γραμμή των συνοριακών συνθηκών (1.9.10) για δοκούς.

Έχουμε επομένως τέσσερις συνθήκες, τις (3.1.31) και (3.1.32), και τέσσερις σταθερές προς προσδιορισμό, τις  $C_1, C_2, C_3$  και  $C_4$ , στη γενική λύση (3.1.30): την ελαστική γραμμή του προβόλου. Ξεκινάμε από τις δύο γεωμετρικές συνθήκες (3.1.31). Λαμβάνοντας υπόψη την πρώτη από αυτές:  $v(0) = 0$ , παίρνουμε αμέσως (για  $x = 0$ )  $C_4 = 0$  από τη σχέση (3.1.30). Με όμοιο τρόπο από τη δεύτερη συνοριακή συνθήκη  $v'(0) = 0$  παίρνουμε ευθύς (και πάλι για  $x = 0$ )  $C_3 = 0$  από τη σχέση (3.1.29) για την παράγωγο  $v'(x)$ . Τελειώσαμε λοιπόν με τις δύο γεωμετρικές συνοριακές συνθήκες (3.1.31) στο πακτωμένο άκρο  $x = 0$  του προβόλου (το αριστερό άκρο του) έχοντας βρει

$$C_4 = 0, \quad C_3 = 0. \quad (3.1.33)$$

Επομένως η λύση (3.1.30) για το βέλος κάμψεως του προβόλου απλοποιείται τώρα στη μορφή

$$v(x) = \frac{1}{EI} \left( \frac{ax^5}{120} + \frac{bx^4}{24} + \frac{C_1x^3}{6} + \frac{C_2x^2}{2} \right) \equiv \frac{x^2}{120EI} (ax^3 + 5bx^2 + 20C_1x + 60C_2). \quad (3.1.34)$$



Μας απομένει τώρα να προσδιορίσουμε και τις άλλες δύο σταθερές  $C_1$  και  $C_2$  με βάση τις δύο συνοριακές συνθήκες μηχανικής φύσεως:  $v''(L) = 0$  και  $v'''(L) = 0$  στο δεξιό άκρο  $x = L$  του προβόλου. Καταρχήν από τη σχέση (3.1.27) για την τρίτη παράγωγο  $v'''(x)$  παίρνουμε για  $x = L$

$$v'''(L) = \frac{1}{EI} \left( \frac{aL^2}{2} + bL + C_1 \right) = 0 \implies C_1 = -\frac{aL^2}{2} - bL. \quad (3.1.35)$$

Και ανάλογα από τη σχέση (3.1.28) για τη δεύτερη παράγωγο  $v''(x)$  παίρνουμε ξανά για  $x = L$

$$v''(L) = \frac{1}{EI} \left( \frac{aL^3}{6} + \frac{bL^2}{2} + C_1L + C_2 \right) = 0 \implies C_2 = -\frac{aL^3}{6} - \frac{bL^2}{2} - C_1L = \frac{aL^3}{3} + \frac{bL^2}{2}. \quad (3.1.36)$$

Σημειώνουμε ότι πήραμε στο τέλος υπόψη μας και την έκφραση της σταθεράς  $C_1$ , που έχει ήδη υπολογισθεί στη δεύτερη σχέση (3.1.35).

Εισάγουμε τέλος τις τιμές και των σταθερών  $C_1$  και  $C_2$  από τις σχέσεις (3.1.35) και (3.1.36) αντίστοιχα στη σχέση (3.1.34). Έτσι παίρνουμε (μετά και τις απλοποιήσεις με τη βοήθεια της *Mathematica*) την εξής τελική έκφραση για την άγνωστη συνάρτησή μας  $v(x)$ , το βέλος κάμψεως του προβόλου:

$$v(x) = \frac{x^2}{120EI} [20aL^3 + 30bL^2 - 10L(aL + 2b)x + 5bx^2 + ax^3], \quad (3.1.37)$$

δηλαδή ένα πολυώνυμο πέμπτου βαθμού, αφού  $x^2x^3 = x^5$ . Επαληθεύσαμε επίσης (πάλι με χρήση της *Mathematica*) την πλήρωση και των τεσσάρων συνοριακών συνθηκών (3.1.31) και (3.1.32) στα δύο άκρα  $x = 0$  (πακτωμένο άκρο) και  $x = L$  (ελεύθερο άκρο) του προβόλου αντίστοιχα.

Η συνάρτηση αυτή  $v(x)$  είναι η λύση του παρόντος προβλήματος συνοριακών τιμών: διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως, επομένως και τέσσερις συνολικά συνοριακές συνθήκες. Με βάση την ίδια συνάρτηση  $v(x)$  έχουμε πια τη δυνατότητα υπολογισμού: (α) του βέλους κάμψεως  $v(x)$ , (β) της στροφής (γωνίας κλίσεως)  $\theta = v'(x)$ , (γ) της καμπτικής ροπής  $M(x) = EIv''(x)$  και (δ) της τέμνουσας δύναμης  $Q(x) = EIv'''(x)$  σε κάθε σημείο  $x$  του προβόλου. Ας αναφέρουμε απλά πως το βέλος κάμψεως  $v(L)$  και η στροφή  $\theta(L) = v'(L)$  στο ελεύθερο άκρο του προβόλου  $x = L$  έχουν τις εξής τιμές:

$$v(L) = \frac{(11aL + 15b)L^4}{120EI} \quad \text{και} \quad \theta(L) = v'(L) = \frac{(3aL + 4b)L^3}{24EI} \quad (3.1.38)$$

αντίστοιχα. Ανάλογα μπορούμε να υπολογίσουμε (και πραγματικά υπολογίσαμε) την αντίδραση  $Q_0$  και τη ροπή πακτώσεως  $M_0$  στο πακτωμένο άκρο  $x = 0$  του προβόλου. Το ίδιο συμβαίνει και για κάθε άλλη ποσότητα που μας ενδιαφέρει. Έχουμε μάλιστα αυτήν τη δυνατότητα και πλήρως παραμετρικά με παραμέτρους τις δύο σταθερές  $a$  και  $b$  της κατανεμημένης κάθετης φορτίσεως  $p(x) = ax + b$ , την οποία δεχθήκαμε στη σχέση (3.1.25) να εφαρμόζεται πάνω στον πρόβολο. ▲

## A3.2. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΧΩΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

### A3.2.1. Επίλυση των διαφορικών εξισώσεων χωριζόμενων μεταβλητών

Η επόμενη σε απλότητα (λιγάκι πιο δύσκολη ...) κατηγορία διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως είναι οι διαφορικές εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών. Μια τέτοια διαφορική εξίσωση έχει από την αρχή ή μπορεί να πάρει τελικά την ακόλουθη μορφή:

$$A(x)dx + B(y)dy = 0 \quad \text{ισοδύναμα} \quad A(x)dx = -B(y)dy, \quad (3.2.1)$$

όπου βέβαια οι συναρτήσεις  $A(x)$  και  $B(y)$  είναι γνωστές συναρτήσεις. Η μορφή αυτή της διαφορικής εξισώσεως (3.2.1) καθιστά σαφές ότι πραγματικά πρόκειται για διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών. Συγκεκριμένα ο πρώτος όρος της περιέχει μόνο τη μεταβλητή  $x$ , ενώ ο δεύτερος μόνο τη μεταβλητή  $y$ . Είναι επομένως χωρισμένες οι δύο μεταβλητές  $x$  και  $y$  στην εξίσωση (3.2.1) είτε στην πρώτη της μορφή είτε στη δεύτερη (εκεί με τον όρο της μεταβλητής  $y$  στο δεξιό μέλος).

Η διαφορική εξίσωση (3.2.1) είναι γραμμένη με διαφορικά  $dx$  και  $dy$ . Αυτός ο τρόπος γραφής είναι συμμετρικός ως προς τις δύο μεταβλητές  $x$  και  $y$  και προτιμάται ειδικά στις διαφορικές εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών που εξετάζουμε στην ενότητα αυτή. Στην πραγματικότητα, γράφοντας τη διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών στη μορφή (3.2.1), δηλώνουμε αναποφάσιστοι ακόμη για το αν η μεταβλητή  $y$  θα θεωρηθεί σαν εξαρτημένη μεταβλητή και η μεταβλητή  $x$  σαν ανεξάρτητη μεταβλητή ή αντίστροφα. Δηλαδή η γραφή (3.2.1) της γενικής διαφορικής εξίσωσης χωριζόμενων μεταβλητών είναι ισοδύναμη με τις εξής δύο γραφές της ίδιας εξίσωσης:

$$A(x) + B(y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{ισοδύναμα} \quad B(y)y' + A(x) = 0 \quad \text{με} \quad y = y(x), \quad (3.2.2)$$

αφού διαιρέσαμε με  $dx$ , ή διαφορετικά

$$A(x) \frac{dx}{dy} + B(y) = 0 \quad \text{ισοδύναμα} \quad A(x)x' + B(y) = 0 \quad \text{με} \quad x = x(y) \quad (3.2.3)$$

έπειτα από διαίρεση με  $dy$  της αρχικής διαφορικής εξίσωσης (3.2.1).

Επομένως τώρα πλέον έχουμε αποφασίσει: άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) η  $y = y(x)$  στη διαφορική εξίσωση (3.2.2). Αντίθετα άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) η  $x = x(y)$  στη διαφορική εξίσωση (3.2.3). Η απόφασή μας αυτή για προτίμηση της μορφής (3.2.2) ή (3.2.3) εξαρτάται συνήθως από το ποια μορφή μας βολεύει υπολογιστικά στην ολοκλήρωση, η οποία θα ακολουθήσει για την εύρεση της λύσεως της διαφορικής εξίσωσης χωριζόμενων μεταβλητών (3.2.1). Ίσως όμως εξαρτάται περισσότερο από το φυσικό νόημα που έχει η μία επιλογή ή η άλλη. Για παράδειγμα, σε απλή ευθύγραμμη κίνηση υλικού σημείου προτιμάμε ασφαλώς να θεωρούμε την ταχύτητα  $v$  σαν συνάρτηση του χρόνου  $t$ , δηλαδή να έχουμε  $v = v(t)$ , παρά το αντίθετο, δηλαδή να έχουμε  $t = t(v)$ . Παραπέρα σε μια δοκό προτιμάμε έντονα να έχουμε το βέλος κάμψεως  $v$  σαν συνάρτηση της θέσεως  $x$ , δηλαδή να  $v = v(x)$ , παρά τη θέση  $x$  σαν συνάρτηση του βέλους κάμψεως  $v$ , δηλαδή όχι  $x = x(v)$ . Γενικά σχεδόν ποτέ δεν κάνουμε το δεύτερο:  $x = x(v)$ . Επιθυμία μας αποτελεί απλά να γνωρίζουμε το βέλος κάμψεως  $v$  σε κάθε σημείο  $x$  της δοκού, δηλαδή  $v = v(x)$ , κι όχι το αντίθετο, δηλαδή όχι  $x = x(v)$ . Αρκετά! Τέλος λοιπόν στη συζήτηση αυτή!

Από 'δώ και πέρα υποθέτουμε ότι άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) είναι η  $y$  και ανεξάρτητη μεταβλητή η  $x$ . Ισχύει επομένως η ερμηνεία (3.2.2) της αρχικής διαφορικής εξίσωσης χωριζόμενων μεταβλητών (3.2.1). Ας προχωρήσουμε τώρα στην επίλυσή της, δηλαδή στον προσδιορισμό της γενικής λύσεώς της  $y = \psi(x)$ , όπου η συνάρτηση  $\psi(x)$  είναι ακόμη άγνωστη. Αντικαθιστούμε αυτήν τη ζητούμενη λύση  $y = \psi(x)$  στη διαφορική εξίσωση (3.2.2). Θα πρέπει να ισχύει

$$A(x) + B(\psi(x)) \psi'(x) = 0. \quad (3.2.4)$$

Τώρα απλά ολοκληρώνουμε ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$  και παίρνουμε

$$\int [A(x) + B(\psi(x)) \psi'(x)] dx = C, \quad (3.2.5)$$

όπου δεν ξεχάσαμε και τη σταθερά  $C$  (καλύτερα στο δεξιό μέλος). Φυσικά το ολοκλήρωμα αθροίσματος ισούται με το άθροισμα των ολοκληρωμάτων των όρων του. Άρα η σχέση (3.2.5) γράφεται και στη μορφή

$$\int A(x) dx + \int B(\psi(x)) \psi'(x) dx = C. \quad (3.2.6)$$

Εντάξει με το πρώτο πιο πάνω ολοκλήρωμα, αλλ' όχι ακόμη και με το δεύτερο. Λαμβάνοντας υπόψη ότι για τη ζητούμενη λύση μας

$$y = \psi(x) \implies dy = \psi'(x) dx, \quad (3.2.7)$$

συνάγουμε ότι το δεύτερο αυτό ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί και στην απόλυτα ισοδύναμη μορφή

$$\int B(\psi(x)) \psi'(x) dx = \int B(y) dy. \quad (3.2.8)$$

Στην τελική αυτή μορφή το δεύτερο ολοκλήρωμα της σχέσεως (3.2.6) απλοποιήθηκε, γιατί λάβαμε την πρόνοια να χρησιμοποιήσουμε τελικά τη μεταβλητή  $y$  αντί για τη μεταβλητή  $x$  σαν μεταβλητή ολοκλήρωσεως. (Ενώ αρχικά ήταν ολοκλήρωμα ως προς  $x$ , τώρα είναι ολοκλήρωμα ως προς  $y$ .) Επομένως η σχέση (3.2.6) λόγω της σχέσεως (3.2.8) παίρνει την τελική της μορφή

$$\int A(x) dx + \int B(y) dy = C. \quad (3.2.9)$$

Η μορφή αυτή, αφού εκτελεσθούν οι ολοκληρώσεις, σε όσο βαθμό βέβαια αυτό είναι δυνατόν, εκφράζει τη λύση της αρχικής διαφορικής εξισώσεως χωριζόμενων μεταβλητών (3.2.1) σε μια πεπλεγμένη γενικά μορφή, δηλαδή σε μορφή

$$F(x, y) = C. \quad (3.2.10)$$

Σε αρκετές ειδικές περιπτώσεις η λύση αυτή σε πεπλεγμένη μορφή μπορεί να γραφεί και σε λυμένη μορφή ως προς  $y$ , δηλαδή  $y = \psi(x)$ , και, αν είναι αναγκαίο, ως προς  $x$ , δηλαδή  $x = \chi(y)$ . Συνήθως η λυμένη μορφή (είτε ως προς  $y$  είτε ως προς  $x$ ) είναι και αυτή που προτιμάται στην πράξη.

### A3.2.2. Παρατηρήσεις

► **Παρατήρηση A3.1:** Πρακτικά μιλώντας, η τελική (και πεπλεγμένη) μορφή (3.2.9) της λύσεως της αρχικής διαφορικής εξισώσεως χωριζόμενων μεταβλητών (3.2.1) θα μπορούσε να θεωρηθεί απλά ότι προκύπτει με ολοκλήρωση του πρώτου όρου της εξισώσεως αυτής (3.2.1) ως προς  $x$  και του δεύτερου όρου της ως προς  $y$ . Σαν μνημονικός κανόνας αυτό είναι μια τέλεια ερμηνεία της λύσεως (3.2.9) που βρήκαμε. Από μαθηματικής όμως σκοπιάς η πιο αναλυτική απόδειξη της λύσεως (3.2.9), όπως εκτέθηκε πιο πάνω (δηλαδή με ολοκλήρωση μόνο ως προς τη μεταβλητή  $x$ ), είναι πιο σωστή και μάλιστα αυτή που προτιμάται συχνά στη μαθηματική βιβλιογραφία. Έναν περισσότερο απλό τρόπο προσδιορισμού της ίδιας λύσεως (3.2.9) θα παρουσιάσουμε πιο κάτω στην Ενότητα A3.6 βασιζόμενοι στη θεωρία των πλήρων (ή ακριβών) διαφορικών εξισώσεων. Δεν το κάναμε όμως εδώ, για να αποφύγουμε τη θεωρία αυτή, που δεν υπήρξε αναγκαία για την εύρεση της γενικής λύσεως (3.2.9). Έτσι κι αλλιώς οι διαφορικές εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών της παρούσας Ενότητας A3.2 με γενική μορφή την (3.2.1) είναι απλούστερες από τις πλήρεις (ή ακριβείς) διαφορικές εξισώσεις της Ενότητας A3.6 παρακάτω.

► **Παρατήρηση A3.2:** Σχετική με την προαναφερθείσα θεωρία των πλήρων (ή ακριβών) διαφορικών εξισώσεων είναι και η εξής απλή επαλήθευση της γενικής λύσεως (3.2.9) της διαφορικής εξισώσεως χωριζόμενων μεταβλητών (3.2.1). Προς το σκοπό αυτό απλά διαφορίζουμε τη σχέση αυτή (3.2.9), παίρνουμε το ολικό διαφορικό της και διαπιστώνουμε ότι

$$d \left[ \int A(x) dx + \int B(y) dy \right] = 0. \quad (3.2.11)$$

Αυτή εδώ η σχέση ισχύει, επειδή το διαφορικό της αυθαίρετης σταθεράς  $C$  στο δεξιό μέλος της λύσεως (3.2.9) είναι μηδέν. Στο αριστερό μέλος τώρα δεν ξεχνάμε από τον απειροστικό λογισμό ότι η παράγωγος ενός αόριστου ολοκληρώματος ως προς τη μεταβλητή ολοκλήρωσεως είναι η ίδια η ολοκληρωτέα συνάρτηση. Κατά συνέπεια έχουμε

$$\frac{d}{dx} \int A(x) dx = A(x), \quad \frac{d}{dy} \int B(y) dy = B(y). \quad (3.2.12)$$

Επομένως απόλυτα ισοδύναμα, αλλά σε μορφές διαφορικών τώρα, έχουμε

$$d \int A(x) dx = A(x) dx, \quad d \int B(y) dy = B(y) dy. \quad (3.2.13)$$

Κατά συνέπεια το ολικό διαφορικό στο αριστερό μέλος της σχέσεως (3.2.11) παίρνει τη μορφή

$$A(x)dx + B(y)dy = 0, \quad (3.2.14)$$

η οποία συμπίπτει με την αρχική διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών (3.2.1). Έτσι επαληθεύσαμε τη γενική λύση (3.2.9) της διαφορικής εξίσωσης χωριζόμενων μεταβλητών (3.2.1).

► **Παρατήρηση Α3.3:** Αρκετά συχνά μια διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών της μορφής (3.2.1) και γενικότερα μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως συνοδεύεται από μία αρχική συνθήκη της μορφής

$$y(x_0) = y_0. \quad (3.2.15)$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι έχουμε ένα **πρόβλημα αρχικής τιμής:** διαφορική εξίσωση (3.2.1) συν αρχική συνθήκη (3.2.15), το πρόβλημα

$$A(x)dx + B(y)dy = 0, \quad y(x_0) = y_0. \quad (3.2.16)$$

Σ' ένα πρόβλημα αρχικής τιμής μπορούμε βέβαια καταρχήν να βρούμε τη γενική λύση μόνο της διαφορικής εξίσωσης πρώτα στη μορφή (3.2.9) και μετά τις ολοκληρώσεις στη μορφή (3.2.10). Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας και την αρχική συνθήκη  $y(x_0) = y_0$ , μπορούμε φυσικά να προσδιορίσουμε και τη σταθερά  $C$ . Εναλλακτική δυνατότητα αποτελεί το να κάνουμε ορισμένη ολοκλήρωση αντί για αόριστη, έστω από  $x_0$  μέχρι  $x$  με αντίστοιχες τιμές  $y_0 = y(x_0)$  και  $y = y(x)$  για την εξαρτημένη μεταβλητή  $y$ . Με τη μέθοδο αυτή η γενική λύση (3.2.9) της διαφορικής εξίσωσης (3.2.1) μεταπίπτει στην ακόλουθη αντίστοιχη μερική λύση (ή ειδική λύση):

$$\int_{x_0}^x A(\xi) d\xi + \int_{y_0}^y B(\eta) d\eta = 0. \quad (3.2.17)$$

Στη μερική αυτή λύση προνοήσαμε να χρησιμοποιήσουμε τα σύμβολα  $\xi$  και  $\eta$  αντί για τα σύμβολα  $x$  και  $y$  αντίστοιχα σαν μεταβλητές ολοκληρώσεως. Με τον τρόπο αυτό δεν υπάρχει καμία σύγχυση ανάμεσα στις μεταβλητές ολοκληρώσεως  $\xi$  και  $\eta$  στα δύο ολοκληρώματα και στα πάνω όρια ολοκληρώσεως  $x$  και  $y$  αντίστοιχα. Δηλαδή έτσι αποφεύγεται κάθε σχετική σύγχυση. Από τη μερική λύση (3.2.17), η οποία είναι βέβαια και η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής (3.2.16), συνάγουμε αμέσως ότι επαληθεύεται η αρχική συνθήκη  $y(x_0) = y_0$ . Συγκεκριμένα τότε, δηλαδή για  $x = x_0$  και  $y = y_0$ , και τα δύο ολοκληρώματα στη μερική λύση (3.2.17) μηδενίζονται. Δε μας χρειάζεται επομένως καμία σταθερά  $C$  στο δεξιό μέλος της λύσεως (3.2.17).

► **Παρατήρηση Α3.4:** Πολλές φορές μια διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών δεν εμφανίζεται στη μορφή με διαφορικά (3.2.1). Μπορεί να εμφανίζεται σε μορφή με συνηθισμένες παραγώγους, όπως είναι οι μορφές της (3.2.2) και (3.2.3). Μπορεί επίσης να εμφανίζεται και σε εντελώς διαφορετική μορφή, η οποία όμως να είναι δυνατόν να αναχθεί στη βασική μορφή (3.2.1) της διαφορικής εξίσωσης χωριζόμενων μεταβλητών. Παραδείγματος χάρη, η διαφορική εξίσωση

$$y'(x) = f(x)g(y) \quad (3.2.18)$$

είναι χωριζόμενων μεταβλητών, επειδή μπορεί να γραφεί στην ισοδύναμη μορφή της

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx, \quad (3.2.19)$$

όπως εύκολα διαπιστώνουμε, αφού  $y'(x) = dy/dx$ . Υποθέτουμε βέβαια ότι  $g(y) \neq 0$  σε ολόκληρο το διάστημα  $(c, d)$  της μεταβλητής  $y$  που μας ενδιαφέρει.

Μέχρι το σημείο αυτό έχουμε αποκτήσει μια μέτρια εικόνα των διαφορικών εξισώσεων χωριζόμενων μεταβλητών (3.2.1) και, κυρίως, της επιλύσεώς τους. Πρόκειται για πάρα πολύ εύκολες διαφορικές εξισώσεις. Ας προχωρήσουμε τώρα σε τρία παραδείγματα.

### Α3.2.3. Παραδείγματα

▼ **Παράδειγμα Α3.1:** Να βρεθεί και να επαληθευθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης χωριζόμενων μεταβλητών

$$x dx + dy = 0. \quad (3.2.20)$$

**Λύση:** Σύμφωνα με τη θεωρία που προηγήθηκε, έχουμε το δικαίωμα να ολοκληρώσουμε τον πρώτο όρο ως προς  $x$  και το δεύτερο ως προς  $y$ . Έτσι προκύπτει η γενική λύση

$$\frac{x^2}{2} + y = C \quad (3.2.21)$$

σε πεπλεγμένη μορφή (με το  $C$  αυθαίρετη σταθερά) και

$$y = C - \frac{x^2}{2} \quad (3.2.22)$$

σε λυμένη ως προς  $y$  μορφή. Συχνά η εύρεση της λύσεως σε λυμένη μορφή δεν είναι εύκολη ή απλά είναι αδύνατη. Για την επαλήθευση απλά διαφορίζουμε την τελική λύση (3.2.22) παίρνοντας

$$dy = -x dx, \quad \text{οπότε} \quad x dx + dy = 0. \quad (3.2.23)$$

Προκύπτει έτσι η αρχική μας διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών (3.2.20). Επομένως ολοκληρώθηκε με επιτυχία και η επαλήθευση της γενικής λύσεως (3.2.22) που βρέθηκε. ▲

▼ **Παράδειγμα Α3.2:** Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$x dx + y^2 dy = 0 \quad (3.2.24)$$

με αρχική συνθήκη να έχουμε  $y = 2$  για  $x = 1$ , δηλαδή  $y(1) = 2$ .

**Λύση:** Παρατηρούμε ότι πρόκειται και πάλι για διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών και μάλιστα χωρίς να απαιτείται κανένας μετασχηματισμός της. Ολοκληρώνοντας τη διαφορική αυτή εξίσωση, παίρνουμε

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} = C. \quad (3.2.25)$$

Επειδή υπάρχει αρχική συνθήκη, μπορεί να προσδιορισθεί η σταθερά  $C$ . Θέτοντας λοιπόν  $x = 1$  και  $y = 2$  στη γενική λύση (3.2.25), προσδιορίζουμε τη σταθερά  $C$  ως εξής:

$$\frac{1^2}{2} + \frac{2^3}{3} = C \implies \frac{1}{2} + \frac{8}{3} = C \implies C = \frac{3}{6} + \frac{16}{6} = \frac{3+16}{6} \implies C = \frac{19}{6}. \quad (3.2.26)$$

Επομένως η μερική λύση (ή ισοδύναμα ειδική λύση) της διαφορικής εξίσωσης χωριζόμενων μεταβλητών (3.2.24) που ικανοποιεί και τη σχετική αρχική συνθήκη είναι η εξής λύση:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} = \frac{19}{6}. \quad (3.2.27)$$

Προφανώς αντί για τον όρο **μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης** θα μπορούσαμε θαυμάσια να χρησιμοποιήσουμε εδώ και τον όρο **λύση του προβλήματος αρχικής τιμής**. ▲

▼ **Παράδειγμα Α3.3:** Ζητούνται: (α) Να αναφερθούν τέσσερις χαρακτηρισμοί της διαφορικής εξίσωσης

$$y' = \frac{\tan x}{\tan y} \quad \text{με} \quad y = y(x) \quad (3.2.28)$$

και προφανώς με  $\tan y \neq 0$ . (β) Να βρεθεί η γενική λύση της.

**Λύση:** (α) Προφανώς πρόκειται: (i) για συνήθη διαφορική εξίσωση, (ii) πρώτης τάξεως (λόγω της παραγώγου  $y'$ , που είναι και η μόνη παράγωγος που εμφανίζεται στη διαφορική αυτή εξίσωση), (iii) μη γραμμική (λόγω του όρου  $\tan y$  στο δεξιό μέλος) και (iv) χωριζόμενων μεταβλητών. Σημειώνεται ότι ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το  $x$  και άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) είναι το  $y$ . Τέλος παρατηρείται πως γι' αυτήν τη διαφορική εξίσωση (3.2.28) δεν ορίζεται βαθμός, γιατί δεν έχει πολυωνυμική μορφή ως προς την άγνωστη συνάρτηση  $y$  και την παράγωγό της  $y'$  λόγω του όρου  $\tan y$  στο δεξιό μέλος της. Επίσης ούτε μπορεί να αναχθεί σε πολυωνυμική μορφή. (Αυτά μας είναι γνωστά από την Παράγραφο Α1.3.3 για το βαθμό διαφορικής εξίσωσης του προηγούμενου Κεφαλαίου Α1.) Το ότι η διαφορική αυτή εξίσωση (3.2.28) είναι χωριζόμενων μεταβλητών προκύπτει από την ακόλουθη ισοδύναμη γραφή της:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tan x}{\tan y}, \quad \text{οπότε τελικά} \quad \tan y \, dy = \tan x \, dx \quad (3.2.29)$$

με το αριστερό μέλος να εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητή  $y$  και το δεξιό μέλος μόνο από τη μεταβλητή  $x$ . Έτσι έχουν χωρισθεί οι δύο μεταβλητές  $x$  και  $y$ . Αυτό δε συνέβαινε στην αρχική μορφή (3.2.28) της ίδιας διαφορικής εξίσωσης.

(β) Για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης (3.2.28) τώρα στην ισοδύναμη μορφή της (3.2.29) δεξιά (με χωρισμένες εκεί τις δύο μεταβλητές  $x$  και  $y$ ) παίρνουμε καταρχήν υπόψη μας ότι

$$\int \tan z \, dz = \int \frac{\sin z}{\cos z} \, dz = - \int \frac{d \cos z}{\cos z} = - \ln |\cos z| + C, \quad (3.2.30)$$

αφού ισχύει ότι

$$\sin z \, dz = -d \cos z \quad \text{και επίσης ότι} \quad \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C \quad (3.2.31)$$

με το  $C$  μία αυθαίρετη σταθερά. Τώρα με βάση τον τύπο (3.2.30) ολοκληρώνοντας κατά μέλη τη διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών (3.2.29) (στη δεύτερη μορφή της), διαπιστώνουμε ότι

$$- \ln |\cos y| + C_1 = - \ln |\cos x| + C_2 \quad \implies \quad \ln |\cos x| - \ln |\cos y| = C_2 - C_1. \quad (3.2.32)$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε επίσης ότι

$$\ln \left| \frac{\cos x}{\cos y} \right| = C_3 \quad \text{με} \quad C_3 = C_2 - C_1, \quad (3.2.33)$$

όπου βέβαια τα σύμβολα  $C_1$ ,  $C_2$  και  $C_3$  δηλώνουν αυθαίρετες σταθερές. Από την τελευταία αυτή μορφή της λύσεως παίρνουμε την εκθετική συνάρτηση του αριστερού μέλους  $\ln |\cos x / \cos y|$  ίση με την εκθετική συνάρτηση του δεξιού μέλους  $C_3$ . Προσδιορίζουμε έτσι τη ζητούμενη λύση στην απλούστερη (χωρίς φυσικό λογάριθμο  $\ln$ ) μορφή της

$$\left| \frac{\cos x}{\cos y} \right| = e^{C_3} \quad \implies \quad \frac{\cos x}{\cos y} = C \quad \text{με} \quad C = \pm e^{C_3} \quad (3.2.34)$$

και τελικά

$$\cos x = C \cos y. \quad (3.2.35)$$

Στη συνέχεια, εάν θέλουμε, για την επαλήθευση παραγωγίζουμε ή, καλύτερα, διαφορίζουμε τη λύση αυτή (3.2.35), οπότε προκύπτει

$$- \sin x \, dx = -C \sin y \, dy. \quad (3.2.36)$$

Τελικά, διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (3.2.36) και (3.2.35), απαλείφουμε την αυθαίρετη σταθερά  $C$  παίρνοντας

$$-\tan x \, dx = -\tan y \, dy \implies \frac{dy}{dx} \equiv y'(x) = \frac{\tan x}{\tan y}. \quad (3.2.37)$$

Με την επαλήθευση αυτή της διαφορικής εξίσωσης (3.2.28) συμπληρώσαμε τη σχετική επίλυση.

Ας σημειώσουμε τέλος ότι για μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως, όπως είναι η παρούσα εξίσωση (3.2.28), είναι στ' αλήθεια αναμενόμενο να έχουμε μία αυθαίρετη σταθερά  $C$  στην τελική λύση της (3.2.35). Σε περίπτωση ενός προβλήματος αρχικής τιμής (με μία αρχική συνθήκη της μορφής  $y(x_0) = y_0$ ), είναι πραγματικά εύκολο να προσδιορίσουμε τη σταθερά  $C$  από την παραπάνω λύση (3.2.35). Αυτό το κατορθώνουμε, επειδή τότε θα πρέπει να ισχύει η σχέση

$$\cos x_0 = C \cos y_0 \implies C = \frac{\cos x_0}{\cos y_0}. \quad (3.2.38)$$

Τότε η γενική λύση (3.2.35) μεταπίπτει στην αντίστοιχη μερική λύση (ή ειδική λύση)

$$\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{\cos x_0}{\cos y_0} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \frac{\cos x}{\cos x_0} = \frac{\cos y}{\cos y_0}. \quad (3.2.39)$$

(Υποτίθεται βέβαια ότι σ' όλες τις σχέσεις του παρόντος παραδείγματος οι παρονομαστές που παρουσιάζονται είναι διάφοροι του μηδενός. Πάντως πρέπει να προσέχουμε το σημείο αυτό!) ▲

### A3.3. ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ

#### A3.3.1. Εισαγωγικά σχόλια

Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε στις καλούμενες **ομογενείς διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως** της μορφής

$$y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad (3.3.1)$$

όπου  $f(y/x)$  είναι μια γνωστή συνάρτηση της μιας μεταβλητής. Παρατηρούμε δηλαδή ότι το δεξιό μέλος μιας ομογενούς διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξεως εξαρτάται μόνο από το πηλίκο  $y/x$ .

► **Παρατήρηση A3.5:** Πριν αναφερθούμε στην επίλυση των ομογενών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως, είμαστε υποχρεωμένοι να παρατηρήσουμε ότι ο όρος **ομογενής** χρησιμοποιείται γενικά στις διαφορικές εξισώσεις με εντελώς διαφορετική έννοια. Συγκεκριμένα, όπως ήδη έχουμε δει στην Παράγραφο A1.3.6 του Κεφαλαίου A1, λέγοντας ομογενής διαφορική εξίσωση εννοούμε μια γραμμική διαφορική εξίσωση όπου όλοι οι όροι της περιέχουν είτε την άγνωστη συνάρτηση είτε μια παράγωγό της (υψωμένες φυσικά στην πρώτη δύναμη). Επομένως η χρήση του όρου ομογενής διαφορική εξίσωση για τις διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως της ειδικής μορφής (3.3.1) είναι *παραπλανητικός*. Δυστυχώς όμως αυτός είναι ο όρος που έχει επικρατήσει και αναγκαστικά τον αποδεχόμαστε κι εμείς σ' αυτήν εδώ την ενότητα.

Γενικά στις συναρτήσεις καλούμε μια συνάρτηση  $g(x, y)$  των δύο μεταβλητών  $x$  και  $y$  ομογενή βαθμού  $b$ , όταν ισχύει η σχέση

$$g(tx, ty) = t^b g(x, y) \quad (3.3.2)$$

για κάθε τιμή του  $t$  με  $t > 0$ . Επομένως για το πηλίκο  $h_1(x, y)/h_2(x, y)$  δύο ομογενών συναρτήσεων του ίδιου ακριβώς βαθμού  $b$  θα ισχύει η σχέση

$$\frac{h_1(tx, ty)}{h_2(tx, ty)} = \frac{t^b h_1(x, y)}{t^b h_2(x, y)} = \frac{t^b}{t^b} \frac{h_1(x, y)}{h_2(x, y)} = 1 \cdot \frac{h_1(x, y)}{h_2(x, y)} = \frac{h_1(x, y)}{h_2(x, y)} \quad \text{με } t > 0. \quad (3.3.3)$$

Επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό (3.3.2) των ομογενών συναρτήσεων, το πηλίκο  $h_1(x, y)/h_2(x, y)$  δύο ομογενών συναρτήσεων του ίδιου ακριβώς βαθμού  $b$  είναι επίσης ομογενής συνάρτηση, αλλά τώρα μηδενικού βαθμού.

Όμως για μια ομογενή συνάρτηση  $h(x, y)$  μηδενικού βαθμού  $b$  ( $b = 0$ ) με βάση τον ορισμό (3.3.2) των ομογενών συναρτήσεων και θέτοντας  $s'$  αυτόν  $t = 1/x$  (με  $x \neq 0$ ), θα ισχύει η σχέση

$$h(tx, ty) = h\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^0 h(x, y) = 1 \cdot h(x, y) \implies h(x, y) = h\left(\frac{x}{x}, \frac{y}{x}\right) = h\left(1, \frac{y}{x}\right) = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad (3.3.4)$$

αφού  $x/x = 1$  ( $x \neq 0$ ) και έχοντας θέσει στο τέλος  $f(z) := h(1, z)$ . Επομένως στην ομογενή διαφορική εξίσωση (3.3.1) το δεξιό μέλος  $f(y/x)$  είναι ουσιαστικά μια ομογενής συνάρτηση μηδενικού βαθμού ή εναλλακτικά το πηλίκο δύο ομογενών συναρτήσεων του ίδιου ακριβώς βαθμού  $b$ .

### Α3.3.2. Επίλυση των ομογενών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως

Για την επίλυση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξεως (3.3.1), την επαναλαμβάνουμε

$$y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad (3.3.5)$$

παρατηρούμε την ύπαρξη του πηλίκου  $y/x$  στο δεξιό μέλος της. Θεωρούμε μάλιστα σαν άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) την  $y = y(x)$  και σαν ανεξάρτητη μεταβλητή την  $x$ . Τώρα το πηλίκο  $y/x$  μπορεί βέβαια να εξαλειφθεί. Αυτό το πετυχαίνουμε εισάγοντας στη θέση του τη νέα εξαρτημένη μεταβλητή  $z = y/x$  ή, αναλυτικότερα,  $z(x) = y(x)/x$ . Επομένως τώρα θα έχουμε

$$z(x) = \frac{y(x)}{x} \implies y(x) = xz(x) \implies y'(x) = xz'(x) + 1 \cdot z(x) = xz'(x) + z(x) \quad (3.3.6)$$

για την παράγωγο  $y'(x)$  στο αριστερό μέλος της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (3.3.5).

Με τον τρόπο αυτό, έχοντας δηλαδή θέσει  $z = y/x$  (ή  $z(x) = y(x)/x$ ) και χρησιμοποιώντας τον τύπο (3.3.6) για την παράγωγο  $y'(x)$ , η ομογενής διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως (3.3.5) παίρνει την απλούστερη μορφή της

$$xz'(x) + z(x) = f(z(x)) \quad \text{και σε κάπως πιο απλή γραφή} \quad xz' + z = f(z). \quad (3.3.7)$$

Τί κάναμε λοιπόν; Μα απλά εισαγάγαμε στη θέση της άγνωστης συναρτήσεως (ή εξαρτημένης μεταβλητής)  $y = y(x)$  τη νέα εξαρτημένη μεταβλητή  $z = z(x)$ . Και τί πετύχαμε; Με τον τρόπο αυτό (αλλαγή της εξαρτημένης μεταβλητής από  $y$  σε  $z$ ) πετύχαμε την αναγωγή της αρχικής ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (3.3.5) στην πιο απλή διαφορική εξίσωση (3.3.7). Πιο απλή; Ναι, ασφαλώς πιο απλή, επειδή αυτή μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$xz' + z = f(z) \implies xz' = f(z) - z \implies x \frac{dz}{dx} = f(z) - z \implies \frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}. \quad (3.3.8)$$

Υποθέτουμε βέβαια στο τέλος ότι  $f(z) - z \neq 0$  (ισοδύναμα  $f(z) \neq z$ ) και επίσης ότι  $x \neq 0$ .

Από την τελική μορφή (3.3.8) της παρούσας διαφορικής εξίσωσης παρατηρούμε απλά πως ο πιο πάνω μετασχηματισμός  $z = y/x$  όχι μόνο μας έχει απαλλάξει από το πηλίκο  $y/x$  στο δεξιό μέλος  $f(y/x)$  της διαφορικής εξίσωσης (3.3.5), αλλ' επιπλέον έχει αναγάγει τη διαφορική αυτή εξίσωση σε διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών. Είναι λοιπόν (σαφώς είναι!) διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών η τελική μας διαφορική εξίσωση (3.3.8). Μπορεί επομένως να επιλυθεί σύμφωνα με τη σχετική θεωρία: τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων χωριζόμενων μεταβλητών, που αναπτύχθηκε στην προηγούμενη Ενότητα Α3.2. Άρα οι ομογενείς διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως της γενικής μορφής (3.3.5) ανάγονται εύκολα σε διαφορικές εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών απλά με την αλλαγή εξαρτημένης μεταβλητής από  $y$  σε  $z = y/x$ .

Στο τέλος, δηλαδή μετά την επίλυση της μετασχηματισμένης διαφορικής εξίσωσης (3.3.8), θα έχουμε βρει τη γενική λύση της στη μορφή

$$F(x, z, C) = 0 \quad (3.3.9)$$



με το  $C$  αυθαίρετη σταθερά. Δεν πρέπει όμως να αρκεσθούμε στη λύση αυτή. Είχαμε ξεκινήσει με άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) την  $y = y(x)$ . Σ' αυτή λοιπόν την άγνωστη συνάρτηση πρέπει να επιστρέψουμε στο τέλος κι αυτό μπορούμε να το πετύχουμε εύκολα απλά θέτοντας  $z = y/x$  στη λύση (3.3.9). Συνεπώς η λύση αυτή θα πάρει έτσι την τελική της μορφή

$$F\left(x, \frac{y}{x}, C\right) = 0. \quad (3.3.10)$$

► **Παρατήρηση Α3.6:** Ας παρατηρήσουμε στο σημείο αυτό ότι η γενική αυτή λύση (3.3.10) είναι φυσικά σε πεπλεγμένη μορφή, δηλαδή δεν είναι λυμένη ως προς την άγνωστη συνάρτηση  $y = y(x)$ . Σε μερικές περιπτώσεις μπορούμε πραγματικά να τη λύσουμε ως προς  $y = y(x)$ , γενικά όμως δεν έχουμε αυτήν τη δυνατότητα. Στη γενική αυτή περίπτωση θα πρέπει να αρκούμαστε στην πεπλεγμένη μορφή (3.3.10) της παρούσας λύσεως και να είμαστε μάλιστα και ευχαριστημένοι που φθάσαμε ως αυτήν. Πάρα πολλές διαφορικές εξισώσεις ακόμη και πρώτης τάξεως δεν έχουν κλειστές λύσεις ούτε καν σε πεπλεγμένη μορφή.

### Α3.3.3. Παραδείγματα

▼ **Παράδειγμα Α3.4:** Για την ομογενή διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως

$$y' = a \frac{y}{x} + b \quad \text{με} \quad y = y(x) \quad \text{και} \quad x > 0 \quad (3.3.11)$$

με τα  $a$  και  $b$  γνωστές σταθερές ζητείται απλά η αναγωγή της σε διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών.

**Λύση:** Σύμφωνα με τη θεωρία που προηγήθηκε απλά θέτουμε

$$z(x) = \frac{y(x)}{x} \implies y(x) = xz(x) \implies y'(x) = xz'(x) + z(x). \quad (3.3.12)$$

Μπορούμε έτσι (με τη νέα άγνωστη συνάρτηση  $z = z(x)$ ) να ξαναγράψουμε την ομογενή διαφορική εξίσωση (3.3.11) σαν εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών. Συγκεκριμένα με βάση τις σχέσεις (3.3.12) παίρνουμε την τροποποιημένη διαφορική εξίσωση

$$xz'(x) + z(x) = az(x) + b \implies xz'(x) + (1-a)z(x) = b \implies x \frac{dz}{dx} = b - (1-a)z, \quad (3.3.13)$$

οπότε τελικά

$$\frac{dz}{b - (1-a)z} = \frac{dx}{x}, \quad \text{εφόσον} \quad (1-a)z \neq b. \quad (3.3.14)$$

Καταλήξαμε λοιπόν σε μια διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών που μπορούμε εύκολα να επιλύσουμε. Δεν πρέπει όμως να λησμονήσουμε στη λύση της να θέσουμε στο τέλος  $z = y/x$ , ώστε να επανέλθουμε από τη βοηθητική εξαρτημένη μεταβλητή  $z = z(x)$  στην αρχική μας εξαρτημένη μεταβλητή  $y = y(x)$ . ▲

▼ **Παράδειγμα Α3.5:** Να βρεθεί η γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξεως

$$y'(x) = \operatorname{sech}\left(\frac{y(x)}{x}\right) + \frac{y(x)}{x}. \quad (3.3.15)$$

(Για την υπερβολική τέμνουσα  $\operatorname{sech}$  υπενθυμίζεται ότι  $\operatorname{sech} x := 1/\cosh x$ : τρίτη σχέση (1.5.7).)

**Λύση:** Και πάλι θα χρησιμοποιήσουμε την αλλαγή άγνωστης συναρτήσεως (ή εξαρτημένης μεταβλητής)  $z(x) = y(x)/x$ . Με βάση τη σχέση (3.3.6) ή (3.3.12) για την παράγωγο  $y'(x)$  η ομογενής διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως (3.3.15) παίρνει τώρα τη μορφή

$$xz'(x) + z(x) = \operatorname{sech} z(x) + z(x) \implies xz'(x) = \operatorname{sech} z(x). \quad (3.3.16)$$

Βέβαια τώρα πρόκειται για μια διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών: την εξίσωση

$$\frac{dz}{\operatorname{sech} z} = \frac{dx}{x} \implies \cosh z \, dz = \frac{dx}{x} \quad \text{με } z = z(x) \text{ και } x \neq 0. \quad (3.3.17)$$

Με ολοκλήρωση ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$  (σύμφωνα με τη σχετική θεωρία της προηγούμενης Ενότητας Α3.2 για χωριζόμενες μεταβλητές) βρίσκουμε αμέσως τη γενική λύση

$$\int \cosh z \, dz = \int \frac{dx}{x} + \ln |C| \implies \sinh z = \ln |x| + \ln |C| = \ln |Cx|. \quad (3.3.18)$$

Στη λύση αυτή χρησιμοποιήσαμε για διευκόλυνσή μας την ποσότητα  $\ln |C|$  (με διάστημα μεταβολής το άπειρο διάστημα  $(-\infty, \infty)$ ) για την αυθαίρετη σταθερά που προκύπτει από τις ολοκληρώσεις.

Απομένει τώρα στο τέλος να θέσουμε  $z = y/x$ , ώστε να επιστρέψουμε στην αρχική άγνωστη συνάρτηση  $y = y(x)$ . Έτσι η γενική λύση (3.3.18) ξαναγυρίζει στην αρχική άγνωστη συνάρτηση  $y$ :

$$\sinh\left(\frac{y}{x}\right) = \ln |Cx| \implies |Cx| = e^{\sinh(y/x)} \implies x = C_1 e^{\sinh(y/x)} \quad \text{με } C_1 = \pm \frac{1}{|C|} \quad (3.3.19)$$

για την τελική αυθαίρετη σταθερά  $C_1$ . Βέβαια, αφού η εκθετική συνάρτηση (exponential function) γράφεται και με το ισοδύναμο σύμβολο  $\exp$ , δηλαδή ισχύει  $\exp x \equiv e^x$ , η τελική αυτή λύση (3.3.19) γράφεται απόλυτα ισοδύναμα και στην ακόλουθη μορφή της:

$$x = C_1 \exp[\sinh(y/x)]. \quad (3.3.20)$$

Η λύση αυτή είναι σε πεπλεγμένη μορφή. Εντούτοις, εάν θέλουμε, μπορούμε να τη λύσουμε και ως προς την άγνωστη συνάρτηση  $y = y(x)$  με τη χρήση της λογαριθμικής συναρτήσεως  $\ln$  καθώς και της συναρτήσεως  $\sinh^{-1}$  (αντίστροφη συνάρτηση υπερβολικό ημίτονο). ▲

► **Παρατήρηση Α3.7:** Και πάλι σημειώνουμε ότι επιτρέπεται η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης χωριζόμενων μεταβλητών (3.3.17) με ολοκλήρωση αριστερά ως προς  $z$  και δεξιά ως προς  $x$ , όπως έγινε ουσιαστικά στη σχέση (3.3.18). Τούτο είναι ισοδύναμο, όπως ήδη αποδείξαμε γενικά στην Παράγραφο Α3.2.1, με ολοκλήρωση και των δύο μελών της εξίσωσης (3.3.17) ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$ , αφού  $z = z(x)$  και στο αριστερό μέλος. (Φυσικά δε θα επαναλάβουμε εδώ τη σχετική απόδειξη!)

## Α3.4. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ

### Α3.4.1. Εισαγωγή στις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τις μεθόδους επίλυσεως των τόσο γνωστών και πρακτικά χρήσιμων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως της γενικής μορφής

$$a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x). \quad (3.4.1)$$

Εδώ πρόκειται για τη γενική γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως, που είναι γενικά με μη σταθερούς (μεταβλητούς) συντελεστές  $a_1(x)$  και  $a_0(x)$  και επίσης μη ομογενής, δηλαδή με γνωστή συνάρτηση  $b(x)$  στο δεξιό μέλος της. Άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) είναι εδώ η συνάρτηση  $y = y(x)$  κι ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η  $x$ . Η ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$  μεταβάλλεται σε ένα διάστημα  $(c, d)$  ισχύος της διαφορικής εξίσωσης (3.4.1). (Για παράδειγμα, σε μια συνήθη δοκό μήκους  $L$  μεταβάλλεται κατά μήκος της δοκού μόνο, δηλαδή  $0 \leq x \leq L$ .) Τώρα στα δύο άκρα  $x = c$  και  $x = d$  αυτού του κλειστού διαστήματος  $[c, d]$  (αν έχει υποθεθεί κλειστό:  $[c, d]$ , γενικά υποτίθεται ανοικτό:  $(c, d)$ ) η παράγωγος  $y'(x)$  ορίζεται φυσικά σαν μονόπλευρη παράγωγος. Δηλαδή ορίζεται: (α) σαν παράγωγος από δεξιά στο αριστερό άκρο  $x = c$  και (β) σαν παράγωγος από αριστερά στο δεξιό άκρο  $x = d$  του κλειστού διαστήματος  $[c, d]$ .

Στην ειδική περίπτωση που  $b(x) \equiv 0$  στο δεξιό μέλος της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξεως (3.4.1) έχουμε την αντίστοιχη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση της μορφής

$$a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0. \quad (3.4.2)$$

Γενικά υποθέτουμε ότι ο συντελεστής  $a_1(x)$  της παραγωγού  $y' = y'(x)$  είναι συνεχώς μη μηδενικός σε ολόκληρο το διάστημα  $[a, b]$  ή  $(a, b)$  που ισχύει η γραμμική διαφορική εξίσωση. Στην περίπτωση αυτή, διαιρώντας με το συντελεστή αυτό  $a_1(x)$  και θέτοντας

$$p(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}, \quad q(x) = \frac{b(x)}{a_1(x)} \quad \text{με} \quad a_1(x) \neq 0, \quad (3.4.3)$$

ξαναγράφουμε τη γενική γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως (3.4.1) στην κάπως απλούστερη μορφή της

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x). \quad (3.4.4)$$

Η αντίστοιχη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση (αυτή με  $q(x) \equiv 0$ ) παίρνει τώρα τη μορφή

$$y'(x) + p(x)y(x) = 0. \quad (3.4.5)$$

Τούτο προκύπτει εξάλλου και από την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση (3.4.2) με διαίρεση και πάλι με το συντελεστή  $a_1(x)$  και στη συνέχεια με χρήση της πρώτης σχέσεως (3.4.3):  $p(x) = a_0(x)/a_1(x)$ .

Πάρα πολύ συχνά παρουσιάζονται γραμμικές διαφορικές εξισώσεις στα προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού (και γενικότερα βέβαια!). Άλλοτε οι φυσικοί νόμοι και οι υποθέσεις τις οποίες κάνουμε μας οδηγούν κατευθείαν σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Άλλοτε πάλι δε μας οδηγούν. Τότε συχνά αναγκαζόμαστε να κάνουμε προσέγγιση μιας μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με γραμμική. Κάνουμε δηλαδή **γραμμικοποίηση**, στην οποία ήδη αναφερθήκαμε στην Ενότητα A1.4.

Τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις κάθε τάξεως  $n$  θα τις μελετήσουμε λεπτομερώς παρακάτω στο Κεφάλαιο A5 και σε επόμενα κεφάλαια. Ουσιαστικά από το Κεφάλαιο A5 και μετά θα ασχολούμαστε αποκλειστικά με τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και με τις ποικίλες μεθόδους επίλυσής τους. Όμως στην Ενότητα αυτή A3.4 θα περιορίσουμε την προσοχή μας στις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως: ομογενείς και μη ομογενείς, επίσης με μη σταθερούς (μεταβλητούς) και με σταθερούς συντελεστές.

Το σχέδιό μας στην Ενότητα αυτή A3.4 είναι να επιλύσουμε καταρχήν την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως (3.4.5). Στη συνέχεια θα επιλύσουμε τη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως (3.4.4) με δύο εντελώς διαφορετικές μεθόδους: (α) με τη μέθοδο της μεταβολής της παραμέτρου και (β) με τη μέθοδο του ολοκληρωτικού παράγοντα. Στο τέλος της ενότητας θα εξηγήσουμε και την ειδική μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως για την επίλυση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (3.4.5), αλλά με σταθερό συντελεστή:  $p(x) = p$  (σταθερό). Θα κάνουμε επίσης μια πολύ σύντομη εισαγωγή και στη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών για την αντίστοιχη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως (3.4.4), αλλά και πάλι με σταθερό συντελεστή  $p(x) = p$ .

Όλη αυτή η εργασία μας πέρα από την προφανή καθαυτό χρησιμότητά της: θα μάθουμε δηλαδή να λύνουμε πλήρως κάθε γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως, θα μας χρησιμεύσει επιπλέον και σαν μια εισαγωγή, για να προχωρήσουμε στο μεθεπόμενο Κεφάλαιο A5 στις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις κάθε τάξεως  $n$ . Ας μη χρονοτριβούμε λοιπόν και ας ξεκινήσουμε αμέσως το έργο μας σύμφωνα με το σχέδιο που ήδη καταστρώσαμε και εκθέσαμε.

#### A3.4.2. Επίλυση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

Σε πρώτη φάση θα επιλύσουμε την παραπάνω ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης

τάξεως (3.4.5), την επαναλαμβάνουμε

$$y'(x) + p(x)y(x) = 0 \quad (3.4.6)$$

με μη σταθερό (μεταβλητό) γενικά το συντελεστή  $p(x)$ . (Εντούτοις όλα όσα θα αναφερθούν ισχύουν προφανώς και για την απλούστερη περίπτωση του σταθερού συντελεστή  $p(x) = p$ .)

Αυτό που παρατηρούμε στην ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (3.4.6) είναι ότι είναι μια διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών. Ας προσέξουμε το σημείο αυτό λίγο καλύτερα μη λησμονώντας βέβαια ότι  $y'(x) = dy/dx$ . Επομένως

$$y'(x) + p(x)y(x) = 0 \implies \frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \implies \frac{dy}{y} = -p(x) \implies \frac{dy}{y} = -p(x) dx \quad (3.4.7)$$

φυσικά έχοντας υποθέσει στο τέλος ότι  $y \neq 0$  για τη διαίρεση με  $y$ . (Ας λάβουμε βέβαια υπόψη μας ότι η μηδενική συνάρτηση  $y(x) = 0$  είναι έτσι κι αλλιώς μία λύση της διαφορικής εξίσωσης (3.4.6). Αμέσως επαληθεύεται αυτό!)

Χωρίστηκαν λοιπόν οι μεταβλητές  $y$  (εξαρτημένη) και  $x$  (ανεξάρτητη) στην τελευταία διαφορική εξίσωση (3.4.7). Ας προχωρήσουμε επομένως στην επίλυσή της με ολοκλήρωση σύμφωνα με όσα εκτέθηκαν στην Παράγραφο Α3.2.1 και οδήγησαν στο μνημονικό κανόνα της Παρατηρήσεως Α3.1: ολοκλήρωση και των δύο όρων, του καθενός όμως ως προς τη δικιά του μεταβλητή (εξαρτημένη ή ανεξάρτητη). Επομένως εδώ η ολοκλήρωση μας δίνει

$$\frac{dy}{y} = -p(x) dx \implies \ln |y| = - \int p(x) dx + C_1 \quad (3.4.8)$$

με  $C_1$  τη σχετική αυθαίρετη σταθερά. Παίρνουμε τώρα την εκθετική συνάρτηση του  $\ln |y|$  στο αριστερό μέλος της λύσεως αυτής (3.4.8). Αυτή προφανώς θα είναι ίση με την εκθετική συνάρτηση του δεξιού μέλους:  $- \int p(x) dx + C_1$ , το οποίο είναι βέβαια ίσο με το αριστερό:  $\ln |y|$ . Άρα

$$\ln |y| = - \int p(x) dx + C_1 \implies e^{\ln |y|} = e^{- \int p(x) dx + C_1} \quad (3.4.9)$$

ή με τη χρήση του ισοδύναμου συμβόλου  $\exp$ , αν το προτιμάμε (είναι ισοδύναμος συμβολισμός έτσι κι αλλιώς),

$$\exp(\ln |y|) = \exp\left(- \int p(x) dx + C_1\right). \quad (3.4.10)$$

Ασφαλώς γνωρίζουμε επίσης τις γνωστές στοιχειώδεις ιδιότητες της εκθετικής συναρτήσεως

$$e^{\ln |u|} = |u| \quad \text{και} \quad e^{u_1 + u_2} = e^{u_1} e^{u_2} \quad (3.4.11)$$

και μάλιστα για κάθε πραγματικό αριθμό  $u, u_1, u_2$ . Με βάση τις στοιχειώδεις αυτές ιδιότητες της εκθετικής συναρτήσεως η λύση (3.4.9) ή ισοδύναμα (3.4.10) που βρήκαμε απλοποιείται στη μορφή

$$|y| = e^{C_1} e^{- \int p(x) dx} \implies y = \pm e^{C_1} e^{- \int p(x) dx}. \quad (3.4.12)$$

Επομένως έχουμε τελικά τη γενική λύση που ζητούσαμε:

$$y(x) = Ce^{- \int p(x) dx} \quad \text{με} \quad C = \pm e^{C_1} \quad (3.4.13)$$

για την αυθαίρετη σταθερά στη γενική αυτή λύση. Ασφαλώς ήταν αναμενόμενη η παρουσία μιας σταθεράς, τελικά της  $C$ , στη γενική λύση που βρήκαμε της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (3.4.6). Είχαμε μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως. Εύλογα περιμέναμε μία σταθερά  $C$  στη γενική λύση της (3.4.13). Φυσικά σ' ένα πρόβλημα αρχικής τιμής η σταθερά αυτή  $C$  θα προσδιορισθεί από τη σχετική αρχική συνθήκη  $y(x_0) = y_0$ , η οποία ισχύει στο σημείο  $x = x_0$ .

Μπορούμε τώρα να επαληθεύσουμε εύκολα τη γενική λύση (3.4.13) που βρήκαμε. Αρκεί να την παραγωγίσουμε πρώτα μία φορά, οπότε

$$y'(x) = -Cp(x)e^{-\int p(x) dx}, \quad \text{αφού} \quad \frac{d}{dx} \left( e^{-\int p(x) dx} \right) = -p(x)e^{-\int p(x) dx}. \quad (3.4.14)$$

Στη συνέχεια θα πρέπει να αντικαταστήσουμε τις εκφράσεις της λύσεως  $y(x)$  και της πρώτης παραγώγου της  $y'(x)$  από τις σχέσεις (3.4.13) και (3.4.14) αντίστοιχα στην ίδια τη διαφορική μας εξίσωση (3.4.6). Με τον τρόπο αυτό προκύπτει αμέσως ότι

$$y'(x) + p(x)y(x) = 0 \implies -Cp(x)e^{-\int p(x) dx} + p(x)Ce^{-\int p(x) dx} = 0 \implies 0 = 0, \quad (3.4.15)$$

μια ταυτότητα που προφανώς ισχύει. Ήταν λοιπόν πάρα πολύ απλή η επαλήθευση της γενικής λύσεως (3.4.13) της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξεως (3.4.6).

### A3.4.3. Επίλυση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

Θα προχωρήσουμε τώρα στην επίλυση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξεως. Προς το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε δύο εντελώς διαφορετικές μεθόδους: **(α) τη μέθοδο της μεταβολής της παραμέτρου** και **(β) τη μέθοδο του ολοκληρωτικού παράγοντα**. Φυσικά και οι δύο αυτές μέθοδοι θα καταλήξουν τελικά ακριβώς στην ίδια γενική λύση  $y(x)$ .

#### A3.4.3.1. Η μέθοδος της μεταβολής της παραμέτρου

Η μέθοδος της μεταβολής της παραμέτρου βασίζεται στη γενική λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης που μόλις βρήκαμε στη σχέση (3.4.13), την επαναλαμβάνουμε

$$y(x) = Ce^{-\int p(x) dx}, \quad (3.4.16)$$

όπου το σύμβολο  $C$  δηλώνει μια αυθαίρετη (οποιαδήποτε) σταθερά. Πρόκειται βέβαια για μια μονοπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων με παράμετρο το  $C$ .

Η ιδέα της μεθόδου της μεταβολής της παραμέτρου είναι σχετικά απλή. Η γενική λύση (3.4.16) αφορά στην ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (3.4.6), δηλαδή στην εξίσωση

$$y'(x) + p(x)y(x) = 0. \quad (3.4.17)$$

Πολύ ωραία! Όμως εμείς εδώ θέλουμε να βρούμε τη γενική λύση της μη ομογενούς (της πλήρους) διαφορικής εξίσωσης (3.4.4), δηλαδή της εξίσωσης

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x). \quad (3.4.18)$$

Τώρα όμως που έχουμε και τη γνωστή συνάρτηση  $q(x)$  στο δεξιό μέλος θα δώσουμε μια επιπλέον δυνατότητα στη λύση (3.4.16): τη δυνατότητα η σταθερά  $C$  να παύσει να είναι σταθερά, να είναι συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής  $x$ . Έτσι θα έχουμε  $C = C(x)$  και η μέθοδος καλείται μερικές φορές **μέθοδος της μεταβολής της σταθεράς**. Εμείς όμως προτιμάμε τον όρο **μέθοδος της μεταβολής της παραμέτρου**, γιατί δε μας αρέσει πια η λέξη σταθερά, αφού το  $C$  μεταβάλλεται με το  $x$ . Ας δηλώσουμε μάλιστα την παράμετρο  $C$  με διαφορετικό σύμβολο:  $A$  αντί για  $C$ , έτσι ώστε να καταστήσουμε ακόμη πιο σαφές το γεγονός ότι πρόκειται για συνάρτηση:  $A = A(x)$ , όχι πια για σταθερά  $C$ . Έτσι θα δοκιμάσουμε την πιθανή λύση

$$y(x) = A(x)e^{-\int p(x) dx} \quad (3.4.19)$$

για τη μη ομογενή διαφορική εξίσωση (3.4.18). Βέβαια, έχοντας την ελευθερία να μπορούμε να προσδιορίσουμε την προς το παρόν άγνωστη συνάρτηση  $A(x)$ , θα κάνουμε τον προσδιορισμό αυτό αμέσως παρακάτω με τέτοιο τρόπο, ώστε να «αντιμετωπίσουμε» τη συνάρτηση  $q(x)$  στο

δεξιό μέλος της διαφορικής εξίσωσης (3.4.18). Αυτή η συνάρτηση  $q(x)$  είναι εκείνη που καθιστά τη διαφορική εξίσωση (3.4.18) μη ομογενή και κάνει τη λύση (3.4.16) της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (3.4.17) να μην ισχύει πλέον.

Προχωράμε τώρα στον προσδιορισμό της άγνωστης συναρτήσεως  $A(x)$ , της μεταβαλλόμενης παραμέτρου μας. Προς το σκοπό αυτό παραγωγίζουμε την πιο πάνω λύση (3.4.19) που έχουμε υποθέσει και βρίσκουμε την παράγωγο της

$$y'(x) = A'(x)e^{-\int p(x) dx} + A(x)[-p(x)]e^{-\int p(x) dx} = A'(x)e^{-\int p(x) dx} - p(x)A(x)e^{-\int p(x) dx}. \quad (3.4.20)$$

Στην παράγωγο αυτή  $y'(x)$  πήραμε υπόψη τον κανόνα παραγωγίσεως γινομένου δύο συναρτήσεων

$$\frac{d}{dx} [u(x)v(x)] = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \quad (3.4.21)$$

καθώς και το γνωστό τύπο

$$\frac{d}{dx} \left( e^{-\int p(x) dx} \right) = -p(x)e^{-\int p(x) dx} \quad (3.4.22)$$

για την παράγωγο της εκθετικής συναρτήσεως του αόριστου ολοκληρώματος  $-\int p(x) dx$ .

Τώρα πια μας απομένει η αντικατάσταση της συναρτήσεως  $y(x)$  της σχέσεως (3.4.19) και της πρώτης παραγώγου της  $y'(x)$  της σχέσεως (3.4.20) στη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (3.4.18). Με τον τρόπο αυτό προκύπτει ότι

$$A'(x)e^{-\int p(x) dx} - p(x)A(x)e^{-\int p(x) dx} + p(x)A(x)e^{-\int p(x) dx} = q(x). \quad (3.4.23)$$

Πέτυχε λοιπόν το τέχνασμα της μεταβολής της παραμέτρου: στην εξίσωση αυτή (3.4.23) οι δύο όροι  $-p(x)A(x)e^{-\int p(x) dx}$  είναι αντίθετοι και απλοποιούνται. Μας απομένει τώρα η στοιχειώδης διαφορική εξίσωση

$$A'(x)e^{-\int p(x) dx} = q(x) \quad (3.4.24)$$

ως προς την άγνωστη μεταβαλλόμενη παράμετρο: τη συνάρτηση  $A(x)$ , την οποία επιζητούμε να προσδιορίσουμε. Τη διαφορική αυτή εξίσωση τη λύνουμε εύκολα γράφοντάς τη στη μορφή

$$A'(x) = q(x)e^{\int p(x) dx} \quad (3.4.25)$$

και απλά ολοκληρώνοντας ως προς  $x$ , οπότε

$$A(x) = \int q(x)e^{\int p(x) dx} dx + C. \quad (3.4.26)$$

Στη συνάρτηση-λύση αυτή  $A(x)$  το σύμβολο  $C$  δηλώνει μια αυθαίρετη σταθερά: τη σταθερά της ολοκληρώσεως (3.4.26).

Προσδιορίσθηκε επομένως η άγνωστη συνάρτηση (η μεταβαλλόμενη παράμετρος)  $A(x)$ . Απλά τώρα την αντικαθιστούμε στη λύση (3.4.19) που έχουμε βρει και παίρνουμε τον τελικό τύπο

$$y(x) = \left[ \int q(x)e^{\int p(x) dx} dx + C \right] e^{-\int p(x) dx} \quad (3.4.27)$$

για τη λύση  $y(x)$  της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (3.4.18), της εξίσωσης

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x). \quad (3.4.28)$$

Φυσικά, εισάγοντας τη βοηθητική συνάρτηση

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx}, \quad \text{οπότε} \quad \frac{1}{\mu(x)} = e^{-\int p(x) dx}, \quad (3.4.29)$$

έχουμε θαυμάσια τη δυνατότητα να ξαναγράψουμε τη γενική λύση (3.4.27) της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (3.4.28) στην κάπως πιο συνεπτυγμένη τελική μορφή της

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left[ \int q(x)\mu(x) dx + C \right]. \quad (3.4.30)$$

► **Παρατήρηση A3.8:** Δεν αποτελεί στόχο του μαθήματος Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II η αποστήθιση του τύπου (3.4.27) της γενικής λύσεως της μη ομογενούς ( $q(x) \neq 0$ ) γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (3.4.28). Ούτε και του λίγο πιο κομψού ισοδύναμου τύπου (3.4.30). Στόχους του μαθήματος αποτελούν: (α) η κατανόηση της σκέψης που υποκρύπτεται στη μέθοδο της μεταβολής της παραμέτρου καθώς και (β) η δυνατότητα απευθείας εκτελέσεως από το φοιτητή και τη φοιτήτρια Πολιτικό Μηχανικό των υπολογισμών που οδήγησαν στη λύση (3.4.27), ισοδύναμα (3.4.30), σε μια συγκεκριμένη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως. Η αποστήθιση πολύπλοκων τύπων, όπως του τελικού τύπου (3.4.27), είναι δουλειά του προγραμματισμένου ηλεκτρονικού υπολογιστή, που διαθέτει άφθονη μνήμη για το σκοπό αυτό. Δεν είναι δουλειά του φοιτητή και της φοιτήτριας Πολιτικού Μηχανικού, που υποχρέωση έχει να μαθαίνει να σκέπτεται παρά να αποστηθίζει πολύπλοκους τύπους.

### A3.4.3.2. Μια βασική ιδιότητα της γενικής λύσεως της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

Καταρχήν ας ξαναθυμηθούμε τη γενική λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξεως (αυτής με  $q(x) \equiv 0$ ) στη σχέση (3.4.13)

$$y_h(x) = Ce^{-\int p(x) dx} \quad (3.4.31)$$

συμβολίζοντάς την εδώ με  $y_h(x)$ . (Ο δείκτης  $h$  αποτελεί σύντμηση της λέξεως *homogeneous*: ομογενής.) Παρατηρούμε άμεσα ότι η λύση αυτή μπορεί να ξαναγραφεί και στην απλούστερη μορφή

$$y_h(x) = \frac{C}{\mu(x)} \quad (3.4.32)$$

με τη χρήση της συναρτήσεως  $\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$ , η οποία ορίστηκε στη σχέση (3.4.29). Επιπλέον, θέτοντας  $C = 0$  στη γενική λύση (3.4.30) της μη ομογενούς (με  $q(x) \neq 0$ ) γραμμικής διαφορικής εξίσωσης που εξετάζουμε, παίρνουμε αμέσως και την εξής μερική (ή ειδική) λύση της (για  $C = 0$ ):

$$y_p(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int q(x)\mu(x) dx. \quad (3.4.33)$$

(Ο δείκτης  $p$  τέθηκε στη λύση  $y_p(x)$  σαν σύντμηση της λέξεως *partial*: μερική, ή *particular*: ειδική.)

Έχουμε τώρα στην πλήρη διάθεσή μας: (α) τη γενική λύση  $y_h(x)$  της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (από τη σχέση (3.4.31)) καθώς και (β) μια μερική (ή ειδική) λύση  $y_p(x)$  της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (μέσω της σχέσεως (3.4.33)). Απλά μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η γενική λύση  $y(x)$  της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης, που δίνεται από τη σχέση (3.4.30), μπορεί να γραφεί και στην ακόλουθη μορφή άθροισματος:

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) \quad \text{ισοδύναμα} \quad y(x) = y_h(x) + y_p(x). \quad (3.4.34)$$

Κατά συνέπεια το συμπέρασμά μας είναι πως η γενική λύση  $y(x)$  της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξεως (3.4.28) είναι απλά το άθροισμα της γενικής λύσεως  $y_h(x)$  της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης (με  $q(x) \equiv 0$ ) συν μια οποιαδήποτε μερική λύση  $y_p(x)$  της αρχικής μη ομογενούς εξίσωσης (με  $q(x) \neq 0$ ). Είναι αρκετά ενδιαφέρον από θεωρητικής (αλλά και πρακτικής) πλευράς το συμπέρασμα αυτό. Θα δούμε μάλιστα στο μεθεπόμενο Κεφάλαιο A5 ότι συνεχίζει να ισχύει για κάθε τάξεως  $n$  μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση. Το συμπέρασμά μας (3.4.34) αποτελεί απλά μια ειδική περίπτωση (για  $n = 1$ ) του γενικότερου σχετικού συμπεράσματος, στο οποίο θα καταλήξουμε στο Κεφάλαιο A5.

Για να εμπεδώσουμε καλύτερα το συμπέρασμα αυτό (3.4.34), θα το αποδείξουμε και άμεσα στην παρούσα ειδική περίπτωση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως. Θεωρούμε πρώτα τη γενική λύση  $y_h(x)$  της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως πρώτης τάξεως (με  $q(x) \equiv 0$ ). Προφανώς θα επαληθεύεται η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση:

$$y'_h(x) + p(x)y_h(x) = 0. \quad (3.4.35)$$

Στη συνέχεια θεωρούμε και μια μερική (ή ειδική) λύση  $y_p(x)$  της αντίστοιχης μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως (με  $q(x) \neq 0$ ). Τώρα θα επαληθεύεται η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y'_p(x) + p(x)y_p(x) = q(x). \quad (3.4.36)$$

Αθροίζοντας κατά μέλη τις δύο προηγούμενες σχέσεις (3.4.35) και (3.4.36), διαπιστώνουμε εύκολα ότι

$$y'_h(x) + y'_p(x) + p(x)[y_h(x) + y_p(x)] = q(x). \quad (3.4.37)$$

Γνωρίζουμε ακόμη ότι για το άθροισμα

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \quad (3.4.38)$$

των δύο συναρτήσεων (εδώ λύσεων)  $y_h(x)$  και  $y_p(x)$  ισχύει ο εξής τύπος παραγωγίσεως:

$$y'(x) = y'_h(x) + y'_p(x). \quad (3.4.39)$$

Δηλαδή ισχύει ότι η παράγωγος ενός αθροίσματος συναρτήσεων ισούται με το άθροισμα των παραγώγων των συναρτήσεων-όρων του αθροίσματος. Επομένως η σχέση (3.4.37) μπορεί να γραφεί και στη μορφή

$$[y_h(x) + y_p(x)]' + p(x)[y_h(x) + y_p(x)] = q(x) \quad \text{και ισοδύναμα} \quad y'(x) + p(x)y(x) = q(x) \quad (3.4.40)$$

με τη συνάρτηση  $y(x)$  να δηλώνει το άθροισμα  $y_h(x) + y_p(x)$ .

Άρα διαπιστώνουμε ξανά, και μάλιστα ανεξάρτητα από τον τύπο (3.4.27) ή (3.4.30), ότι το άθροισμα  $y(x)$  της γενικής λύσεως  $y_h(x)$  της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως πρώτης τάξεως και μιας μερικής λύσεως  $y_p(x)$  της αντίστοιχης μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως αποτελεί λύση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως. Θα γενικεύσουμε το συμπέρασμα αυτό στη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση  $n$ -τάξεως (εδώ  $n = 1$ ) στο μεθεπόμενο Κεφάλαιο Α5.

Εδώ περιοριζόμαστε σε μία ακόμη σχετική παρατήρηση. Η πιο πάνω λύση  $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$  περιέχει μία σταθερά, τη  $C$ , και έχουμε μάλιστα μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως. Άρα, αφού έχουμε μία σταθερά  $C$ , προσδοκούμε η λύση αυτή  $y(x)$  να είναι η γενική λύση αυτής της διαφορικής εξισώσεως. Για το σκοπό αυτό καλό είναι να κάνουμε και επαλήθευση της λύσεως αυτής  $y(x)$ , έστω στη μορφή της (3.4.27). Βέβαια μια τέτοια επαλήθευση αποτελεί απλή άσκηση στις παραγωγίσεις και θα την παραλείψουμε. Εντούτοις είναι πολύ σημαντικό να σημειώσουμε ότι απαιτείται από τη γενική λύση  $y(x)$  και η δυνατότητα επιλύσεως του προβλήματος αρχικής τιμής

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x), \quad y(x_0) = y_0. \quad (3.4.41)$$

Στο πρόβλημα αυτό θεωρείται βέβαια γνωστή η αρχική τιμή  $y_0$  της άγνωστης συναρτήσεως  $y(x)$  στο σημείο  $x = x_0$  του διαστήματος  $(a, b)$  ισχύος της διαφορικής εξισώσεως (3.4.41).

Αυτό που πρέπει τώρα να γίνει είναι να αποδειχθεί ότι η γενική λύση  $y(x)$  μπορεί να αποτελέσει και τη λύση του προβλήματος αρχικής τιμής (3.4.41) φυσικά με την κατάλληλη επιλογή



της σταθεράς  $C$ . Και πράγματι αυτό είναι εφικτό. Απλά παίρνουμε τη γενική λύση  $y(x)$  της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως πρώτης τάξεως (3.4.41) στη μορφή της (3.4.30), την επαναλαμβάνουμε

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left[ \int q(x)\mu(x) dx + C \right] \quad \text{με} \quad \mu(x) = e^{\int p(x) dx} \quad (3.4.42)$$

και επιζητούμε εδώ την πλήρωση και της αρχικής συνθήκης  $y(x_0) = y_0$  στο πρόβλημα αρχικής τιμής (3.4.41). Έτσι έχουμε

$$y(x_0) = y_0 = \frac{1}{\mu(x_0)} [R(x_0) + C] \implies C = \mu(x_0)y_0 - R(x_0) \quad \text{με} \quad R(x) = \int q(x)\mu(x) dx. \quad (3.4.43)$$

Επομένως η λύση (3.4.42) είναι η γενική λύση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως πρώτης τάξεως (3.4.41). Αν μάλιστα η σταθερά  $C$  προσδιορισθεί από τον τύπο (3.4.43), η γενική αυτή λύση  $y(x)$  καθίσταται η λύση (η μοναδική λύση!) του προβλήματος αρχικής τιμής (3.4.41).

Βέβαια στην περίπτωση του προβλήματος αρχικής τιμής (3.4.41) ενδιαφέρουσα εναλλακτική δυνατότητα αποτελεί η χρήση ορισμένων ολοκληρωμάτων (από  $x_0$  μέχρι  $x$ ) αντί για αόριστα ολοκληρώματα κατά την επίλυση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως. Έτσι δε θα παρουσιασθεί καθόλου η σταθερά  $C$  της ολοκλήρωσεως: δηλαδή θα οδηγηθούμε κατευθείαν στη ζητούμενη λύση του προβλήματος αρχικής τιμής (3.4.41). Είναι όμως αμφίβολο αν η δυνατότητα αυτή είναι πραγματικά υπολογιστικά προτιμότερη σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα αρχικής τιμής.

#### A3.4.3.3. Η μέθοδος του ολοκληρωτικού παράγοντα

Στο προπροηγούμενο Εδάφιο A3.4.3.1 περιγράψαμε τη μέθοδο της μεταβολής της παραμέτρου για την επίλυση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως πρώτης τάξεως

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x). \quad (3.4.44)$$

Μια εξίσου ενδιαφέρουσα και λίγο περισσότερο δημοφιλής μέθοδος για την επίλυση της ίδιας εξισώσεως (3.4.44) είναι η μέθοδος του **ολοκληρωτικού παράγοντα**  $\mu(x)$ . Τη λεπτομερή εξήγηση της μεθόδου αυτής έχουμε την πρόθεση να την περιγράψουμε στην Ενότητα A3.7 παρακάτω και να εξηγήσουμε το πώς ακριβώς προσδιορίζεται ο ολοκληρωτικός παράγοντας  $\mu(x)$  για την παρούσα διαφορική εξίσωση (3.4.44). Στο εδάφιο αυτό θα εργασθούμε λίγο πιο απλά, εμπειρικά, αν επιτρέπεται η λέξη αυτή.

Συγκεκριμένα θεωρούμε την εκθετική συνάρτηση

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx} \quad (3.4.45)$$

και την αποκαλούμε **ολοκληρωτικό παράγοντα** της διαφορικής εξισώσεως (3.4.44). Αυτή η συνάρτηση θα μας βοηθήσει να βρούμε τη γενική λύση  $y(x)$  της ίδιας διαφορικής εξισώσεως (3.4.44). Οφείλουμε να αναφέρουμε ότι εκ προθέσεως χρησιμοποιήσαμε τον ίδιο συμβολισμό και για την ίδια συνάρτηση  $\mu(x)$  που ορίσαμε στη σχέση (3.4.29), την οποία συνάρτηση χρησιμοποιήσαμε στη μέθοδο της μεταβολής της παραμέτρου. Παρά ταύτα η μέθοδος του ολοκληρωτικού παράγοντα στο παρόν εδάφιο δεν έχει καμία απολύτως σχέση με τη μέθοδο της μεταβολής της παραμέτρου εκτός βέβαια από το γεγονός ότι επιδιώκουμε να λύσουμε την ίδια διαφορική εξίσωση (3.4.44). Επιπλέον θα χρησιμοποιήσουμε μάλιστα και την ίδια συνάρτηση  $\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$ , εδώ όμως σαν έναν ολοκληρωτικό παράγοντα.

Και για ποιον ακριβώς λόγο ο όρος **ολοκληρωτικός παράγοντας** για τη συνάρτηση  $\mu(x)$ ; Απλά γιατί η συνάρτηση αυτή  $\mu(x)$  θα μας φανεί χρήσιμη κατά την επίλυση της διαφορικής εξισώσεώς μας (3.4.44). Όμως στις Διαφορικές Εξισώσεις παράλληλα με τη λέξη **επίλυση** (ή έστω λύση) χρησιμοποιείται και η λέξη **ολοκλήρωση** με την ίδια ακριβώς έννοια. Μερικές φορές χρησιμοποιείται επίσης και η λέξη **ολοκλήρωμα** στη θέση της λέξεως **λύση** σε μια διαφορική εξίσωση. Η έννοια

είναι ότι οι διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες βέβαια περιέχουν παράγωγο (ή παραγώγους), πρέπει κατά κάποιον τρόπο να συνοδευθούν από ολοκλήρωση, ώστε να μπορέσει να γίνει εξάλειψη της παραγώγου (ή των παραγώγων) στις λύσεις τους.

Ας προχωρήσουμε τώρα στην επίλυση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως πρώτης τάξεως (3.4.44) με τη χρήση του **ολοκληρωτικού παράγοντα**  $\mu(x)$ , ο οποίος δίνεται από τη σχέση (3.4.45). Εδώ απλά πολλαπλασιάζουμε ολόκληρη τη διαφορική εξίσωση (3.4.44) (και τα δύο μέλη της) επί τον ολοκληρωτικό αυτό παράγοντα  $\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$  παίρνοντας

$$y'(x)\mu(x) + p(x)y(x)\mu(x) = q(x)\mu(x) \quad (3.4.46)$$

και πιο αναλυτικά

$$y'(x)e^{\int p(x) dx} + p(x)y(x)e^{\int p(x) dx} = q(x)e^{\int p(x) dx}, \quad (3.4.47)$$

αφού, επαναλαμβάνουμε ξανά,  $\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$ . Και τώρα; Τώρα παρατηρούμε με βάση τον πολύ γνωστό μας τύπο παραγωγίσεως γινομένου

$$\frac{d}{dx} [y(x)e^{\int p(x) dx}] = y'(x)e^{\int p(x) dx} + y(x)p(x)e^{\int p(x) dx} \quad (3.4.48)$$

για τη συνάρτηση (το γινόμενο)  $y(x)e^{\int p(x) dx}$  ότι το αριστερό μέλος της τροποποιημένης διαφορικής εξισώσεως (3.4.47) είναι απλά η παράγωγος του γινομένου  $y(x)e^{\int p(x) dx}$ .

Επομένως τώρα η τροποποιημένη διαφορική εξίσωση (3.4.47) μπορεί να γραφεί και στην πολύ απλούστερη μορφή της

$$\frac{d}{dx} [y(x)e^{\int p(x) dx}] = q(x)e^{\int p(x) dx}. \quad (3.4.49)$$

Συγκεκριμένα η μορφή αυτή είναι πολύ απλούστερη, επειδή τώρα μία μόνο είναι η παρουσία της άγνωστης συναρτήσεως  $y(x)$ : στην παράγωγο του αριστερού μέλους. Μία ολοκλήρωση λοιπόν (εννοείται ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$ ) αρκεί για την επίλυση της τροποποιημένης διαφορικής εξισώσεως (3.4.49). Με την ολοκλήρωση αυτή προκύπτει βέβαια ότι

$$y(x)e^{\int p(x) dx} = \int q(x)e^{\int p(x) dx} dx + C. \quad (3.4.50)$$

(Δεν πρέπει μάλιστα να ξεχνάμε την αυθαίρετη σταθερά  $C$  σε ολοκληρώσεις, αν και η παρουσία της στο ένα μόνο μέλος μιας ισότητας ή εξισώσεως είναι προφανώς αρκετή!)

Δεν υπάρχει πλέον καμία παράγωγος στη σχέση αυτή (3.4.50), δηλαδή εξαλείφθηκε η παράγωγος με την ολοκλήρωση που κάναμε στην εξίσωση (3.4.49). Έχουμε λοιπόν διαθέσιμη μια πρωτοβάθμια αλγεβρική εξίσωση για τη γενική λύση  $y(x)$  της διαφορικής εξισώσεώς μας (3.4.44). Ας μεταφέρουμε λοιπόν την εκθετική συνάρτηση  $e^{\int p(x) dx}$  του αριστερού μέλους στο δεξιό μέλος (φυσικά εκεί με πρόσημο πλην στον εκθέτη) βρίσκοντας τελικά

$$y(x) = \left[ \int q(x)e^{\int p(x) dx} dx + C \right] e^{-\int p(x) dx}. \quad (3.4.51)$$

Επομένως καταλήξαμε, τώρα χάρη στον ολοκληρωτικό παράγοντα  $\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$ , στον ίδιο ακριβώς τύπο (3.4.27) για τη λύση  $y(x)$  της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως (3.4.44). Την παραθέτουμε και εδώ:

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x). \quad (3.4.52)$$

Ας «ανταμείψουμε» τον ολοκληρωτικό αυτό παράγοντα  $\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$ , που τόσο χρήσιμος μας φάνηκε στον παρόν εδάφιο, ξαναγράφοντας τη γενική λύση (3.4.51) την οποία βρήκαμε στην απόλυτα ισοδύναμη και συνεπτυγμένη τελική μορφή της

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left[ \int q(x)\mu(x) dx + C \right]. \quad (3.4.53)$$

Είναι βέβαια προφανές ότι η μορφή αυτή συμπίπτει πλήρως με την αντίστοιχη λύση (3.4.30), που είχε βρεθεί στο Εδάφιο Α3.4.3.1, εκεί όμως με τη μέθοδο της μεταβολής της παραμέτρου και όχι με τη μέθοδο του ολοκληρωτικού παράγοντα  $\mu(x)$ .

► **Παρατήρηση Α3.9:** Φυσικά είναι εύλογο για την ίδια ακριβώς διαφορική εξίσωση, εδώ τη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως (3.4.52), δύο εντελώς διαφορετικές μέθοδοι: (α) η μέθοδος της μεταβολής της παραμέτρου και (β) η μέθοδος του ολοκληρωτικού παράγοντα να οδηγούν ακριβώς στην ίδια γενική λύση (3.4.51), ισοδύναμα (3.4.53). Το αντίθετο θα ήταν λάθος, ίσως κάποιο υπολογιστικό λάθος κρυμμένο σε κάποια παραγωγή ή μάλλον ολοκλήρωση, ίσως ακόμη και κάποιο σοβαρότερο λάθος στον τρόπο σκέψης. Στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού όμως δεν πρέπει να υπάρχουν λάθη σε καμία κατασκευή. Κάτι τέτοιο θα ήταν ίσως δυνατόν να αποδειχθεί μοιραίο για την κατασκευή, π.χ. κατά τη διάρκεια ενός έντονου σεισμικού φαινομένου. Και στην καλύτερη περίπτωση, εκεί που δεν έχει τόσο σοβαρές συνέπειες, ένα τέτοιο λάθος (εδώ στα μαθηματικά: στις διαφορικές εξισώσεις) μπορεί εντούτοις να καταστήσει την κατασκευή μη λειτουργική και, όπως ξέρουμε, πρόσφατα υπήρξε τέτοιο παράδειγμα σε ένα σημαντικό έργο.

◆ **Συμπέρασμα:** Το συμπέρασμά μας είναι απλό: καλό είναι πάντοτε ο Πολιτικός Μηχανικός στη μελέτη μιας κατασκευής να εκτελεί τους υπολογισμούς του με δύο διαφορετικούς τρόπους καταλήγοντας στα ίδια (ή σχεδόν στα ίδια) αποτελέσματα ή, έστω, να επαληθεύει πλήρως τους υπολογισμούς του, αν έχει αναγκασθεί να περιορισθεί σε μία μόνο μέθοδο. Έτσι κι αλλιώς σε κάθε περίπτωση πρέπει να είναι ουσιαστικά Πολιτικός Μηχανικός και όχι απλά «τυφλός» χρήστης ενός προγράμματος του υπολογιστή. Σε ένα τέτοιο πρόγραμμα ίσως μάλιστα να αγνοεί ακόμη και ποια μέθοδος της επιστήμης του (και υπό ποιες ακριβώς υποθέσεις και απλοποιητικές παραδοχές) έχει χρησιμοποιηθεί από το συνάδελφό του που το ετοίμασε. Όμως κάτι τέτοιο δεν είναι σωστό.

Ας προχωρήσουμε τώρα σε ένα απλό παράδειγμα γραμμικής διαφορικής εξίσωσης:

▼ **Παράδειγμα Α3.6:** Για τη διαφορική εξίσωση

$$y'(x) + 2y(x) = 3e^x \quad (3.4.54)$$

Ζητούνται: (α) Να δοθούν οι χαρακτηρισμοί της. (β) Να βρεθεί η γενική λύση της με τη μέθοδο του ολοκληρωτικού παράγοντα  $\mu(x)$ . (γ) Να επαληθευθεί η λύση που βρέθηκε. (δ) Να προσδιορισθεί η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής με την ίδια διαφορική εξίσωση και αρχική συνθήκη την

$$y(0) = 4. \quad (3.4.55)$$

**Λύση:** Ας πάρουμε τα ερωτήματα με τη σειρά:

(α) Η παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι: (i) συνήθης, (ii) πρώτης τάξεως, (iii) πρώτου βαθμού, (iv) γραμμική, (v) μη ομογενής και (vi) με σταθερούς συντελεστές: 1 και 2. Επίσης: (vii) άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) είναι η  $y = y(x)$  και ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η  $x$ . Θα προχωρήσουμε τώρα στην επίλυσή της.

(β) Για την επίλυση της πιο πάνω γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με τη μέθοδο του ολοκληρωτικού παράγοντα  $\mu(x)$  πρέπει πρώτα να τον υπολογίσουμε. Αφού  $p(x) = 2$  στην παρούσα περίπτωση, θα έχουμε

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx} = e^{\int 2 dx} = e^{2x}. \quad (3.4.56)$$

Θα ήμασταν πάρα πολύ ασυνεπείς, αν δεν κάναμε στο σημείο αυτό και μια ουσιαστική παρατήρηση. Παραλείψαμε τη σταθερά ολοκλήρωσης  $C_\mu$  στην παραπάνω ολοκλήρωση στον εκθέτη  $\int 2 dx$ , επειδή μια τέτοια σταθερά  $C_\mu$  απλά θα κατέληγε σε έναν σταθερό πολλαπλασιαστικό παράγοντα  $C_\mu^*$  στον ολοκληρωτικό μας παράγοντα  $\mu(x)$ . Θα είχαμε δηλαδή απλά  $C_\mu^* \mu(x)$  αντί για  $\mu(x)$ . Αυτή όμως η σταθερά  $C_\mu^*$  δε θα άλλαζε σε τίποτε τη λύση που θα βρίσκαμε κι έτσι την αγνοούμε.

Με γνωστό τώρα τον ολοκληρωτικό παράγοντα  $\mu(x) = e^{2x}$  από τη σχέση (3.4.56) πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της γραμμικής διαφορικής εξίσωσής μας (3.4.54) επί  $\mu(x)$ . Με τον τρόπο αυτό παίρνουμε

$$e^{2x}[y'(x) + 2y(x)] = e^{2x}(3e^x) \quad (3.4.57)$$

και στη συνέχεια (με το αριστερό μέλος την παράγωγο του γινομένου  $e^{2x}y(x)$ ) προκύπτει ότι

$$\frac{d}{dx}[e^{2x}y(x)] = 3e^{3x}, \quad \text{αφού} \quad e^{2x}e^x = e^{3x}. \quad (3.4.58)$$

Ολοκληρώνοντας τώρα την πιο πάνω τόσο απλή διαφορική εξίσωση (3.4.58), βρίσκουμε

$$e^{2x}y(x) = 3 \int e^{3x} dx + C = e^{3x} + C \quad (3.4.59)$$

και δεν επιτρέπεται εδώ να λησμονήσουμε τη σταθερά ολοκληρώσεως  $C$ : Ζητάμε τη γενική λύση!

Τελικά, μεταφέροντας την εκθετική συνάρτηση  $e^{2x}$  από το αριστερό μέλος της σχέσεως (3.4.59) στο δεξιό, παίρνουμε τη γενική μας λύση

$$y(x) = e^x + Ce^{-2x} \quad \text{ισοδύναμα} \quad y(x) = Ce^{-2x} + e^x. \quad (3.4.60)$$

Σημειώνουμε βέβαια πως στη γενική αυτή λύση  $y(x)$  ο όρος  $Ce^{-2x}$  είναι η γενική λύση  $y_h(x)$  της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσής: δίχως το δεξιό μέλος  $3e^x$ , ενώ ο όρος  $e^x$  είναι μια μερική (ή ειδική) λύση  $y_p(x)$  της αρχικής μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσής.

(γ) Για την επαλήθευση αυτής της γενικής λύσεως  $y(x)$  την παραγωγίζουμε πρώτα ως προς  $x$  παίρνοντας

$$y'(x) = e^x - 2Ce^{-2x}. \quad (3.4.61)$$

Στη συνέχεια απλά εισάγουμε την παράγωγο αυτή  $y'(x)$ , αλλά και την ίδια τη λύση  $y(x)$  από την προπροηγούμενη σχέση (3.4.60), στη διαφορική μας εξίσωση (3.4.54). Έτσι διαπιστώνουμε ότι

$$y'(x) + 2y(x) = 3e^x \implies (e^x - 2Ce^{-2x}) + 2(e^x + Ce^{-2x}) = 3e^x \implies 3e^x = 3e^x, \quad (3.4.62)$$

κάτι που ισχύει. Έτσι έχουμε ολοκληρώσει τη ζητούμενη επαλήθευση της γενικής λύσεως (3.4.60).

(δ) Στο τελευταίο ερώτημα ζητείται η λύση (μία είναι!) του προβλήματος αρχικής τιμής (3.4.54) και (3.4.55). Προς το σκοπό αυτό απλά θα προσδιορίσουμε τη σταθερά  $C$  της γενικής λύσεως  $y(x)$  στη σχέση (3.4.60), ώστε να καταστήσουμε τη λύση αυτή λύση του προβλήματος αρχικής τιμής που έχουμε. Επειδή  $y(0) = 4$ , θέτουμε  $x = 0$  και  $y = 4$  στη γενική αυτή λύση (3.4.60) και παίρνουμε

$$y(x) = e^x + Ce^{-2x} \implies 4 = e^0 + Ce^0 \implies 4 = 1 + C \implies C = 4 - 1 = 3. \quad (3.4.63)$$

Επομένως η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής (3.4.54) και (3.4.55) είναι η ακόλουθη:

$$y(x) = e^x + 3e^{-2x}. \quad (3.4.64)$$

Ας σημειώσουμε ότι εύκολα διαπιστώνουμε (πέρα από την επαλήθευση της διαφορικής εξίσωσής) ότι πληρούται και η αρχική συνθήκη  $y(0) = 4$ . Πραγματικά

$$y(0) = e^0 + 3e^0 = 1 + 3 = 4. \quad (3.4.65)$$

Τελειώνοντας το ερώτημα αυτό, ας κάνουμε και μια παρατήρηση. Διαθέταμε από το ερώτημα (β) τη γενική λύση  $y(x)$  της διαφορικής εξίσωσής (3.4.54). Θα ήταν επομένως αφέλεια να μην τη χρησιμοποιήσουμε αμέσως, αλλά να προχωρήσουμε σε κατευθείαν προσδιορισμό της λύσεως του προβλήματός μας αρχικής τιμής (3.4.54) και (3.4.55) με τη χρήση ορισμένων ολοκληρωμάτων. ▲

**A3.4.4. Η μέθοδος της εκθετικής αντικαταστάσεως**

Η μέθοδος αυτή αφορά στην εύρεση της γενικής λύσεως  $y_h(x)$  της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$ay'(x) + by(x) = 0 \quad (3.4.66)$$

εδώ με σταθερούς συντελεστές  $a$  και  $b$  και με  $a \neq 0$ .

Σύμφωνα με αυτήν τη μέθοδο, που θα τη μελετήσουμε πολύ εκτενέστερα στο μεθεπόμενο Κεφάλαιο Α5, δεχόμαστε σαν πιθανή λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης (3.4.66) λύση εκθετικής μορφής, συγκεκριμένα

$$y(x) = e^{\mu x}, \quad \text{οπότε} \quad y'(x) = \mu e^{\mu x} \quad (3.4.67)$$

με το  $\mu$  σταθερά η οποία πρέπει όμως να προσδιορισθεί. Παρατηρούμε επίσης ότι και η παράγωγος  $y'(x)$  της λύσεως αυτής  $y(x)$  είναι πάλι εκθετικής μορφής. Αντικαθιστώντας τώρα τη λύση  $y(x)$  καθώς και την παράγωγό της  $y'(x)$  στην ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (3.4.66), παίρνουμε

$$a\mu e^{\mu x} + b e^{\mu x} = 0 \implies (a\mu + b)e^{\mu x} = 0 \implies a\mu + b = 0 \implies \mu = -\frac{b}{a}. \quad (3.4.68)$$

Τούτο πρέπει να ισχύει, επειδή η εκθετική συνάρτηση  $e^{\mu x}$  δε μηδενίζεται ποτέ. Άρα για την τιμή αυτή  $\mu = -b/a$  η λύση  $y(x) = e^{\mu x}$  που υποθέσαμε παίρνει τη μορφή

$$y(x) = e^{-bx/a} \quad \text{με αντίστοιχη γενική λύση την} \quad y_h(x) = Cy(x) = Ce^{-bx/a} \quad (3.4.69)$$

με το  $C$  να δηλώνει μια αυθαίρετη σταθερά. Είναι βέβαια πολύ εύκολο να επαληθεύσουμε τη λύση αυτή  $y_h(x)$  της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξεως (3.4.66), την οποία δεχθήκαμε με σταθερούς συντελεστές. *Τονίζουμε όμως ότι η παρούσα μέθοδος της εκθετικής αντικαταστάσεως με κανέναν τρόπο δεν είναι εφαρμόσιμη σε περίπτωση μη σταθερών συντελεστών!*

▼ **Παράδειγμα Α3.7:** Για την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y'(x) + 2y(x) = 0 \quad (3.4.70)$$

με σταθερούς συντελεστές 1 και 2 η πιο πάνω μέθοδος της εκθετικής αντικαταστάσεως μας δίνει

$$y(x) = e^{\mu x} \implies \mu e^{\mu x} + 2e^{\mu x} = (\mu + 2)e^{\mu x} = 0 \implies \mu + 2 = 0 \implies \mu = -2. \quad (3.4.71)$$

Άρα η λύση  $y(x)$  της διαφορικής αυτής εξίσωσης θα είναι η  $y(x) = e^{-2x}$  και η γενική λύση της

$$y_h(x) = Cy(x) = Ce^{-2x}. \quad (3.4.72)$$

Εύκολα μπορεί να επαληθευθεί η γενική αυτή λύση  $y_h(x)$  της διαφορικής εξίσωσης (3.4.70). ▲

**A3.4.5. Η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών**

Η μέθοδος αυτή αφορά στην εύρεση μιας μερικής (ή ειδικής) λύσεως  $y_p(x)$  της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$ay'(x) + by(x) = q(x) \quad (3.4.73)$$

πάλι με σταθερούς συντελεστές  $a$  και  $b$  ( $a \neq 0$ ) και με γνωστή τη συνάρτηση  $q(x)$  στο δεξιό μέλος.

Σύμφωνα με αυτήν τη μέθοδο, που θα τη μελετήσουμε κι αυτήν πολύ πιο λεπτομερώς στο μεθεπόμενο Κεφάλαιο Α5, σε περίπτωση που η συνάρτηση  $q(x)$  είναι πολυωνυμική βαθμού  $m$ , δεχόμαστε γενικά (όχι πάντα) τη μερική λύση  $y_p(x)$  να είναι κι αυτή πολυωνυμική και μάλιστα του ίδιου βαθμού  $m$ . Εντούτοις οι συντελεστές  $A_k$  της πολυωνυμικής λύσεως  $y_p(x)$  που ζητάμε να προσδιορίσουμε θα βρεθούν με αντικατάσταση στη διαφορική εξίσωση (3.4.73) και με εξίσωση

των συντελεστών των ίσων δυνάμεων του  $x$ . Στην ειδική περίπτωση σταθεράς  $q(x) = q_0$  στο δεξιό μέλος, δηλαδή πολυωνύμου μηδενικού βαθμού, δεχόμαστε γενικά (και πάλι όχι πάντα) μερική λύση της μορφής  $y_p(x) = A$  με το  $A$  προσδιοριστέο συντελεστή. Επίσης σε περίπτωση εκθετικής συναρτήσεως  $q(x) = q_0 e^{cx}$  (με το  $c$  γνωστή σταθερά), δεχόμαστε γενικά (όχι πάντα) μερική λύση της μορφής  $y_p(x) = Ae^{cx}$  με το  $A$  προσδιοριστέο συντελεστή από την ίδια τη διαφορική εξίσωση (3.4.73).

Η άποψη του γράφοντα είναι ότι η μέθοδος της εκθετικής αντικαταστάσεως καθώς και η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών είναι υπολογιστικά οι καταλληλότερες σε προβλήματα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές όπου είναι εφαρμόσιμες. Δύο παραδείγματα που δείχνουν την αποτελεσματικότητα αυτών των μεθόδων (με χρήση τους τη μια μετά την άλλη) παρουσιάζονται στην επόμενη Ενότητα Α3.5, Παράγραφος Α3.5.2, για τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις (3.5.12) και (3.5.30) στο παράδειγμα και την εφαρμογή της παραγράφου αυτής.

### Α3.5. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ BERNOULLI

#### Α3.5.1. Οι διαφορικές εξισώσεις Bernoulli και η επίλυσή τους

Οι διαφορικές εξισώσεις Bernoulli είναι πρώτης τάξεως και έχουν τη μορφή

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)y^a(x) \quad \text{με } a \neq 0, 1, \quad (3.5.1)$$

όπου ο εκθέτης  $a$  στη δύναμη  $y^a(x)$  στο δεξιό μέλος είναι γνωστός πραγματικός αριθμός διάφορος από το μηδέν και το ένα:  $a \neq 0, 1$ . Πραγματικά, εάν  $a = 0$ , τότε  $y^a(x) = y^0(x) = 1$ , και δεν παρουσιάζεται καθόλου η άγνωστη συνάρτηση  $y = y(x)$  στο δεξιό μέλος. Έτσι έχουμε απλά μια μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση της μορφής

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x), \quad \text{εάν } a = 0. \quad (3.5.2)$$

Επιπλέον στην επίσης ειδική περίπτωση που  $a = 1$  ισχύει  $y^a(x) = y^1(x) = y(x)$  και η διαφορική εξίσωση (3.5.1) ανάγεται στην ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)y(x) \implies y'(x) + [p(x) - q(x)]y(x) = 0, \quad \text{εάν } a = 1. \quad (3.5.3)$$

Εξαιρούμε λοιπόν και τις δύο αυτές πολύ ειδικές περιπτώσεις,  $a = 0$  και  $a = 1$ , όπου έχουμε απλά γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως: μη ομογενή και ομογενή αντίστοιχα.

Αλλά και στη γενική περίπτωση ( $a \neq 0, 1$ ) πάλι οι διαφορικές εξισώσεις Bernoulli (3.5.1) ανάγονται εύκολα σε γραμμικές και επιλύονται με τις σχετικές μεθόδους της προηγούμενης Ενότητας Α3.4. Για να το κατανοήσουμε αυτό, παρατηρούμε στη διαφορική εξίσωση Bernoulli (3.5.1) ότι το μόνο που τη διακρίνει από τη γραμμική είναι η ύπαρξη του παράγοντα  $y^a(x)$  στο δεξιό μέλος της  $q(x)y^a(x)$ . Για να μην υπάρχει αυτός ο παράγοντας  $y^a(x)$ , αρκεί απλά να διαιρέσουμε ολόκληρη την εξίσωση Bernoulli με  $y^a(x)$  (υποθέτοντας ότι  $y(x) \neq 0$ ). Έτσι παίρνουμε τη διαφορική εξίσωση

$$y'(x)y^{-a}(x) + p(x)y^{1-a}(x) = q(x) \quad \text{με } a \neq 0, 1. \quad (3.5.4)$$

Η εξίσωση αυτή δεν έχει πια την άγνωστη συνάρτηση  $y(x)$  στο δεξιό μέλος της, ακριβώς όπως συμβαίνει και στη συνηθισμένη γραφή των μη ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Εντούτοις δε μας διευκολύνει και ιδιαίτερα στην επίλυσή της εξαιτίας του αριστερού μέλους της. Πράγματι στο αριστερό μέλος παρατηρούμε πρώτα τη δύναμη  $y^{1-a}(x)$  σαν παράγοντα του όρου  $p(x)y^{1-a}(x)$ . Η δύναμη αυτή καθιστά τη διαφορική εξίσωση (3.5.4) μη γραμμική.

Και τί πρέπει να κάνουμε τώρα; Απλά να αλλάξουμε την άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) από  $y = y(x)$  σε  $z = z(x)$  θέτοντας

$$y^{1-a}(x) = z(x) \iff z(x) = y^{1-a}(x). \quad (3.5.5)$$

Επίσης, αφού

$$z(x) = y^{1-a}(x) \implies z'(x) = (1-a)y^{-a}(x)y'(x) \implies y'(x)y^{-a}(x) = \frac{z'(x)}{1-a}. \quad (3.5.6)$$

Τώρα η τροποποιημένη διαφορική εξίσωση Bernoulli (3.5.4) παίρνει προφανώς τη μορφή

$$\frac{z'(x)}{1-a} + p(x)z(x) = q(x) \quad \text{απόλυτα ισοδύναμα} \quad z'(x) + (1-a)p(x)z(x) = (1-a)q(x). \quad (3.5.7)$$

Δηλαδή η διαφορική εξίσωση Bernoulli (3.5.1) έχει τώρα αναχθεί (για  $a \neq 0, 1$ ) σε μια μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση: την εξίσωση (3.5.7). Το κόστος υπήρξε μόνο η αλλαγή της άγνωστης συναρτήσεως (ή εξαρτημένης μεταβλητής) από  $y = y(x)$  σε  $z = z(x)$  με

$$z(x) = y^{1-a}(x) \iff y(x) = z^{1/(1-a)}(x) \quad \text{με} \quad a \neq 0, 1. \quad (3.5.8)$$

Όμως καμία αλλαγή δε χρειάστηκε να γίνει στην ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$ .

Το συμπέρασμά μας είναι ότι με την αλλαγή της άγνωστης συναρτήσεως (3.5.8) η διαφορική εξίσωση Bernoulli καθίσταται μια γραμμική διαφορική εξίσωση της μορφής (3.5.7). Σύμφωνα με τις γνώσεις που έχουμε αποκτήσει για τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις στην προηγούμενη Ενότητα A3.4, λύνουμε τη γραμμική αυτή διαφορική εξίσωση (3.5.7) και προσδιορίζουμε τη βοηθητική άγνωστη συνάρτηση  $z = z(x)$ . Δεν ξεχνάμε όμως στο τέλος να επιστρέψουμε στην αρχική μας άγνωστη συνάρτηση  $y = y(x)$ , αυτήν που έχει και το φυσικό νόημα στη διαφορική εξίσωση Bernoulli (3.5.1), χρησιμοποιώντας την πρώτη σχέση (3.5.8):  $z(x) = y^{1-a}(x)$ . Έτσι ξαναγουρίζουμε στην αρχική άγνωστη (και ευτυχώς τώρα πλήρως γνωστή!) συνάρτηση  $y = y(x)$ .

### A3.5.2. Ένα παράδειγμα και μια εφαρμογή στη Δυναμική

Προχωράμε τώρα σε ένα απλό παράδειγμα και σε μια εφαρμογή στη Δυναμική:

▼ **Παράδειγμα A3.8:** Για τη διαφορική εξίσωση

$$y'(x) + 2y(x) = 3xy^3(x) \quad (3.5.9)$$

Ζητούνται: (α) Οι χαρακτηρισμοί της. (β) Η αναγωγή της σε μια γραμμική διαφορική εξίσωση. (γ) Η γενική λύση της.

**Λύση:** (α) Πρόκειται προφανώς για μια συνήθη διαφορική εξίσωση, πρώτης τάξεως, πρώτου βαθμού, μη γραμμική (εξαιτίας του παράγοντα  $y^3(x)$  στο δεξιό μέλος) και τύπου Bernoulli με  $a = 3$  (και πάλι λόγω του ίδιου παράγοντα  $y^3(x)$  στο δεξιό μέλος).

(β) Για την αναγωγή της σε γραμμική διαφορική εξίσωση εργαζόμαστε με τον τρόπο που ήδη εξηγήσαμε στην προηγούμενη Παράγραφο A3.5.1. Πρώτα απ' όλα εξαλείφουμε την άγνωστη συνάρτηση  $y(x)$  από το δεξιό μέλος διαιρώντας ολόκληρη την εξίσωση με  $y^3(x)$ , οπότε προκύπτει

$$\frac{y'(x)}{y^3(x)} + \frac{2}{y^2(x)} = 3x \quad \text{με} \quad y(x) \neq 0. \quad (3.5.10)$$

(Σημειώνουμε όμως πως η μηδενική συνάρτηση  $y(x) = 0$  αποτελεί προφανώς και αυτή μια λύση της διαφορικής εξισώσεως Bernoulli (3.5.9), όπως άμεσα επαληθεύεται.)

Τώρα εξαιτίας του δεύτερου όρου  $2/y^2(x)$  στο αριστερό μέλος της πιο πάνω διαφορικής εξισώσεως (3.5.10), θα πρέπει να θέσουμε

$$z(x) = \frac{1}{y^2(x)}, \quad \text{οπότε} \quad z'(x) = -2 \frac{y'(x)}{y^3(x)}. \quad (3.5.11)$$

Επομένως με τη νέα αυτή άγνωστη συνάρτηση  $z(x) = 1/y^2(x)$  από τη διαφορική εξίσωση (3.5.10) προκύπτει άμεσα η ισοδύναμη της γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως

$$-\frac{1}{2}z'(x) + 2z(x) = 3x \quad \text{και ισοδύναμα} \quad z'(x) - 4z(x) = -6x. \quad (3.5.12)$$

Έχουμε έτσι αναγάγει την αρχική διαφορική εξίσωση Bernoulli (3.5.9), που είναι βέβαια μη γραμμική, στη γραμμική διαφορική εξίσωση (3.5.12), που είναι μάλιστα εδώ και με σταθερούς συντελεστές.

(γ) Πρέπει τώρα να λύσουμε τη γραμμική διαφορική εξίσωση (3.5.12). Προφανώς η λύση αυτής της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης είναι το άθροισμα της γενικής λύσεως  $z_h(x)$  της ομογενούς συν μια μερική λύση  $z_p(x)$  της μη ομογενούς. Αφού πρόκειται για γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές: τους 1 και  $-4$  στη δεύτερη μορφή της, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση

$$z'(x) - 4z(x) = 0 \quad (3.5.13)$$

τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως  $z(x) = e^{\mu x}$  της Παραγράφου Α3.4.4. Με τη μέθοδο αυτή βρίσκουμε από την πιο πάνω διαφορική εξίσωση (3.5.13) ότι

$$\mu e^{\mu x} - 4e^{\mu x} = 0 \implies (\mu - 4)e^{\mu x} = 0 \implies \mu - 4 = 0 \implies \mu = 4. \quad (3.5.14)$$

Επομένως κατάλληλη τιμή του εκθέτη  $\mu$  στην εκθετική αντικατάσταση  $z(x) = e^{\mu x}$  είναι μονάχα η τιμή  $\mu = 4$ . Άρα η γενική λύση  $z_h(x)$  της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (3.5.13) που αντιστοιχεί στη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (3.5.12) είναι η εξής:

$$z_h(x) = C_1 e^{4x} \quad (3.5.15)$$

με το  $C_1$  αυθαίρετη σταθερά.

Τώρα για τη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (3.5.12), έστω στη δεύτερη μορφή της

$$z'(x) - 4z(x) = -6x, \quad (3.5.16)$$

παρατηρούμε ότι στο δεξιό μέλος έχουμε το πολύ απλό πρωτοβάθμιο πολυώνυμο  $q(x) = -6x$ . Είναι επομένως λογικό να αναζητήσουμε μια μερική λύση  $z_p(x)$  της γραμμικής αυτής διαφορικής εξίσωσης (3.5.16) στη μορφή πολυωνύμου επίσης πρώτου βαθμού, δηλαδή να υποθέσουμε ότι

$$z_p(x) = Ax + B, \quad \text{οπότε} \quad z_p'(x) = A. \quad (3.5.17)$$

Αυτή είναι η βάση της μεθόδου **των προσδιοριστέων συντελεστών** της Παραγράφου Α3.4.5, που θα την αναπτύξουμε και θα τη μελετήσουμε πολύ εκτενέστερα στο μεθεπόμενο Κεφάλαιο Α5. Τονίζουμε βέβαια ότι στην πιο πάνω λύση (3.5.17) που υποθέσαμε οι δύο σταθερές  $A$  και  $B$  είναι προσδιοριστέοι συντελεστές: θα τους προσδιορίσουμε αμέσως παρακάτω. *Με κανέναν τρόπο δεν είναι αυθαίρετες σταθερές. Είναι συγκεκριμένοι αριθμοί!*

Για να προσδιορίσουμε τώρα αυτούς τους συντελεστές  $A$  και  $B$  (τους προσδιοριστέους συντελεστές), απλά αντικαθιστούμε την πιθανή μερική λύση  $z_p(x)$  και την παράγωγό της  $z_p'(x)$  από τις σχέσεις (3.5.17) στη γραμμική διαφορική εξίσωση (3.5.16). Με τον τρόπο αυτό διαπιστώνουμε ότι

$$z'(x) - 4z(x) = -6x \implies A - 4(Ax + B) = -6x \implies (A - 4B) + (6 - 4A)x = 0. \quad (3.5.18)$$

Εδώ έχουμε (καλύτερα θέλουμε να έχουμε) μια ταυτότητα: την  $(A - 4B) + (6 - 4A)x = 0$ . Η σχέση αυτή θέλουμε να ισχύει για κάθε τιμή του  $x$ , όχι μόνο για μια-δυο τιμές του  $x$ , επιθυμούμε δηλαδή να είναι μια ταυτότητα. Επομένως και ο σταθερός όρος  $A - 4B$  πρέπει να μηδενίζεται, αλλά και ο συντελεστής  $6 - 4A$  του  $x$  πρέπει να μηδενίζεται και αυτός. Κατά συνέπεια είναι υποχρεωτικό να ισχύουν οι δύο γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις

$$A - 4B = 0 \quad \text{και} \quad 6 - 4A = 0. \quad (3.5.19)$$



Τις λύνουμε αμέσως (ξεκινώντας από τη δεύτερη). Έτσι βρίσκουμε τις τιμές των προσδιοριστέων συντελεστών (και όχι βέβαια αυθαίρετων σταθερών!)  $A$  και  $B$ . Αυτές είναι

$$A = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad \text{και} \quad B = \frac{A}{4} = \frac{3/2}{4} = \frac{3}{8}. \quad (3.5.20)$$

Άρα μια μερική (ή ειδική) λύση  $z_p(x)$  της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (3.5.16) είναι η ακόλουθη:

$$z_p(x) = Ax + B = \frac{3x}{2} + \frac{3}{8} = \frac{12x + 3}{8}. \quad (3.5.21)$$

Αθροίζοντας τη γενική λύση (3.5.15) της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (3.5.13) και τη μερική λύση (3.5.21) της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (3.5.16), προσδιορίζουμε τη γενική λύση

$$z(x) = z_h(x) + z_p(x) = C_1 e^{4x} + \frac{12x + 3}{8} \quad (3.5.22)$$

της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (3.5.16). Αν θέλουμε μάλιστα, γράφουμε την ίδια γενική λύση  $z(x)$  και στην ελάχιστη απλούστερη μορφή της

$$z(x) = \frac{C e^{4x} + 12x + 3}{8} \quad (3.5.23)$$

έχοντας απλά αλλάξει την αυθαίρετη σταθερά από  $C_1$  σε  $C = 8C_1$ , τίποτε το σημαντικό.

Πριν τελειώσουμε όμως το παράδειγμα αυτό, θα πρέπει να επιστρέψουμε στην αρχική μας άγνωστη συνάρτηση  $y(x)$ , γιατί έχουμε κάνει την αλλαγή άγνωστης συναρτήσεως (ή εξαρτημένης μεταβλητής)  $z(x) = 1/y^2(x)$  στη σχέση (3.5.11). Επομένως, λύνοντας ως προς  $y(x)$  την απλούστατη αυτή εξίσωση:  $z(x) = 1/y^2(x)$ , βρίσκουμε τελικά ότι

$$y(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{z(x)}} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{C e^{4x} + 12x + 3}}. \quad (3.5.24)$$

Αυτή είναι η λύση της παρούσας διαφορικής εξίσωσης Bernoulli (3.5.9) και, για να είμαστε ειλικρινείς, την επαληθεύσαμε και με τη χρήση της *Mathematica*, που έδωσε ουσιαστικά την ίδια λύση. Η λύση αυτή  $y(x)$  περιέχει βέβαια και μία αυθαίρετη σταθερά: τη σταθερά  $C$ . Τούτο είναι απόλυτα εύλογο, γιατί η διαφορική εξίσωση Bernoulli (3.5.9) που λύσαμε είναι μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως. Άρα η γενική λύση της πρέπει να περιέχει μία αυθαίρετη σταθερά  $C$ . Σε ένα πρόβλημα αρχικής τιμής με  $y(x_0) = y_0$  η σταθερά αυτή  $C$  μπορεί βέβαια να καθορισθεί μέσω της αρχικής αυτής συνθήκης  $y(x_0) = y_0$ . Ας μην ξεχάσουμε τελικά να παρατηρήσουμε ότι για  $C \rightarrow \infty$  η ρίζα του παρονομαστή της λύσεως  $y(x)$  απειρίζεται (φυσικά ο εκθετικός παράγοντας  $e^{4x}$  είναι συνεχώς θετικός). Άρα στο όριο  $C \rightarrow \infty$  η λύση μας  $y(x)$  στη σχέση (3.5.24) τείνει στη μηδενική συνάρτηση  $y(x) = 0$ . Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, και η συνάρτηση αυτή  $y(x) = 0$  είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης Bernoulli (3.5.9). ▲

▼ **Εφαρμογή A3.3 (Δυναμική του Υλικού Σημείου):** Θεωρούμε την ευθύγραμμη κίνηση υλικού σημείου μάζας  $m$  πάνω στον άξονα  $Ox$ . Στην κίνηση αυτή υπάρχει μόνο μία δύναμη  $F$ , ακριβέστερα αντίσταση  $R$ , της μορφής

$$R = -bv - cv^2 \quad (3.5.25)$$

με  $v = v(t)$  την ταχύτητα του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή  $t$  και με τις ποσότητες  $b$  και  $c$  δύο γνωστές θετικές σταθερές. Η αντίσταση αυτή  $R$  είναι προφανώς μια δύναμη που αντιτίθεται στην κίνηση του υλικού σημείου. Γι' αυτό και οι σταθερές  $b$  και  $c$  είναι και οι δύο θετικές, αλλά με πρόσημον μείον μπροστά τους: αντίσταση στην κίνηση του υλικού σημείου. Ζητούνται: (α) Η σχετική διαφορική εξίσωση στην παρούσα κίνηση. (β) Οι χαρακτηρισμοί της. (γ) Η γενική λύση της. (δ) Η μερική λύση της  $v(t)$  με αρχική συνθήκη  $v(0) = v_0$ , δηλαδή με γνωστή την αρχική ταχύτητα  $v_0$ . (ε) Η θέση  $x(t)$  του ίδιου υλικού σημείου τώρα με γνωστή και την αρχική θέση του  $x(0) = x_0$ .

**Λύση:** (α) Εδώ θα κάνουμε απλά χρήση του τόσο γνωστού μας δεύτερου νόμου του Νεύτωνα: μάζα  $m$  επί επιτάχυνση  $a = \dot{v}$  ίσον δύναμη:  $ma = F$  και ισοδύναμα  $m\dot{v} = F$ . Εδώ όμως η δύναμη  $F$  είναι απλά η αντίσταση  $R$  στην κίνηση:  $F = R$ . Άρα ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα παίρνει στην παρούσα εφαρμογή στη Δυναμική τη μορφή  $m\dot{v} = R$ , οπότε

$$m\dot{v}(t) = -bv(t) - cv^2(t) \iff m\dot{v}(t) + bv(t) = -cv^2(t). \quad (3.5.26)$$

Πρόκειται επομένως για μια κλασική διαφορική εξίσωση Bernoulli με  $a = 2$ . Αυτό ισχύει λόγω του παράγοντα  $v^2(t)$  στο δεξιό μέλος της.

(β) Οι χαρακτηρισμοί της διαφορικής αυτής εξίσωσης (3.5.26) είναι οι εξής: συνήθης διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως, πρώτου βαθμού, μη γραμμική (ξανά λόγω του παράγοντα  $v^2(t)$  στο δεξιό μέλος) και τύπου Bernoulli με  $a = 2$ .

Ας παρατηρήσουμε όμως στο σημείο αυτό ότι η ίδια διαφορική εξίσωση (3.5.26) μπορεί να ερμηνευθεί και σαν διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών. Αυτό είναι εμφανές, εάν τη γράψουμε στη μορφή

$$-\frac{mdv}{bv + cv^2} = dt, \quad \text{υποτίθεται με } v = v(t). \quad (3.5.27)$$

Απλά υποτίθεται, γιατί, μόλις ολοκληρώσουμε αριστερά ως προς την ταχύτητα  $v$  και δεξιά ως προς το χρόνο  $t$  (σύμφωνα με τη θεωρία της Παραγράφου Α3.2.1), θα πάρουμε τη ζητούμενη λύση στη μορφή  $t = t(v)$  και όχι  $v = v(t)$ , όπως θα επιθυμούσαμε. Αν και θα μπορούσαμε να λύσουμε τη σχέση  $t = t(v)$  ως προς  $v$  (δηλαδή να αντιστρέψουμε τη συνάρτηση  $t = t(v)$ ) παίρνοντας έτσι τη ζητούμενη λύση  $v = v(t)$ , αυτό φαίνεται να είναι κάπως κοπιώδες από υπολογιστικής απόψεως. Για το λόγο αυτό θα προτιμήσουμε στην παρούσα εφαρμογή τη θεώρηση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης (3.5.26) σαν διαφορικής εξίσωσης Bernoulli και όχι σαν διαφορικής εξίσωσης χωριζόμενων μεταβλητών, παρόλο που αναγνωρίζουμε πλήρως και τη δεύτερη αυτή δυνατότητα.

(γ) Για την επίλυση της εξίσωσης Bernoulli (3.5.26) θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τη μέθοδο της αναγωγής της σε γραμμική διαφορική εξίσωση, που αναπτύξαμε στην προηγούμενη Παράγραφο Α3.5.1. Πρώτα τη διαιρούμε με  $v^2(t)$ , ώστε να παύσει να παρουσιάζεται η άγνωστη ταχύτητα  $v(t)$  του υλικού σημείου στο δεξιό μέλος. Έτσι προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$m \frac{\dot{v}(t)}{v^2(t)} + \frac{b}{v(t)} = -c. \quad (3.5.28)$$

Είναι τώρα προφανές από τον όρο  $b/v(t)$  ότι πρέπει να ορίσουμε τη βοηθητική άγνωστη συνάρτηση

$$z(t) = \frac{1}{v(t)}, \quad \text{οπότε} \quad \dot{z}(t) = -\frac{\dot{v}(t)}{v^2(t)}. \quad (3.5.29)$$

Αντικαθιστούμε τώρα τη νέα αυτή άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή)  $z(t)$  καθώς και την παράγωγό της  $\dot{z}(t)$  στη διαφορική εξίσωση Bernoulli (3.5.28). Έτσι φθάνουμε σε μια μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση, την εξίσωση

$$-m\dot{z}(t) + bz(t) = -c \quad (3.5.30)$$

και μάλιστα με σταθερούς συντελεστές: τους  $-m$  και  $b$ .

Μας απομένει τώρα το καθήκον της επιλύσεως αυτής της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξεως. Η γενική λύση της  $z(t)$  θα ισούται προφανώς με το άθροισμα

$$z(t) = z_h(t) + z_p(t) \quad (3.5.31)$$

της γενικής λύσεως  $z_h(t)$  της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης συν μια μερική λύση (ή ειδική λύση)  $z_p(t)$  της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (3.5.30).

Αφού οι συντελεστές  $-m$  και  $b$  είναι εδώ σταθεροί, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως  $z(t) = e^{\mu t}$  στην αντίστοιχη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση

$$-m\dot{z}(t) + bz(t) = 0. \quad (3.5.32)$$

Έτσι βρίσκουμε ότι

$$-m\mu e^{\mu t} + be^{\mu t} = 0 \implies (-m\mu + b)e^{\mu t} = 0 \implies -m\mu + b = 0 \implies \mu = \frac{b}{m}. \quad (3.5.33)$$

Επομένως η γενική λύση  $z_h(t)$  της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (3.5.32) είναι η εξής:

$$z_h(t) = Ce^{bt/m}, \quad (3.5.34)$$

όπου βέβαια το σύμβολο  $C$  δηλώνει μια αυθαίρετη σταθερά.

Για να προσδιορίσουμε και μια μερική λύση  $z_p(t)$  της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (3.5.30), απλά παρατηρούμε ότι όχι μόνο ο συντελεστής  $b$  είναι σταθερός, αλλά και το δεξιό μέλος  $-c$  είναι και αυτό σταθερό, ισοδύναμα πολυώνυμο μηδενικού βαθμού. Άρα μπορούμε εύλογα να υποθέσουμε μια μερική λύση  $z_p(t)$  ίση με σταθερά  $A$  στη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών. Δηλαδή υποθέτουμε ότι  $z_p(t) = A$ . Για να βρούμε τη σταθερά αυτή  $A$  (το μοναδικό προσδιοριστέο συντελεστή που ζητάμε), αρκεί να αντικαταστήσουμε στη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (3.5.30) τη μερική λύση που υποθέσαμε. Έτσι με  $z_p(t) = A$  και επομένως  $\dot{z}_p(t) = 0$  έχουμε

$$-m\dot{z}_p(t) + bz_p(t) = -c \implies -m \cdot 0 + bA = -c \implies z_p(t) = A = -\frac{c}{b}. \quad (3.5.35)$$

Αθροίζοντας τώρα τη γενική λύση της ομογενούς  $z_h(t)$  στη σχέση (3.5.34) και τη μερική λύση της μη ομογενούς  $z_p(t)$  στην αμέσως πιο πάνω σχέση (3.5.35), προσδιορίζουμε τη γενική λύση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (3.5.30):

$$z(t) = z_h(t) + z_p(t) = Ce^{bt/m} - \frac{c}{b} = \frac{Cbe^{bt/m} - c}{b}. \quad (3.5.36)$$

Τώρα, όσον αφορά στην αληθινή άγνωστη συνάρτηση: στην ταχύτητα  $v(t)$  του υλικού σημείου που την ευθύγραμμη κίνησή του μελετάμε, απλά υπενθυμίζουμε τον ορισμό (3.5.29) της βοηθητικής άγνωστης συναρτήσεως  $z(t)$ , δηλαδή ότι

$$z(t) = \frac{1}{v(t)}, \quad \text{οπότε} \quad v(t) = \frac{1}{z(t)} = \frac{b}{Cbe^{bt/m} - c} \quad (3.5.37)$$

λόγω και της πιο πάνω λύσεως (3.5.36). Αυτή είναι η ζητούμενη ταχύτητα  $v(t)$  του υλικού σημείου στην παρούσα ευθύγραμμη κίνησή του με αντίσταση  $R$  σ' αυτήν της μορφής (3.5.25). Φυσικά στη λύση αυτή  $v(t)$  περιέχονται η μάζα  $m$  του υλικού σημείου καθώς και οι δύο παράμετροι  $b$  και  $c$  της αντιστάσεως  $R = -bv - cv^2$ .

Η ίδια όμως λύση, που είναι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης Bernoulli (3.5.26) ή (3.5.28), περιλαμβάνει και την αυθαίρετη σταθερά  $C$  (κεφαλαίο  $C$ , για να διακρίνεται από την παράμετρο  $c$ ). Την αυθαίρετη αυτή σταθερά  $C$  μπορούμε να την προσδιορίσουμε, μόνο αν έχουμε και μία συνθήκη, συνήθως την αρχική συνθήκη  $v(0) = v_0$  για την ταχύτητα  $v = v(t)$ . Εδώ υποθέτουμε ότι  $v_0 > 0$ .

(δ) Τώρα με βάση την αρχική αυτή συνθήκη  $v(0) = v_0$ , η πιο πάνω γενική λύση (3.5.37) παίρνει τη μορφή

$$v(0) = v_0 \implies v_0 = \frac{b}{Cb - c}, \quad (3.5.38)$$

αφού  $e^0 = 1$ . Λύνοντας ως προς τη σταθερά  $C$ , παίρνουμε

$$(Cb - c)v_0 = b \implies Cbv_0 = b + cv_0 \implies C = \frac{b + cv_0}{bv_0}. \quad (3.5.39)$$

Αντικαθιστώντας τώρα την τιμή αυτή της σταθεράς  $C$  στη γενική λύση (3.5.37), βρίσκουμε ότι

$$v(t) = \frac{b}{\frac{b + cv_0}{v_0} e^{bt/m} - c} \quad (3.5.40)$$

και τελικά

$$v(t) = \frac{bv_0}{(b + cv_0)e^{bt/m} - cv_0}. \quad (3.5.41)$$

Αυτή είναι η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής

$$m\dot{v}(t) + bv(t) = -cv^2(t), \quad v(0) = v_0, \quad (3.5.42)$$

που αποτελείται από την παρούσα διαφορική εξίσωση Bernoulli (3.5.26) και την αρχική συνθήκη της  $v(0) = v_0$ . Στη λύση αυτή (3.5.41) παρατηρούμε καταρχήν ότι  $v(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$ , αφού για  $t \rightarrow \infty$  και  $e^{bt/m} \rightarrow \infty$ . Είναι εύλογο να μηδενίζεται η ταχύτητα  $v(t)$  για  $t \rightarrow \infty$  (πρακτικά για πολύ μεγάλες τιμές του χρόνου  $t$ ), αφού η μόνη δύναμη  $F$  που δρα πάνω στο υλικό σημείο είναι η αντίσταση  $R = -bv - cv^2$  της σχέσεως (3.5.25) στην ευθύγραμμη αυτή κίνηση του υλικού σημείου. Η δύναμη αυτή  $R$  απλά επιβραδύνει την κίνηση του υλικού σημείου μέχρι το μηδενισμό της ταχύτητάς του  $v$  για  $t \rightarrow \infty$ .

Αφετέρου για  $t = 0$ , οπότε  $e^{bt/m} = e^0 = 1$ , η ίδια λύση (3.5.41) παίρνει τη μορφή

$$v(0) = \frac{bv_0}{(b + cv_0) \cdot 1 - cv_0} = \frac{bv_0}{b + cv_0 - cv_0} = \frac{bv_0}{b} = v_0. \quad (3.5.43)$$

Επαληθεύεται επομένως η πλήρωση της αρχικής συνθήκης  $v(0) = v_0$ . Επίσης εύκολα διαπιστώνεται ότι με την αύξηση του χρόνου  $t$  ο εκθετικός όρος  $e^{bt/m}$  στο θετικό παρονομαστή  $(b + cv_0)e^{bt/m} - cv_0$  της λύσεως (3.5.41) συνεχώς αυξάνεται. Έτσι ο παρονομαστής αυτός όλο κι αυξάνεται. Συνεπώς η τιμή της ταχύτητας  $v(t)$  όλο και μειώνεται. Επομένως η ταχύτητα  $v(t)$  του υλικού σημείου μειώνεται από την αρχική της τιμή  $v_0$  (έχουμε υποθέσει ότι  $v_0 > 0$ ) μέχρι μηδενισμού της για  $t \rightarrow \infty$ . Και μάλιστα δεν παρουσιάζονται καθόλου ταλαντώσεις της ταχύτητας  $v(t)$  κατά τη μείωση αυτή, την επιβράδυνση της ευθύγραμμης κινήσεως του υλικού σημείου.

Σημειώνουμε ακόμη ότι: (i) Τη λύση αυτή (3.5.41) για την ταχύτητα  $v(t)$  του υλικού σημείου την επαληθεύσαμε (αλλ' επίσης και τη βρήκαμε εντελώς ανεξάρτητα) με τη χρήση της *Mathematica*. (ii) Η ίδια λύση (3.5.41) είναι φυσικά η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής (3.5.42), δηλαδή μια μερική (ή ειδική) λύση της διαφορικής εξίσωσης Bernoulli (3.5.26). Από την άλλη πλευρά όμως, θεωρώντας τώρα τη σταθερά  $v_0$  στη λύση αυτή (3.5.41) σαν μια αυθαίρετη σταθερά και όχι απλά σαν την αρχική ταχύτητα  $v(0) = v_0$ , η ίδια λύση  $v(t)$  μπορεί να ερμηνευθεί και σαν η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης Bernoulli (3.5.26).

(ε) Τέλος για τον Πολιτικό Μηχανικό πάρα πολλές φορές είναι πολύ πιο ενδιαφέρον να γνωρίζει τη θέση  $x(t)$  του κινούμενου υλικού σημείου παρά την ταχύτητά του  $v(t)$ . Επομένως, ολοκληρώνοντας την έκφραση (3.5.41) της ταχύτητας  $v(t)$  ως προς το χρόνο  $t$  (εδώ με τη βοήθεια της *Mathematica*), βρίσκουμε για τη θέση  $x(t)$  τον τελικό τύπο

$$x(t) = x_0 - \frac{b}{c}t + \frac{m}{c} \ln \frac{(b + cv_0)e^{bt/m} - cv_0}{b}. \quad (3.5.44)$$

Στον τύπο αυτό σαν αρχική θέση του υλικού σημείου λήφθηκε η θέση του  $x(0) = x_0$ . Επομένως η συνάρτηση αυτή  $x(t)$  είναι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (εδώ δύο αρχικών τιμών)

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) = -cx^2(t), \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad (3.5.45)$$

με τη διαφορική εξίσωση Bernoulli γραμμένη τώρα σαν μια διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως ή σαν μια κοινή εξίσωση Bernoulli, τώρα όμως με άγνωστη συνάρτηση την παράγωγο  $\dot{x}(t)$ . ▲

**Α3.6. ΠΛΗΡΕΙΣ (Ή ΑΚΡΙΒΕΙΣ) ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ****Α3.6.1. Ισοσταθμικές καμπύλες**

Θεωρούμε μια γνωστή συνάρτηση  $u$  των δύο μεταβλητών  $x$  και  $y$ , δηλαδή μια συνάρτηση της μορφής

$$u = u(x, y). \quad (3.6.1)$$

Η συνάρτηση αυτή ορίζεται για κάθε διατεταγμένο ζεύγος τιμών  $x$  και  $y$  των μεταβλητών της σε μια περιοχή  $D$  του επιπέδου  $Oxy$ , αφού  $u = u(x, y)$ . Στην περίπτωση που διαλέγουμε τα σημεία  $(x, y)$  στην περιοχή αυτή  $D$  κατά τέτοιον τρόπο, ώστε

$$u(x, y) = C \quad (3.6.2)$$

με το  $C$  συγκεκριμένη σταθερά, τότε λέμε ότι έχουμε μια **ισοσταθμική καμπύλη**  $\Gamma$  (στο επίπεδο  $Oxy$ ) της συναρτήσεως  $u = u(x, y)$ . Με άλλα λόγια η εξίσωση αυτή  $u(x, y) = C$  μας ορίζει μια καμπύλη  $\Gamma$  στο επίπεδο  $Oxy$ , όπου η συνάρτησή μας  $u = u(x, y)$  παίρνει συνεχώς τη σταθερή τιμή  $C$ . Είναι αυτονόητο ότι αυτό δε συμβαίνει σε κάθε σημείο  $(x, y)$  του επιπέδου  $Oxy$ : συμβαίνει μόνο σ' εκείνα τα σημεία  $(x, y)$  όπου  $u(x, y) = C$ , δηλαδή ισχύει η πιο πάνω εξίσωση (3.6.2).

▼ **Εφαρμογή Α3.4 (Μετάδοση Θερμότητας):** Σε ένα μόνιμο (όχι μεταβαλλόμενο με το χρόνο  $t$ ) θερμοκρασιακό πρόβλημα σε περιοχή  $D$  του επιπέδου  $Oxy$  η θερμοκρασία  $\theta = \theta(x, y)$  έχει διαπιστωθεί ότι δίνεται από τη συνάρτηση

$$\theta(x, y) = b(x^2 - y^2) \quad (3.6.3)$$

με το  $b$  γνωστή σταθερά. Στην περίπτωση αυτή οι καμπύλες του επιπέδου  $Oxy$  που ορίζονται από την εξίσωση

$$b(x^2 - y^2) = \theta_0 \quad (3.6.4)$$

με το  $\theta_0$  σταθερά (εδώ φυσικά σταθερή θερμοκρασία) αποτελούν τις ισόθερμες (ή ισοθερμοκρασιακές) καμπύλες. Πρόκειται για τις καμπύλες εκείνες όπου η θερμοκρασία  $\theta(x, y) = b(x^2 - y^2)$  έχει σταθερή τιμή  $\theta_0$  σε ολόκληρη την καμπύλη. Αλλάζοντας τη σταθερή θερμοκρασία  $\theta_0$ , παίρνουμε και μια διαφορετική ισόθερμη (ή ισοθερμοκρασιακή) καμπύλη. Στην περίπτωσή μας βέβαια οι ισόθερμες καμπύλες είναι οι υπερβολές (3.6.4). Ασφαλώς σε άλλες περιπτώσεις είναι διαφορετικές και συνήθως πιο πολύπλοκες στην αναλυτική τους έκφραση καμπύλες. (Αν βέβαια υπάρχει μια τέτοια αναλυτική έκφραση: δεν υπάρχει πάντα σε ένα φυσικό πρόβλημα!) ▲

▼ **Εφαρμογή Α3.5 (Ρευστομηχανική):** Στη Ρευστομηχανική (ή Μηχανική των Ρευστών) ιδεατού ρευστού θεωρούμε το πρόβλημα μιας σημειακής πηγής (ή απαγωγής, καταβόθρας, ουσιαστικά αρνητικής πηγής) στην αρχή  $O = (0, 0)$  των αξόνων  $Oxy$ . Στην περίπτωση αυτή οι ευθείες

$$\frac{y}{x} = k \quad \text{ισοδύναμα} \quad y = kx \quad (3.6.5)$$

με το  $k$  αυθαίρετη σταθερά είναι οι γραμμές ροής του ιδεατού ρευστού. Με απλά λόγια το ρευστό ξεκινάει από την πηγή του  $O = (0, 0)$  και μετά κινείται ευθύγραμμα προς όλες τις κατευθύνσεις. Με μεταβολή της σταθεράς  $k$  αλλάζει και η γραμμή ροής που θεωρούμε. Η συνάρτηση

$$u(x, y) = \frac{y}{x} \quad (3.6.6)$$

είναι εδώ η συνάρτησή μας  $u = u(x, y)$  και οι γραμμές ροής  $y/x = k$  είναι οι ισοσταθμικές καμπύλες της σχέσεως (3.6.2) για τη συνάρτηση αυτή

$$u(x, y) = C \quad \implies \quad \frac{y}{x} = C \quad \text{εδώ με } C = k. \quad (3.6.7)$$

Ανάλογα οι περιφέρειες

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (3.6.8)$$

(με  $a$  την ακτίνα) είναι οι ισοσταθμικές καμπύλες της συναρτήσεως

$$u(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3.6.9)$$

και επίσης οι ισοδυναμικές γραμμές στο παρόν πεδίο ροής. Είναι δηλαδή οι καμπύλες όπου

$$u(x, y) = C \implies x^2 + y^2 = C \quad (3.6.10)$$

με το σύμβολο  $C$  να δηλώνει σταθερά, εδώ τη θετική σταθερά  $C = a^2$ . ▲

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε βέβαια να έχουμε και ποικίλες άλλες ισοσταθμικές καμπύλες, όπως στις ακόλουθες δύο εφαρμογές: στην πρώτη για πλάκα και στη δεύτερη για δίσκο:

▼ **Εφαρμογή Α3.6 (Πλάκες):** Σε μια οριζόντια **πλάκα** σε κατασκευή του Πολιτικού Μηχανικού οι ισοσταθμικές καμπύλες μπορούν να αφορούν στο **βέλος κάμψεως** (στη **βύθιση**)  $w(x, y)$  στην πλάκα, δηλαδή να είναι οι καμπύλες όπου  $w(x, y) = C$ . Εδώ πρόκειται για **ισοϋψείς** καμπύλες. ▲

▼ **Εφαρμογή Α3.7 (Δίσκοι):** Θεωρούμε ένα λεπτό επίπεδο μέσον υπό επίπεδη καταπόνηση, ένα **δίσκο**, όπως το αποκαλεί μερικές φορές ο Πολιτικός Μηχανικός. Σε ένα τέτοιο μέσον μπορεί να ενδιαφερόμαστε π.χ. για τις ισοσταθμικές καμπύλες της ορθής τάσεως  $\sigma_x = \sigma_x(x, y)$  ή της ορθής τάσεως  $\sigma_y = \sigma_y(x, y)$  ή ακόμη και της διατμητικής τάσεως  $\tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y)$ . Πολύ συχνότερα βέβαια ενδιαφερόμαστε για τις ισοσταθμικές καμπύλες της ισοδύναμης τάσεως  $\sigma_e = \sigma_e(x, y)$  (ο δείκτης  $e$  προέρχεται από τη λέξη equivalent: ισοδύναμος), που προκύπτει μέσω των τάσεων  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  και  $\tau_{xy}$  και που υπεισέρχεται σε ένα **κριτήριο διαρροής**. Για παράδειγμα, ένα τέτοιο κριτήριο είναι το πολύ γνωστό **κριτήριο διαρροής του von Mises**. Σε μια τέτοια περίπτωση η ισοσταθμική καμπύλη

$$\sigma_e(x, y) = C \quad (3.6.11)$$

θα αφορά σε μια αυθαίρετη (αν και εδώ μόνο θετική) τιμή  $C$  της ισοδύναμης αυτής τάσεως  $\sigma_e$ . Αν μάλιστα η θετική αυτή σταθερά  $C$  πάρει την ειδική τιμή της **τάσεως διαρροής**  $\sigma_Y$  (ο δείκτης  $Y$  προέρχεται από τη λέξη **yielding: διαρροή**), τότε η ισοσταθμική καμπύλη  $\sigma_e(x, y) = \sigma_Y$  αποτελεί το σύνορο μεταξύ της ελαστικής και της πλαστικής περιοχής στο επίπεδο μέσον, στο δίσκο τον οποίο εξετάζουμε. ▲

### Α3.6.2. Ορισμός των πλήρων (ή ακριβών) διαφορικών εξισώσεων

Θεωρούμε τώρα γενικά τις ισοσταθμικές καμπύλες (3.6.2), δηλαδή τις καμπύλες

$$u(x, y) = C \quad (3.6.12)$$

για μια συνάρτηση  $u = u(x, y)$  των δύο μεταβλητών  $x$  και  $y$ . Τι σημαίνει η σταθερά  $C$  στο δεξιό μέλος; Απλά σημαίνει ότι με την εξίσωση (3.6.12) ορίζεται η συγκεκριμένη ισοσταθμική καμπύλη  $\Gamma$ , όπου η συνάρτηση  $u = u(x, y)$  παίρνει (σε ολόκληρη την καμπύλη  $\Gamma$ ) τη σταθερή τιμή  $C$ .

Αν τώρα διαφορίσουμε τη σχέση αυτή (3.6.12), θα έχουμε

$$du = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dy = 0. \quad (3.6.13)$$

Στη σχέση αυτή αριστερά έχουμε το διαφορικό, το ολικό διαφορικό  $du$  της συναρτήσεως  $u(x, y)$ . Το διαφορικό αυτό  $du$  αποτελείται από το άθροισμα δύο όρων: (α) του όρου  $(\partial u/\partial x) dx$ , που οφείλεται στη μεταβολή  $dx$  της μεταβλητής  $x$  και περιλαμβάνει τη μερική παράγωγο  $\partial u/\partial x$ , και (β) του όρου  $(\partial u/\partial y) dy$ , ο οποίος οφείλεται στη μεταβολή  $dy$  της μεταβλητής  $y$  και περιλαμβάνει

τη μερική παράγωγο  $\partial u/\partial y$ . Φυσικά στο δεξιό μέλος έχουμε μηδέν, γιατί το διαφορικό  $dC$  μιας σταθεράς είναι μηδέν:  $dC = 0$ .

Θεωρούμε τώρα τις διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0, \quad (3.6.14)$$

ισοδύναμα

$$P(x, y) + Q(x, y) \frac{dy}{dx} = 0 \text{ με } y = y(x) \text{ ή και } P(x, y) \frac{dx}{dy} + Q(x, y) = 0 \text{ τώρα με } x = x(y). \quad (3.6.15)$$

Στις εξισώσεις αυτές οι δύο γνωστές συναρτήσεις  $P(x, y)$  και  $Q(x, y)$  των δύο μεταβλητών  $x$  και  $y$  θεωρούνται τώρα ότι είναι οι μερικές παράγωγοι μιας συναρτήσεως  $u = u(x, y)$ , δηλαδή

$$P(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}. \quad (3.6.16)$$

Οι διαφορικές αυτές εξισώσεις καλούνται **πλήρεις διαφορικές εξισώσεις**. Σχετικά πρόσφατα έχει αρχίσει να χρησιμοποιείται ευρέως κι ο όρος **ακριβείς διαφορικές εξισώσεις**, ο οποίος βασίζεται στον αντίστοιχο Αγγλικό όρο: **exact differential equations**.

Άρα με βάση τις σχέσεις (3.6.16) μια πλήρης (ή ακριβής) διαφορική εξίσωση της μορφής (3.6.14) μπορεί να γραφεί και στην ισοδύναμη μορφή της

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dy = 0. \quad (3.6.17)$$

Όμως η μορφή αυτή (στο αριστερό μέλος) ισούται βέβαια με το ολικό διαφορικό  $du$  της συναρτήσεως  $u = u(x, y)$  σύμφωνα με τη σχέση (3.6.13), δηλαδή

$$du = 0. \quad (3.6.18)$$

Επομένως οδηγούμαστε αμέσως στη γενική λύση

$$u(x, y) = C \quad (3.6.19)$$

της διαφορικής εξισώσεως (3.6.17), ισοδύναμα της αρχικής διαφορικής εξισώσεως (3.6.14) λόγω των σχέσεων (3.6.16) που σχετίζονται με τον ορισμό μιας πλήρους διαφορικής εξισώσεως. Μ' άλλα λόγια, αφού το ολικό διαφορικό  $du$  της συναρτήσεως  $u = u(x, y)$  είναι ίσο με μηδέν, σχέση (3.6.18), η συνάρτηση αυτή  $u(x, y)$  πρέπει να είναι σταθερή: γενική λύση (3.6.19):  $u(x, y) = C$ . Προφανώς οι μερικές λύσεις που προέρχονται από τη γενική αυτή λύση  $u(x, y) = C$  (θέτοντας συγκεκριμένες τιμές στη σταθερά  $C$ ) είναι οι ισοσταθμικές καμπύλες της συναρτήσεως  $u(x, y)$ .

Εννοείται βέβαια ότι στη λύση αυτή (3.6.19) μπορούμε να έχουμε μια οποιαδήποτε σταθερά  $C$  στο δεξιό μέλος. Πρόκειται για αυθαίρετη σταθερά, η οποία όμως προσδιορίζεται εύκολα, αν μας δοθεί και μια αρχική συνθήκη  $y(x_0) = y_0$  (αν η μεταβλητή  $y$  θεωρηθεί σαν η εξαρτημένη μεταβλητή:  $y = y(x)$ ) ή  $x(y_0) = x_0$  (αν η μεταβλητή  $x$  θεωρηθεί σαν η εξαρτημένη μεταβλητή:  $x = x(y)$ ). Και στις δύο περιπτώσεις θα ισχύει

$$C = u(x_0, y_0) \implies u(x, y) = u(x_0, y_0) \quad (3.6.20)$$

για τη λύση αυτού του προβλήματος αρχικής τιμής.

### A3.6.3. Συνθήκη ολοκληρωσιμότητας των πλήρων (ή ακριβών) διαφορικών εξισώσεων

Είδαμε ήδη ότι ο ορισμός μιας πλήρους (ή ακριβούς) διαφορικής εξισώσεως της μορφής (3.6.14) ή (3.6.15) είναι η ύπαρξη μιας συναρτήσεως  $u = u(x, y)$ , τέτοιας ώστε να ισχύουν οι δύο σχέσεις (3.6.16) γι' αυτήν την αρχική διαφορική εξίσωση (3.6.14) ή (3.6.15). Τότε με άμεση ολοκλήρωση της σχέσεως (3.6.17) ή μάλλον της ισοδύναμής της (3.6.18) προκύπτει η γενική λύση (3.6.19) της πλήρους (ή ακριβούς) διαφορικής εξισώσεως (3.6.14). Ωραία ως εδώ!

Ας παραγωγίσουμε τώρα τις σχέσεις (3.6.16) την πρώτη ως προς  $y$  και τη δεύτερη ως προς  $x$ . Οδηγούμαστε έτσι στις μικτές παραγώγους της συναρτήσεως  $u = u(x, y)$ . Συγκεκριμένα έχουμε

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right). \quad (3.6.21)$$

Σχεδόν πάντα χρησιμοποιούμε τους εξής πολύ απλούστερους συμβολισμούς στις μικτές μερικές παραγώγους:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right) \equiv \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right) \equiv \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (3.6.22)$$

παραλείποντας μάλιστα και τις παρενθέσεις. Με τον κλασικό αυτό συμβολισμό οι σχέσεις (3.6.21) γράφονται και στην κάπως απλούστερη μορφή τους

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y}. \quad (3.6.23)$$

Αν μάλιστα θεωρηθεί προφανές ότι  $P = P(x, y)$ ,  $Q = Q(x, y)$  και  $u = u(x, y)$ , δηλαδή ότι μεταβλητές είναι οι  $x$  και  $y$ , τότε οι σχέσεις (3.6.23) γράφονται και στην ακόμη συνοπτικότερη μορφή τους

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}. \quad (3.6.24)$$

Θεωρείται βέβαια αυτονόητο ότι όλες αυτές οι σχέσεις προϋποθέτουν την ύπαρξη των σχετικών μερικών παραγώγων. Ας δεχθούμε τώρα ότι οι δύο συναρτήσεις  $P = P(x, y)$  και  $Q = Q(x, y)$  στην πλήρη διαφορική εξίσωση (3.6.14) είναι συνεχείς συναρτήσεις και επιπλέον έχουν συνεχείς πρώτες μερικές παραγώγους. Στην περίπτωση αυτή από τις σχέσεις (3.6.24) είναι προφανές ότι και οι μικτές μερικές παράγωγοι  $\partial^2 u / (\partial y \partial x)$  και  $\partial^2 u / (\partial x \partial y)$  θα είναι και αυτές συνεχείς συναρτήσεις. Αυτό θα ισχύει, αφού οι μικτές αυτές παράγωγοι είναι ίσες με τις μερικές παραγώγους  $\partial P / \partial y$  και  $\partial Q / \partial x$  αντίστοιχα, οι οποίες έχουν ήδη υποτεθεί ότι είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Γνωρίζουμε όμως από τον απειροστικό λογισμό ότι εάν οι μικτές παράγωγοι μιας συναρτήσεως  $u = u(x, y)$  των δύο μεταβλητών  $x$  και  $y$  είναι συνεχείς, τότε θα είναι και ίσες μεταξύ τους. Επομένως στην παρούσα περίπτωση που οι μικτές παράγωγοι  $\partial^2 u / (\partial y \partial x)$  και  $\partial^2 u / (\partial x \partial y)$  είναι συνεχείς, όπως διαπιστώσαμε στην ακριβώς προηγούμενη παράγραφο, θα είναι και ίσες. Άρα

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}. \quad (3.6.25)$$

Και ένα ακόμη βήμα: το τελευταίο και το πιο κρίσιμο. Αφού τα δεξιά μέλη των σχέσεων (3.6.24) είναι ίσα μεταξύ τους, σχέση (3.6.25), το ίδιο ακριβώς θα συμβαίνει και με τα αριστερά μέλη τους  $\partial P / \partial y$  και  $\partial Q / \partial x$ . Επομένως σε μια πλήρη διαφορική εξίσωση της μορφής (3.6.14), την επαναλαμβάνουμε

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0, \quad (3.6.26)$$

θα πρέπει οπωσδήποτε να ισχύει η σχέση

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (3.6.27)$$

Είναι πάρα πολύ σημαντική η σχέση αυτή. Δεν αρκούμαστε επομένως στη λέξη σχέση. Ας την αποκαλέσουμε συνθήκη: **συνθήκη ολοκληρωσιμότητας ή πληρότητας**. Αυτή οπωσδήποτε ισχύει (με την προϋπόθεση συνεχείας των συναρτήσεων  $P$  και  $Q$  και των πρώτων μερικών παραγώγων τους) σε μια πλήρη διαφορική εξίσωση της γενικής μορφής (3.6.26). Με άλλα λόγια, εάν η διαφορική εξίσωση (3.6.26) είναι πλήρης, τότε ισχύει η συνθήκη (3.6.27). Αλλιώς, εάν δεν ισχύει η συνθήκη (3.6.27), τότε αποκλείεται (με την προϋπόθεση συνεχείας που προαναφέραμε) να είναι πλήρης η εξίσωση (3.6.26). Πρόκειται λοιπόν για μια αναγκαία συνθήκη σε μια πλήρη διαφορική εξίσωση.



Και δε φτάνει αυτό. Υπάρχει και συνέχεια! Μπορεί να αποδειχθεί, αν και θα παραλείψουμε τη σχετική απόδειξη, ότι η συνθήκη ολοκληρωσιμότητας ή πληρότητας (3.6.27) δεν είναι μόνο αναγκαία, αλλά και ικανή. Δηλαδή, εάν ισχύει η συνθήκη αυτή (3.6.27), τότε οπωσδήποτε η διαφορική εξίσωση (3.6.26) θα είναι μια πλήρης διαφορική εξίσωση. Επομένως η συνθήκη (3.6.27) είναι μια αναγκαία και ικανή συνθήκη, ώστε η διαφορική εξίσωση (3.6.26) να είναι πλήρης. Θεωρείται επομένως αυτονόητο ότι το πρώτο πράγμα που πρέπει να κάνουμε σε μια διαφορική εξίσωση της μορφής (3.6.26) είναι να ελέγξουμε τη συνθήκη ολοκληρωσιμότητας ή πληρότητας (3.6.27). Εάν αυτή ισχύει, κάτι που ασφαλώς το ευχόμαστε, τότε έχουμε προς επίλυση μια πλήρη διαφορική εξίσωση. Δηλαδή υπάρχει συνάρτηση  $u = u(x, y)$ , τέτοια ώστε η γενική λύση της πλήρους διαφορικής εξισώσεως (3.6.26) να είναι της απλής μορφής (3.6.19), δηλαδή  $u(x, y) = C$ . Έτσι παίρνουμε για λύσεις τις ισοσταθμικές καμπύλες  $u(x, y) = C$  της συναρτήσεως  $u(x, y)$ .

#### A3.6.4. Επίλυση των πλήρων (ή ακριβών) διαφορικών εξισώσεων

Προκύπτει όμως το εύλογο ερώτημα: και πώς ακριβώς θα μπορέσει να προσδιορισθεί η συνάρτηση αυτή  $u(x, y)$  στη λύση (3.6.19),  $u(x, y) = C$ , της πλήρους διαφορικής εξισώσεως (3.6.26); Μα ασφαλώς από τις δύο σχέσεις (3.6.16), τις επαναλαμβάνουμε

$$P(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \quad (3.6.28)$$

είτε (α) με ολοκλήρωση της πρώτης ως προς  $x$  και μετά έλεγχο της ισχύος και της δεύτερης είτε (β) ανάλογα με ολοκλήρωση της δεύτερης ως προς  $y$  και έπειτα έλεγχο της ισχύος και της πρώτης.

Δε θα ήταν όμως έντιμο να παραλείψουμε να αναφέρουμε ότι στην ολοκλήρωση της πρώτης σχέσεως (3.6.28) ως προς  $x$  η σταθερά ολοκληρώσεως γενικά θα είναι συνάρτηση του  $y$ , π.χ.  $h(y)$ , αφού η ολοκλήρωση έχει γίνει ως προς  $x$ . Αντίστοιχα, αν η ολοκλήρωση γίνει στη δεύτερη σχέση (3.6.28), σ' αυτήν ως προς  $y$ , τότε η σταθερά ολοκληρώσεως μπορεί να είναι (και συνήθως είναι) συνάρτηση του  $x$ , π.χ.  $g(x)$ . Είτε στη μία περίπτωση είτε στην άλλη (το ποια θα προτιμηθεί είναι θέμα υπολογιστικής ευκολίας στην ολοκλήρωση) η σχετική σταθερά-συνάρτηση ολοκληρώσεως ( $h(y)$  ή  $g(x)$  αντίστοιχα) θα πρέπει να προσδιορισθεί στη συνέχεια με τη χρήση της άλλης σχέσεως (3.6.28), δηλαδή εκείνης που δε χρησιμοποιήθηκε στην ολοκλήρωση.

Σε σπάνιες περιπτώσεις η επίλυση μιας πλήρους (ή ακριβούς) διαφορικής εξισώσεως γίνεται και άμεσα, «με το μάτι», αναγνωρίζοντας ποια ακριβώς συνάρτηση  $u(x, y)$  υποκρύπτεται πίσω από μια πλήρη διαφορική εξίσωση. Ένα παράδειγμα:

▼ **Παράδειγμα A3.9:** Για την τόσο απλή διαφορική εξίσωση

$$y \, dx + x \, dy = 0 \quad (3.6.29)$$

αναγνωρίζουμε πρώτα ότι είναι μια πλήρης (ή ακριβής) διαφορική εξίσωση, αφού

$$P(x, y) = y, \quad Q(x, y) = x \quad \text{και} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1. \quad (3.6.30)$$

Αναγνωρίζουμε όμως και τη λύση της

$$xy = C, \quad \text{αφού παρατηρούμε ότι} \quad y \, dx + x \, dy = d(xy) \quad (3.6.31)$$

χωρίς την ανάγκη να καταφύγουμε στη γενική μέθοδο που περιγράψαμε προηγουμένως. ▲

Σπάνια είμαστε τόσο πολύ τυχεροί ή και έμπειροι ως προς την άμεση αναγνώριση της συναρτήσεως  $u(x, y)$  της λύσεως  $u(x, y) = C$  μιας πλήρους (ή ακριβούς) διαφορικής εξισώσεως. Συνήθως σε μια διαπιστωμένα πλήρη (ή ακριβή) διαφορική εξίσωση προσφεύγουμε στη γενική μέθοδο της ολοκληρώσεως της μιας από τις σχέσεις (3.6.28) και έπειτα χρήσεως και της δεύτερης. Τη γενική αυτή μέθοδο την επιδεικνύουμε στο επόμενο και κάπως δυσκολότερο παράδειγμα:

▼ **Παράδειγμα Α3.10:** Για τη διαφορική εξίσωση

$$(x^3 + 3xy^2)y' = -3x^2y - y^3 \quad (3.6.32)$$

ζητούνται: (α) Να αποδειχθεί ότι είναι πλήρης. (β) Να προσδιορισθεί η γενική λύση της.

**Λύση:** (α) Πρώτα-πρώτα ας μεταφέρουμε το δεξιό μέλος στο αριστερό ξαναγράφοντας τη διαφορική αυτή εξίσωση στην πιο συνηθισμένη και συμμετρική ως προς τα διαφορικά μορφή της

$$(3x^2y + y^3) dx + (x^3 + 3xy^2) dy = 0 \quad (3.6.33)$$

με τη χρήση των διαφορικών  $dx$  και  $dy$ . Πήραμε βέβαια υπόψη μας ότι  $y'(x) = dy/dx$ . Πού είμαστε τώρα; Μα φθάσαμε σε μια εξίσωση της μορφής

$$P dx + Q dy = 0 \quad \text{με} \quad P = P(x, y) = 3x^2y + y^3 \quad \text{και} \quad Q = Q(x, y) = x^3 + 3xy^2. \quad (3.6.34)$$

Στο σημείο αυτό ας ελέγξουμε την πιθανή πλήρωση της αναγκαίας και ικανής συνθήκης ολοκληρωσιμότητας ή πληρότητας (3.6.27). Αφού

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3(x^2 + y^2) \quad \text{και} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3(x^2 + y^2), \quad (3.6.35)$$

ναι, στ' αλήθεια ισχύει η συνθήκη αυτή, εδώ με

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 3(x^2 + y^2), \quad (3.6.36)$$

όπως ήδη είδαμε. Έχουμε λοιπόν μπροστά μας μια πλήρη (ή ακριβή) διαφορική εξίσωση: την εξίσωση (3.6.32) ή, καλύτερα, (3.6.33).

(β) Ας βρούμε τώρα τη γενική λύση

$$u(x, y) = C \quad (3.6.37)$$

της διαφορικής αυτής εξισώσεως (3.6.33). Θα χρησιμοποιήσουμε την πρώτη σχέση (3.6.28)

$$P(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \quad \text{εδώ στη μορφή} \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 3x^2y + y^3, \quad (3.6.38)$$

αφού εδώ  $P(x, y) = 3x^2y + y^3$ , όπως διαπιστώσαμε στις σχέσεις (3.6.34). Εύκολη, στ' αλήθεια εύκολη είναι η σχετική ολοκλήρωση ως προς  $x$ . Προκύπτει ότι

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 3x^2y + y^3 \implies u(x, y) = x^3y + xy^3 + h(y) \quad (3.6.39)$$

με  $h(y)$  τη «σταθερά» ολοκληρώσεως, εδώ φυσικά συνάρτηση  $h(y)$  της μεταβλητής  $y$ , αφού ολοκληρώσαμε ως προς τη μεταβλητή  $x$ . Ανάλογα, θα μπορούσαμε να είχαμε χρησιμοποιήσει τη δεύτερη σχέση (3.6.28) για την ολοκλήρωση, εδώ (όχι γενικά) χωρίς κανένα υπολογιστικό πλεονέκτημα ή μειονέκτημα, αν και δεν το κάναμε.

Τώρα όμως είμαστε υποχρεωμένοι να πάρουμε υπόψη μας και τη δεύτερη σχέση (3.6.28). Η σχέση αυτή:

$$Q(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \quad \text{παίρνει εδώ τη μορφή} \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = x^3 + 3xy^2 \quad (3.6.40)$$

εξαιτίας της τελευταίας σχέσεως (3.6.34). Αλλ' η συνάρτηση  $u(x, y)$  έχει ήδη σχεδόν βρεθεί στη σχέση (3.6.39): μόνο η συνάρτηση  $h(y)$  λείπει εκεί. Παραγωγίζοντας λοιπόν ως προς  $y$  τη συνάρτηση  $u(x, y)$  της σχέσεως (3.6.39) και αντικαθιστώντας στη δεύτερη σχέση (3.6.40), παίρνουμε τελικά

$$x^3 + 3xy^2 + h'(y) = x^3 + 3xy^2 \implies h'(y) = 0 \implies h(y) = C_1 \quad (3.6.41)$$

με το σύμβολο  $C_1$  να δηλώνει αυθαίρετη σταθερά.

Επομένως η συνάρτηση  $u(x, y)$  στη σχέση (3.6.39) παίρνει την τελική της μορφή

$$u(x, y) = x^3y + xy^3 + C_1. \quad (3.6.42)$$

Άρα η γενική λύση (3.6.37),  $u(x, y) = C$ , της διαφορικής μας εξίσωσης γράφεται στη μορφή

$$x^3y + xy^3 + C_1 = C \implies x^3y + xy^3 = C_2 \quad (3.6.43)$$

με  $C_2 = C - C_1$  ξανά μια αυθαίρετη σταθερά.

Αντίστροφα τώρα, για επαλήθευση, διαφορίζοντας τη λύση αυτή (3.6.43), διαπιστώνουμε ότι

$$(3x^2y + y^3) dx + (x^3 + 3xy^2) dy = 0. \quad (3.6.44)$$

Συνεπώς η πιο πάνω λύση (3.6.43) επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση (3.6.33), επειδή αυτή προέκυψε αμέσως από την πιο πάνω λύση (3.6.43) στη σχέση (3.6.44) με διαφόριση. ▲

### Α3.7. ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ

#### Α3.7.1. Έννοια και χρήση του ολοκληρωτικού παράγοντα

Πολλές φορές μια διαφορική εξίσωση της μορφής (3.6.14), συγκεκριμένα

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0, \quad (3.7.1)$$

δεν είναι πλήρης (ή ακριβής). Άρα δεν ισχύει η συνθήκη ολοκληρωσιμότητας ή πληρότητας (3.6.27)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{και έχουμε αντίθετα} \quad \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (3.7.2)$$

Στην περίπτωση αυτή είναι μερικές φορές δυνατό να βρεθεί μια συνάρτηση  $\mu = \mu(x, y)$ , τέτοια ώστε η διαφορική εξίσωση (3.7.1) πολλαπλασιαζόμενη επί τη συνάρτηση αυτή  $\mu = \mu(x, y)$  να μας δίνει μια πλήρη διαφορική εξίσωση: την εξίσωση

$$\mu(x, y)P(x, y) dx + \mu(x, y)Q(x, y) dy = 0. \quad (3.7.3)$$

Επομένως η τροποποιημένη αυτή διαφορική εξίσωση είναι πλήρης. Κατά συνέπεια ισχύει η πρώτη συνθήκη (3.7.2), τώρα όμως για τις νέες συναρτήσεις  $\mu P$  και  $\mu Q$ . Άρα θα πρέπει να έχουμε

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \quad (3.7.4)$$

εκ ταυτότητος στο διάστημα  $(a, b)$  που μας ενδιαφέρει. Μια τέτοια συνάρτηση  $\mu = \mu(x, y)$  επιτρέπει την ισχύ της συνθήκης (3.7.4) και έχει καταστήσει την αρχική μας μη πλήρη διαφορική εξίσωση (3.7.1) πλήρη στην τροποποιημένη (πολλαπλασιασμένη επί  $\mu(x, y)$ ) μορφή της (3.7.3). Η συνάρτηση αυτή  $\mu = \mu(x, y)$  καλείται **ολοκληρωτικός παράγοντας** ή **ολοκληρώνων παράγοντας** ή **πολλαπλασιαστής του Euler** για τη μη πλήρη διαφορική εξίσωση (3.7.1). (Εδώ προτιμάμε τον πρώτο από τους τρεις αυτούς όρους, που είναι και αυτός που χρησιμοποιείται συχνότερα.)

Γενικά η εύρεση ενός ολοκληρωτικού παράγοντα  $\mu = \mu(x, y)$  για μια μη πλήρη διαφορική εξίσωση της μορφής (3.7.1) είναι μια πολύ δύσκολη εργασία. Αυτό συμβαίνει, επειδή η σχετική συνθήκη ολοκληρωσιμότητας ή πληρότητας (3.7.4) με την εκτέλεση των μερικών παραγωγίσεων βάσει του κανόνα παραγωγίσεως γινομένου παίρνει τη μορφή

$$\mu \frac{\partial P}{\partial y} + P \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{\partial \mu}{\partial x} \implies \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \mu = Q \frac{\partial \mu}{\partial x} - P \frac{\partial \mu}{\partial y}. \quad (3.7.5)$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι έχουμε φθάσει σε μια αρκετά δύσκολη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους με άγνωστη συνάρτηση το ζητούμενο ολοκληρωτικό παράγοντα  $\mu = \mu(x, y)$ . Κάτι τέτοιο, ουσιαστικά η αναγωγή της συνήθους (αν και μη πλήρους) διαφορικής εξίσωσης (3.7.1) στην επίλυση της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους (3.7.5) για την εύρεση ενός ολοκληρωτικού παράγοντά της  $\mu = \mu(x, y)$  δε μας διευκολύνει και δεν ανήκει στις προθέσεις μας. Άρα η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (3.7.5) εγκαταλείπεται και η χρήση της ασφαλώς δε συνιστάται. Η μέθοδος του ολοκληρωτικού παράγοντα  $\mu$  σαν συναρτήσεως των δύο μεταβλητών  $x$  και  $y$  ουσιαστικά έχει αποτύχει.

Στην ενότητα αυτή θα περιορισθούμε στην ειδική περίπτωση που υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας της μιας μόνο μεταβλητής  $x$ , δηλαδή  $\mu = \mu(x)$ . Δε συμβαίνει αυτό συχνά. Αν όμως συμβεί, τότε με  $\mu = \mu(x)$  η σχέση ολοκληρωσιμότητας (3.7.4) θα μας δώσει (πάλι με την εκτέλεση των παραγωγίσεων στα γινόμενα) μια συνήθη διαφορική εξίσωση: την εξίσωση

$$\mu \frac{\partial P}{\partial y} = \mu \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{d\mu}{dx} \implies \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \mu = Q \frac{d\mu}{dx}. \quad (3.7.6)$$

Η εξίσωση αυτή γράφεται τελικά και στη μορφή

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{Q} \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx. \quad (3.7.7)$$

Εάν συμβαίνει ο συντελεστής του διαφορικού  $dx$  στο δεξιό μέλος να είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής  $x$ , δηλαδή εάν

$$\frac{1}{Q} \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = R(x), \quad (3.7.8)$$

τότε, σ' αυτήν την σπάνια περίπτωση ναι, τότε έχουμε καταλήξει στη διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών

$$\frac{d\mu}{\mu} = R(x) dx \quad \text{με} \quad R(x) = \frac{1}{Q} \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right). \quad (3.7.9)$$

Τη λύνουμε αμέσως με ολοκλήρωση και προσδιορίζουμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα  $\mu = \mu(x)$ .

Τώρα έχουμε την πλήρη διαφορική εξίσωση (3.7.3) στη μορφή

$$\mu(x) P(x, y) dx + \mu(x) Q(x, y) dy = 0 \quad (3.7.10)$$

και τη λύνουμε κατά τα γνωστά από την προηγούμενη Ενότητα Α3.6. Πρέπει βέβαια να είμαστε προσεκτικοί, μήπως ο ολοκληρωτικός παράγοντας  $\mu = \mu(x)$  μηδενίζεται και αυτός εισάγοντας έτσι πρόσθετες και ψεύτικες λύσεις στην αρχική μας διαφορική εξίσωση (3.7.1). Οι λύσεις αυτές  $\mu(x) = 0$ , αν υπάρχουν, πρέπει φυσικά να εξαιρεθούν, δεν ισχύουν για την αρχική διαφορική εξίσωση (3.7.1). Ανάλογα εργαζόμαστε και με ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής  $\mu = \mu(y)$ .

### A3.7.2. Εφαρμογή στη γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως

Η κλασική εφαρμογή του ολοκληρωτικού παράγοντα  $\mu = \mu(x)$  (στην απλή αυτή περίπτωση της μιας μεταβλητής  $x$  σ' αυτόν:  $\mu = \mu(x)$ ) αφορά στην επίλυση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξεως της μορφής

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x), \quad \text{ισοδύναμα} \quad \frac{dy}{dx} + p(x)y(x) - q(x) = 0, \quad (3.7.11)$$

οπότε

$$[p(x)y(x) - q(x)] dx + dy = 0. \quad (3.7.12)$$

Η τελευταία αυτή μορφή της γραμμικής διαφορικής εξίσωσής μας (3.7.11) γράφεται φυσικά και ως εξής:

$$P dx + Q dy = 0 \quad \text{με} \quad P = p(x)y(x) - q(x) \quad \text{και} \quad Q = 1. \quad (3.7.13)$$

Δυστυχώς όμως εδώ, όπως άμεσα παρατηρούμε,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = p(x), \quad \text{ενώ} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad \text{άρα} \quad \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (3.7.14)$$

Επομένως πραγματικά η γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως (3.7.11) δεν είναι πλήρης.

Από την άλλη όμως πλευρά, ευτυχώς διαπιστώνουμε ότι υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής  $\mu = \mu(x)$ . Αυτό συμβαίνει, επειδή η συνάρτηση  $R(x)$  στη σχέση (3.7.8) είναι στ' αλήθεια συνάρτηση μόνο της μεταβλητής  $x$ , αφού εδώ

$$\frac{1}{Q} \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{1}{1} \left\{ \frac{\partial [p(x)y(x) - q(x)]}{\partial y} - \frac{\partial (1)}{\partial x} \right\} = p(x) \implies R(x) = p(x) \quad (3.7.15)$$

με βάση και τις σχέσεις (3.7.13). Επομένως η συνήθης διαφορική εξίσωση (3.7.9) παίρνει τη μορφή

$$\frac{d\mu}{\mu} = p(x) dx \quad (3.7.16)$$

με μια λύση της (μάλιστα θετική, με  $\mu > 0$ ) τη λύση

$$\ln \mu = \int p(x) dx \implies \mu = \mu(x) = e^{\int p(x) dx}. \quad (3.7.17)$$

(Υπάρχουν βέβαια και άλλες λύσεις που βρίσκονται απλά πολλαπλασιάζοντας το  $\mu$  επί μια αυθαίρετη σταθερά  $C$ . Εδώ όμως ένας ολοκληρωτικός παράγοντας μας είναι αρκετός!)

Είμαστε ευχαριστημένοι, πολύ ευχαριστημένοι τώρα. Ένας ολοκληρωτικός παράγοντας  $\mu(x)$  έχει προσδιορισθεί από τη σχέση (3.7.17). Πολλαπλασιάζουμε επομένως τη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (3.7.11) επί  $\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$  και ανατρέχουμε στο Εδάφιο Α3.4.3.3. Εκεί πήραμε έτοιμο τον ολοκληρωτικό παράγοντα  $\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$  στη σχέση (3.4.45) και πολλαπλασιάσαμε μ' αυτόν. Έτσι βρήκαμε την τροποποιημένη (και τώρα πλήρη ή ακριβή) γραμμική διαφορική εξίσωση (3.4.46) και τη λύσαμε εύκολα έχοντας καταλήξει στη γενική λύση (3.4.53).

## Α3.8. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΔΙΑΔΟΧΙΚΩΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΩΝ ΤΟΥ PICARD

### Α3.8.1. Περιγραφή της μεθόδου

Αρκετές φορές είμαστε σε θέση να λύσουμε μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως της λυμένης (ως προς την παράγωγο) μορφής

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{ή απλούστερα} \quad y' = f(x, y) \quad \text{με} \quad y = y(x). \quad (3.8.1)$$

Αυτό το πετυχαίνουμε, εάν είναι δυνατόν, κατατάσσοντάς την σε μια από τις κατηγορίες των διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως που μελετήσαμε μέχρι κάποιο βαθμό στις προηγούμενες ενότητες αυτού του κεφαλαίου και χρησιμοποιώντας τη σχετική μέθοδο επιλύσεως. Όμως σε αρκετές άλλες περιπτώσεις αυτό είναι αδύνατο. Τότε πρέπει να καταφύγουμε σε προσεγγιστικές ή αριθμητικές μεθόδους.

Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε σύντομα στη **μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων** ή **μέθοδο του Picard** ή καλύτερα **μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων του Picard** για την προσεγγιστική επίλυση (με διαδοχικές προσεγγίσεις) της εξισώσεως (3.8.1). Εκτός από το πρακτικό ενδιαφέρον της, στο οποίο θα περιορισθούμε εδώ, η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων παρουσιάζει και ιδιαίτερο θεωρητικό ενδιαφέρον στις διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως με αρχική συνθήκη. Αυτό αφορά στην απόδειξη της υπάρξεως λύσεως και της μοναδικότητας της λύσεως.

Στη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων θεωρούμε ότι η διαφορική εξίσωση (3.8.1) συνοδεύεται από μία αρχική συνθήκη της μορφής

$$y(x_0) = y_0. \quad (3.8.2)$$

Ο τρόπος σκέψεώς μας είναι ο ακόλουθος: Ολοκληρώνουμε τη σχέση (3.8.1) και βρίσκουμε το ολοκλήρωμα (εδώ καλύτερα την **ολοκληρωτική εξίσωση**, επειδή η συνάρτηση  $y(x)$  είναι άγνωστη)

$$y(x) = C + \int_{x_0}^x f(\xi, y(\xi)) d\xi. \quad (3.8.3)$$

Στο ολοκλήρωμα αυτό χρησιμοποιήσαμε μεταβλητό άνω όριο ολοκληρώσεως  $x$ . Επίσης δεν αγνοήσαμε και τη σταθερά  $C$  της ολοκληρώσεως. Όμως η σταθερά αυτή  $C$  μπορεί να προσδιορισθεί άμεσα, γιατί είχαμε ήδη την πρόνοια να θέσουμε σαν κάτω όριο ολοκληρώσεως το σημείο  $x_0$  ισχύος της αρχικής συνθήκης (3.8.2):  $y(x_0) = y_0$ . Επομένως η πιο πάνω σχέση (3.8.3) μας δίνει για  $x = x_0$

$$y(x_0) = y_0 = C + 0 = C \implies C = y_0 \quad (3.8.4)$$

και παίρνει την τελική της μορφή

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, y(\xi)) d\xi. \quad (3.8.5)$$

Αν, υποθετικά, η άγνωστη συνάρτηση  $y(x)$  στο δεξιό μέλος  $f(\xi, y(\xi))$  της παραπάνω ολοκληρωτικής εξίσωσης (3.8.5) ήταν γνωστή, τότε θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε και το αριστερό μέλος της  $y(x)$ . Στη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων του Picard υποθέτουμε απλά μια προσέγγιση της άγνωστης συναρτήσεως  $y(x)$ , π.χ. την αρχική προσέγγιση

$$y_1(x) = y_0. \quad (3.8.6)$$

Η προσέγγιση αυτή  $y_1(x)$  εξασφαλίζει βέβαια την πλήρωση της αρχικής συνθήκης  $y(x_0) = y_0$  και αυτό μας είναι ευχάριστο. Αντίθετα όμως η σταθερή τιμή  $y_1(x) = y_0$  σ' αυτήν την πρώτη προσέγγιση ουσιαστικά καθόλου δεν επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση (3.8.1) ή τη σχεδόν ισοδύναμη ολοκληρωτική εξίσωση (3.8.5). Τί πρέπει λοιπόν να κάνουμε; Να συνεχίσουμε θέτοντας τώρα την πρώτη αυτή προσέγγιση  $y_1(x)$  στο δεξιό μέλος της σχέσεως (3.8.5), εκτελώντας την ολοκλήρωση και παίρνοντας στο αριστερό μέλος μια δεύτερη και γενικά καλύτερη προσέγγιση  $y_2(x)$ , δηλαδή

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, y_1(\xi)) d\xi = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, y_0) d\xi. \quad (3.8.7)$$

Και μετά; Μετά θέτουμε τη δεύτερη αυτή προσέγγιση  $y_2(x)$  στο δεξιό μέλος της ίδιας σχέσεως (3.8.5) και προσδιορίζουμε μια τρίτη και γενικά ακόμη καλύτερη προσέγγιση  $y_3(x)$  με βάση τη σχέση

$$y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, y_2(\xi)) d\xi. \quad (3.8.8)$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να προσδιορίσουμε την  $n$ -προσέγγιση της άγνωστης συναρτήσεως  $y(x)$  από την αντίστοιχη  $(n-1)$ -προσέγγισή της με βάση τον ακόλουθο επαναληπτικό (ή αναδρομικό) τύπο:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, y_{n-1}(\xi)) d\xi. \quad (3.8.9)$$

### A3.8.2. Σύγκλιση της μεθόδου

Θεωρητικά μιλώντας, προχωράμε επ' άπειρο βρίσκοντας όλο και νέες (και γενικά καλύτερες) προσεγγίσεις της άγνωστης λύσεως του προβλήματος αρχικών τιμών (3.8.1) και (3.8.2) ή απλά της διαφορικής εξίσωσης (3.8.1) θεωρώντας το  $y_0$  αυθαίρετη σταθερά. Υποθέτουμε τώρα ότι η ακολουθία των συναρτήσεων  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  συγκλίνει για  $n \rightarrow \infty$  σε μια συγκεκριμένη συνάρτηση, ας την αποκαλέσουμε  $y_\infty(x)$ . (Συνήθως μάλιστα πραγματικά ισχύει η σύγκλιση αυτή, εφόσον η συνάρτηση  $f(x, y)$  και η μερική παράγωγός της  $\partial f(x, y)/\partial y$  είναι συνεχείς συναρτήσεις: ικανή συνθήκη σύγκλισεως.) Σ' αυτήν την περίπτωση φυσικά θα έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n-1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y_\infty(x). \quad (3.8.10)$$

Παίρνοντας το όριο για  $n \rightarrow \infty$  στον επαναληπτικό τύπο (3.8.9) των διαδοχικών μας προσεγγίσεων, θα έχουμε τελικά

$$y_\infty(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, y_\infty(\xi)) d\xi, \quad (3.8.11)$$

όπως μπορεί να αποδειχθεί. Βέβαια μαθηματικά δεν είναι προφανές ότι το όριο για  $n \rightarrow \infty$  στο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της σχέσεως (3.8.9) μας δίνει το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της αμέσως πιο πάνω σχέσεως (3.8.11). Μπορεί όμως να αποδειχθεί ότι γενικά ισχύει το όριο αυτό.

Και τώρα; Τώρα έχουμε τη συνάρτηση  $y_\infty(x)$  να επαληθεύει τη σχέση (3.8.11), που είναι βέβαια μια ολοκληρωτική εξίσωση. (Πολύ περισσότερα για τις ολοκληρωτικές εξισώσεις θα αναφέρουμε στο Μέρος Γ των διδακτικών αυτών βιβλίων: στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III για Πολιτικούς Μηχανικούς.) Η συνάρτηση αυτή  $y_\infty(x)$  προφανώς επαληθεύει την αρχική συνθήκη  $y(x_0) = y_0$ , ακριβώς όπως συνέβαινε και με όλες τις προσεγγίσεις  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ , κλπ. Επιπλέον όμως η ίδια συνάρτηση  $y_\infty(x)$  επαληθεύει και την ολοκληρωτική εξίσωση (3.8.11). Παραγωγίζοντας τώρα την εξίσωση αυτή ως προς  $x$ , προκύπτει η σχέση

$$y'_\infty(x) = f(x, y_\infty(x)). \quad (3.8.12)$$

Η σχέση αυτή δεν είναι τίποτε άλλο από μια επιβεβαίωση ότι η συνάρτηση  $y_\infty(x)$  επαληθεύει την αρχική διαφορική εξίσωση (3.8.1), ως την επαναλάβουμε και εδώ

$$y'(x) = f(x, y(x)). \quad (3.8.13)$$

Επομένως η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων (3.8.9), εφόσον συγκλίνει, και πολύ συχνά συγκλίνει, σε μια συνάρτηση  $y_\infty(x)$ , μας δίνει τη λύση  $y(x)$  της διαφορικής εξισώσεως (3.8.1) ή (3.8.13) μαζί με την αρχική συνθήκη (3.8.2). Εάν μάλιστα θεωρήσουμε το  $y_0$  στην αρχική αυτή συνθήκη  $y(x_0) = y_0$  σαν αυθαίρετη σταθερά, μας δίνει τη γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως μας (3.8.1) ή (3.8.13). Πρόκειται λοιπόν για ενδιαφέρουσα και πρακτικά χρήσιμη μέθοδο. Η βασική δυσκολία στη χρήση της είναι βέβαια ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων στον επαναληπτικό τύπο (3.8.9). Μερικές φορές ο υπολογιστής αποδεικνύεται χρήσιμος βοηθός μας στο έργο αυτό με αναλυτικές ολοκληρώσεις και εν ανάγκη και με αριθμητικές ολοκληρώσεις. Δυστυχώς όμως άλλες φορές ούτε η χρήση του υπολογιστή δεν αρκεί.

Πρακτικά βέβαια, δεν είναι καθόλου ανάγκη να προχωρήσουμε σε πολύ υψηλής τάξεως  $n$  προσεγγίσεις  $y_n(x)$  και ίσως μικρές τιμές του  $n$  να αρκούν για μια ικανοποιητική προσέγγιση  $y_n(x)$  της λύσεως  $y(x)$ , δηλαδή  $y_n(x) \approx y(x)$ . Αυτό όμως δε συμβαίνει πάντα και έτσι κι αλλιώς είναι θέμα ακρίβειας της προσεγγιστικής λύσεως. Φυσικά τέτοια θέματα ξεφεύγουν κάπως από το παρόν μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II. Ας προχωρήσουμε τώρα σε μια συγκεκριμένη απλή εφαρμογή στη Δυναμική, όπου η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων του Picard συγκλίνει.

▼ **Εφαρμογή A3.8 (Δυναμική: κίνηση με αντίσταση ανάλογη της ταχύτητας):** Εδώ θεωρούμε την ευθύγραμμη οριζόντια κίνηση υλικού σημείου  $M$  μάζας  $m$  με αντίσταση  $R = -cv$  στην κίνηση ανάλογη της ταχύτητάς του  $v = v(t)$  με το  $c$  θετική σταθερά αναλογίας (άρα το  $-c$  αρνητική). Η αρχική ταχύτητα του υλικού σημείου  $v(0)$  (την αρχική χρονική στιγμή  $t = 0$ ) είναι ίση με  $v_0$ . Ζητούνται: (α) Η διαφορική εξίσωση της κινήσεως. (β) Η επίλυσή της με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων του Picard. (γ) Η πρακτική επαλήθευση της συγκλίσεως της μεθόδου.

**Λύση:** (α) Με βάση τον πολύ γνωστό μας δεύτερο νόμο του Νεύτωνα θα έχουμε

$$m \frac{dv}{dt} = -cv \quad \text{με} \quad v = v(t), \quad (3.8.14)$$

αφού μοναδική δύναμη που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο είναι η αντίσταση  $R = -cv$ . Αυτή είναι η εξίσωση της κινήσεως. Μπορούμε βέβαια να την ξαναγράψουμε στην ισοδύναμη μορφή

$$\frac{dv}{dt} = -kv \quad \text{με} \quad k = \frac{c}{m}. \quad (3.8.15)$$

Η μορφή αυτή θα μας διευκολύνει στη χρήση της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων: είναι η μορφή (3.8.1), εδώ βέβαια με άγνωστη συνάρτηση την ταχύτητα  $v = v(t)$  του υλικού σημείου  $M$ .

(β) Ολοκληρώνοντας τώρα τη διαφορική αυτή εξίσωση (3.8.15) μαζί με την αρχική συνθήκη της  $v(0) = v_0$ , οδηγούμαστε στην αντίστοιχη ολοκληρωτική εξίσωση

$$v(t) = v_0 - k \int_0^t v(\tau) d\tau, \quad t \geq 0. \quad (3.8.16)$$

Στην ολοκληρωτική αυτή εξίσωση θέσαμε τη σταθερά  $k = c/m$  εκτός του ολοκληρώματος. Προσέξαμε επίσης να έχουμε διαφορετικό σύμβολο  $\tau$  για τη μεταβλητή ολοκληρώσεως (με  $0 \leq \tau \leq t$ ) από το σύμβολο  $t$  (την ανεξάρτητη μεταβλητή στη διαφορική εξίσωση) στο άνω όριο ολοκληρώσεως.

Επομένως ο επαναληπτικός τύπος (3.8.9) της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων του Picard που προκύπτει από την ολοκληρωτική εξίσωση (3.8.16) θα έχει τη μορφή

$$v_n(t) = v_0 - k \int_0^t v_{n-1}(\tau) d\tau, \quad t \geq 0. \quad (3.8.17)$$

Με αρχική προσέγγιση τη  $v_1(t) = v_0$  οι επόμενες προσεγγίσεις προσδιορίζονται αρκετά εύκολα από τον επαναληπτικό αυτό τύπο και είναι οι εξής:

$$v_2(t) = v_0 - k \int_0^t v_1(\tau) d\tau = v_0(1 - kt), \quad (3.8.18)$$

$$v_3(t) = v_0 - k \int_0^t v_2(\tau) d\tau = v_0 \left( 1 - kt + \frac{k^2 t^2}{2} \right), \quad (3.8.19)$$

$$v_4(t) = v_0 - k \int_0^t v_3(\tau) d\tau = v_0 \left( 1 - kt + \frac{k^2 t^2}{2} - \frac{k^3 t^3}{6} \right). \quad (3.8.20)$$

Γενικά, με επαγωγή προκύπτει εύκολα ότι

$$v_n(t) = v_0 - k \int_0^t v_{n-1}(\tau) d\tau = v_0 \left( 1 - kt + \frac{k^2 t^2}{2} - \frac{k^3 t^3}{6} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} k^{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!} \right) \quad (3.8.21)$$

και απόλυτα ισοδύναμα

$$v_n(t) = v_0 \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j k^j t^j}{j!}, \quad \text{οπότε για } n \rightarrow \infty \quad v_\infty(t) = v_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j k^j t^j}{j!} = v_0 e^{-kt}. \quad (3.8.22)$$

Σημειώνουμε βέβαια ότι στην τελική αυτή εκθετική μορφή της λύσεως:  $v_\infty(t) = v_0 e^{-kt}$  πήραμε υπόψη μας και τη γνωστή σειρά Maclaurin της εκθετικής συναρτήσεως  $e^x \equiv \exp x$ , εδώ με  $x = -kt$ .

(γ) Πιο σημαντικό όμως είναι να παρατηρήσουμε την ταχεία σύγκλιση των προσεγγίσεων  $v_n(t)$  στη λύση  $v_\infty(t)$ . Αυτή οφείλεται στο παραγοντικό  $(n-1)!$  στον παρονομαστή του κάθε όρου που προστίθεται στο άθροισμα της προηγούμενης προσεγγίσεως  $v_{n-1}(t)$ , ώστε να προκύψει η επόμενη προσέγγιση  $v_n(t)$ . Εύκολα επίσης βεβαιωνόμαστε ότι η λύση αυτή  $v_\infty(t) = v_0 e^{-kt}$  επαληθεύει όχι μόνο την αρχική συνθήκη  $v(0) = v_0$ , αλλά και την ίδια τη διαφορική εξίσωση (3.8.15), αφού

$$\frac{dv_\infty(t)}{dt} = -kv_0 e^{-kt} = -kv_\infty(t). \quad (3.8.23)$$

Όμως από την άλλη πλευρά δεν πρέπει να παραλείψουμε να αναφέρουμε ότι η διαφορική εξίσωση (3.8.14) ή (3.8.15) είναι μια εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών (όπως είναι επίσης και γραμμική). Μπορεί επομένως θαυμάσια να λυθεί και χωρίς τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων, αλλά με τη μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών, την οποία περιγράψαμε στην Ενότητα Α3.2.

Παρά ταύτα ελπίζεται ότι η παρούσα απλή εφαρμογή (εδώ μάλιστα χωρίς καν τη χρήση του υπολογιστή) μας επέτρεψε την καλύτερη κατανόηση της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων. Πρόκειται για ενδιαφέρουσα δυνατότητα επιλύσεως διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως της γενικής μορφής  $y'(x) = f(x, y(x))$  συνήθως βέβαια με την πολύτιμη επικούρηση του υπολογιστή. ▲



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α4

## ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Οι διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως, που τις μελετήσαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο Α3, έχουν πολλές εφαρμογές στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Ελάχιστες από αυτές θα τις εκθέσουμε στο παρόν Κεφάλαιο Α4. Τούτο όμως θα μας δώσει μια επαρκή εικόνα για τη χρησιμότητά τους και κυρίως για τη χρησιμότητα των μεθόδων επιλύσεώς τους, που τις έχουμε ήδη μελετήσει.

Ας σημειώσουμε καταρχήν ότι οι κύριες κατηγορίες διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως που συναντά ο Πολιτικός Μηχανικός στις εφαρμογές του είναι: (α) οι διαφορικές εξισώσεις που επιλύονται με άμεση ολοκλήρωση (και είναι επομένως πάρα πολύ απλές!), (β) οι διαφορικές εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών και (γ) οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Όλες οι διαφορικές εξισώσεις στις εφαρμογές αυτού του κεφαλαίου ανήκουν στις δύο τελευταίες κατηγορίες: στις (β) και (γ). Πολύ σπανιότερα παρουσιάζονται στον Πολιτικό Μηχανικό πλήρεις (ή ακριβείς) διαφορικές εξισώσεις και εξαιρετικά σπάνια ομογενείς (με την έννοια της Ενότητας Α3.3) διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως και εξισώσεις Bernoulli. Τέλος πέρα από τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις σχεδόν πουθενά αλλού δε γίνεται συνήθως χρήση της μεθόδου του ολοκληρωτικού παράγοντα.

Οι λιγοστές εφαρμογές που επιλέχθηκαν σ' αυτό το κεφάλαιο αφορούν: (α) Στην αποδόμηση ρύπου στην Περιβαλλοντική Μηχανική, στην Περιβαλλοντική Υδραυλική και στον Καθαρισμό Νερού: Ενότητα Α4.1. (β) Στην ταχύτητα ιδεατού ρευστού στη Ρευστομηχανική σε άκρο οριζώντιου σωλήνα που προέρχεται από δοχείο (ή δεξαμενή) και με σταθερό ύψος του ρευστού σ' αυτό κατά τη διάρκεια του μεταβατικού φαινομένου: Ενότητα Α4.2. (γ) Στην πτώση υλικού σημείου στο γήινο πεδίο βαρύτητας στη Δυναμική με αντίσταση του αέρα ανάλογη είτε της ταχύτητας είτε του τετραγώνου της: Ενότητα Α4.3. (δ) Τέλος στις **ορθογώνιες τροχιές** μιας οικογένειας καμπύλων στο επίπεδο με δύο χρήσιμες εφαρμογές στη Ρευστομηχανική: ισοδυναμικές γραμμές και γραμμές ροής σε διδιάστατη μόνιμη ροή ιδεατού ρευστού (i) σε πηγή, απαγωγή και δίνη και (ii) σε ορθή γωνία: Ενότητα Α4.4.

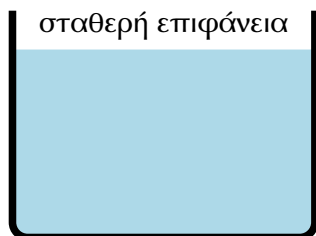
Ειδικά στις ορθογώνιες τροχιές, στις οποίες έχει δοθεί εδώ και κάποια έμφαση, αναπτύσσεται συστηματικά και η μεθοδολογία προσδιορισμού τους. Αναφέρονται επίσης και επιπλέον εφαρμογές τους πέρα από τη Ρευστομηχανική: στη Βαρύτητα, στη Μετάδοση Θερμότητας και στη Γεωδαισία.

Είναι στ' αλήθεια λυπηρό που ο περιορισμός του χώρου στο βιβλίο αυτό, αλλά και του πολυτίμου χρόνου του αναγνώστη και της αναγνώστριας Πολιτικού Μηχανικού δεν επέτρεψαν να περιληφθούν και άλλες εφαρμογές. Μερικές από αυτές είναι εξαιρετικά κλασικές, όπως ο **νόμος της ψύξεως του Νεύτωνα** στη Μετάδοση Θερμότητας και διάφορα προβλήματα κινήσεως στη Δυναμική. Υπάρχουν και πολλά ακόμη προβλήματα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως που ίσως συναντήσει ο Πολιτικός Μηχανικός. Φυσικά σε επόμενα κεφάλαια του βιβλίου θα εξετασθούν και πάρα πολλές ακόμη εφαρμογές: σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις κυρίως ανωτέρας τάξεως.

## A4.1. ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ: ΑΠΟΔΟΜΗΣΗ ΡΥΠΟΥ

### A4.1.1. Αποδόμηση ρύπου πρώτης τάξεως

Θεωρούμε δοχείο με σταθερή ποσότητα νερού, όπως στο Σχήμα A4.1. Μέσα στο νερό υπάρχει συγκεκριμένος ρύπος A. Αυτός θεωρείται ομοιόμορφα κατανεμημένος, δηλαδή με σταθερή (ανεξάρτητη από τη θέση, όχι όμως κι από το χρόνο) **συγκέντρωση**  $c = c(t)$  μέσα στο δοχείο με το νερό.



**Σχήμα A4.1:** Δοχείο που περιέχει ομοιόμορφα κατανεμημένο ρύπο με συγκέντρωση (μάζα ανά μονάδα όγκου)  $c(t)$ . Ο ρύπος αυτός αποδομείται (καταστρέφεται) μέσω χημικής αντίδρασης πρώτης τάξεως με διαφορική εξίσωση τη  $\dot{c}(t) = -kc(t)$ . Ο συντελεστής  $k$  είναι γνωστή θετική σταθερά. Η αρχική συγκέντρωση του ρύπου είναι  $c(0) = c_0$  (αρχική συνθήκη). Άγνωστη είναι η συγκέντρωση  $c(t)$  του ρύπου τη χρονική στιγμή  $t$ .

Με την υπόθεση **αποδομίσσεως** (διασπάσεως) του ρύπου A με μετατροπή του σε παράγωγα B με βάση τη **μονόδρομη χημική αντίδραση πρώτης τάξεως**  $A \rightarrow B$  προκύπτει η διαφορική εξίσωση  $\dot{c}(t) = -kc(t)$  και ισοδύναμα  $\frac{dc}{dt} = -kc$  με  $c = c(t)$  και με αρχική συνθήκη τη  $c(0) = c_0$ . (4.1.1)

Πρόκειται για μια πάρα πολύ απλή ομογενή γραμμική συνήθη διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές: τους 1 και  $k$  (ή  $-k$ ) και μάλιστα χωριζόμενων μεταβλητών. Ο γνωστός και θετικός συντελεστής αναλογίας  $k$  είναι η **σταθερά του ρυθμού αποδομίσσεως** (ή διασπάσεως) του ρύπου.

Το πρόβλημα αυτό αρχικής τιμής λύνεται πολύ εύκολα με χωρισμό των μεταβλητών  $c$  και  $t$  και στη συνέχεια με ολοκλήρωση από 0 έως  $t$  λαμβάνοντας υπόψη και την αρχική συνθήκη  $c(0) = c_0$ :

$$\frac{dc}{dt} = -kc \implies \frac{dc}{c} = -k dt \implies \int_{c_0}^c \frac{d\hat{c}}{\hat{c}} = -k \int_0^t d\hat{t} \implies \ln \frac{c(t)}{c_0} = -kt \implies c(t) = c_0 e^{-kt}. \quad (4.1.2)$$

Πολύ εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε τη λύση αυτή  $c(t)$  σαν λύση του προβλήματος αρχικής τιμής (4.1.1). Την ίδια ακριβώς λύση  $c(t)$  θα την προσδιορίσουμε και στην Ενότητα A11.16 του Κεφαλαίου A11, εκεί όμως με μια διαφορετική μέθοδο: με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Εκεί υπολογίζουμε και το **χρόνο ημιζωής**  $t_{1/2}$  του ρύπου, που προκύπτει  $t_{1/2} = (\ln 2)/k \approx 0.693/k$ .

Σημειώνουμε τέλος ότι αντί για ρύπο μπορεί να έχουμε μικροοργανισμούς (διάφορα βακτηρίδια, κλπ.). Τότε για τη συγκέντρωσή τους  $c(t)$  (εδώ, π.χ., σε αριθμό βακτηριδίων ανά λίτρο νερού) θα έχουμε  $\dot{c}(t) = +kc(t)$  (με  $k > 0$ ) στη διαφορική εξίσωση (4.1.1). Τούτο θα δηλώνει πολλαπλασιασμό των βακτηριδίων και εκθετική αύξησή τους:  $c(t) = c_0 e^{kt}$ . Δυστυχώς υπάρχει κι αυτή η δυνατότητα.

### A4.1.2. Αποδόμηση ρύπου δευτέρας τάξεως

Εδώ μελετάμε το πρόβλημα της προηγούμενης παραγράφου, αλλά τώρα με χημική αντίδραση αποδομίσσεως του ρύπου A δευτέρας τάξεως της μορφής  $A+A \rightarrow B$  (με B πάλι τα παράγωγα της αποδομίσσεως του ρύπου). Το πρόβλημα αρχικής τιμής (4.1.1) τροποποιείται τώρα στη μορφή

$$\frac{dc}{dt} = -kc^2 \quad \text{ξανά με } c = c(t) \quad \text{και με αρχική συνθήκη τη } c(0) = c_0. \quad (4.1.3)$$

Ευτυχώς από μαθηματικής απόψεως συνεχίζουμε να έχουμε διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως και μάλιστα χωριζόμενων μεταβλητών. (Δεν είναι βέβαια πια γραμμική, αλλά δεν πειράζει!) Βρίσκουμε τη λύση της ανάλογα με τη λύση (4.1.2):

$$\frac{dc}{dt} = -kc^2 \implies \frac{dc}{c^2} = -k dt \implies \int_{c_0}^c \frac{d\hat{c}}{\hat{c}^2} = -k \int_0^t d\hat{t} \implies -\frac{1}{c(t)} + \frac{1}{c_0} = -kt, \quad (4.1.4)$$

οπότε

$$c(t) = \frac{c_0}{1 + c_0 kt} \quad \text{ή} \quad t = t(c) = \frac{c_0 - c}{kc_0 c}, \quad \text{αν ζητάμε το } \text{χρόνο αντιδράσεως } t. \quad (4.1.5)$$

### A4.1.3. Αποδόμηση ρύπου δευτέρας τάξεως με δύο αντιδρώντα

Μέχρι τώρα για την αποδόμηση του ρύπου στο δοχείο θεωρήσαμε τις μονόδρομες χημικές αντιδράσεις  $A \rightarrow B$  (πρώτης τάξεως) και  $A + A \rightarrow B$  (δευτέρας τάξεως) όμως με ένα μόνο αντιδρών: το ρύπο  $A$  ( $B$  είναι τα παράγωγα της αποδομήσεως). Εδώ θα θεωρήσουμε τη δυσκολότερη περίπτωση της μονόδρομης (πάλι) αντιδράσεως δευτέρας τάξεως  $A + B \rightarrow D$  με δύο όμως αντιδρώντα: τα  $A$  (το ρύπο) και  $B$  (μια άλλη ουσία) στο δοχείο του Σχήματος A4.1. Τα παράγωγα της αποδομήσεως δηλώνονται εδώ με  $D$ . Στο πρόβλημα αυτό προκύπτει η εξής διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως για τη συγκέντρωση  $[A] = [A](t)$  (εδώ, καλύτερα, για να μην εισαχθούν κι' άλλες σταθερές, σε γραμμομόρια ανά λίτρο, mol/L, **χημική συγκέντρωση**, όχι σε mg/L ή σε άλλη μονάδα) του ρύπου:<sup>1</sup>

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A]([A] + [B]_0 - [A]_0) \text{ με } [A](0) = [A]_0, [B](0) = [B]_0 \text{ και την υπόθεση } [B]_0 > [A]_0 \quad (4.1.6)$$

για τις αρχικές συγκεντρώσεις  $[A]_0$  και  $[B]_0$  των αντιδρώντων  $A$  και  $B$ . Το  $k$  είναι η θετική σταθερά του ρυθμού αντιδράσεως. Άγνωστη συνάρτηση είναι η συγκέντρωση  $[A]$  (σε mol/L) του ρύπου  $A$ .

Πρόκειται βέβαια και πάλι για διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως και χωριζόμενων μεταβλητών (όμως μη γραμμική). Τη λύνουμε εύκολα χωρίζοντας τις δύο μεταβλητές της (εδώ τις  $[A]$  και  $t$ ), όπως ήδη κάναμε στις σχέσεις (4.1.2) και (4.1.4) στις δύο προηγούμενες εφαρμογές. Προκύπτει

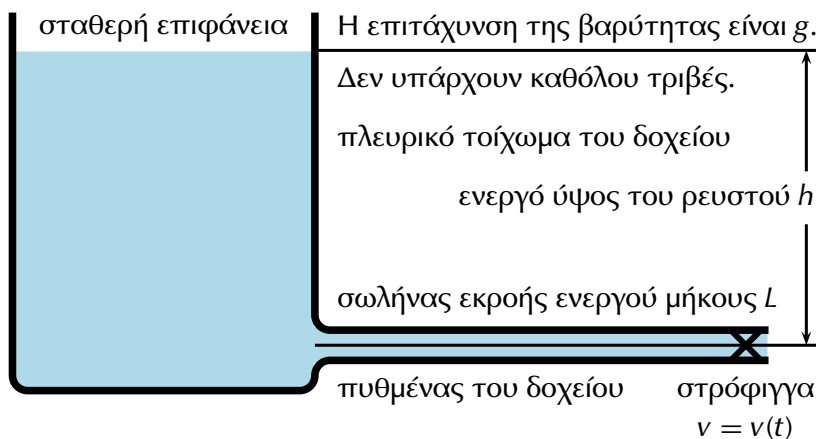
$$\frac{d[A]}{[A]([A] + [B]_0 - [A]_0)} = -k dt \implies \frac{1}{[B]_0 - [A]_0} \left( \frac{d[A]}{[A]} - \frac{d[A]}{[A] + [B]_0 - [A]_0} \right) = -k dt, \quad (4.1.7)$$

όπου βέβαια έγινε και ανάλυση σε δύο απλά κλάσματα. Τώρα με μια ολοκλήρωση από 0 έως  $t$  και με χρήση και της αρχικής συνθηκής  $[A](0) = [A]_0$  προκύπτει εύκολα η συγκέντρωση  $[A]$  του ρύπου

$$\frac{1}{[B]_0 - [A]_0} \ln \frac{[A]}{[A] + [B]_0 - [A]_0} \Big|_{[A]_0}^{[A]} = -kt \implies [A] = \frac{[A]_0([B]_0 - [A]_0)}{[B]_0 e^{([B]_0 - [A]_0)kt} - [A]_0} \text{ με } \lim_{t \rightarrow \infty} [A] = 0. \quad (4.1.8)$$

## A4.2. ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ: ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΙΔΕΑΤΟΥ ΡΕΥΣΤΟΥ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΩΛΗΝΑ

Στη Ρευστομηχανική θεωρούμε δοχείο (ή δεξαμενή) με **ιδεατό ρευστό** (**ασυμπίεστο** και χωρίς **συνεκτικότητα, ιξώδες**). Στο κάτω άκρο του υπάρχει οριζόντιος σωλήνας ενεργού μήκους  $L$ . Το ύψος του ιδεατού ρευστού στο δοχείο πάνω από τον οριζόντιο σωλήνα είναι  $h$ . Η διατομή του δοχείου θεωρείται σταθερή. (Η γεωμετρία του προβλήματος στο Σχήμα A4.2!) Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  ανοίγει απότομα η στρόφιγγα στο άκρο του σωλήνα κι αρχίζει η εκροή του ρευστού με αναπλήρωσή του όμως στο δοχείο, ώστε το ύψος του ρευστού πάνω από το σωλήνα να είναι  $h$  συνεχώς.<sup>2</sup>



**Σχήμα A4.2:** Δοχείο το οποίο περιέχει ιδεατό ρευστό με εκροή του ρευστού μέσω σωλήνα ενεργού μήκους  $L$ . Η στρόφιγγα ανοίγει τη χρονική στιγμή  $t = 0$ . Το ενεργό ύψος του ρευστού είναι  $h$ . Άγνωστη είναι η ταχύτητα  $v$  εκροής του ρευστού.

<sup>1</sup> Για το πώς προκύπτει αυτή η διαφορική εξίσωση, όχι και πολύ δύσκολα ..., γίνεται αναφορά στο ενδιαφέρον σύγγραμμα: Schnoor, J. L. (2003), *Περιβαλλοντικά Μοντέλα: Τύχη και Μεταφορά Ρύπων στον Αέρα, Νερό και Έδαφος*. Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη, Παράγραφος 3.3.3, σσ. 125-127. (Μετάφραση της Αγγλικής εκδόσεως, Wiley, 1996.)

<sup>2</sup> Το ενδιαφέρον αυτό πρόβλημα Ρευστομηχανικής αναφέρεται στο κλασικό σύγγραμμα: Prandtl, L. and Tietjens, O. G. (1957), *Fundamentals of Hydro- and Aeromechanics*. Dover, New York, Ενότητα 59, Παράγρ. 4, σσ. 118-120. (Μετάφραση από τη Γερμανική έκδοση. 1η Αγγλική έκδοση: United Engineering Trustees, Engineering Societies Monographs, 1934.)

Με τη χρήση της εξίσωσης του Bernoulli στη Ρευστομηχανική προκύπτει η ακόλουθη μη γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως για την ταχύτητα  $v(t)$  του ρευστού στο άκρο εκροής του από το σωλήνα:

$$L \frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{2} = gh \quad \text{με} \quad v = v(t), \quad t \geq 0 \quad (4.2.1)$$

και  $g$  την επιτάχυνση της βαρύτητας:  $g \approx 9.81 \text{ m/sec}^2$ . Η σχετική αρχική συνθήκη είναι προφανώς

$$v(0) = 0, \quad (4.2.2)$$

επειδή τη χρονική στιγμή  $t = 0$  ανοίγει η στρόφιγγα εκροής στο άκρο του σωλήνα. Όταν τερματισθεί το **μεταβατικό φαινόμενο** ή **παροδικό φαινόμενο** (θεωρητικά για  $t \rightarrow \infty$ , πρακτικά αρκετά σύντομα), θα ισχύει  $dv/dt = 0$  και η πιο πάνω μη γραμμική διαφορική εξίσωση (4.2.1) μας δίνει

$$\frac{v_\infty^2}{2} = gh, \quad \text{οπότε} \quad v_\infty = \sqrt{2gh} \quad \text{με} \quad v_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} v(t). \quad (4.2.3)$$

Εισάγοντας την τιμή αυτή  $v_\infty = \sqrt{2gh}$  στη διαφορική εξίσωση (4.2.1), την ξαναγράφουμε λίγο απλούστερα στη μορφή (φυσικά με  $v = v(t)$  για την ταχύτητα εκροής του ρευστού από το σωλήνα)

$$L \frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{2} = \frac{v_\infty^2}{2} \implies 2L \frac{dv}{dt} = v_\infty^2 - v^2 \implies 2L \frac{dv}{v_\infty^2 - v^2} = dt \implies \frac{2L}{v_\infty^2} \frac{dv}{1 - (v/v_\infty)^2} = dt. \quad (4.2.4)$$

Είναι τώρα πια προφανές πως πρόκειται για μια διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών.

Για να τη λύσουμε, θα πρέπει να θυμηθούμε ένα-δυο απλά πράγματα: (α) Για την υπερβολική εφαπτομένη  $y = \tanh x$  (Παράγραφος Α1.5.2 του Κεφαλαίου Α1 για τις υπερβολικές συναρτήσεις) ισχύει (με  $-\infty < x < \infty$  και  $-1 < y < 1$ , ισοδύναμα  $|y| < 1$ , για την υπερβολική εφαπτομένη)

$$y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{(e^x - e^{-x})/2}{(e^x + e^{-x})/2} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}. \quad (4.2.5)$$

Λύνοντας ως προς  $e^{2x}$  (πρωτοβάθμια αλγεβρική εξίσωση ως προς  $e^{2x}$ ), βρίσκουμε αμέσως ότι

$$e^{2x} = \frac{1 + \tanh x}{1 - \tanh x}, \quad \text{οπότε} \quad x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \tanh x}{1 - \tanh x} \quad \text{και τελικά} \quad \tanh^{-1} y = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + y}{1 - y}, \quad (4.2.6)$$

επειδή  $y = \tanh x$ , άρα  $x = \tanh^{-1} y$ : αντίστροφη υπερβολική εφαπτομένη του  $y$ . (β) Παραγωγίζοντας τώρα την τελευταία αυτή σχέση και αφού  $\ln(\alpha/\beta) = \ln \alpha - \ln \beta$  (με  $\alpha, \beta > 0$ ), παίρνουμε

$$\frac{d}{dy} \tanh^{-1} y = \frac{1}{2} \frac{d}{dy} \ln \frac{1 + y}{1 - y} = \frac{1}{2} \frac{d}{dy} [\ln(1 + y) - \ln(1 - y)] = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 + y} + \frac{1}{1 - y} \right) = \frac{1}{1 - y^2}. \quad (4.2.7)$$

$$\text{Άρα} \quad \int \frac{1}{1 - y^2} dy = \tanh^{-1} y + C \quad \text{και με} \quad y = au: \quad \int \frac{1}{1 - a^2 u^2} du = \frac{1}{a} \tanh^{-1} au + \frac{C}{a} \quad (4.2.8)$$

με το  $a \neq 0$  και το  $C$  την αυθαίρετη σταθερά ολοκλήρωσης στο παρόν αόριστο ολοκλήρωμα.

Επομένως μπορούμε τώρα να ολοκληρώσουμε και τα δύο μέλη της μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης χωριζόμενων μεταβλητών (4.2.4) (εδώ με  $a = 1/v_\infty$  στον παραπάνω τύπο (4.2.8)). Κατ' αυτόν τον τρόπο προκύπτει η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής (4.2.1) και (4.2.2)

$$\frac{2L}{v_\infty} \tanh^{-1} \frac{v}{v_\infty} = t + C = t, \quad \text{αφού} \quad v(0) = 0 \quad \text{και} \quad \tanh^{-1} 0 = 0, \quad \text{οπότε} \quad C = 0. \quad (4.2.9)$$

Άρα

$$\tanh^{-1} \frac{v}{v_\infty} = \frac{v_\infty t}{2L} \quad \text{και} \quad v = v(t) = v_\infty \tanh \frac{v_\infty t}{2L} = v_\infty \tanh \frac{t}{\tau} \quad \text{ή} \quad \frac{v(t)}{v_\infty} = \tanh \frac{t}{\tau} \quad (4.2.10)$$

με

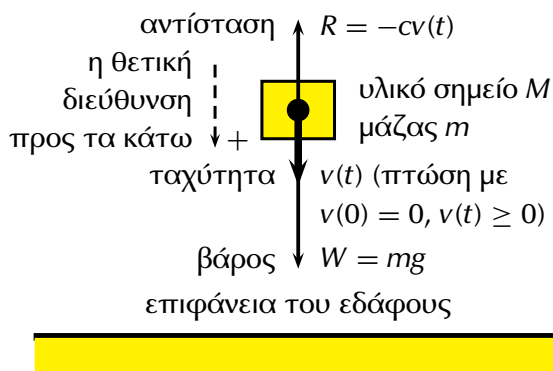
$$\tau := \frac{2L}{v_\infty} = \frac{2L}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{\frac{2}{gh}} L \quad (4.2.11)$$

το **χαρακτηριστικό χρόνο** στο παρόν σύστημα. Προφανώς έχουμε  $v(0) = 0$  και  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = v_\infty$  (επειδή  $\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x = 1$ ) με συνεχή αύξηση της ταχύτητας  $v = v(t)$  (αλλά με ολοένα και πιο αργό ρυθμό  $\dot{v}(t)$ ) μέχρι την τελική τιμή της  $v_\infty = \sqrt{2gh}$  μετά την πάροδο του μεταβατικού φαινομένου.

### A4.3. ΔΥΝΑΜΙΚΗ: ΠΤΩΣΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

#### A4.3.1. Πτώση υλικού σημείου με αντίσταση ανάλογη της ταχύτητάς του

Πρόκειται για ένα κλασικό πρόβλημα (Σχήμα A4.3 αμέσως πιο κάτω) με εύκολη επίλυση. Θεωρούμε υλικό σημείο  $M$  μάζας  $m$  που αφήνεται να πέσει (κατακόρυφα εννοείται) στο γήινο πεδίο βαρύτητας: με επιτάχυνση  $g$ . (Τη θεωρούμε σταθερή:  $g \approx 9.81 \text{ m/sec}^2$ .) Σαν θετική διεύθυνση υποθέτουμε τη διεύθυνση προς τα κάτω, προς τη γη, αν και θα μπορούσαμε να είχαμε υποθέσει το αντίθετο. Στο υλικό σημείο  $M$  εφαρμόζονται δύο δυνάμεις: το βάρος του  $W = mg$  και η αντίσταση του αέρα, που προσπαθεί να αντισταθεί στην κίνηση:  $R = R(t) = -cv(t)$ . Αυτήν την υποθέτουμε ανάλογη της ταχύτητας  $v(t)$  του υλικού σημείου  $M$  με γνωστό συντελεστή αναλογίας  $c$ . Αφού όμως η αντίσταση του αέρα  $R$  είναι προς τα πάνω, αντίθετη προς το βάρος  $W$ , βάζουμε (σωστά!) το πρόσημο πλην στο δεξιό μέλος:  $R = -cv(t)$ . Έτσι ο συντελεστής αναλογίας  $c$  είναι θετικός αριθμός.



**Σχήμα A4.3:** Πτώση υλικού σημείου  $M$  μάζας  $m$  στο γήινο πεδίο βαρύτητας: με επιτάχυνση  $g \approx 9.81 \text{ m/sec}^2$  υπό την επίδραση του βάρους του  $W = mg$  (προς τα κάτω το βάρος  $W$ ). Υπάρχει και αντίσταση του αέρα  $R = -cv(t)$  (προς τα πάνω η αντίσταση  $R$ ) ανάλογη της ταχύτητάς του  $v(t)$  με γνωστό θετικό συντελεστή αναλογίας  $c$ :  $c > 0$ . Το υλικό σημείο  $M$  ξεκινά με μηδενική ταχύτητα:  $v(0) = 0$ . Άγνωστη είναι η ταχύτητα  $v(t)$  του υλικού σημείου  $M$  για  $t > 0$ . Η θέση  $x(t)$  προκύπτει με ολοκλήρωση.

Υπό τις συνθήκες αυτές ο θεμελιώδης δεύτερος νόμος του Νεύτωνα: δύναμη  $F$  ίσον μάζα  $m$  (που θεωρείται σταθερή) επί επιτάχυνση  $a$ :  $F = ma$  ισοδύναμα  $ma = F$ , που ήδη τον ξέρουμε από τη Φυσική, αλλά και τον υπενθυμίσαμε στην Παράγραφο A1.2, παίρνει εδώ τη μορφή (με  $a = \dot{v}(t)$ )

$$ma = F = W + R = mg - cv(t) \implies m\dot{v}(t) = mg - cv(t) \implies m\dot{v}(t) + cv(t) = mg. \quad (4.3.1)$$

Ε, δεν κουραστήκαμε και πάρα πολύ ... Καταλήξαμε σε μια μη ομογενή γραμμική συνήθη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως με σταθερούς συντελεστές: τους  $m$ : τη μάζα, και  $c$ : τη σταθερά αναλογίας για την αντίσταση του αέρα. Άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) είναι η ταχύτητα  $v(t)$  του υλικού σημείου και ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος  $t$ . Υποθέτουμε επίσης πως το υλικό σημείο  $M$  ξεκινά από την ηρεμία: με μηδενική αρχική ταχύτητα (για  $t = 0$ ), δηλαδή

$$v(0) = 0 \quad (\text{η αρχική συνθήκη}). \quad (4.3.2)$$

Εννοείται βέβαια ότι θα μπορούσαμε να είχαμε άλλη (λίγο πιο δύσκολη) αρχική συνθήκη: τη  $v(0) = v_0$ .

Πρέπει τώρα να επιλύσουμε το πρόβλημα αρχικής τιμής που αποτελείται από τη διαφορική εξίσωση (4.3.1) και την αρχική συνθήκη της (4.3.2). Στις Παραγράφους A3.4.3 έως A3.4.5 του προηγούμενου Κεφαλαίου A3 μάθαμε να λύνουμε μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως. Έχουμε στη «φαρέτρα» μας τρεις μεθόδους: (α) τη μέθοδο της μεταβολής της παραμέτρου: Εδάφιο A3.4.3.1, (β) τη μέθοδο του ολοκληρωτικού παράγοντα: Εδάφιο A3.4.3.3 και (γ) τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών: Παράγραφος A3.4.5 σε συνδυασμό (πρώτα) με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως: Παράγραφος A3.4.4. Η μέθοδος της εκθετικής αντικαταστάσεως είναι εφαρμόσιμη μόνο σε διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές, όπως είναι η εξίσωση (4.3.1). Στην περίπτωση μας είναι η απλούστερη. Την εφαρμόζουμε λοιπόν.

Με βάση τη σχέση (3.4.67) δοκιμάζουμε την εκθετική λύση (με προσδιοριστέα σταθερά το  $\mu$ )

$$v_0(t) = e^{\mu t}, \quad \text{οπότε} \quad \dot{v}_0(t) = \mu e^{\mu t}. \quad (4.3.3)$$

Εδώ βέβαια, το επαναλαμβάνουμε, άγνωστη συνάρτηση είναι η ταχύτητα  $v(t)$  του υλικού σημείου κατά την πτώση του και ανεξάρτητη μεταβλητή ο χρόνος  $t$ . Τώρα απλά αντικαθιστούμε την εκθετική αυτή λύση  $v_0(t)$  και την παράγωγό της  $\dot{v}_0(t)$  στην ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση

$$m\dot{v}(t) + cv(t) = 0, \quad (4.3.4)$$

η οποία αντιστοιχεί στην αρχική μη ομογενή εξίσωση (4.3.1). Με τον τρόπο αυτό προκύπτει ότι

$$m\mu e^{\mu t} + ce^{\mu t} = 0 \implies (m\mu + c)e^{\mu t} = 0 \implies m\mu + c = 0 \implies \mu = -\frac{c}{m}. \quad (4.3.5)$$

Κατά συνέπεια έχουμε

$$v_0(t) = e^{\mu t} = e^{-ct/m}. \quad (4.3.6)$$

Επομένως η γενική λύση  $v_h(t)$  της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως (4.3.4) θα είναι η

$$v_h(t) = Cv_0(t) = Ce^{-ct/m} \quad (4.3.7)$$

με το σύμβολο  $C$  να δηλώνει μια αυθαίρετη (μη καθορισμένη) σταθερά στη γενική αυτή λύση  $v_h(t)$ .

Και τώρα προχωράμε. Στο δεύτερο βήμα μας θα υπολογίσουμε μια μερική (partial) ή ειδική (particular) λύση  $v_p(t)$  της μη ομογενούς (της αρχικής) γραμμικής διαφορικής εξισώσεώς μας (4.3.1):  $m\dot{v}(t) + cv(t) = mg$ . Αλλ' αυτή έχει σταθερό δεξιό μέλος  $mg$ . Άρα, σύμφωνα με όσα εκθέσαμε στην Παράγραφο Α3.4.5 του προηγούμενου Κεφαλαίου Α3, μπορούμε θαυμάσια να δοκιμάσουμε σταθερή μερική λύση της μορφής

$$v_p(t) = A, \quad \text{οπότε} \quad \dot{v}_p(t) = 0. \quad (4.3.8)$$

Αυτήν απλά την αντικαθιστούμε στη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωσή μας και παίρνουμε

$$m\dot{v}(t) + cv(t) = mg \implies m \cdot 0 + cA = mg \implies A = \frac{mg}{c}. \quad (4.3.9)$$

Επομένως η μερική λύση μας είναι

$$v_p(t) = A = \frac{mg}{c}. \quad (4.3.10)$$

Άρα η γενική λύση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως (4.3.1) θα είναι τελικά

$$v_g(t) = v_h(t) + v_p(t) = Ce^{-ct/m} + \frac{mg}{c}, \quad (4.3.11)$$

όπου φυσικά χρησιμοποιήσαμε τον τύπο (3.4.34) του Εδαφίου Α3.4.3.2:  $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ . Δηλαδή χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η γενική λύση  $y(x)$  μιας μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως είναι το άθροισμα: (α) της γενικής λύσεως  $y_h(x)$  της αντίστοιχης ομογενούς εξισώσεως συν (β) μια μερική (ή ειδική) λύση  $y_p(x)$  της αρχικής μη ομογενούς εξισώσεως:  $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ .

Για να ολοκληρώσουμε την παρούσα λύση του προβλήματος αρχικής τιμής (4.3.1) και (4.3.2), οφείλουμε ασφαλώς να λάβουμε τώρα υπόψη μας και την αρχική συνθήκη (4.3.2): τη συνθήκη ηρεμίας  $v(0) = 0$  του υλικού σημείου  $M$  την αρχική χρονική στιγμή  $t = 0$ . Έτσι θα προσδιορίσουμε τη σταθερά  $C$  στην πιο πάνω γενική λύση  $v_g(t)$  στη σχέση (4.3.11). Πανεύκολο είναι κι αυτό:

$$v(0) = 0 \implies Ce^{-c \cdot 0/m} + \frac{mg}{c} = 0 \implies C \cdot 1 + \frac{mg}{c} = 0 \implies C = -\frac{mg}{c}. \quad (4.3.12)$$

Επομένως τώρα η γενική λύση  $v_g(t)$  στη σχέση (4.3.11) μεταπίπτει στην τελική μας λύση

$$v(t) = -\frac{mg}{c} e^{-ct/m} + \frac{mg}{c} \quad \text{και με παραγοντοποίηση} \quad v(t) = \frac{mg}{c} (1 - e^{-ct/m}). \quad (4.3.13)$$

(Παρενθετικά σημειώνουμε ότι με ολοκλήρωση της ταχύτητας  $v(t)$  και  $x(0) = x_0$  έχουμε τη θέση  $x(t)$ .)

Αυτή η λύση  $v(t)$  είναι μια μερική λύση της αρχικής μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως πρώτης τάξεως και με σταθερούς συντελεστές (4.3.1), που είναι βέβαια και η μοναδική λύση

του προβλήματος αρχικής τιμής (4.3.1) και (4.3.2). Ας σημειώσουμε ότι ένα **καλά τοποθετημένο** φυσικό πρόβλημα, εδώ του Πολιτικού Μηχανικού, έχει μία και μόνο μία λύση με την προφανή προϋπόθεση βέβαια πως η επίλυσή του έγινε σωστά. Αυτό συνέβη κι εδώ. Θαυμάσια! Ας επαληθεύσουμε τώρα την πιο πάνω λύση (4.3.13). Ξεκινάμε από την αρχική συνθήκη  $v(0) = 0$ . Έχουμε

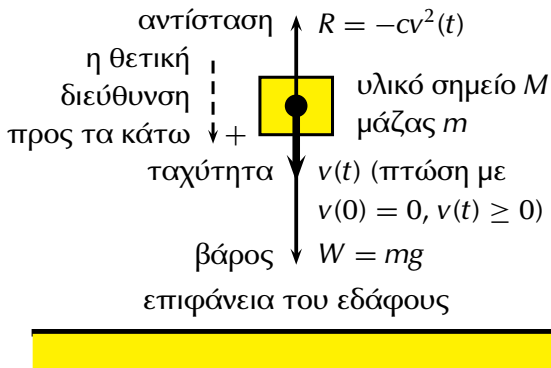
$$v(0) = 0 \implies v(0) = \frac{mg}{c} (1 - e^{-c \cdot 0/m}) = \frac{mg}{c} (1 - 1) = \frac{mg}{c} \cdot 0 = 0. \quad (4.3.14)$$

Πολύ ωραία! Επαληθεύθηκε η αρχική συνθήκη  $v(0) = 0$  από τη λύση μας (4.3.13). Απομένει η επαλήθευση της διαφορικής εξίσωσης (4.3.1):  $m\dot{v}(t) + cv(t) = mg$ . Εύκολη είναι κι αυτή. Προκύπτει

$$m \frac{mg}{c} \frac{c}{m} e^{-ct/m} + c \frac{mg}{c} (1 - e^{-ct/m}) = mg \implies mge^{-ct/m} + mg - mge^{-ct/m} = mg \implies 0 = 0. \quad (4.3.15)$$

### A4.3.2. Πτώση υλικού σημείου με αντίσταση ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητάς του

Στην παράγραφο αυτή θεωρούμε ξανά την πτώση υλικού σημείου  $M$  με μηδενική αρχική ταχύτητα:  $v(0) = 0$ , αλλά τώρα με αντίσταση  $R$  ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας:  $R = -cv^2(t)$  με το  $c$  και πάλι γνωστή θετική σταθερά (Σχήμα A4.4). Πρόκειται για πολύ ενδιαφέρον πρόβλημα.



**Σχήμα A4.4:** Όπως και στο Σχήμα A4.3 πτώση υλικού σημείου  $M$  μάζας  $m$  στο γήινο πεδίο βαρύτητας υπό την επίδραση του βάρους του  $W = mg$  (προς τα κάτω το βάρος  $W$ ). Τώρα όμως η αντίσταση του αέρα  $R = -cv^2(t)$  (προς τα πάνω η αντίσταση  $R$ ) είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητάς του  $v(t)$  με γνωστό θετικό συντελεστή αναλογίας  $c$ :  $c > 0$ . Το υλικό σημείο  $M$  ξεκινά ξανά με μηδενική ταχύτητα:  $v(0) = 0$ . Άγνωστη είναι και τώρα η ταχύτητα  $v(t)$  του υλικού σημείου  $M$  για  $t > 0$ .

Τώρα η διαφορική εξίσωση της κινήσεως (4.3.1) τροποποιείται (με  $v^2(t)$  αντί για  $v(t)$ ) ως εξής:

$$ma = F = W + R = mg - cv^2(t) \implies m\dot{v}(t) = mg - cv^2(t) \implies m\dot{v}(t) + cv^2(t) = mg. \quad (4.3.16)$$

(Υποθέτουμε επίσης πως ισχύει και η αρχική συνθήκη (4.3.2):  $v(0) = 0$ .) Μαθηματικά για  $t \rightarrow \infty$ , πρακτικά μετά από το **μεταβατικό** (ή **παροδικό**) **φαινόμενο** η παράγωγος  $a = a(t) = \dot{v}(t)$ , δηλαδή η επιτάχυνση του υλικού σημείου, μηδενίζεται. Τότε αυτό θα κινείται με την τελική (ή οριακή) ταχύτητα  $v_\infty$ . Αυτή προσδιορίζεται από τη διαφορική εξίσωση (4.3.16) θέτοντας  $\dot{v}(t) = 0$ . Έτσι έχουμε

$$cv_\infty^2 = mg, \text{ οπότε } v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{c}} \text{ με } v_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} v(t). \quad (4.3.17)$$

Με διαίρεση της διαφορικής εξίσωσης (4.3.16) δια  $c$  και εισαγωγή του συμβόλου  $v_\infty$ , αυτή παίρνει απλούστερη μορφή (η οποία είναι απόλυτα ανάλογη με τη μορφή (4.2.4) της Ενότητας A4.2):

$$\frac{m}{c} \frac{dv}{dt} + v^2 = v_\infty^2 \implies \frac{m}{c} \frac{dv}{dt} = v_\infty^2 - v^2 \implies \frac{m}{c} \frac{dv}{v_\infty^2 - v^2} = dt \implies \frac{m}{cv_\infty^2} \frac{dv}{1 - (v/v_\infty)^2} = dt. \quad (4.3.18)$$

Είναι τώρα πια προφανές ότι πρόκειται για μια διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών. Μάλιστα ουσιαστικά είναι η ίδια διαφορική εξίσωση (4.2.4), που λύσαμε (με κάποιο κόπο ...) στην Ενότητα A4.2 για τη ροή από άκρο σωλήνα. Εδώ απλά έχουμε  $m/c$  αντί για  $2L$ . Καμία άλλη διαφορά! Επομένως η λύση μας  $v(t)$  είναι κι εδώ η (4.2.10), αλλά με  $m/c$  αντί για  $2L$ . Άρα έχουμε

$$v(t) = v_\infty \tanh \frac{cv_\infty t}{m} \text{ και με } v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{c}} \text{ παίρνουμε: } v(t) = v_\infty \tanh \frac{t}{\tau}, \text{ όπου } \tau := \sqrt{\frac{m}{cg}} \quad (4.3.19)$$

ο **χαρακτηριστικός χρόνος** στο παρόν πρόβλημα πτώσεως σημείου  $M$  με αντίσταση  $R = -cv^2(t)$ . Φυσικά η πτώση αυτή μπορεί να γίνεται είτε στον αέρα είτε σε κάποιο άλλο ρευστό, π.χ. στο νερό. Λαμβάνουμε όμως υπόψη και την άνωση που οφείλεται στο ρευστό, εφόσον είναι σημαντική.

#### A4.4. ΟΡΘΟΓΩΝΙΕΣ ΤΡΟΧΙΕΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥΣ ΣΤΗ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

##### A4.4.1. Ορισμός και προσδιορισμός των ορθογωνίων τροχιών οικογένειας καμπύλων

Θεωρούμε μια πρώτη μονοπαραμετρική (με μία μόνο παράμετρο) οικογένεια συναρτήσεων

$$F_1(x, y_1, C_1) = 0 \quad \text{με την υπόθεση ότι } y_1 = y_1(x). \quad (4.4.1)$$

Στην οικογένεια αυτή το  $C_1$  δηλώνει μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Αυτή η οικογένεια συναρτήσεων παριστάνει στο επίπεδο  $Oxy$  μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων. Τις άπειρες αυτές καμπύλες  $F_1(x, y_1, C_1) = 0$  τις θεωρούμε ότι δεν τέμνει η μία την άλλη. Απαλείφοντας μάλιστα τη σταθερά  $C_1$  μεταξύ της εξίσωσης  $F_1(x, y_1, C_1) = 0$  και της πρώτης παραγώγου της ως προς  $y_1$

$$G_1(x, y_1, y_1', C_1) = 0 \quad \text{ξανά με } y_1 = y_1(x), \quad (4.4.2)$$

σχηματίζουμε τη σχετική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως

$$H_1(x, y_1, y_1') = 0, \quad \text{όπου βέβαια } y_1 = y_1(x). \quad (4.4.3)$$

(Υπ' αυτές τις συνθήκες η γενική λύση της θα είναι φυσικά η (4.4.1) με αυθαίρετη σταθερά τη  $C_1$ .)

Σ' αυτήν τη διαφορική εξίσωση (4.4.3) έχουμε βέβαια απαλλαγεί από τη σταθερά  $C_1$ . Τούτη την εργασία: σχηματισμός διαφορικής εξίσωσης οικογένειας καμπύλων, όπου θα έχει απαλειφθεί η παράμετρος  $C$  (εδώ η  $C_1$ ), τη γνωρίζουμε ήδη από την Ενότητα Α1.8 του Κεφαλαίου Α1: εξισώσεις (1.8.1), (1.8.2) και (1.8.3) αντίστοιχες των (4.4.1), (4.4.2) και (4.4.3) εδώ. (Βέβαια η ίδια εργασία θα μπορούσε να γίνει ανάλογα ως προς  $x$  υποθέτοντας ότι  $x = x(y)$ .) Έχουμε λοιπόν τη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως (4.4.3):  $H_1(x, y_1, y_1') = 0$  της οικογένειας των καμπύλων  $F_1(x, y_1, C_1) = 0$ .

Ωραία λοιπόν ως εδώ. Αρκετά ωραία. Και πού το πάμε τώρα; Μα σε μια δεύτερη οικογένεια συναρτήσεων, εδώ καλύτερα καμπύλων στο ίδιο επίπεδο, της μορφής

$$F_2(x, y_2, C_2) = 0 \quad \text{με την ανάλογη υπόθεση ότι } y_2 = y_2(x), \quad (4.4.4)$$

που να έχει όμως μια σημαντική ιδιότητα. Συγκεκριμένα δε θέλουμε απλά οι δεύτερες αυτές καμπύλες να μην τέμνουν η μία την άλλη, όπως και οι πρώτες εξάλλου, όπως υποθέσαμε. Επιθυμούμε επίσης, το *ουσιαστικό* σημείο, να τέμνουν (συγκεκριμένα η καθεμιά τους να τέμνει) κάθε καμπύλη της πρώτης οικογένειας καμπύλων  $F_1(x, y_1, C_1) = 0$  κάθετα, ορθογώνια, κατά ορθή γωνία  $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$ .

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η δεύτερη οικογένεια καμπύλων  $F_2(x, y_2, C_2) = 0$  αποτελεί τις **ορθογώνιες τροχιές** της πρώτης οικογένειας καμπύλων  $F_1(x, y_1, C_1) = 0$ . Και αντίστροφα βέβαια: η πρώτη οικογένεια καμπύλων  $F_1(x, y_1, C_1) = 0$  αποτελεί προφανώς τις **ορθογώνιες τροχιές** της δεύτερης οικογένειας καμπύλων  $F_2(x, y_2, C_2) = 0$ .

► **Παρατήρηση Α4.1:** Παρόλο που ουσιαστικά αναφερόμαστε στο ίδιο επίπεδο  $Oxy$ , εντούτοις προτιμήσαμε ένα σημείο του  $P = (x, y)$  να το δηλώνουμε σαν  $(x, y_1)$ , όταν αναφερόμαστε στην πρώτη οικογένεια καμπύλων  $F_1(x, y_1, C_1) = 0$ , και σαν  $(x, y_2)$ , όταν αναφερόμαστε στη δεύτερη οικογένεια καμπύλων  $F_2(x, y_2, C_2) = 0$ . Έτσι δε δημιουργείται σύγχυση μεταξύ των δύο αυτών οικογενειών καμπύλων. Ξανά: το σημείο  $P = (x, y)$  του επιπέδου  $Oxy$  το δηλώνουμε σαν  $(x, y_1)$  «βλέποντάς» το σαν σημείο καμπύλης της πρώτης οικογένειας καμπύλων και σαν  $(x, y_2)$  τώρα «βλέποντάς» το σαν σημείο και της αντίστοιχης καμπύλης της δεύτερης οικογένειας καμπύλων: το ίδιο σημείο  $(x, y)$ . Και φυσικά αυτές οι δύο καμπύλες τέμνονται εκεί κατά ορθή γωνία:  $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$ .

Για την εύρεση της δεύτερης οικογένειας καμπύλων: των ορθογωνίων τροχιών  $F_2(x, y_2, C_2) = 0$  της πρώτης οικογένειας καμπύλων  $F_1(x, y_1, C_1) = 0$  ο τρόπος εργασίας είναι αρκετά απλός. Σε ένα σημείο  $P = (x, y)$  του επιπέδου  $Oxy$  όπου τέμνεται μια συγκεκριμένη καμπύλη της μιας οικογένειας



με μια επίσης συγκεκριμένη καμπύλη της άλλης οικογένειας οι γωνίες  $\theta_1$  και  $\theta_2$  που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες σ' αυτές τις καμπύλες με τον άξονα  $Ox$  θα διαφέρουν κατά  $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$ . Δηλαδή

$$\theta_2 = \theta_1 \pm \frac{\pi}{2}, \text{ οπότε από την Τριγωνομετρία } \tan \theta_2 = \tan\left(\theta_1 \pm \frac{\pi}{2}\right) = -\cot \theta_1 = -\frac{1}{\tan \theta_1}. \quad (4.4.5)$$

Αλλά από το Διαφορικό Λογισμό, συγκεκριμένα από τις Παραγώγους, γνωρίζουμε πως με  $\theta$  τη γωνία κλίσεως μιας λείας καμπύλης  $y = y(x)$  στο σημείο της  $(x, y)$  η αντίστοιχη κλίση θα είναι η παράγωγος

$$y'(x) = \tan \theta. \text{ Επομένως εδώ } y'_1(x) = \tan \theta_1 \text{ και } y'_2(x) = \tan \theta_2 \quad (4.4.6)$$

στο σημείο τομής  $P = (x, y)$  των δύο καμπύλων  $y_1 = y_1(x)$  και  $y_2 = y_2(x)$ , τις οποίες προαναφέραμε. Άρα η δεύτερη σχέση (4.4.5), η **συνθήκη ορθογωνιότητας** των δύο καμπύλων παίρνει τη μορφή

$$y'_2(x) = -\frac{1}{y'_1(x)} \text{ ή απλά } y'_2 = -\frac{1}{y'_1} \text{ και σχεδόν ισοδύναμα } y'_1(x)y'_2(x) = -1 \text{ ή } y'_1 y'_2 = -1 \quad (4.4.7)$$

και τελικά

$$y'_1(x) = -\frac{1}{y'_2(x)} \text{ ή συντομότερα } y'_1 = -\frac{1}{y'_2}. \quad (4.4.8)$$

Άρα, για να προσδιορίσουμε τις ορθογώνιες τροχιές μιας οικογένειας καμπύλων  $F_1(x, y_1, C_1) = 0$ , θα πρέπει να κάνουμε τρία ή τέσσερα συγκεκριμένα βήματα:

**Βήμα 1:** Να προσδιορίσουμε την αντίστοιχη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως  $H_1(x, y_1, y'_1) = 0$  στη σχέση (4.4.3) έχοντας υποχρεωτικά απαλείψει τη σταθερά  $C_1$  στη διαφορική μας αυτή εξίσωση. *Το τονίζουμε αυτό:* η σταθερά  $C_1$  πρέπει οπωσδήποτε να έχει απαλειφθεί, να μην υπάρχει καθόλου στη διαφορική εξίσωση  $H_1(x, y_1, y'_1) = 0$ . Πρόκειται για ένα συνηθισμένο λάθος, το οποίο οδηγεί όμως σε εντελώς λάθος ορθογώνιες τροχιές. Δεν είναι κρίμα να γίνει ένα τέτοιο λάθος ... ;

**Βήμα 2:** Στην ίδια διαφορική εξίσωση: στην εξίσωση  $H_1(x, y_1, y'_1) = 0$  να αντικαταστήσουμε την παράγωγο  $y'_1 = y'_1(x)$  με  $-1/y'_2 = -1/y'_2(x)$ . Με τον τρόπο αυτό θα προκύψει η διαφορική εξίσωση

$$H_2(x, y_2, y'_2) = 0 \quad (4.4.9)$$

της δεύτερης οικογένειας καμπύλων  $F_2(x, y_2, C_2) = 0$  στη σχέση (4.4.4), δηλαδή των ορθογωνίων τροχιών της πρώτης οικογένειας καμπύλων  $F_1(x, y_1, C_1) = 0$  στην αρχική σχέση (4.4.1).

**Βήμα 3:** Να λύσουμε τη διαφορική αυτή εξίσωση  $H_2(x, y_2, y'_2) = 0$  της δεύτερης οικογένειας καμπύλων και να προσδιορίσουμε τη λύση της

$$F_2(x, y_2, C_2) = 0. \quad (4.4.10)$$

Τούτη είναι η εξίσωση (4.4.4) της δεύτερης οικογένειας καμπύλων: των ορθογωνίων τροχιών της πρώτης οικογένειας καμπύλων  $F_1(x, y_1, C_1) = 0$ . Τέλος προαιρετικά, για επαλήθευση:

**Βήμα 4:** Από τις δύο οικογένειες καμπύλων  $F_1(x, y_1, C_1) = 0$  και  $F_2(x, y_2, C_2) = 0$  να προσδιορίσουμε τις παραγώγους τους  $y'_1(x)$  και  $y'_2(x)$  με παραγωγίσεις τους ως προς  $x$  και να ελέγξουμε ότι ισχύει η συνθήκη ορθογωνιότητας  $y'_1(x)y'_2(x) = -1$  της σχέσεως (4.4.7). Η επαλήθευση αυτή ίσως να φαίνεται (και συχνά είναι!) κάπως χρονοβόρα. Μας εξασφαλίζει όμως ότι έχουμε στ' αλήθεια βρει τις ορθογώνιες τροχιές  $F_2(x, y_2, C_2) = 0$  της οικογένειας των καμπύλων μας  $F_1(x, y_1, C_1) = 0$ .

Κι ανάποδα: αφού οι καμπύλες των δύο αυτών οικογενειών καμπύλων τέμνονται ορθογώνια, είναι σαφές ότι η πρώτη οικογένεια καμπύλων  $F_1(x, y_1, C_1) = 0$  αποτελεί τις ορθογώνιες τροχιές της δεύτερης οικογένειας καμπύλων  $F_2(x, y_2, C_2) = 0$ . Στις Διαφορικές Εξισώσεις αναφέρεται συχνά και η έννοια των **ισογωνίων τροχιών** μιας οικογένειας καμπύλων, που σχηματίζουν σταθερή γωνία  $\alpha$  με τις αρχικές καμπύλες στα σημεία τομής τους. Αλλ' εμείς εδώ περιοριζόμαστε στις **ορθογώνιες τροχιές** έχοντας επιλέξει μόνο  $\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ . Αυτές είναι και οι μόνες που παρουσιάζουν πρακτικό ενδιαφέρον για τον Πολιτικό Μηχανικό. Και το εύλογο, προφανές ερώτημα: Πού όμως; *Απάντηση:*

**A4.4.2. Εφαρμογές των ορθογωνίων τροχιών**

Οι ορθογώνιες τροχιές είναι χρήσιμες για τον Πολιτικό Μηχανικό, επειδή παρουσιάζονται σε διάφορα διδιάστατα προβλήματα πεδίου (στο επίπεδο  $Oxy$ : στις δύο διαστάσεις). Συγκεκριμένα:

- Στη **Βαρύτητα** οι **γραμμές εντάσεως** διδιάστατου πεδίου βαρύτητας τέμνονται κάθετα με τις **ισοδυναμικές γραμμές** του. (Ακριβώς ανάλογα ισχύουν και στο στατικό **Ηλεκτρισμό**.)
- Στη **Μετάδοση Θερμότητας** οι **γραμμές ροής** της θερμότητας τέμνονται κάθετα με τις **ισοθερμες γραμμές**, δηλαδή τις ισοθερμοκρασιακές γραμμές: αυτές με σταθερή θερμοκρασία  $\theta$ .
- Στη **Ρευστομηχανική** ιδεατού ρευστού και στη διδιάστατη (επίπεδη) μόνιμη (σταθερή) ροή οι **γραμμές ροής** του ρευστού τέμνονται κάθετα με τις **ισοδυναμικές γραμμές**.
- Στη **Γεωδαισία** σ' έναν τοπογραφικό χάρτη μιας περιοχής στο επίπεδο οι **ισοϋψείς καμπύλες** (οι καμπύλες των σημείων με σταθερό ύψος  $h$ ) και οι **καμπύλες της κλίσεως** (του  $\text{grad } h \equiv \nabla h$ ) σ' αυτές, κατά τις οποίες ρέει το νερό της βροχής, είναι ορθογώνιες τροχιές η μία της άλλης.

Σημειώνουμε ότι στα προβλήματα αυτά η χρήση των λέξεων γραμμές και καμπύλες είναι απόλυτα ισοδύναμη. Επίσης η χρήση των φράσεων τέμνονται κάθετα και τέμνονται ορθογώνια. Τέλος, όταν μια οικογένεια καμπύλων αποτελεί τις ορθογώνιες τροχιές μιας άλλης οικογένειας: γωνία τομής των εφαπτομένων τους σε ένα σημείο  $(x, y)$  ίση με  $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$ , τότε φυσικά ισχύει και το αντίστροφο.

Ασφαλώς η πιο ενδιαφέρουσα από τις τέσσερις αυτές εφαρμογές των ορθογωνίων τροχιών είναι η τρίτη, που αφορά στην επίπεδη Ρευστομηχανική **ιδεατού ρευστού (ασυμπίεστου και χωρίς συνεκτικότητα, ιξώδες)**. Σ' αυτήν εστιάζουμε την προσοχή μας στις εφαρμογές που ακολουθούν:

▼ **Εφαρμογή A4.1 (Ρευστομηχανική: σημειακή πηγή, σημειακή απαγωγή και σημειακή δίνη):** Ζητούνται οι ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας των κύκλων (εννοείται των περιφερειών κύκλων)

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (4.4.11)$$

με κέντρο την αρχή των αξόνων  $O = (0, 0)$  και ακτίνα  $a$  ( $a > 0$ ).

**Λύση:** Θα ακολουθήσουμε ακριβώς τα τέσσερα βήματα στα οποία αναφερθήκαμε στο τέλος της προηγούμενης Παραγράφου A4.4.1.

**Βήμα 1:** Υποθέτουμε ότι  $y = y(x)$  (και όχι  $x = x(y)$ ) και παραγωγίζουμε ως προς  $x$  την οικογένεια των κύκλων (4.4.11). Σχηματίζουμε έτσι τη σχετική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως:

$$x^2 + y_1^2(x) = a^2 \implies 2x + 2y_1(x)y_1'(x) = 0 \implies y_1'(x) = -\frac{x}{y_1(x)}. \quad (4.4.12)$$

Σημειώνουμε ότι για να μη μπερδευθούμε, δηλώνουμε την εξαρτημένη μεταβλητή σαν  $y_1(x)$  αντί σαν  $y(x)$  για την πρώτη αυτή οικογένεια καμπύλων: τους κύκλους. Σημειώνουμε επίσης ότι θα μπορούσαμε βέβαια να εργασθούμε και με εξαρτημένη μεταβλητή τη  $x$  θεωρώντας ότι  $x = x(y)$ . Υπολογιστικά είναι το ίδιο στην παρούσα εφαρμογή και θα πάρουμε το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα. Παρατηρούμε τέλος ότι ειδικά σ' αυτήν την εφαρμογή η παραγωγή επέφερε αμέσως την εξάλειψη της παραμέτρου  $a$ : της ακτίνας του κύκλου. (Δηλαδή ήμασταν τυχεροί στην απαλοιφή!)

**Βήμα 2:** Τώρα σχηματίζουμε και τη διαφορική εξίσωση των ορθογωνίων τροχιών των κύκλων μας:  $x^2 + y_2^2 = a^2$ . Από τις σχέσεις (4.4.7) γνωρίζουμε ότι θα πρέπει να έχουμε  $y_2'(x) = -1/y_1'(x)$  ισοδύναμα  $y_1'(x)y_2'(x) = -1$ . Αυτό και κάνουμε στη διαφορική εξίσωση των κύκλων μας (4.4.12) (δεύτερη εξίσωση) προσδιορίζοντας έτσι τη διαφορική εξίσωση των ορθογωνίων τροχιών τους

$$y_2'(x) = -\frac{1}{y_1'(x)} \implies y_2'(x) = -\frac{1}{-x/y_2(x)} = \frac{y_2(x)}{x} \quad \text{ή} \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{y_2}{x}. \quad (4.4.13)$$

Ξαναυπενθυμίζουμε ότι θέτουμε  $y_2(x)$  αντί  $y(x)$  στις ζητούμενες ορθογώνιες τροχιές. Έτσι δε θα μπορεί να γίνει σύγχυση με το σύμβολο  $y_1(x)$ , που το χρησιμοποιούμε για τις αρχικές καμπύλες,

εδώ τους κύκλους (4.4.11). Τονίζουμε ότι σε ένα σημείο τομής (κάθετα) μιας καμπύλης από τη μία οικογένεια και μιας από την άλλη (από τις ορθογώνιες τροχιές της πρώτης οικογένειας) να μεν

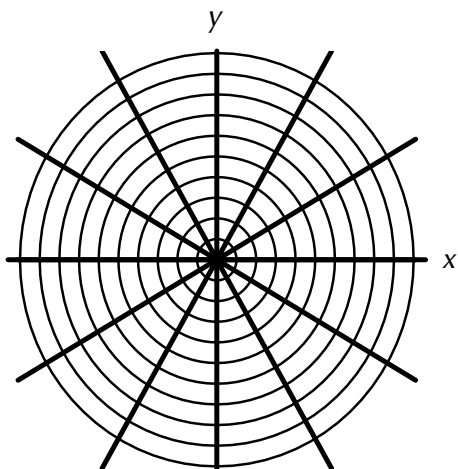
$$y_1(x) = y_2(x), \text{ αλλ' αντίθετα } y_1'(x) \neq y_2'(x) \text{ και συγκεκριμένα } y_1'(x)y_2'(x) = -1 \text{ πάντα! (4.4.14)}$$

Αυτό το έχουμε μάθει πάρα πολύ καλά από τις σχέσεις (4.4.7) ή (4.4.8). Πάμε λοιπόν παρακάτω!

**Βήμα 3:** Τώρα έχουμε απλά να επιλύσουμε τη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως (4.4.13), στην οποία καταλήξαμε. Πρόκειται προφανώς για μια διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών και έτσι λύνεται (εδώ τουλάχιστον!) πάρα πολύ εύκολα. Για να το δούμε καθαρά αυτό ...

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{y_2}{x} \implies \frac{dy_2}{y_2} = \frac{dx}{x} \implies \ln |y_2| = \ln |x| + c \implies y_2 = Cx \quad (4.4.15)$$

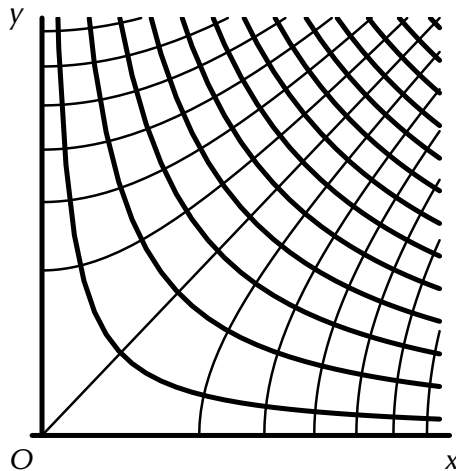
με  $C = \pm e^c$  μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Πού καταλήξαμε λοιπόν; Μα στις ευθείες  $y_2 = Cx$ , που διέρχονται από την αρχή των αξόνων  $O = (0, 0)$ . Αυτή η οικογένεια καμπύλων, τούτες οι ευθείες  $y_2 = Cx$  είναι οι ορθογώνιες τροχιές των κύκλων  $x^2 + y_1^2 = a^2$  με κέντρο πάλι την αρχή των αξόνων  $O = (0, 0)$ . Και ήταν αναμενόμενο αυτό, επειδή ξέρουμε καλά από τη Γεωμετρία ότι σε έναν κύκλο κάθε ακτίνα του τέμνει κάθετα την περιφέρεια του κύκλου. Αυτό λοιπόν αποκαλύφθηκε κι εδώ με «βαριά» μέθοδο: τη χρήση διαφορικών εξισώσεων και συγκεκριμένα ορθογωνίων τροχιών.



**Σχήμα A4.5:** Οι ισοδυναμικές γραμμές (οι λεπτές γραμμές: οι κύκλοι) καθώς και οι γραμμές ροής (οι παχιές γραμμές: οι ημιευθείες που ξεκινούν από την αρχή των αξόνων) στο διδιάστατο πεδίο μόνιμης ροής ιδεατού ρευστού **σημειακής πηγής ή απαγωγής**. Οι γραμμές ροής είναι οι ορθογώνιες τροχιές των ισοδυναμικών γραμμών. Ασφαλώς ισχύει και η αντίστροφη πρόταση: οι ισοδυναμικές γραμμές είναι οι ορθογώνιες τροχιές των γραμμών ροής. Στο αντίστοιχο πεδίο ροής **σημειακής δίνης** οι ισοδυναμικές γραμμές είναι οι παχιές γραμμές κι οι γραμμές ροής οι λεπτές: δηλαδή γίνεται εναλλαγή των ρόλων τους.

Στο πιο πάνω Σχήμα A4.5 (που έγινε με τη *Mathematica*) δείχνουμε αρκετές ισοδυναμικές γραμμές, που εδώ είναι περιφέρειες, καθώς και αρκετές γραμμές ροής, που εδώ είναι ημιευθείες οι οποίες ξεκινούν από την αρχή των αξόνων  $O = (0, 0)$ . Πρόκειται για το πεδίο ροής **σημειακής πηγής** ρευστού, όπου το ρευστό κινείται ακτινικά και απομακρύνεται βέβαια από την πηγή κατά μήκος των γραμμών ροής: των ημιευθειών. Σ' αυτό το πεδίο οι ισοδυναμικές γραμμές, οι ορθογώνιες τροχιές των γραμμών ροής είναι βέβαια οι περιφέρειες στο πιο πάνω Σχήμα A4.5. Θεωρούμε τώρα πως αντί για **σημειακή πηγή** ρευστού έχουμε **σημειακή απαγωγή** (ή **σημειακή καταβόθρα**) ρευστού. Τότε δεν αλλάζουν οι γραμμές ροής και οι ισοδυναμικές γραμμές. Εντούτοις τώρα στις γραμμές ροής, στις ημιευθείες, το ρευστό κινείται προς την απαγωγή, προς την αρχή των αξόνων, αντί να απομακρύνεται από αυτήν. Τέλος στην περίπτωση που έχουμε **σημειακή δίνη** (αντί πηγή ή απαγωγή), τότε οι γραμμές ροής είναι οι περιφέρειες: το ρευστό γυρίζει γύρω από τη δίνη (είτε δεξιόστροφα είτε αριστερόστροφα, εξαρτάται), ενώ οι ισοδυναμικές γραμμές είναι οι ημιευθείες.

**Βήμα 4:** Η επαλήθευση τώρα ότι μια ισοδυναμική γραμμή  $y_1(x)$  και μια γραμμή ροής  $y_2(x)$  τέμνονται ορθογώνια στο σημείο  $(x, y)$  τομής τους, όπου βέβαια  $y = y_1 = y_2$ , επειδή είναι κοινό σημείο και των δύο καμπύλων: είναι το σημείο τομής τους! Από την τελευταία σχέση (4.4.12) έχουμε  $y_1' = -x/y$ , αφού  $y_1 = y$ . Επίσης από την τελευταία σχέση (4.4.15) έχουμε  $y_2' = C = y/x$ , αφού  $C = y_2/x = y/x$ . Άρα  $y_1'y_2' = (-x/y)(y/x) = -1$ . Κι αποδείχθηκε η ορθογωνιότητα στο σημείο  $(x, y)$ . ▲



**Σχήμα Α4.6:** Οι ισοδυναμικές γραμμές (οι λεπτές γραμμές) και οι γραμμές ροής (οι παχιές γραμμές) στο διδιάστατο πεδίο μόνιμης ροής ιδεατού ρευστού σε ορθή γωνία ( $90^\circ$ ): εδώ στο τεταρτημόριο  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ . Κι οι δύο αυτές οικογένειες καμπύλων είναι εδώ υπερβολές. Βέβαια οι γραμμές ροής είναι και πάλι οι ορθογώνιες τροχιές των ισοδυναμικών γραμμών. Φυσικά ισχύει ξανά και η αντίστροφη πρόταση: οι ισοδυναμικές γραμμές είναι οι ορθογώνιες τροχιές των γραμμών ροής. Πάντα ισχύει η **ορθογωνιότητα** σε διδιάστατα πεδία μόνιμης (σταθερής) ροής ιδεατού ρευστού.

▼ **Εφαρμογή Α4.2 (Ρευστομηχανική: ροή ρευστού σε ορθή γωνία):** Σε μόνιμη διδιάστατη ροή ιδεατού ρευστού στην ορθή γωνία (στο τεταρτημόριο)  $x \geq 0$  και  $y \geq 0$  οι ισοδυναμικές γραμμές είναι οι υπερβολές

$$x^2 - y_1^2 = C_1 \quad \text{με} \quad y_1 = y_1(x). \quad (4.4.16)$$

(α) Ζητούνται οι γραμμές ροής του ίδιου πεδίου ροής. (β) Να γίνει επίσης και η αντίστροφη εργασία.

**Λύση:** (α) Όπως και στην προηγούμενη εφαρμογή, θα εργασθούμε ξανά με τη μεθοδολογία της Παραγράφου Α4.4.1, εδώ όμως λιγάκι πιο σύντομα. Πρώτα παραγωγίζουμε την εξίσωση (4.4.16) των ισοδυναμικών γραμμών ως προς  $x$  (θα μπορούσαμε βέβαια κι ως προς  $y_1$ ). Έτσι βρίσκουμε ότι

$$2x - 2y_1 y_1' = 0, \quad \text{οπότε} \quad y_1' = \frac{x}{y_1}. \quad \text{Άρα} \quad y_2' = -\frac{1}{y_1'} \implies y_2' = -\frac{y_2}{x} \quad \text{ή} \quad \frac{dy_2}{dx} = -\frac{y_2}{x}. \quad (4.4.17)$$

Αυτό ισχύει, γιατί  $y_1 = y_2 = y$  στο σημείο τομής  $(x, y)$  μιας ισοδυναμικής γραμμής και μιας γραμμής ροής. Πρόκειται για μια απλή διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών. Τη λύνουμε εύκολα:

$$\frac{dy_2}{dx} = -\frac{y_2}{x} \implies \frac{dy_2}{y_2} = -\frac{dx}{x} \implies \ln |y_2| = -\ln |x| + c_2 \implies \ln |x| + \ln |y_2| = c_2 \implies xy_2 = C_2. \quad (4.4.18)$$

Καταλήξαμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι οι ζητούμενες ορθογώνιες τροχιές, οι γραμμές ροής στο παρόν πεδίο ροής είναι οι υπερβολές  $xy_2 = C_2$  ή απλά  $xy = C$ . Στο πιο πάνω Σχήμα Α4.6 (που έγινε πάλι με τη *Mathematica*) παρουσιάζονται αρκετές ισοδυναμικές γραμμές (οι λεπτές γραμμές) και επίσης αρκετές γραμμές ροής (οι παχιές γραμμές). Παρατηρούμε ότι ο ημιάξονας  $Oy$  μαζί με τον ημιάξονα  $Ox$  αποτελούν κι αυτοί μια γραμμή ροής: για  $C_2 = 0$  στη λύση  $xy_2 = C_2$ . Είναι επίσης προφανές από το παραπάνω σχήμα ότι οι ισοδυναμικές γραμμές και οι γραμμές ροής τέμνονται κατά ορθή γωνία. Επομένως αποτελούν δύο οικογένειες ορθογωνίων (μεταξύ τους) τροχιών.

(β) Θα προχωρήσουμε τώρα και στην αντίστροφη εργασία. Υποθέτουμε γνωστές τις γραμμές ροής  $xy_2 = C_2$  και θα προσδιορίσουμε τις ισοδυναμικές γραμμές σαν τις ορθογώνιες τροχιές τους. Δουλειά λοιπόν (ευτυχώς λίγη!). Παραγωγίζοντας ως προς  $x$  την εξίσωση  $xy_2 = C_2$ , βρίσκουμε ότι

$$y_2 + xy_2' = 0, \quad \text{οπότε} \quad y_2' = -\frac{y_2}{x}. \quad \text{Επομένως} \quad y_1' = -\frac{1}{y_2'} \implies y_1' = \frac{x}{y_1} \quad \text{ή} \quad \frac{dy_1}{dx} = \frac{x}{y_1}, \quad (4.4.19)$$

επειδή  $y_1 = y_2 = y$  σε ένα σημείο τομής  $(x, y)$  μιας γραμμής ροής και μιας ισοδυναμικής γραμμής. Προέκυψε πάλι διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών. Τη λύνουμε εύκολα και βρίσκουμε:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{x}{y_1} \implies y_1 dy_1 = x dx \implies \frac{y_1^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c_1 \implies x^2 - y_1^2 = -2c_1 \implies x^2 - y_1^2 = C_1 \quad (4.4.20)$$

με  $C_1 = -2c_1$  την αυθαίρετη σταθερά. Άρα βρήκαμε τις ισοδυναμικές γραμμές (4.4.16) σαν ορθογώνιες τροχιές των γραμμών ροής (4.4.18). Τούτο αποτελεί και επαλήθευση του αποτελέσματος του ερωτήματος (α) για τις γραμμές ροής. Αρκετά! Δε θα προχωρήσουμε σε άλλες εφαρμογές. ▲

---

# Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο *A5*

## ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ: ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

---

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Πάρα πολύ ενδιαφέρουσες και πρακτικά χρήσιμες είναι οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως τις έχουμε ήδη μελετήσει στην Ενότητα Α3.4 του Κεφαλαίου Α3. Στο παρόν Κεφάλαιο Α5 θα αναφερθούμε κυρίως σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δευτέρας και ανωτέρας τάξεως. Στην αρχή θα δώσουμε μερικές βασικές έννοιες, όπως την έννοια της **γραμμικής ανεξαρτησίας**  $n$  συναρτήσεων, την έννοια της **ορίζουσας Wronski** και την έννοια του **θεμελιώδους συνόλου λύσεων** μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως. Θα αναφερθούμε επίσης και σε ορισμένα ενδιαφέροντα σχετικά θεωρήματα.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τη μέθοδο του **υποβιβασμού της τάξεως** για την αναγωγή μιας γραμμικής διαφορικής εξισώσεως  $n$ -τάξεως σε γραμμική διαφορική εξίσωση  $(n - 1)$ -τάξεως με έμφαση στην περίπτωση όπου  $n = 2$ : διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως. Ακολούθως θα εξετάσουμε εκτενώς τη μέθοδο της **εκθετικής αντικαταστάσεως**  $y = e^{\mu x}$  (με το  $\mu$  προσδιοριζτέα σταθερά). Αυτή είναι μια διαδεδομένη και χρήσιμη μέθοδος για την επίλυση ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων  $n$ -τάξεως με σταθερούς συντελεστές. Η μέθοδος αυτή οδηγεί στην καλούμενη **χαρακτηριστική εξίσωση**, μια πολυωνυμική εξίσωση  $n$ -βαθμού, η επίλυση της οποίας μας επιτρέπει την εύρεση της γενικής λύσεως της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως. Σχετική είναι και η αντίστοιχη μέθοδος για την **εξίσωση Euler** (ή **Cauchy-Euler**), που είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση με μη σταθερούς συντελεστές. Και για την εξίσωση αυτή θα βρούμε τη γενική λύση της, αφού πρώτα σχηματίσουμε τη σχετική χαρακτηριστική εξίσωση. Θα αναφερθούμε μετά στις δύο βασικές μεθόδους για την επίλυση μη ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων: (α) Στη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών και (β) Στη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων.

Σ' όλο το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε και ορισμένα παραδείγματα καθώς και σύντομες εφαρμογές στην **Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού** για την κατανόηση και επίδειξη των δυνατοτήτων των μεθόδων που παρουσιάζονται εδώ. Στο επόμενο Κεφάλαιο Α6 θα αναφερθούμε εκτενώς στις **Ταλαντώσεις μονοβάθμιων μηχανικών συστημάτων**, που είναι τόσο σημαντικές για τον Πολιτικό Μηχανικό. Στο Κεφάλαιο Α7 θα παρουσιάσουμε δύο εφαρμογές των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων στη Μηχανική των Υλικών. Στη συνέχεια στο Κεφάλαιο Α8 θα γίνουν τρεις εφαρμογές: (α) στις Πλάκες, (β) στις Θεμελιώσεις και (γ) στην Περιβαλλοντική Υδραυλική. Παραπέρα στο Κεφάλαιο Α9 θα αναφερθούμε σε δύο προβλήματα συνοριακών τιμών πάλι για γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με έμφαση στο κλασικό πρόβλημα του λυγισμού στύλου. Μια ενδιαφέρουσα εναλλακτική δυνατότητα για την επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων αποτελεί η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace. Αυτή θα τη μελετήσουμε στο Κεφάλαιο Α10 με εφαρμογές της στο Κεφάλαιο Α11.

---

### Α5.1. ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Πάρα πολύ χρήσιμη στη μελέτη των ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (είτε με σταθερούς είτε με μη σταθερούς, μεταβλητούς συντελεστές) είναι η έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας συναρτήσεων. Την παρουσιάζουμε στον παρακάτω ορισμό:

● **ΟΡΙΣΜΟΣ:** Καλούμε  $n$  συναρτήσεις  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  **γραμμικά ανεξάρτητες** σε ένα διάστημα  $[a, b]$  (πεπερασμένο ή άπειρο), εάν μοναδική δυνατότητα, για να ισχύει η ταυτότητα

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0 \quad \text{για κάθε } x \text{ στο διάστημα } [a, b] \quad (5.1.1)$$

με τα  $c_1, c_2, \dots, c_n$  σταθερές, αποτελεί η επιλογή όλων ανεξαιρέτως των σταθερών αυτών σαν μηδενικών σταθερών. Πρέπει δηλαδή οπωσδήποτε για την ισχύ της ταυτότητας (5.1.1) να ισχύει

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0. \quad (5.1.2)$$

Μόνο τότε μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τις  $n$  συναρτήσεις  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  σαν γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις στο διάστημα  $[a, b]$ .

Εάν οι πιο πάνω  $n$  συναρτήσεις  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητες, τότε καλούνται **γραμμικά εξαρτημένες** (στο ίδιο φυσικά διάστημα  $[a, b]$ ). Δηλαδή στις  $n$  γραμμικά εξαρτημένες συναρτήσεις  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  υπάρχει οπωσδήποτε η δυνατότητα ένας τουλάχιστον από τους  $n$  σταθερούς συντελεστές  $c_1, c_2, \dots, c_n$  στη σχέση (5.1.1) να μην είναι μηδενικός.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε στο σημείο αυτό ότι για  $n$  γραμμικά εξαρτημένες συναρτήσεις  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  μπορούμε να προσδιορίσουμε τις πιο πάνω σταθερές  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , έτσι ώστε να είναι  $c_1 \neq 0$ . Επομένως τώρα, με  $c_1 \neq 0$ , οι συναρτήσεις αυτές  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητες: είναι γραμμικά εξαρτημένες, επειδή υπήρξε δυνατόν να έχουμε  $c_1 \neq 0$ . Άρα η σχέση (5.1.1) με  $c_1 \neq 0$  μπορεί να πάρει τη μορφή

$$y_1(x) = -\frac{1}{c_1} [c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)] \quad \text{για κάθε } x \text{ στο διάστημα } [a, b]. \quad (5.1.3)$$

(Ανάλογα ισχύουν και για  $c_k \neq 0$ .) Τί ακριβώς δηλώνει η μορφή αυτή (5.1.3) της σχέσεως (5.1.1); Μα απλά, πολύ απλά ότι η συνάρτηση  $y_1(x)$  έχει εκφρασθεί με τη βοήθεια των υπόλοιπων  $n - 1$  συναρτήσεων  $y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x)$ . Άρα δεν έχουμε  $n$  γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις, αφού μπορέσαμε να εκφράσουμε τη μία από αυτές (εδώ, με  $c_1 \neq 0$ , την  $y_1(x)$ , γενικότερα, εάν  $c_k \neq 0$ , την  $y_k(x)$ ) σαν γραμμικό συνδυασμό των υπόλοιπων  $n - 1$  συναρτήσεων. Αυτό αρκεί για την έλλειψη γραμμικής ανεξαρτησίας.

▼ **Παράδειγμα Α5.1:** Οι  $n$  συναρτήσεις

$$y_1(x) = x, \quad y_2(x) = x^2, \quad \dots, \quad y_n(x) = x^n \quad (5.1.4)$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Αυτό συμβαίνει, επειδή η θεμελιώδης σχέση (5.1.1) της γραμμικής ανεξαρτησίας  $n$  συναρτήσεων παίρνει εδώ την πολυωνυμική μορφή

$$c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n = 0 \quad (5.1.5)$$

και θέλουμε μάλιστα η σχέση αυτή να ισχύει εκ ταυτότητος. Εντούτοις, επειδή πρόκειται για μια πολυωνυμική εξίσωση με  $n$  το πολύ πραγματικές ρίζες  $x = x_j$ , αποκλείεται να ισχύει η σχέση αυτή (5.1.5) εκ ταυτότητος, δηλαδή για κάθε  $x$  σε ένα διάστημα  $[a, b]$  (φυσικά με  $a < b$ ). Επομένως μοναδική σχετική δυνατότητα αποτελεί η επιλογή μηδενικών σταθερών:  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ , ακριβώς όπως στη σχέση (5.1.2). Άρα οι  $n$  συναρτήσεις (5.1.4) είναι γραμμικά ανεξάρτητες. ▲

▼ **Παράδειγμα A5.2:** Οι τρεις συναρτήσεις

$$y_1(x) = \cos^2 x, \quad y_2(x) = \sin^2 x, \quad y_3(x) = 1 \quad (5.1.6)$$

είναι γραμμικά εξαρτημένες. Αυτό συμβαίνει, επειδή ισχύει η ταυτότητα

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \implies 1 \cdot \cos^2 x + 1 \cdot \sin^2 x + (-1) \cdot 1 = 0, \quad (5.1.7)$$

δηλαδή η βασική σχέση (5.1.1), εδώ με τις μη μηδενικές σταθερές  $c_1 = c_2 = 1$  και  $c_3 = -1$ . ▲

▼ **Εφαρμογή A5.1 (Ταλαντώσεις):** Στο απλό μονοβάθμιο (με ένα βαθμό ελευθερίας) μηχανικό σύστημα υλικού σημείου  $M$  (μάζας  $m$ ) και ελατηρίου  $S$  (σταθεράς  $k$ ) με φυσική κυκλική συχνότητα (ιδιοσυχνότητα)  $\omega_0 = \sqrt{k/m} > 0$  υπεισέρχονται οι εξής δύο συναρτήσεις στις ταλαντώσεις του:

$$u_1(t) = \cos \omega_0 t, \quad u_2(t) = \sin \omega_0 t \quad (5.1.8)$$

με το σύμβολο  $t$  να δηλώνει το χρόνο. Ζητείται να αποδειχθεί ότι οι δύο αυτές συναρτήσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

**Απόδειξη:** Σύμφωνα με τη βασική σχέση (5.1.1) θεωρούμε και εδώ το γραμμικό συνδυασμό  $c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$  εκ ταυτότητος ίσο με το μηδέν, δηλαδή

$$c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t = 0. \quad (5.1.9)$$

Υποθέτουμε προς στιγμή ότι υπάρχει η δυνατότητα να έχουμε  $c_1 \neq 0$ . Τότε όμως η σχέση (5.1.9) παίρνει τη μορφή

$$\cot \omega_0 t = -\frac{c_2}{c_1} \quad (5.1.10)$$

σε ένα διάστημα  $[t_1, t_2]$  όπου δε μηδενίζεται το  $\sin \omega_0 t$ . Είναι όμως αδύνατο να ισχύει εκ ταυτότητος η σχέση (5.1.10), γιατί η τριγωνομετρική συνάρτηση συνεφαπτομένη ( $\cot$ ) δεν είναι μια σταθερή συνάρτηση. Άρα αποκλείεται να ισχύει η σχέση (5.1.10). Δηλαδή καταλήξαμε σε άτοπο, επειδή κάναμε την εσφαλμένη υπόθεση της δυνατότητας να μη μηδενίζεται η σταθερά  $c_1$ . Παρόμοια, εάν υποθέσουμε ότι  $c_2 \neq 0$ , και πάλι καταλήγουμε σε άτοπο. Μόνη λοιπόν δυνατότητά μας για την εκ ταυτότητος ισχύ της σχέσεως (5.1.9) αποτελεί η επιλογή και των δύο σταθερών  $c_1$  και  $c_2$  σαν μηδενικών σταθερών:  $c_1 = c_2 = 0$ . Αυτός όμως είναι ο ορισμός της γραμμικής ανεξαρτησίας συναρτήσεων που προαναφέραμε. Άρα οι δύο συναρτήσεις (5.1.8) είναι γραμμικά ανεξάρτητες. ▲

▼ **Εφαρμογή A5.2 (Δυναμική):** Υλικό σημείο  $M$  μάζας  $m$  κινείται μέσα σε ημιάπειρο ευθύγραμμο σωλήνα που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  γύρω από το άκρο του  $r = 0$ . Ζητούνται: (α) Η διαφορική εξίσωση της κινήσεως. (β) Η επαλήθευση ότι οι τρεις συναρτήσεις

$$r_1(t) = \cosh \omega t, \quad r_2(t) = \sinh \omega t, \quad r_3(t) = e^{\omega t} \quad (5.1.11)$$

(με το σύμβολο  $t$  να δηλώνει το χρόνο) επαληθεύουν τη διαφορική αυτή εξίσωση. (γ) Η απόδειξη ότι οι τρεις αυτές συναρτήσεις είναι γραμμικά εξαρτημένες σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα.

**Λύση:** (α) Θα κάνουμε χρήση του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F \quad (5.1.12)$$

με  $r = r(t)$  τη θέση του υλικού σημείου  $M$  στον περιστρεφόμενο σωλήνα (ως προς το σταθερό άκρο του  $r = 0$ ) και  $F$  τη συνολική δύναμη που ασκείται πάνω στο υλικό αυτό σημείο  $M$ . Στο παρόν όμως πρόβλημα η μόνη δύναμη που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο  $M$  είναι η φυγόκεντρος δύναμη  $F = m\omega^2 r$ . Αυτή οφείλεται βέβαια στην περιστροφική κίνηση του σωλήνα με σταθερή γωνιακή

ταχύτητα  $\omega$ . Επομένως ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα (5.1.12) παίρνει στο παρόν πρόβλημα τη μορφή της ακόλουθης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δευτέρας τάξεως:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = m\omega^2 r \implies \frac{d^2 r}{dt^2} - \omega^2 r = 0 \quad \text{με } r = r(t) \text{ ή } \ddot{r}(t) - \omega^2 r(t) = 0. \quad (5.1.13)$$

(β) Μπορούμε πολύ εύκολα να επαληθεύσουμε ότι και οι τρεις συναρτήσεις  $r_1(t)$ ,  $r_2(t)$  και  $r_3(t)$  των σχέσεων (5.1.11) είναι λύσεις της διαφορικής αυτής εξίσωσης (5.1.13). Πραγματικά έχουμε

$$r_1(t) = \cosh \omega t \implies \dot{r}_1(t) = \omega^2 \cosh \omega t \implies \ddot{r}_1(t) - \omega^2 r_1(t) = 0, \quad (5.1.14)$$

$$r_2(t) = \sinh \omega t \implies \dot{r}_2(t) = \omega^2 \sinh \omega t \implies \ddot{r}_2(t) - \omega^2 r_2(t) = 0, \quad (5.1.15)$$

$$r_3(t) = e^{\omega t} \implies \dot{r}_3(t) = \omega^2 e^{\omega t} \implies \ddot{r}_3(t) - \omega^2 r_3(t) = 0. \quad (5.1.16)$$

Το ίδιο ισχύει βέβαια και για την τέταρτη συνάρτηση  $r_4(t) = e^{-\omega t}$ , αν και για απλότητα δεν αναφερθήκαμε και σ' αυτή.

(γ) Θα αποδείξουμε τώρα ότι οι τρεις συναρτήσεις (5.1.11) είναι γραμμικά εξαρτημένες. Προς το σκοπό αυτό σχηματίζουμε το γραμμικό συνδυασμό τους

$$c_1 r_1(t) + c_2 r_2(t) + c_3 r_3(t) = 0 \quad (5.1.17)$$

θέτοντάς τον ίσο με το μηδέν. (Εννοούμε συνεχώς εκ ταυτότητας ίσο, παρόλο που δε χρησιμοποιήσαμε το σύμβολο της ταυτότητας  $\equiv$  αντί για το σύμβολο της ισότητας  $=$ , ακριβώς όπως κάνουμε και στις διαφορικές εξισώσεις.) Επομένως διερευνούμε τη σχέση

$$c_1 \cosh \omega t + c_2 \sinh \omega t + c_3 e^{\omega t} = 0. \quad (5.1.18)$$

Αλλά, όπως γνωρίζουμε, ισχύει ο τύπος (1.5.6):

$$e^x = \cosh x + \sinh x, \quad \text{οπότε εδώ } e^{\omega t} = \cosh \omega t + \sinh \omega t. \quad (5.1.19)$$

Με την αντικατάσταση αυτή η βασική σχέση μας (5.1.18) γράφεται τώρα

$$c_1 \cosh \omega t + c_2 \sinh \omega t + c_3 (\cosh \omega t + \sinh \omega t) = 0 \quad (5.1.20)$$

και ισοδύναμα

$$(c_1 + c_3) \cosh \omega t + (c_2 + c_3) \sinh \omega t = 0. \quad (5.1.21)$$

Διαπιστώνουμε όμως τώρα την προφανή ισχύ αυτής της σχέσεως για

$$c_1 = c_2 = -c_3, \quad \text{π.χ. για } c_1 = 1, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = -1. \quad (5.1.22)$$

Άρα υπάρχει τριάδα σταθερών  $c_1$ ,  $c_2$  και  $c_3$ , όχι όλων ταυτόχρονα μηδενικών, που να κάνουν τη γραμμική σχέση (5.1.18) να ισχύει εκ ταυτότητας. Επομένως οι τρεις συναρτήσεις (5.1.11) είναι γραμμικά εξαρτημένες. Αυτό εξάλλου είναι προφανές και από τη δεύτερη σχέση (5.1.19). Πραγματικά από τη σχέση αυτή παρατηρούμε ότι η συνάρτηση  $r_3(t) = e^{\omega t}$  είναι απλά το άθροισμα των άλλων δύο συναρτήσεων  $r_1(t) = \cosh \omega t$  και  $r_2(t) = \sinh \omega t$ . Επομένως δεν τίθεται θέμα γραμμικής ανεξαρτησίας στις τρεις αυτές συναρτήσεις. Σαφώς και είναι γραμμικά εξαρτημένες!

Ας κάνουμε στο τέλος και την παρατήρηση ότι έχοντας στο παρόν πρόβλημα Δυναμικής τη γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως (5.1.13) με κανέναν τρόπο δεν πρέπει να περιμένουμε να έχουμε τρεις γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της, αλλά μόνο δύο. Επομένως οι τρεις λύσεις της (5.1.11) πολύ σωστά προέκυψαν να είναι γραμμικά εξαρτημένες. Μπορούμε βέβαια να επαληθεύσουμε ότι οποιοσδήποτε δύο (όχι όμως τρεις!) από τις τρεις αυτές λύσεις  $r_1(t)$ ,  $r_2(t)$  και  $r_3(t)$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Το ίδιο ακριβώς ισχύει, εάν λάβουμε υπόψη μας και την τέταρτη συνάρτηση  $r_4(t) = e^{-\omega t}$ . Συγκεκριμένα δύο από τις τέσσερις αυτές συναρτήσεις  $r_1(t)$ ,  $r_2(t)$ ,  $r_3(t)$  και  $r_4(t)$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Αντίθετα τρεις ή τέσσερις είναι γραμμικά εξαρτημένες. ▲



## A5.2. Η ΟΡΙΖΟΥΣΑ WRONSKI

### A5.2.1. Ορισμός και ιδιότητες της ορίζουσας Wronski

Μια πολύ χρήσιμη έννοια στις γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις, αλλά και στις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις κάθε τάξεως, είναι η έννοια της ορίζουσας Wronski (ή ορίζουσας του Wronski ή Βρονσκιανής ορίζουσας ή, απλά, Βρονσκιανής, Wronskian). Συγκεκριμένα για  $n$  συναρτήσεις

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x) \tag{5.2.1}$$

ορίζουμε την ορίζουσα Wronski ως εξής:

● **ΟΡΙΣΜΟΣ:** Για  $n$  συναρτήσεις  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  που είναι όλες τους ορισμένες σε ένα διάστημα  $(a, b)$  και επίσης διαθέτουν όλες τις παραγώγους μέχρι και  $(n - 1)$ -τάξεως σε ολόκληρο το διάστημα  $(a, b)$  ορίζουμε τη σχετική ορίζουσα Wronski με τη σχέση

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n] \equiv W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \tag{5.2.2}$$

Η ορίζουσα Wronski συμβολίζεται είτε με το σύμβολο  $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ , αν θέλουμε να δώσουμε έμφαση στις συναρτήσεις  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  σ' αυτήν, είτε με το σύμβολο  $W(x)$ , αν επιθυμούμε να δώσουμε έμφαση στην ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$ . Στην πρώτη περίπτωση (των συναρτήσεων) χρησιμοποιούμε αγκύλες:  $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ . Αντίθετα στη δεύτερη περίπτωση (της ανεξάρτητης μεταβλητής  $x$ ) χρησιμοποιούμε παρενθέσεις:  $W(x)$ . Απόλυτα αποδεκτός είναι και ο σύνθετος συμβολισμός  $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x)$ , όπου δηλώνονται και οι συναρτήσεις και η ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$ .

Αυτήν την ορίζουσα Wronski την αναφέρουμε εδώ, αμέσως μετά από την Ενότητα A5.1 για τις γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις, επειδή πραγματικά αποτελεί την απλούστερη μέθοδο συνηθισμένου ελέγχου της γραμμικής ανεξαρτησίας  $n$  συναρτήσεων  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ . Οι  $n$  αυτές συναρτήσεις μπορεί να αποτελούν λύσεις μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης. Μπορεί όμως και να μην αποτελούν. Πιο συγκεκριμένα ισχύει το επόμενο σχετικό θεώρημα, το οποίο μάλιστα εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε:

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ:** Αν για  $n$  συναρτήσεις  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  ορίζεται η ορίζουσα Wronski τους στο διάστημα  $(a, b)$ , τότε ο μη μηδενισμός της ορίζουσας αυτής,

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n] \equiv W(x) \neq 0 \quad \text{για κάθε } x \text{ στο διάστημα } (a, b) \tag{5.2.3}$$

συνεπάγεται τη γραμμική ανεξαρτησία των συναρτήσεων αυτών στο ίδιο διάστημα  $(a, b)$ .

**Απόδειξη:** Είναι στ' αλήθεια απλή η σχετική απόδειξη. Λαμβάνουμε υπόψη τη σχέση (5.1.1) ορισμού της γραμμικής ανεξαρτησίας  $n$  συναρτήσεων  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  σε ένα διάστημα  $(a, b)$ . Με βάση τον ορισμό της γραμμικής ανεξαρτησίας  $n$  συναρτήσεων στο διάστημα αυτό  $(a, b)$  η γραμμική σχέση

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0 \quad \text{για κάθε } x \text{ στο διάστημα } (a, b) \tag{5.2.4}$$

θα πρέπει να ισχύει (εκ ταυτότητας βέβαια: για κάθε  $x$ ), μόνο αν όλες ανεξαιρέτως οι σταθερές  $c_1, c_2, \dots, c_n$  είναι υποχρεωτικά ίσες με το μηδέν.

Αυτό θα αποδείξουμε και εμείς στην παρούσα περίπτωση του πιο πάνω θεωρήματος εξετάζοντας τη σχέση (5.2.4) για τις συναρτήσεις  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ . Βέβαια πρώτα απ' όλα σημειώνουμε ότι αφού δεχθήκαμε εδώ την ύπαρξη της ορίζουσας Wronski για τις  $n$  αυτές συναρτήσεις, προφανώς δεχθήκαμε και την ύπαρξη όλων των παραγώγων τους μέχρι και  $(n - 1)$ -τάξεως

που υπεισέρχονται στην ορίζουσα Wronski. Άρα οι συναρτήσεις μας  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  είναι εδώ παραγωγίσιμες τουλάχιστον  $n - 1$  φορές εννοείται ως προς την κοινή μεταβλητή τους  $x$ .

Κατά συνέπεια έχουμε το δικαίωμα (αφού υπάρχουν οι παράγωγοι) να πάρουμε τη σχέση γραμμικής ανεξαρτησίας (5.2.4) και να την παραγωγίσουμε συνολικά  $n - 1$  φορές ως προς  $x$ . Έτσι διαπιστώνουμε ότι πρέπει να ισχύουν όλες μαζί οι παρακάτω σχέσεις και μάλιστα για κάθε  $x$  στο διάστημα  $(a, b)$ :

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) &= 0, \\ c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) + \dots + c_n y_n'(x) &= 0, \\ &\vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x) + c_2 y_2^{(n-1)}(x) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x) &= 0. \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Οι σχέσεις αυτές αποτελούν βέβαια ένα ομογενές σύστημα  $n$  γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων ως προς τις  $n$  σταθερές  $c_1, c_2, \dots, c_n$ .

Ποια είναι όμως η υπόθεση στο παραπάνω θεώρημα γραμμικής ανεξαρτησίας, το οποίο θέλουμε να αποδείξουμε; Απλά ότι υπάρχει η ορίζουσα Wronski  $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$  των συναρτήσεων  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  και είναι μάλιστα διάφορη του μηδενός σε ολόκληρο το διάστημα  $(a, b)$ . Παρατηρούμε όμως ότι για το πιο πάνω σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (5.2.5) η ορίζουσα Wronski  $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$  δεν είναι τίποτε άλλο παρά η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων του συστήματος, που εδώ είναι απλά οι σταθερές  $c_1, c_2, \dots, c_n$ . Η ορίζουσα αυτή Wronski έχει όμως υποθεθεί συνεχώς διάφορη του μηδενός κατά την εκφώνηση του παραπάνω θεωρήματος. Άρα η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων του συστήματος (5.2.5) είναι μη μηδενική και μάλιστα για κάθε  $x$  στο διάστημα  $(a, b)$ . Επομένως, σύμφωνα με τα όσα γνωρίζουμε για συστήματα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων από τη Γραμμική Άλγεβρα, το σύστημα αυτό (5.2.5) έχει μία και μόνο μία λύση  $c_1, c_2, \dots, c_n$ . Και ποια ακριβώς είναι η λύση αυτή; Μα φυσικά η μηδενική λύση

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0, \quad (5.2.6)$$

αφού πρόκειται για ένα ομογενές σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων και μάλιστα για κάθε τιμή του  $x$  στο διάστημα  $(a, b)$ . Επομένως με την ισχύ της μηδενικής λύσεως (5.2.6) του γραμμικού συστήματος (5.2.5) οι  $n$  συναρτήσεις  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο διάστημα  $(a, b)$ . Άρα αποδείχθηκε το θεώρημα.  $\square$ <sup>1</sup>

Αποδείξαμε λοιπόν πιο πάνω ότι ο μη μηδενισμός της ορίζουσας Wronski ( $W[y_1, y_2, \dots, y_n] \neq 0$ ) των  $n$  συναρτήσεων  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  σε ένα διάστημα  $(a, b)$  έχει σαν συνέπεια τη γραμμική ανεξαρτησία των συναρτήσεων αυτών στο ίδιο διάστημα. Πρόκειται για μια ικανή συνθήκη γραμμικής ανεξαρτησίας, που παρουσιάζει ιδιαίτερο πρακτικό ενδιαφέρον. Αυτό συμβαίνει, γιατί έχουμε έτσι τη δυνατότητα να αποδεικνύουμε τη γραμμική ανεξαρτησία  $n$  συναρτήσεων χωρίς να καταφεύγουμε στον ίδιο τον ορισμό της γραμμικής ανεξαρτησίας. Απλά χρησιμοποιούμε λίγο-πολύ μηχανικά την ορίζουσα Wronski τους  $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$  με ορισμό της τον (5.2.2) και τούτο είναι απλούστερο. Βέβαια η ικανή αυτή συνθήκη γραμμικής ανεξαρτησίας  $n$  συναρτήσεων προϋποθέτει την παραγωγισιμότητά τους  $n - 1$  φορές. Επιπλέον, ενώ είναι ικανή συνθήκη γραμμικής ανεξαρτησίας, δεν είναι ταυτόχρονα και αναγκαία. Δηλαδή σε εξαιρετικά σπάνιες περιπτώσεις είναι δυνατόν η ορίζουσα Wronski να μηδενίζεται και όμως οι  $n$  συναρτήσεις  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  να είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Εμάς γενικά μας αρκεί το ότι η συνθήκη  $W[y_1, y_2, \dots, y_n] \neq 0$  στο διάστημα  $(a, b)$  είναι ικανή συνθήκη γραμμικής ανεξαρτησίας για τις  $n$  συναρτήσεις  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  στο διάστημα αυτό.

Ας επικεντρώσουμε τώρα την προσοχή μας στην περίπτωση που έχουμε μια ομογενή γραμμική

<sup>1</sup> Το σύμβολο  $\square$  στα παρόντα διδακτικά βιβλία Εφαρμοσμένων Μαθηματικών II και III για Πολιτικούς Μηχανικούς δηλώνει το τέλος της αποδείξεως ενός θεωρήματος.

διαφορική εξίσωση της μορφής

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \quad (5.2.7)$$

είτε με σταθερούς είτε με μεταβλητούς συντελεστές  $a_k(x)$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ). Τότε το πιο πάνω θεώρημα του μη μηδενισμού της ορίζουσας Wronski ( $W[y_1, y_2, \dots, y_n] \neq 0$ ) αποτελεί όχι μόνο ικανή αλλά ταυτόχρονα και αναγκαία συνθήκη γραμμικής ανεξαρτησίας  $n$  λύσεων  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  αυτής της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (5.2.7). Άρα ισχύει το θεώρημα:

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ:** Για  $n$  λύσεις  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης  $n$ -τάξεως (5.2.7) σε ένα διάστημα  $(a, b)$  ο μη μηδενισμός της ορίζουσας Wronski των λύσεων αυτών

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n] \equiv W(x) \neq 0 \quad \text{για κάθε } x \text{ στο διάστημα } (a, b) \quad (5.2.8)$$

αποτελεί αναγκαία και ικανή συνθήκη γραμμικής ανεξαρτησίας των ίδιων λύσεων στο διάστημα αυτό  $(a, b)$ .

Έχουμε ήδη αποδείξει στο προηγούμενο θεώρημα της παρούσας ενότητας ότι ο μη μηδενισμός της ορίζουσας Wronski ( $W[y_1, y_2, \dots, y_n] \neq 0$ ) αποτελεί ικανή συνθήκη γραμμικής ανεξαρτησίας οποιωνδήποτε  $n$  συναρτήσεων  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ . Θα παραλείψουμε την απόδειξη του γενικότερου αμέσως πιο πάνω θεωρήματος ως προς το πρώτο μέρος του. Το μέρος αυτό αφορά στο ότι ειδικά για λύσεις ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (όχι γενικά) ο μη μηδενισμός της ορίζουσας Wronski αποτελεί και αναγκαία συνθήκη γραμμικής ανεξαρτησίας (όχι μόνο ικανή).

Με άλλα λόγια το πρώτο θεώρημα (ικανή συνθήκη γραμμικής ανεξαρτησίας) αφορά σε οποιοδήποτε  $n$  συναρτήσεις  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ . Αντίθετα το δεύτερο θεώρημα (αναγκαία και ικανή συνθήκη) αφορά μόνο σε  $n$  λύσεις της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (5.2.7). Αφού μάλιστα πρόκειται για λύσεις της διαφορικής αυτής εξίσωσης, δε χρειάζεται να αναφερόμαστε στο ότι υπάρχει η ορίζουσα Wronski τους  $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ . Είναι λύσεις της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης  $n$ -τάξεως (5.2.7), άρα εννοείται ότι οπωσδήποτε διαθέτουν τις παραγωγούς που υπεισέρχονται στην ορίζουσα Wronski τους  $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ .

Εμείς απλά θα χρησιμοποιούμε το μη μηδενισμό της ορίζουσας Wronski ( $W[y_1, y_2, \dots, y_n] \neq 0$ ) για την απόδειξη της γραμμικής ανεξαρτησίας  $n$  συναρτήσεων  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ , δηλαδή σαν ικανή συνθήκη γραμμικής ανεξαρτησίας συνήθως  $n$  λύσεων ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Το πρώτο πιο πάνω θεώρημα (αυτό που αποδείξαμε: ικανή συνθήκη γραμμικής ανεξαρτησίας) μας αρκεί για το σκοπό αυτό. Ασφαλώς ορισμένα παραδείγματα θα καταστήσουν πολύ σαφέστερη τη χρήση της ορίζουσας Wronski για την απόδειξη της γραμμικής ανεξαρτησίας  $n$  συναρτήσεων.

### A5.2.2. Παραδείγματα της ορίζουσας Wronski

Προχωράμε αμέσως σε δύο παραδείγματα που αφορούν στην ορίζουσα Wronski. Στο δεύτερο από αυτά δίνουμε έμφαση στις λύσεις ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Θα δούμε ότι η ορίζουσα Wronski σε περίπτωση που είναι διάφορη του μηδενός ( $W[y_1, y_2, \dots, y_n] \equiv W(x) \neq 0$ ) αποτελεί ένα πάρα πολύ χρήσιμο και πρακτικό εργαλείο διαπιστώσεως της γραμμικής ανεξαρτησίας  $n$  συναρτήσεων  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ . Αυτό θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμο κατά την εύρεση της γενικής λύσεως μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης  $n$  τάξεως της μορφής (5.2.7).

▼ **Παράδειγμα A5.3:** Να αποδειχθεί ότι οι δύο συναρτήσεις

$$y_1(x) = \cos x, \quad y_2(x) = \sin x \quad (5.2.9)$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες σε κάθε διάστημα  $(a, b)$ .

**Απόδειξη:** Πρόκειται για δύο συναρτήσεις που είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες σε ολόκληρο τον πραγματικό άξονα  $x$ , άρα και σε κάθε διάστημά του  $(a, b)$ . Επειδή μάλιστα

$$y_1'(x) = -\sin x, \quad y_2'(x) = \cos x, \quad (5.2.10)$$

η ορίζουσα Wronski τους  $W[y_1, y_2] \equiv W[\cos x, \sin x] \equiv W(x)$  παίρνει τη μορφή

$$W[y_1, y_2] \equiv W[\cos x, \sin x] \equiv W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1. \quad (5.2.11)$$

Επομένως πρόκειται για ορίζουσα Wronski ταυτοτικά ίση με τη μονάδα. Άρα οι δύο αυτές συναρτήσεις  $\cos x$  και  $\sin x$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες σε οποιοδήποτε διάστημα  $(a, b)$  του άξονα  $x$ . ▲

Παρενθετικά σημειώνουμε ότι πρόκειται για τις λύσεις της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης  $y''(x) + y(x) = 0$ . Δε δώσαμε όμως έμφαση στο σημείο αυτό στο παρόν πρώτο παράδειγμα και απλά περιορισθήκαμε στη γραμμική ανεξαρτησία των δύο συναρτήσεων  $\cos x$  και  $\sin x$ . Θα επανορθώσουμε φυσικά στο επόμενο παράδειγμα συσχετίζοντας έντονα την ορίζουσα Wronski με γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων της γενικής μορφής

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0. \quad (5.2.12)$$

Στην πράξη βέβαια συνήθως περιορίζουμε την προσοχή μας στις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς (και όχι μη σταθερούς, μεταβλητούς) συντελεστές. Αυτές είναι και οι πιο χρήσιμες και εύκολες στην επίλυσή τους, όπως θα διαπιστώσουμε σε επόμενη ενότητα αυτού του κεφαλαίου.

▼ **Παράδειγμα Α5.4:** Για τη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y''(x) - y(x) = 0 \quad (5.2.13)$$

ζητούνται: (α) Να δοθούν οι χαρακτηρισμοί της. (β) Να επαληθευθεί ότι και οι δύο συναρτήσεις

$$y_1(x) = \cosh x, \quad y_2(x) = \sinh x \quad (5.2.14)$$

είναι λύσεις της. (γ) Το ίδιο και για το γραμμικό συνδυασμό τους

$$y_g(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 \cosh x + C_2 \sinh x \quad (5.2.15)$$

με τις σταθερές  $C_1$  και  $C_2$  αυθαίρετες. (δ) Με τη χρήση ορίζουσας Wronski να αποδειχθεί ότι οι δύο αυτές λύσεις (5.2.14) είναι γραμμικά ανεξάρτητες. (ε) Να αποδειχθεί ότι η πιο πάνω λύση  $y_g(x)$  αποτελεί τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (5.2.13). (στ) Στη συνέχεια να προσδιορισθεί η λύση  $y_p(x)$  του προβλήματος αρχικών τιμών που αποτελείται από τη διαφορική εξίσωση (5.2.13) και τις δύο αρχικές συνθήκες

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0' \quad (5.2.16)$$

στο σημείο  $x_0$ . (ζ) Τέλος να γίνει η πλήρης επαλήθευση της λύσεως αυτής  $y_p(x)$ .

**Λύση:** (α) Πρόκειται προφανώς για μια (i) συνήθη διαφορική εξίσωση, (ii) δευτέρας τάξεως, (iii) πρώτου βαθμού, (iv) γραμμική, (v) ομογενή, (vi) με σταθερούς συντελεστές (τους 1 και  $-1$ ) και (vii) με ανεξάρτητη μεταβλητή το  $x$  και εξαρτημένη το  $y = y(x)$ .

(β) Απλά παίρνουμε υπόψη μας ότι

$$y_1'(x) = \sinh x \implies y_1''(x) = \cosh x \quad \text{και επίσης} \quad y_2'(x) = \cosh x \implies y_2''(x) = \sinh x, \quad (5.2.17)$$

όπως ήδη γνωρίζουμε από την Παράγραφο Α1.5.2: τύποι (1.5.10) και (1.5.11) για τις παραγώγους των υπερβολικών συναρτήσεων  $\cosh x$  και  $\sinh x$  αντίστοιχα. Επομένως με αντικατάσταση

των συναρτήσεων (5.2.14) και των δευτέρων παραγώγων τους (5.2.17) στην ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωσή μας (5.2.13) πραγματικά επαληθεύουμε ότι

$$y_1''(x) - y_1(x) = \cosh x - \cosh x = 0 \quad \text{και επίσης} \quad y_2''(x) - y_2(x) = \sinh x - \sinh x = 0. \quad (5.2.18)$$

(γ) Προχωράμε τώρα στην επαλήθευση ότι και ο γραμμικός συνδυασμός (5.2.15) των δύο λύσεων (5.2.14) είναι και αυτός λύση της ίδιας διαφορικής εξίσωσης (5.2.13). Στ' αλήθεια είναι, γιατί σύμφωνα με τους τύπους (5.2.17)

$$\begin{aligned} y_g''(x) - y_g(x) &= (C_1 \cosh x + C_2 \sinh x)'' - (C_1 \cosh x + C_2 \sinh x) \\ &= (C_1 \cosh x + C_2 \sinh x) - (C_1 \cosh x + C_2 \sinh x) = 0. \end{aligned} \quad (5.2.19)$$

Σημειώνουμε βέβαια ότι αυτή η ιδιότητα ισχύει γενικά για οποιοσδήποτε λύσεις μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης  $n$ -τάξεως που έχει τη μορφή (5.2.12) και θα την εξετάσουμε εκτενέστερα παρακάτω στην Παράγραφο Α5.3.2. Εδώ απλά κάναμε μια επαλήθευσή της.

(δ) Στο ερώτημα αυτό θα αποδείξουμε ότι οι δύο συναρτήσεις (5.2.14) είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Για τις συναρτήσεις αυτές έχουμε

$$y_1(x) = \cosh x \implies y_1'(x) = \sinh x \quad \text{και επίσης} \quad y_2(x) = \sinh x \implies y_2'(x) = \cosh x. \quad (5.2.20)$$

Επομένως η ορίζουσα Wronski τους παίρνει τη μορφή

$$W[y_1, y_2] \equiv W[\cosh x, \sinh x] \equiv W(x) = \begin{vmatrix} \cosh x & \sinh x \\ \sinh x & \cosh x \end{vmatrix} = \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad (5.2.21)$$

όπως ξέρουμε από την Παράγραφο Α1.5.3, τύπος (1.5.9): ισχύει πάντα ότι  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ . Αφού λοιπόν αυτή η ορίζουσα Wronski δεν είναι μηδενική, οι δύο συναρτήσεις  $y_1(x) = \cosh x$  και  $y_2(x) = \sinh x$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις σε ολόκληρο τον πραγματικό άξονα  $x$ .

(ε) Προφανώς από το ερώτημα (γ) δεν υπάρχει πλέον καμία απολύτως αμφιβολία ότι η συνάρτηση  $y_g(x) = C_1 \cosh x + C_2 \sinh x$  της σχέσεως (5.2.15) αποτελεί λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δευτέρας τάξεως (5.2.13). Περιέχει επίσης τις αυθαίρετες σταθερές  $C_1$  και  $C_2$  και είναι γραμμικός συνδυασμός των γραμμικά ανεξάρτητων συναρτήσεων-λύσεων  $y_1(x) = \cosh x$  και  $y_2(x) = \sinh x$ . Στο ερώτημα αυτό απλά θα επαληθεύσουμε ότι η λύση αυτή  $y_g(x)$  μπορεί να μας δώσει μια αντίστοιχη μερική λύση  $y_p(x)$  για οποιοσδήποτε (αυθαίρετες) αρχικές συνθήκες

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \quad (5.2.22)$$

σε ένα οποιοδήποτε σημείο  $x_0$  του άξονα  $x$ , που θεωρείται το αρχικό σημείο. Με τον τρόπο αυτό δικαιούμαστε να αποκαλούμε τη συνάρτηση  $y_g(x)$  γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (5.2.13).

Για να το αποδείξουμε αυτό, παίρνουμε πραγματικά τις παραπάνω αρχικές συνθήκες (5.2.22) και εισάγουμε σ' αυτές τη λύση (5.2.15). Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} C_1 \cosh x_0 + C_2 \sinh x_0 &= y_0, \\ C_1 \sinh x_0 + C_2 \cosh x_0 &= y'_0. \end{aligned} \quad (5.2.23)$$

Θέλουμε τώρα απλά να προσδιορίσουμε τις δύο αυθαίρετες σταθερές  $C_1$  και  $C_2$  της λύσεως  $y_g(x) = C_1 \cosh x + C_2 \sinh x$  της σχέσεως (5.2.15), ώστε να έχουμε το δικαίωμα να τη χαρακτηρίσουμε γενική λύση της διαφορικής μας εξίσωσης  $y''(x) - y(x) = 0$ . Είναι εύκολο το καθήκον μας αυτό, εφόσον αναγνωρίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων σταθερών  $C_1$  και  $C_2$  στις πιο πάνω δύο αρχικές συνθήκες (5.2.23) απλά σαν την ορίζουσα Wronski  $W[\cosh x, \sinh x]$  των δύο συναρτήσεων-λύσεων μας  $y_1(x) = \cosh x$  και  $y_2(x) = \sinh x$  στο σημείο  $x = x_0$ . Ακριβώς όμως αυτή η ορίζουσα Wronski  $W[\cosh x, \sinh x]$  ήδη υπολογίσθηκε στο προηγούμενο ερώτημα (δ)

και βρέθηκε εκ ταυτότητος ίση με 1 (άρα διάφορη του μηδενός!) για τις παρούσες συναρτήσεις μας. Άρα σίγουρα το σύστημα των δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (5.2.23) (των αρχικών συνθηκών) έχει μία και μόνο μία λύση ( $C_1, C_2$ ) για τις σταθερές της συναρτήσεως-λύσεως  $y_g(x) = C_1 \cosh x + C_2 \sinh x$ . Αυτό μάλιστα συμβαίνει για οποιοσδήποτε αρχικές συνθήκες  $y_0$  και  $y'_0$ .

Επομένως η λύση (5.2.15),  $y_g(x) = C_1 \cosh x + C_2 \sinh x$ , αποτελεί γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως (5.2.13). Όχι μόνο γιατί περιέχει δύο αυθαίρετες σταθερές  $C_1$  και  $C_2$ , αυτό δε μας είναι αρκετό, αλλά γιατί μπορεί επιπλέον να ικανοποιήσει οποιοσδήποτε αρχικές συνθήκες  $y(x_0) = y_0$  και  $y'(x_0) = y'_0$  στο σημείο  $x_0$  ισχύος της, όπως είναι οι δύο αρχικές συνθήκες (5.2.16) ή (5.2.22).

(στ) Τώρα βέβαια με την ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων  $C_1$  και  $C_2$  στο παραπάνω σύστημα δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (5.2.23) να είναι γνωστή και ίση με τη μονάδα, μια που πρόκειται απλά για την ορίζουσα Wronski (5.2.21), η λύση του συστήματος αυτού είναι απλούστατη. Συγκεκριμένα με το γνωστό κανόνα του Cramer προκύπτει αμέσως ότι

$$C_1 = y_0 \cosh x_0 - y'_0 \sinh x_0, \quad C_2 = -y_0 \sinh x_0 + y'_0 \cosh x_0. \quad (5.2.24)$$

Άρα η γενική λύση  $y_g(x) = C_1 \cosh x + C_2 \sinh x$  της σχέσεως (5.2.15) παίρνει τώρα τη μορφή της μερικής λύσεως

$$y_p(x) = (y_0 \cosh x_0 - y'_0 \sinh x_0) \cosh x + (-y_0 \sinh x_0 + y'_0 \cosh x_0) \sinh x \quad (5.2.25)$$

στο παρόν πρόβλημα αρχικών τιμών: διαφορική εξίσωση (5.2.13) και αρχικές συνθήκες (5.2.16). Προφανώς η ίδια μερική λύση  $y_p(x)$  με αναδιάταξη των όρων της γράφεται και στη μορφή

$$y_p(x) = y_0(\cosh x \cosh x_0 - \sinh x \sinh x_0) + y'_0(\sinh x \cosh x_0 - \cosh x \sinh x_0). \quad (5.2.26)$$

Μια πιο συνεπτυγμένη μορφή της ίδιας μερικής λύσεως  $y_p(x)$  παίρνουμε, αν χρησιμοποιήσουμε τις δύο ακόλουθες και πολύ γνωστές σχέσεις για τις υπερβολικές συναρτήσεις συνημίτονο ( $\cosh$ ) και ημίτονο ( $\sinh$ ):

$$\cosh(a \pm b) = \cosh a \cosh b \pm \sinh a \sinh b, \quad (5.2.27)$$

$$\sinh(a \pm b) = \sinh a \cosh b \pm \cosh a \sinh b. \quad (5.2.28)$$

Φυσικά οι σχέσεις αυτές, αν εξαιρέσουμε ένα πρόσημο στην πρώτη, συμπίπτουν με τις αντίστοιχες σχέσεις για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις συνημίτονο ( $\cos$ ) και ημίτονο ( $\sin$ ), δηλαδή με τις πάρα πολύ γνωστές σχέσεις

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b, \quad (5.2.29)$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b. \quad (5.2.30)$$

Επομένως με βάση τους τύπους (5.2.27) και (5.2.28) η λύση (5.2.26) του παρόντος προβλήματος αρχικών τιμών (5.2.13) και (5.2.16) γράφεται στην τελική της μορφή

$$y_p(x) = y_0 \cosh(x - x_0) + y'_0 \sinh(x - x_0). \quad (5.2.31)$$

(ζ) Για την επαλήθευση εύκολα διαπιστώνεται με δύο παραγωγίσεις:

$$y'_p(x) = y_0 \sinh(x - x_0) + y'_0 \cosh(x - x_0), \quad (5.2.32)$$

$$y''_p(x) = y_0 \cosh(x - x_0) + y'_0 \sinh(x - x_0) = y_p(x) \implies y''_p(x) - y_p(x) = 0 \quad (5.2.33)$$

ότι η λύση αυτή  $y_p(x)$  στ' αλήθεια αποτελεί λύση της διαφορικής εξισώσεως (5.2.13),  $y''(x) - y(x) = 0$ . Επαληθεύει όμως και τις δύο αρχικές συνθήκες (5.2.16), αφού

$$y_p(x_0) = y_0 \cdot 1 + y'_0 \cdot 0 = y_0 + 0 = y_0, \quad y'_p(x_0) = y_0 \cdot 0 + y'_0 \cdot 1 = 0 + y'_0 = y'_0. \quad (5.2.34)$$

Άρα είναι η λύση του παρόντος προβλήματος αρχικών τιμών (5.2.13) και (5.2.16). ▲

► **Παρατήρηση Α5.1:** Πρέπει βέβαια να μη λησμονούμε κατά την επαλήθευση της λύσεως ενός προβλήματος αρχικών τιμών να επαληθεύουμε όχι μόνο την ίδια τη διαφορική εξίσωση, αλλά και τις αρχικές συνθήκες που τη συνοδεύουν. Εντελώς ανάλογα ισχύουν και σε ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών, εκεί όμως για τις συνοριακές συνθήκες που συνοδεύουν τη διαφορική εξίσωση.

► **Παρατήρηση Α5.2:** Την παραπάνω λύση (5.2.31) του παρόντος προβλήματος αρχικών τιμών (5.2.13) και (5.2.16) θα μπορούσαμε, αν θέλαμε, να την ερμηνεύουμε και σαν τη γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως (5.2.13) θεωρώντας για το σκοπό αυτό τις αρχικές συνθήκες  $y_0$  και  $y'_0$  σαν αυθαίρετες σταθερές. Τίποτε δε μας εμποδίζει σε μια τέτοια ερμηνεία, αν και συνηθίζεται να δηλώνουμε τις αυθαίρετες σταθερές στις λύσεις διαφορικών εξισώσεων σαν  $C_1, C_2$  (ή  $c_1, c_2$ ), κλπ. Αφού όμως και οι αρχικές μας συνθήκες  $y(x_0) = y_0$  και  $y'(x_0) = y'_0$  θεωρήθηκαν αυθαίρετες;

### Α5.3. ΘΕΩΡΙΑ ΛΥΣΕΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

#### Α5.3.1. Θεώρημα υπάρξεως και μοναδικότητας λύσεως

Σε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών που αποτελείται από τη γενικά μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x) \quad (5.3.1)$$

σε ένα διάστημα  $(a, b)$  και τις  $n$  αρχικές συνθήκες στο σημείο  $x_0$  του διαστήματος αυτού  $(a, b)$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (5.3.2)$$

με τις ποσότητες  $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$  γνωστές σταθερές ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ:** Θεωρούμε τη γραμμική διαφορική εξίσωση  $n$ -τάξεως (5.3.1). Υποθέτουμε ότι όλοι οι συντελεστές της  $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_1(x)$  και  $a_0(x)$  καθώς και η συνάρτηση  $g(x)$  στο δεξιό μέλος της είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα  $(a, b)$  και επιπλέον ότι  $a_n(x) \neq 0$  για κάθε σημείο  $x$  του διαστήματος αυτού  $(a, b)$ . Τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών (5.3.1) και (5.3.2) έχει μία και μόνο μία λύση  $y_p(x)$  στο διάστημα  $(a, b)$ . Τούτο ισχύει είτε η γραμμική διαφορική εξίσωση (5.3.1) είναι ομογενής ( $g(x) \equiv 0$ ) είτε μη ομογενής ( $g(x) \not\equiv 0$ ). Επίσης είτε οι συντελεστές της  $a_k(x)$  είναι σταθεροί είτε μη σταθεροί (μεταβλητοί).

Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος υπάρξεως και μοναδικότητας λύσεως παραλείπεται.

▼ **Εφαρμογή Α5.3 (Ταλαντώσεις):** Θεωρούμε τη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) \quad (5.3.3)$$

στο μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου μάζας  $m$ , ελατηρίου σταθεράς  $k$  και αποσβεστήρα σταθεράς  $c$  σε εξαναγκασμένη ταλάντωση κατά το χρονικό διάστημα  $[0, \infty)$ . Η φόρτιση (η εξωτερική δύναμη) που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο εκφράζεται από τη συνάρτηση  $p(t)$  (με  $t$  το χρόνο). Άγνωστη συνάρτηση είναι η μετατόπιση  $u(t)$  του υλικού σημείου από τη θέση ισορροπίας του  $u = 0$ . Πρόκειται για μια μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές: τις θετικές σταθερές  $m, k$  και  $c$  του υλικού σημείου (τη μάζα), του ελατηρίου και του αποσβεστήρα. Την αρχική χρονική στιγμή  $t = 0$  θεωρούμε δεδομένες και τις αρχικές συνθήκες

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0 \quad (5.3.4)$$

(αρχική θέση  $u_0$  και αρχική ταχύτητα  $v_0$  αντίστοιχα).

Εάν η φόρτιση  $p(t)$  είναι συνεχής συνάρτηση σε ολόκληρο το χρονικό διάστημα  $[0, \infty)$ , τότε πληρούνται όλες οι υποθέσεις του πιο πάνω θεωρήματος και επομένως το παραπάνω πρόβλημα αρχικών τιμών (5.3.3) και (5.3.4) έχει μία και μόνο μία λύση  $u_p(t)$ . (Δηλαδή υπάρχει λύση  $u_p(t)$  και είναι μάλιστα και μοναδική.) Στην αντίθετη όμως περίπτωση, δηλαδή εάν η φόρτιση  $p(t)$  δεν είναι συνεχής συνάρτηση σε ολόκληρο το χρονικό διάστημα  $[0, \infty)$ , τότε το παραπάνω θεώρημα δε μας δίνει κάποιο συγκεκριμένο συμπέρασμα για την ύπαρξη και σε καταφατική περίπτωση για τη μοναδικότητα λύσεως  $u_p(t)$  του προβλήματος αρχικών τιμών (5.3.3) και (5.3.4). ▲

### A5.3.2. Αρχή της υπερθέσεως (ή της επαλληλίας) λύσεων

Ένα πάρα πολύ σημαντικό θεώρημα στις ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις αποτελεί η αρχή της υπερθέσεως (ή της επαλληλίας) λύσεων. Συγκεκριμένα ισχύει το εξής θεώρημα:

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ:** Εάν οι  $m$  συναρτήσεις  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ ,  $y_m(x)$  είναι όλες τους λύσεις της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως  $n$ -τάξεως

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0, \quad (5.3.5)$$

τότε και ο γραμμικός συνδυασμός τους

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_my_m(x) \equiv \sum_{k=1}^m c_k y_k(x) \quad (5.3.6)$$

(με  $c_1, c_2, \dots, c_m$  αυθαίρετες σταθερές) θα είναι και αυτός λύση της ίδιας διαφορικής εξισώσεως.

**Απόδειξη:** Δεν παρουσιάζει ιδιαίτερη δυσκολία και θα παραλειφθεί στη γενική της μορφή. Στηρίζεται απλά στον κανόνα παραγωγίσεως γραμμικού συνδυασμού συναρτήσεων. Εδώ για λόγους καλύτερης κατανόησης θα περιορίσουμε την απόδειξή μας στην ειδική περίπτωση μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως δευτέρας τάξεως ( $n = 2$ ) της μορφής

$$a_2y''(x) + a_1y'(x) + a_0y(x) = 0 \quad \text{γενικά με} \quad a_2 = a_2(x), \quad a_1 = a_1(x), \quad a_0 = a_0(x) \quad (5.3.7)$$

και δύο λύσεών της  $y_1(x)$  και  $y_2(x)$  (δηλαδή με  $m = 2$  λύσεις). Φυσικά για τις λύσεις αυτές θα έχουμε

$$a_2y_1''(x) + a_1y_1'(x) + a_0y_1(x) = 0, \quad (5.3.8)$$

$$a_2y_2''(x) + a_1y_2'(x) + a_0y_2(x) = 0. \quad (5.3.9)$$

Εδώ θέλουμε απλά να αποδείξουμε ότι ο γραμμικός συνδυασμός  $y(x)$  αυτών των δύο λύσεων:

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \quad (5.3.10)$$

αποτελεί και αυτός λύση της ίδιας διαφορικής εξισώσεως (5.3.7). Δηλαδή θέλουμε να δείξουμε ότι

$$a_2[c_1y_1(x) + c_2y_2(x)]'' + a_1[c_1y_1(x) + c_2y_2(x)]' + a_0[c_1y_1(x) + c_2y_2(x)] = 0. \quad (5.3.11)$$

Πρόκειται για μια ιδιαίτερα εύκολη απόδειξη. Ξαναγράφουμε τη σχέση αυτή στη μορφή

$$c_1[a_2y_1''(x) + a_1y_1'(x) + a_0y_1(x)] + c_2[a_2y_2''(x) + a_1y_2'(x) + a_0y_2(x)] = 0 \quad (5.3.12)$$

έχοντας λάβει υπόψη μας τον απλό κανόνα παραγωγίσεως γραμμικού συνδυασμού συναρτήσεων

$$[c_1y_1(x) + c_2y_2(x)]^{(k)} = c_1y_1^{(k)}(x) + c_2y_2^{(k)}(x), \quad \text{εδώ με } k = 1 \text{ και } k = 2, \quad (5.3.13)$$

και έχοντας επίσης αναδιατάξει τους όρους στο άθροισμα που προκύπτει. Αλλ' αφού ισχύουν οι σχέσεις (5.3.8) και (5.3.9) για τις δύο λύσεις  $y_1(x)$  και  $y_2(x)$  αντίστοιχα, και οι δύο αγκύλες στην προς απόδειξη σχέση (5.3.12) είναι ίσες με μηδέν. Άρα η σχέση αυτή ισχύει και η αρχή της υπερθέσεως (ή της επαλληλίας) λύσεων έχει αποδειχθεί στην παρούσα ειδική περίπτωση που εξετάσαμε. □



**A5.4. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΥΠΟΒΙΒΑΣΜΟΥ ΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ**

Πρόκειται για ενδιαφέρουσα μέθοδο, που επιτρέπει τον υποβιβασμό της τάξεως μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς ή μεταβλητούς συντελεστές τάξεως  $n$  από  $n$  σε  $n - 1$ , εφόσον γνωρίζουμε μια μερική λύση  $y_1(x)$  της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης. Η διαφορική αυτή εξίσωση μπορεί να είναι ομογενής και, γενικότερα, μη ομογενής. Το πρακτικό ενδιαφέρον της μεθόδου αυτής περιορίζεται κυρίως σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως, των οποίων γνωρίζουμε μια μερική λύση  $y_1(x)$  της αντίστοιχης ομογενούς. Αυτές υποβιβάζονται σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως, τις οποίες και ξέρουμε να λύνουμε γενικά με τις μεθόδους της Ενότητας Α3.4 του Κεφαλαίου Α3. Θα περιορίσουμε επομένως εδώ το ενδιαφέρον μας στη γενική γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως της μορφής

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x). \quad (5.4.1)$$

Οι συντελεστές  $a_2(x)$ ,  $a_1(x)$  και  $a_0(x)$  καθώς και το δεξιό μέλος  $g(x)$  θεωρούνται ότι είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ολόκληρο το διάστημα  $(a, b)$  που μας ενδιαφέρει. Επιπλέον ο συντελεστής  $a_2(x)$  της δευτέρας παραγώγου  $y''(x)$  υποτίθεται διάφορος του μηδενός σ' ολόκληρο το διάστημα  $(a, b)$ .

Η παρούσα μέθοδος του υποβιβασμού της τάξεως μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (εδώ από δευτέρας τάξεως σε πρώτης) βασίζεται αποκλειστικά, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, στην εκ των προτέρων γνώση μιας μερικής λύσεως  $y_1(x)$  της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης. Δηλαδή υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε μια συνάρτηση  $y_1(x)$ , τέτοια ώστε

$$a_2(x)y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_0(x)y_1(x) = 0, \quad (5.4.2)$$

εδώ με  $g(x) \equiv 0$  στο δεξιό μέλος. Στην ομογενή αυτή εξίσωση (5.4.2), αφού η συνάρτηση  $y_1(x)$  είναι λύση, προφανώς και κάθε συνάρτηση της μορφής

$$y(x) = Cy_1(x) \quad (5.4.3)$$

θα είναι επίσης λύση.

Ενεργούμε τώρα ανάλογα με τον τρόπο που ήδη ενεργήσαμε στο Εδάφιο Α3.4.3.1 του Κεφαλαίου Α3 για τη μέθοδο της μεταβολής της παραμέτρου σε μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως. Ελπίζουμε και εδώ να βοηθηθούμε στην προσπάθειά μας επιλύσεως της αρχικής γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (5.4.1) θεωρώντας την αυθαίρετη σταθερά  $C$  στην πιο πάνω λύση  $y(x) = Cy_1(x)$  σαν μεταβλητή, δηλαδή σαν συνάρτηση  $A(x)$ . Επιχειρούμε έτσι την αναζήτηση της γενικής λύσεως της διαφορικής εξίσωσης (5.4.1) στη μορφή

$$y(x) = A(x)y_1(x) \quad (5.4.4)$$

με τη συνάρτηση  $y_1(x)$  γνωστή εκ των προτέρων λύση της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (5.4.2). Άγνωστη συνάρτηση είναι η συνάρτηση  $A(x)$ , η μεταβαλλόμενη παράμετρος μας. Ας αποπειραθούμε να την προσδιορίσουμε. Επειδή η διαφορική εξίσωση (5.4.1), την οποία θέλουμε να επιλύσουμε, είναι δευτέρας τάξεως, απαιτείται η παραγωγή δύο φορές της λύσεως  $y(x)$  που υποθέσαμε στη σχέση (5.4.4) με τη μέθοδο της μεταβολής της παραμέτρου. Χωρίς δυσκολία, απλά με τη χρήση του κανόνα παραγωγίσεως γινομένου προκύπτουν οι δύο αυτές παράγωγοι

$$y'(x) = A'(x)y_1(x) + A(x)y_1'(x), \quad (5.4.5)$$

$$y''(x) = A''(x)y_1(x) + 2A'(x)y_1'(x) + A(x)y_1''(x). \quad (5.4.6)$$

Τη συνάρτηση  $y(x)$  της σχέσεως (5.4.4) και τις δύο πρώτες παραγώγους της  $y'(x)$  και  $y''(x)$  των σχέσεων (5.4.5) και (5.4.6) αντίστοιχα τις αντικαθιστούμε (και τις τρεις) στην αρχική μας (και γενικά μη ομογενή) γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως (5.4.1). Αμέσως προκύπτει ότι

$$a_2(x)[A''(x)y_1(x) + 2A'(x)y_1'(x) + A(x)y_1''(x)] + a_1(x)[A'(x)y_1(x) + A(x)y_1'(x)] + a_0(x)A(x)y_1(x) = g(x). \quad (5.4.7)$$

Αναδιατάσσουμε τώρα τους όρους στην εξίσωση αυτή (5.4.7) διαμορφώνοντάς την σαν γραμμική διαφορική εξίσωση ως προς την άγνωστη συνάρτηση  $A(x)$  της σχέσεως (5.4.4). Έτσι βρίσκουμε τη διαφορική εξίσωση

$$a_2(x)y_1(x)A''(x) + [2a_2(x)y_1'(x) + a_1(x)y_1(x)]A'(x) + [a_2(x)y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_0(x)y_1(x)]A(x) = g(x). \quad (5.4.8)$$

Όμως το αξιοπαρατήρητο στη διαφορική αυτή εξίσωση (5.4.8) είναι ότι ο συντελεστής  $b(x)$  της συναρτήσεως  $A(x)$  (όχι των παραγώγων της  $A'(x)$  και  $A''(x)$ ) είναι μηδενικός, δηλαδή

$$b(x) = a_2(x)y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_0(x)y_1(x) = 0. \quad (5.4.9)$$

Αυτό ισχύει βέβαια, επειδή η γνωστή συνάρτηση  $y_1(x)$  αποτελεί λύση της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως (με  $g(x) \equiv 0$ ) επαληθεύοντας τη σχέση (5.4.2).

Άρα η διαφορική εξίσωση (5.4.8) ως προς την άγνωστη συνάρτηση  $A(x)$  (τη μεταβαλλόμενη παράμετρο) παίρνει τελικά τη μορφή

$$a_2(x)y_1(x)A''(x) + [2a_2(x)y_1'(x) + a_1(x)y_1(x)]A'(x) = g(x). \quad (5.4.10)$$

Όμως η εξίσωση αυτή είναι μια γενικά μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως ως προς την παράγωγο  $A'(x)$  της συναρτήσεως  $A(x)$ . Αν θέλουμε, ας το δηλώσουμε αυτό με μεγαλύτερη έμφαση γράφοντας την ίδια ακριβώς διαφορική εξίσωση (5.4.10) στην τροποποιημένη μορφή

$$a_2(x)y_1(x)\hat{A}'(x) + [2a_2(x)y_1'(x) + a_1(x)y_1(x)]\hat{A}(x) = g(x), \quad \text{εδώ απλά με } \hat{A}(x) = A'(x). \quad (5.4.11)$$

Καταλήξαμε λοιπόν σε μια γραμμική διαφορική εξίσωση μόλις πρώτης τάξεως: τη διαφορική εξίσωση (5.4.11). Τη λύνουμε σύμφωνα με τις γνώσεις μας από την Ενότητα Α3.4 για τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως και προσδιορίζουμε τη λύση της  $\hat{A}(x)$ , που περιέχει μάλιστα και μία αυθαίρετη σταθερά  $C_1$ . Επειδή όμως  $A'(x) = \hat{A}(x)$ , ξέροντας τώρα την παράγωγο  $\hat{A}(x)$  της άγνωστης συναρτήσεως  $A(x)$  και ολοκληρώνοντας, βρίσκουμε και την ίδια τη συνάρτηση  $A(x)$  σαν

$$A(x) = \int \hat{A}(x) dx + C_2. \quad (5.4.12)$$

Στην τελική αυτή έκφραση της συναρτήσεως  $A(x)$  έχουν πλέον υπεισελθει δύο αυθαίρετες σταθερές: (α) η αυθαίρετη σταθερά  $C_1$  από τη λύση  $\hat{A}(x)$  της γραμμικής διαφορικής εξισώσεως πρώτης τάξεως (5.4.11) και (β) η αυθαίρετη σταθερά  $C_2$  από την ολοκλήρωση (5.4.12). Δεν απομένει παρά η αντικατάσταση της συναρτήσεως αυτής  $A(x)$  (της μεταβαλλόμενης παραμέτρου) στη σχέση (5.4.4), δηλαδή στη σχέση  $y(x) = A(x)y_1(x)$ , για τον πλήρη προσδιορισμό της γενικής λύσεως  $y(x)$  της αρχικής και γενικά μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως δεύτερας τάξεως (5.4.1). Φυσικά στη λύση αυτή  $y(x)$  υπεισέρχονται και οι δύο αυθαίρετες σταθερές  $C_1$  και  $C_2$ .

Αυτήν τη λύση  $y(x)$  τη βρήκαμε εδώ με τη μέθοδο του υποβιβασμού της τάξεως (κατά μονάδα) μιας γραμμικής διαφορικής εξισώσεως. Η μέθοδος αυτή βασίζεται στην πλήρη γνώση μιας μερικής λύσεως  $y_1(x)$  της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως (με  $g(x) \equiv 0$ ). Η περίπτωση που εξετάσαμε (διαφορική εξίσωση δεύτερας τάξεως) είναι η μόνη πρακτικά εύχρηστη, καθώς με τον υποβιβασμό της τάξεως (εδώ από  $n = 2$  σε  $n = 1$ ) προκύπτει γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως και ξέρουμε καλά να λύνουμε τέτοιες εξισώσεις (Ενότητα Α3.4).

Βέβαια η μέθοδος του υποβιβασμού της τάξεως ισχύει ανάλογα και σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις τάξεως ανώτερης της δεύτερας: γενικά τάξεως  $n$ . Εκεί όμως δεν έχει αποτελεσματικότητα, γιατί δε μπορούμε γενικά να λύσουμε τη γραμμική διαφορική εξίσωση που προκύπτει, η οποία είναι τάξεως υποβιβασμένης κατά μονάδα (τάξεως  $n - 1$ ) και γενικά παρουσιάζει και αυτή σοβαρές δυσκολίες στην επίλυσή της. Πολύ καλύτερη μέθοδος, αλλά κυρίως για γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές, είναι η μέθοδος της μεταβολής των παραμέτρων. Αυτή θα την εξετάσουμε σε επόμενη ενότητα αυτού του Κεφαλαίου Α5: στην Ενότητα Α5.9.

### A5.5. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ

#### A5.5.1. Η βασική αρχή της μεθόδου της εκθετικής αντικατάστασης

Η μέθοδος της εκθετικής αντικατάστασης είναι μια πάρα πολύ απλή και αποτελεσματική μέθοδος για την επίλυση ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς (όχι μεταβλητούς) συντελεστές. Την είδαμε ήδη στην Παράγραφο Α3.4.4 του Κεφαλαίου Α3 για την επίλυση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως πρώτης τάξεως με σταθερούς συντελεστές:

$$ay'(x) + by(x) = 0. \tag{5.5.1}$$

Εκεί απλά δοκιμάσαμε λύση της εκθετικής μορφής  $y_0(x) = e^{\mu x}$  (με το  $\mu$  σταθερά) και οδηγηθήκαμε στην τιμή  $\mu = -b/a$  και τελικά στη γενική λύση

$$y_h(x) = Ce^{-bx/a} \tag{5.5.2}$$

της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως (5.5.1).

Στην ενότητα αυτή απλά θα γενικεύσουμε τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης της Παραγράφου Α3.4.4 σε ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές ανώτερης τάξεως της μορφής

$$k_n y^{(n)}(x) + k_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + k_1 y'(x) + k_0 y(x) = 0 \tag{5.5.3}$$

με τους συντελεστές  $k_n, k_{n-1}, \dots, k_1, k_0$  σταθερούς (και όχι μεταβλητούς). Η μέθοδος της εκθετικής αντικατάστασης δεν είναι εφαρμόσιμη σε καμία περίπτωση διαφορικών εξισώσεων με μη σταθερούς (με μεταβλητούς) συντελεστές. Γιατί άραγε συμβαίνει αυτό;

Η μέθοδος της εκθετικής αντικατάστασης βασίζεται στην υπόθεση ότι είναι δυνατόν να υπάρξει μερική λύση της πιο πάνω γραμμικής διαφορικής εξισώσεως (5.5.3) της εκθετικής μορφής

$$y_0(x) = e^{\mu x} \tag{5.5.4}$$

με το  $\mu$  πάλι σταθερά που πρέπει να προσδιορισθεί. Για την εκθετική συνάρτηση  $e^x$  γνωρίζουμε όμως ότι οι παράγωγοί της (κάθε τάξεως) είναι και αυτές ίσες με  $e^x$ . Άρα για την παραπάνω συνάρτηση  $y_0(x) = e^{\mu x}$  που δοκιμάζουμε, όλες οι παράγωγοί της θα είναι και αυτές εκθετικής μορφής, αλλά πολλαπλασιασμένες επί μία δύναμη της σταθεράς  $\mu$ . Συγκεκριμένα θα έχουμε

$$y_0(x) = e^{\mu x} \implies y_0'(x) = \mu e^{\mu x} \implies y_0''(x) = \mu^2 e^{\mu x} \text{ και γενικά } y_0^{(m)}(x) = \mu^m e^{\mu x} \tag{5.5.5}$$

με  $m = 1, 2, 3, \dots$

Και τί ακριβώς πετυχαίνουμε έτσι; Μα να έχουμε όλες τις παραγώγους  $y_0^{(k)}(x)$  της συναρτήσεώς μας  $y_0(x) = e^{\mu x}$  ακριβώς της ίδιας εκθετικής μορφής, πολλαπλασιασμένες όμως επί τη σταθερά  $\mu^k$ . Και μετά; Μετά αντικαθιστούμε τη δοκιμαστική-βοηθητική αυτή συνάρτηση  $y_0(x) = e^{\mu x}$  και όλες τις παραγώγους της  $y_0^{(k)}(x)$  μέχρι και  $n$ -τάξεως στην ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές (5.5.3) που επιδιώκουμε να επιλύσουμε. Τότε θα πάρουμε τη σχέση

$$k_n \mu^n e^{\mu x} + k_{n-1} \mu^{n-1} e^{\mu x} + \dots + k_1 \mu e^{\mu x} + k_0 e^{\mu x} = 0. \tag{5.5.6}$$

Είναι βέβαια προφανές ότι η εκθετική συνάρτηση  $e^{\mu x}$  που παρουσιάζεται σε όλους (δηλαδή και στους  $n + 1$ ) όρους του αριστερού μέλους μπορεί να βγει κοινός παράγοντας στο αριστερό μέλος. Έτσι παίρνουμε τη σχέση

$$(k_n \mu^n + k_{n-1} \mu^{n-1} + \dots + k_1 \mu + k_0) e^{\mu x} = 0 \implies k_n \mu^n + k_{n-1} \mu^{n-1} + \dots + k_1 \mu + k_0 = 0, \tag{5.5.7}$$

γιατί δεν είναι δυνατόν να μηδενίζεται η εκθετική συνάρτηση  $e^{\mu x}$  στο αριστερό μέλος της πρώτης εξίσωσης (5.5.7). Άρα πρέπει οπωσδήποτε να μηδενίζεται το πολυώνυμο

$$p_n(\mu) \equiv k_n \mu^n + k_{n-1} \mu^{n-1} + \dots + k_1 \mu + k_0 \quad (5.5.8)$$

στο αριστερό μέλος της πρώτης ή της δεύτερης εξίσωσης (5.5.7).

Το βοηθητικό αυτό πολυώνυμο  $p_n(\mu)$  καλείται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (5.5.3). Επίσης η σχετική δεύτερη εξίσωση (5.5.7) για το μηδενισμό του

$$p_n(\mu) \equiv k_n \mu^n + k_{n-1} \mu^{n-1} + \dots + k_1 \mu + k_0 = 0 \quad (5.5.9)$$

καλείται **χαρακτηριστική εξίσωση** της ίδιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης  $n$ -τάξεως (5.5.3).

Μέχρι στιγμής λοιπόν έχουμε αναγάγει την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές (5.5.3), την επαναλαμβάνουμε

$$k_n y^{(n)}(x) + k_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + k_1 y'(x) + k_0 y(x) = 0 \quad (5.5.10)$$

στη χαρακτηριστική εξίσωση (5.5.9) ως προς τη σταθερά  $\mu$  στην εκθετική μας αντικατάσταση  $y_0(x) = e^{\mu x}$  της σχέσεως (5.5.4).

Μπορούμε μάλιστα να παρατηρήσουμε ότι με τη χρήση του διαφορικού τελεστή  $D \equiv d/dx$  (δηλαδή του τελεστή της παραγωγίσεως, εδώ ως προς  $x$ ), η γραμμική διαφορική εξίσωση (5.5.10) γράφεται και στην απόλυτα ισοδύναμη μορφή της

$$L[y] := (k_n D^n + k_{n-1} D^{n-1} + \dots + k_1 D + k_0)y = k_n D^n y + k_{n-1} D^{n-1} y + \dots + k_1 D y + k_0 y = 0. \quad (5.5.11)$$

Στη μορφή αυτή μάλιστα  $L[y] = 0$  της διαφορικής μας εξίσωσης (5.5.10) χρησιμοποιήσαμε και το γραμμικό διαφορικό τελεστή

$$L := k_n D^n + k_{n-1} D^{n-1} + \dots + k_1 D + k_0. \quad (5.5.12)$$

Ο γραμμικός αυτός διαφορικός τελεστής  $L = L(D)$ , μόλις εφαρμοσθεί πάνω στην άγνωστη συνάρτησή μας  $y = y(x)$ , δίνει τη γραμμική διαφορική εξίσωση  $L[y] = 0$  που μελετάμε, εδώ με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως  $y_0(x) = e^{\mu x}$ . Στο σημείο αυτό μπορούμε να κάνουμε μια πάρα πολύ σημαντική παρατήρηση.

► **Παρατήρηση Α5.3:** Μιλώντας τυπικά, η χαρακτηριστική εξίσωση (5.5.9) της διαφορικής εξίσωσης (5.5.10) θα μπορούσε (τυπικά επαναλαμβάνουμε) να θεωρηθεί ότι προέρχεται από τη διαφορική αυτή εξίσωση στη μορφή της (5.5.11) (με τη χρήση του διαφορικού τελεστή  $D \equiv d/dx$ ). Προς το σκοπό αυτό απλά θέτουμε τη σταθερά  $\mu$  της εκθετικής αντικαταστάσεως  $y_0(x) = e^{\mu x}$  στη θέση του διαφορικού τελεστή  $D$ , δηλαδή  $D \rightarrow \mu$ , και επίσης παραλείπουμε την άγνωστη συνάρτηση  $y = y(x)$ . Εντούτοις η πραγματικότητα είναι βέβαια ότι η εξίσωση (5.5.11) είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση  $n$ -τάξεως με άγνωστη συνάρτηση την  $y = y(x)$ , ενώ αντίθετα η χαρακτηριστική εξίσωση (5.5.9) είναι μια πολυωνυμική αλγεβρική εξίσωση  $n$ -βαθμού με άγνωστο τη σταθερά  $\mu$  της εκθετικής αντικαταστάσεως  $y_0(x) = e^{\mu x}$ .

Κι εδώ που φθάσαμε τώρα; Εδώ απλά πρέπει να λύσουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση (5.5.9) ως προς τη σταθερά  $\mu$  της εκθετικής αντικαταστάσεως  $y_0(x) = e^{\mu x}$  προσδιορίζοντας έτσι τις  $n$  συνολικά ρίζες της  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  (απλές ή πολλαπλές). Εάν η τάξη  $n$  της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (5.5.10) ή (5.5.11) είναι  $n = 1$  ή  $n = 2$ , η ρίζα (για  $n = 1$ ) ή οι δύο ρίζες (για  $n = 2$ ) της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $p_n(\mu) = 0$  προσδιορίζονται άμεσα. Για  $n = 3$  αυτό είναι πολύ πιο δύσκολο και για  $n = 4$  γενικά εξαιρετικά δύσκολο. Για  $n \geq 5$  συνήθως αυτό είναι αδύνατο. Με τη χρήση όμως αριθμητικών μεθόδων ή/και του υπολογιστή μπορούμε να λύσουμε τουλάχιστον προσεγγιστικά τη χαρακτηριστική εξίσωση (5.5.9) που αντιστοιχεί στη διαφορική εξίσωση (5.5.10).

Έχουμε έτσι προσδιορίσει (με κλειστό τύπο ή έστω προσεγγιστικά) τις  $n$  ρίζες  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  της χαρακτηριστικής εξισώσεως  $p_n(\mu) = 0$ , ισοδύναμα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου  $p_n(\mu)$ . Άρα σε γενικές γραμμές γνωρίζουμε τον εκθέτη  $\mu$  στην εκθετική αντικατάσταση  $y_0(x) = e^{\mu x}$  που υιοθετήσαμε στη σχέση (5.5.4). Υποθέτουμε μάλιστα ότι η γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές (5.5.10) ή (5.5.11) είναι πραγματική, έχει δηλαδή  $n + 1$  πραγματικούς συντελεστές: τους  $k_n, k_{n-1}, \dots, k_1, k_0$ . Προφανώς τότε και η χαρακτηριστική εξίσωση (5.5.9) θα είναι και αυτή πραγματική με τους ίδιους μάλιστα συντελεστές. Στο σημείο αυτό είναι σκόπιμο, μάλλον αναγκαίο να διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις ριζών της χαρακτηριστικής εξισώσεως (5.5.9):  $p_n(\mu) = 0$  με  $n$ , υπενθυμίζουμε, την τάξη της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως (5.5.10) ή (5.5.11).

**A5.5.2. Περίπτωση απλών πραγματικών ριζών**

Πρόκειται για την υπολογιστικά πιο ευνοϊκή περίπτωση. Όλες οι ρίζες  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  της χαρακτηριστικής εξισώσεως  $p_n(\mu) = 0$  (ισοδύναμα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου  $p_n(\mu)$  σ' αυτήν τη χαρακτηριστική εξίσωση) είναι πραγματικές (και οι  $n$ ) και μάλιστα διαφορετικές μεταξύ τους: απλές (όχι πολλαπλές) ρίζες: και οι  $n$  αυτές ρίζες έχουν πολλαπλότητα 1.

Στην παρούσα τόσο απλή περίπτωση από την εκθετική αντικατάσταση  $y_0(x) = e^{\mu x}$  είναι προφανές ότι στις  $n$  διαφορετικές ρίζες  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  της χαρακτηριστικής εξισώσεως  $p_n(\mu) = 0$  της γραμμικής διαφορικής εξισώσεως (5.5.10) θα αντιστοιχούν οι  $n$  διαφορετικές λύσεις

$$y_1(x) = e^{\mu_1 x}, \quad y_2(x) = e^{\mu_2 x}, \quad \dots, \quad y_n(x) = e^{\mu_n x}. \tag{5.5.13}$$

Επιπλέον, όπως ήδη γνωρίζουμε από την Παράγραφο A5.3.2, σε μια ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση, όπως είναι εδώ η εξίσωση (5.5.10), ο γραμμικός συνδυασμός οποιωνδήποτε  $m$  λύσεων της είναι και αυτός λύση της ίδιας διαφορικής εξισώσεως. Επομένως στην περίπτωση μας (με  $m = n$ ) ο γραμμικός συνδυασμός  $y_h(x)$  των  $n$  μερικών λύσεων (5.5.13)

$$y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) = \sum_{k=1}^n C_k y_k(x) = \sum_{k=1}^n C_k e^{\mu_k x} \tag{5.5.14}$$

(με τα σύμβολα  $C_1, C_2, \dots, C_n$  να δηλώνουν αυθαίρετες σταθερές) θα είναι επίσης λύση της ίδιας γραμμικής διαφορικής εξισώσεως (5.5.10).

Και ένα βήμα ακόμη παραπέρα! Εδώ έχουμε υποθέσει ότι υπάρχουν  $n$  διαφορετικές (απλές) ρίζες  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  της χαρακτηριστικής εξισώσεως  $p_n(\mu) = 0$  της διαφορικής εξισώσεως (5.5.10). Άρα υπάρχουν και  $n$  διαφορετικές σταθερές  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  στους εκθέτες των μερικών λύσεων  $y_1(x) = e^{\mu_1 x}, y_2(x) = e^{\mu_2 x}, \dots, y_n(x) = e^{\mu_n x}$  στις σχέσεις (5.5.13). Τότε μέσω της ορίζουσας Wronski, που προκύπτει διάφορη του μηδενός,

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n] \equiv W[e^{\mu_1 x}, e^{\mu_2 x}, \dots, e^{\mu_n x}] \neq 0, \tag{5.5.15}$$

για τις  $n$  διαφορετικές αυτές ρίζες  $\mu_k$  μπορεί να αποδειχθεί ότι και οι αντίστοιχες  $n$  μερικές λύσεις  $y_k(x) = e^{\mu_k x}$  θα είναι γραμμικά ανεξάρτητες σε οποιοδήποτε διάστημα  $(a, b)$ .

Τελικά τώρα θα αποδείξουμε ότι η λύση  $y_h(x)$  στη σχέση (5.5.14) της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως με σταθερούς συντελεστές (5.5.10), την επαναλαμβάνουμε ξανά

$$k_n y^{(n)}(x) + k_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + k_1 y'(x) + k_0 y(x) = 0, \tag{5.5.16}$$

είναι η γενική της λύση. Πράγματι η λύση αυτή  $y_h(x)$  περιέχει  $n$  αυθαίρετες σταθερές  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Εντούτοις δεν θα αρκούσε αυτό, εάν οι μερικές λύσεις  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  που υπεισέρχονται στο γραμμικό συνδυασμό (5.5.14) δεν ήσαν και γραμμικά ανεξάρτητες. Εδώ όμως είναι γραμμικά ανεξάρτητες, όπως προαναφέραμε, επειδή έχουν ορίζουσα Wronski διάφορη του μηδενός,  $W[y_1, y_2, \dots, y_n] \neq 0$ , και το δηλώσαμε ρητά αυτό στη σχέση (5.5.15), αν και δεν το αποδείξαμε.

Επομένως η λύση  $y_h(x)$  στη σχέση (5.5.14) όχι μόνο περιέχει  $n$  αυθαίρετες σταθερές  $C_k$ , αλλά επιπρόσθετα είναι κατάλληλη και για να ικανοποιήσει τις  $n$  αρχικές συνθήκες

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (5.5.17)$$

σε ένα σημείο  $x_0$  του διαστήματος  $(a, b)$  που μας ενδιαφέρει. Για οποιοσδήποτε μάλιστα αρχικές τιμές  $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$  των αρχικών αυτών συνθηκών. Ναι, πραγματικά ισχύει αυτό, απλά επειδή οι ίδιες αρχικές συνθήκες (5.5.17) γράφονται με βάση τη σχέση (5.5.14) ορισμού της λύσεως  $y_h(x)$  στη μορφή

$$\begin{aligned} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) &= y_0, \\ C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) + \dots + C_n y'_n(x_0) &= y'_0, \\ &\vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (5.5.18)$$

Πρόκειται για ένα γενικά μη ομογενές σύστημα  $n$  γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων που με τη λύση του θα μας επιτρέψει τον προσδιορισμό των σταθερών  $C_1, C_2, \dots, C_n$  στη συνάρτηση-λύση  $y_h(x)$  της σχέσεως (5.5.14), έτσι ώστε να ικανοποιούνται και οι  $n$  αρχικές συνθήκες (5.5.17). Αλλά η ορίζουσα των συντελεστών των  $n$  αγνώστων  $C_k$  στο σύστημα αυτό (5.5.18) είναι απλά η ορίζουσα Wronski  $W$  των  $n$  συναρτήσεων  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  στο σημείο  $x = x_0$ . Τούτη όμως η ορίζουσα Wronski είναι διάφορη του μηδενός, όπως ήδη παρατηρήσαμε. Άρα το σύστημα των  $n$  γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (5.5.18) έχει μία και μόνο μία λύση  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Κατά συνέπεια η συνάρτηση  $y_h(x)$  στο γραμμικό συνδυασμό (5.5.14) έχει τη δυνατότητα να ικανοποιήσει και τις  $n$  αρχικές συνθήκες (5.5.17). Με τον τρόπο αυτό μπορεί να μετατραπεί στη λύση  $y_p(x)$  του προβλήματος αρχικών τιμών που αποτελείται από τη διαφορική εξίσωση (5.5.16) και τις  $n$  αρχικές συνθήκες (5.5.17). Υπ' αυτές τις συνθήκες η λύση  $y_h(x)$  στο γραμμικό συνδυασμό (5.5.14) είναι στ' αλήθεια η γενική λύση  $y_g(x)$  της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές (5.5.16):  $y_h(x) = y_g(x)$ .

Ας προχωρήσουμε τώρα και στην πρακτική επίδειξη της παρούσας μεθόδου της εκθετικής αντικαταστάσεως  $y_0(x) = e^{\mu x}$  σε δύο σχετικά παραδείγματα και σε μία εφαρμογή. Σημειώνουμε ότι στο Παράδειγμα A3.7 στην Παράγραφο A3.4.4 είχαμε κάνει μια πρώτη εφαρμογή της μεθόδου της εκθετικής αντικαταστάσεως  $y_0(x) = e^{\mu x}$  σε μια απλή ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές πρώτης τάξεως. Εδώ τα δύο παραδείγματα και η εφαρμογή που θα παραθέσουμε θα αφορούν σε αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις, αλλ' ανωτέρας τάξεως.

▼ **Παράδειγμα A5.5:** Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0 \iff D^2 y - Dy - 6y = 0 \iff (D^2 - D - 6)y = 0 \quad (5.5.19)$$

με  $y = y(x)$  και  $D \equiv d/dx$  το σχετικό διαφορικό τελεστή  $D$ . Προφανώς πρόκειται για μια ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως και με σταθερούς συντελεστές: τους 1, -1 και -6. Άρα είναι εφαρμόσιμη η παρούσα μέθοδος της εκθετικής αντικαταστάσεως  $y_0(x) = e^{\mu x}$  για την εύρεση λύσεως εκθετικής μορφής της διαφορικής αυτής εξίσωσης. Υπολογίζουμε εύκολα και τις δύο πρώτες παραγώγους της εκθετικής συναρτήσεως  $y_0(x) = e^{\mu x}$  και έχουμε

$$y_0(x) = e^{\mu x} \implies y'_0(x) = \mu e^{\mu x} \implies y''_0(x) = \mu^2 e^{\mu x}. \quad (5.5.20)$$

Αντικαθιστώντας τώρα την εκθετική συνάρτηση  $y_0(x) = e^{\mu x}$  και τις δύο αυτές παραγώγους της στην ίδια τη διαφορική εξίσωση (5.5.19), παίρνουμε

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0 \implies \mu^2 e^{\mu x} - \mu e^{\mu x} - 6e^{\mu x} = 0 \implies (\mu^2 - \mu - 6)e^{\mu x} = 0. \quad (5.5.21)$$

Επειδή μάλιστα η εκθετική συνάρτηση  $e^{\mu x}$  δε μηδενίζεται ποτέ, αναγκαστικά πρέπει να μηδενίζεται το χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $p_2(\mu) = \mu^2 - \mu - 6$ , δηλαδή να ισχύει η χαρακτηριστική εξίσωση

$$p_2(\mu) = \mu^2 - \mu - 6 = 0. \quad (5.5.22)$$

Πολύ εύκολα προσδιορίζονται οι δύο ρίζες  $\mu_1$  και  $\mu_2$  της δευτεροβάθμιας αυτής χαρακτηριστικής εξίσωσης με βάση το σχετικό τύπο για δευτεροβάθμιες αλγεβρικές εξισώσεις. Προκύπτει

$$\mu_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \implies \mu_1 = 3 \text{ και } \mu_2 = -2. \quad (5.5.23)$$

Άρα η εκθετική αντικατάσταση  $y_0(x) = e^{\mu x}$  που υιοθετήθηκε μας δίνει τώρα τις δύο λύσεις

$$y_1(x) = e^{\mu_1 x} = e^{3x}, \quad y_2(x) = e^{\mu_2 x} = e^{-2x}. \quad (5.5.24)$$

Πρόκειται για δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της πιο πάνω ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές (5.5.19), αφού  $\mu_1 = 3 \neq \mu_2 = -2$ . Άρα η γενική λύση της ίδιας διαφορικής εξίσωσης (5.5.19) θα έχει τη μορφή

$$y_g(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}. \quad (5.5.25)$$

Η επαλήθευση της ορθότητας της λύσεως αυτής  $y_g(x)$  είναι πολύ εύκολη με τον υπολογισμό των δύο πρώτων παραγώγων της

$$y_g(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x} \implies y'_g(x) = 3C_1 e^{3x} - 2C_2 e^{-2x} \implies y''_g(x) = 9C_1 e^{3x} + 4C_2 e^{-2x} \quad (5.5.26)$$

και αντικαταστάσεως και της λύσεως  $y_g(x)$  και των παραγώγων αυτών  $y'_g(x)$  και  $y''_g(x)$  στη διαφορική εξίσωση (5.5.19). Έτσι προκύπτει

$$\begin{aligned} y''_g(x) - y'_g(x) - 6y_g(x) &= (9C_1 e^{3x} + 4C_2 e^{-2x}) - (3C_1 e^{3x} - 2C_2 e^{-2x}) - 6(C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}) \\ &= (9 - 3 - 6)C_1 e^{3x} + (4 + 2 - 6)C_2 e^{-2x} = 0 \cdot e^{3x} + 0 \cdot e^{-2x} = 0. \end{aligned} \quad (5.5.27)$$

Έτσι επαληθεύσαμε και την ορθότητα της γενικής λύσεως  $y_g(x)$  που βρήκαμε.

Τελειώνοντας το παράδειγμα αυτό, ας σημειώσουμε επίσης ότι το πιο πάνω χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $p_2(\mu) = \mu^2 - \mu - 6$  προκύπτει τυπικά αντικαθιστώντας με  $\mu$  το διαφορική τελεστή  $D$  ( $D \rightarrow \mu$ ) στο γραμμικό διαφορικό τελεστή  $L = D^2 - D - 6$  της διαφορικής μας εξίσωσης (5.5.19). ▲

▼ **Παράδειγμα Α5.6:** Θεωρούμε τώρα τη διαφορική εξίσωση τρίτης τάξεως

$$y'''(x) + 8y''(x) + 15y'(x) = 0. \quad (5.5.28)$$

Και η διαφορική αυτή εξίσωση είναι ομογενής και γραμμική και έχει μάλιστα σταθερούς συντελεστές: τους 1, 8 και 15. Άρα η μέθοδος της εκθετικής αντικαταστάσεως  $y_0(x) = e^{\mu x}$  είναι και πάλι εφαρμόσιμη. Προφανώς έχουμε

$$y_0(x) = e^{\mu x} \implies y'_0(x) = \mu e^{\mu x} \implies y''_0(x) = \mu^2 e^{\mu x} \implies y'''_0(x) = \mu^3 e^{\mu x} \quad (5.5.29)$$

και η διαφορική μας εξίσωση (5.5.28) παίρνει τη μορφή

$$\mu^3 e^{\mu x} + 8\mu^2 e^{\mu x} + 15\mu e^{\mu x} = 0 \implies (\mu^3 + 8\mu^2 + 15\mu) e^{\mu x} = 0. \quad (5.5.30)$$

Επομένως πρέπει η σταθερά  $\mu$  στον εκθέτη  $e^{\mu x}$  να είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$p_3(\mu) := \mu^3 + 8\mu^2 + 15\mu = 0. \quad (5.5.31)$$

Εύκολα προσδιορίζουμε τις τρεις σχετικές ρίζες, αφού

$$p_3(\mu) = \mu(\mu^2 + 8\mu + 15) = 0, \quad \text{οπότε} \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = -3, \quad \mu_3 = -5. \quad (5.5.32)$$

Πρόκειται για τρεις απλές πραγματικές ρίζες. Άρα θα έχουμε τις τρεις γραμμικά ανεξάρτητες μερικές λύσεις

$$y_1(x) = e^{0x} = 1, \quad y_2(x) = e^{-3x}, \quad y_3(x) = e^{-5x}. \quad (5.5.33)$$

Η γενική λύση  $y_g(x)$  θα είναι βέβαια ο γραμμικός συνδυασμός των τριών αυτών μερικών λύσεων  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  και  $y_3(x)$ , δηλαδή

$$y_g(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x) = C_1 + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{-5x} \quad (5.5.34)$$

με τρεις αυθαίρετες σταθερές: τις  $C_1$ ,  $C_2$  και  $C_3$ .

Μπορούμε επίσης να επαληθεύσουμε με τη χρήση της σχετικής ορίζουσας Wronski  $W$  ότι οι τρεις αυτές μερικές λύσεις  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  και  $y_3(x)$  είναι και γραμμικά ανεξάρτητες. Άρα, σύμφωνα με όσα έχουμε εκθέσει προηγουμένως, η παραπάνω λύση  $y_g(x)$  είναι στ' αλήθεια η γενική λύση της παρούσας διαφορικής εξίσωσης (5.5.28). Θα παραλείψουμε τη σχετική επαλήθευση τόσο για οικονομία χώρου όσο και γιατί δεν παρουσιάζει κανένα ουσιαστικό ενδιαφέρον: είναι μια τετριμμένη εργασία και σε όσο βαθμό μπορούμε ας την αναθέτουμε στον υπολογιστή. Μάλιστα τα προγράμματα συμβολικών υπολογισμών (όλα αυτά τα προγράμματα: *Mathematica*, *Maxima*, *Maple*, *Reduce*, κλπ.) είναι ικανότατα στην εκτέλεση και αλγεβρικών πράξεων και παραγωγίσεων! Αυτό συμβαίνει, επειδή και οι αλγεβρικές πράξεις και οι παραγωγίσεις διέπονται από απλούς κανόνες.

Αντίθετα η ολοκλήρωση και η επίλυση διαφορικών εξισώσεων δε διέπονται από απλούς κανόνες και χρειάζονται ειδικές γνώσεις, εμπειρία και μακρόχρονο προγραμματισμό ακόμη και για λογικής δυσκολίας προβλήματα ολοκληρώσεως και επιλύσεως διαφορικών εξισώσεων. ▲

▼ **Εφαρμογή Α5.4 (Δυναμική):** Ας αναφερθούμε και πάλι στο πρόβλημα της κινήσεως υλικού σημείου  $M$  μάζας  $m$  μέσα σε ημιάπειρο ευθύγραμμο σωλήνα που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  ( $\omega \neq 0$ ) γύρω από το σταθερό (ακίνητο) άκρο του  $r = 0$ . Το πρόβλημα αυτό ήδη το αντιμετωπίσαμε (ελλιπώς βέβαια) στην Εφαρμογή Α5.2 της Ενότητας Α5.1. Εκεί, παίρνοντας υπόψη το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα και τη φυγόκεντρη δύναμη  $F = m\omega^2 r$  που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο  $M$ , καταλήξαμε στη διαφορική εξίσωση (5.1.13), την επαναλαμβάνουμε και εδώ

$$\ddot{r}(t) - \omega^2 r(t) = 0. \quad (5.5.35)$$

Στη διαφορική αυτή εξίσωση το σύμβολο  $t$  δηλώνει το χρόνο και η άγνωστη συνάρτηση  $r = r(t)$  τη θέση του υλικού σημείου  $M$  ως προς το σταθερό (ακίνητο) σημείο  $r = 0$  του περιστρεφόμενου ημιάπειρου σωλήνα. Πρόκειται για ένα απλό και κλασικό πρόβλημα στη Δυναμική του Υλικού Σημείου, το οποίο φαίνεται να αποτελεί επίσης και μια θαυμάσια εφαρμογή στην παρούσα παράγραφο, που αφορά σε απλές πραγματικές ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $p_n(\mu) = 0$ .

Στην εφαρμογή αυτή ζητούνται: (α) Οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης (5.5.35). (β) Η γενική λύση της  $r_g(t)$  με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως. (γ) Η μετατροπή της γενικής αυτής λύσεως  $r_g(t)$  από πραγματική εκθετική μορφή σε υπερβολική μορφή. (δ) Η λύση  $r_p(t)$  του σχετικού προβλήματος αρχικών τιμών με αρχικές συνθήκες τις

$$r(0) = r_0, \quad \dot{r}(0) = v_0, \quad (5.5.36)$$

δηλαδή την αρχική θέση  $r_0$  και την αρχική ταχύτητα  $v_0$  του υλικού σημείου  $M$ . (ε) Η επαλήθευση της λύσεως  $r_p(t)$ .



**Λύση:** (α) Εύκολα διαπιστώνουμε ότι πρόκειται για (i) συνήθη διαφορική εξίσωση, (ii) δευτέρας τάξεως, (iii) πρώτου βαθμού, (iv) γραμμική, (v) ομογενή, (vi) με σταθερούς συντελεστές (τους 1 και  $-\omega^2$ ), (vii) με άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) τη θέση  $r = r(t)$  κατά μήκος του περιστρεφόμενου ημιάπειρου ευθύγραμμου σωλήνα και (viii) με ανεξάρτητη μεταβλητή το χρόνο  $t$ .

(β) Αφού πρόκειται για ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές, όπως είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα (α), μπορούμε βέβαια να εφαρμόσουμε τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης, για να προσδιορίσουμε τη λύση της. Άρα δεχόμαστε λύση της μορφής  $r_0(t) = e^{\mu t}$  και βρίσκουμε και τις δύο πρώτες παραγώγους της:

$$r_0(t) = e^{\mu t} \implies \dot{r}(t) = \mu e^{\mu t} \implies \ddot{r}(t) = \mu^2 e^{\mu t}. \quad (5.5.37)$$

Με την εκθετική αυτή αντικατάσταση η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση (5.5.35) παίρνει τώρα τη μορφή

$$\mu^2 e^{\mu t} - \omega^2 e^{\mu t} = (\mu^2 - \omega^2) e^{\mu t} = 0. \quad (5.5.38)$$

Επειδή μάλιστα ο εκθετικός παράγοντας  $e^{\mu t}$  δε μηδενίζεται ποτέ, για να ισχύει εκ ταυτότητος η σχέση αυτή (5.5.38), θα πρέπει να μηδενίζεται το χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $p_2(\mu)$

$$p_2(\mu) = \mu^2 - \omega^2 = 0. \quad (5.5.39)$$

Άρα η σταθερά  $\mu$  στον εκθέτη της πιθανής εκθετικής λύσεως  $r_0(t) = e^{\mu t}$  που δοκιμάζουμε θα είναι ρίζα της πιο πάνω χαρακτηριστικής εξισώσεως (5.5.39), οπότε

$$p_2(\mu) = \mu^2 - \omega^2 = (\mu - \omega)(\mu + \omega) = 0 \implies \mu_1 = \omega \quad \text{και} \quad \mu_2 = -\omega. \quad (5.5.40)$$

Έχουμε λοιπόν τώρα διαθέσιμες τις δύο ρίζες  $\mu_1 = \omega$  και  $\mu_2 = -\omega$  της χαρακτηριστικής εξισώσεως (5.5.39), ισοδύναμα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου  $p_2(\mu) = \mu^2 - \omega^2$ . Μάλιστα στην παρούσα διαφορική εξίσωση (5.5.35) οι δύο αυτές ρίζες  $\mu_1 = \omega$  και  $\mu_2 = -\omega$  είναι πραγματικές και διαφορετικές μεταξύ τους, είναι δηλαδή πραγματικές και απλές ρίζες. Επομένως οι δύο γραμμικά ανεξάρτητες μερικές λύσεις της διαφορικής εξισώσεως (5.5.35) θα είναι οι λύσεις

$$r_1(t) = e^{\omega t}, \quad r_2(t) = e^{-\omega t} \quad (5.5.41)$$

(η πρώτη με  $\mu = \mu_1 = \omega$  και η δεύτερη με  $\mu = \mu_2 = -\omega$  στον εκθέτη). Κατά συνέπεια η σχετική γενική λύση  $r_g(t)$  της ίδιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως (5.5.35) θα έχει τη μορφή

$$r_g(t) = C_1 r_1(t) + C_2 r_2(t) = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}. \quad (5.5.42)$$

Είναι πάρα πολύ εύκολη η επαλήθευση της λύσεως αυτής  $r_g(t)$ , η οποία περιέχει μάλιστα και τις δύο αυθαίρετες σταθερές  $C_1$  και  $C_2$ . Επιπλέον η ορίζουσα Wronski των δύο συναρτήσεων  $r_1(t) = e^{\omega t}$  και  $r_2(t) = e^{-\omega t}$  είναι συνεχώς μη μηδενική, γιατί

$$W[r_1, r_2] \equiv W[e^{\omega t}, e^{-\omega t}] \equiv W(t) = \begin{vmatrix} e^{\omega t} & e^{-\omega t} \\ \omega e^{\omega t} & -\omega e^{-\omega t} \end{vmatrix} = -\omega - \omega = -2\omega \neq 0, \quad (5.5.43)$$

αφού  $\omega$  είναι η μη μηδενική γωνιακή ταχύτητα του περιστρεφόμενου σωλήνα στο πρόβλημά μας.

(γ) Η πιο πάνω γενική λύση  $r_g(t) = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$  μπορεί εύκολα να μετατραπεί και σε υπερβολική μορφή, δηλαδή σε μορφή με τη χρήση των συναρτήσεων υπερβολικό συνημίτονο (cosh) και υπερβολικό ημίτονο (sinh). Αυτό θα επιτρέψει τη γραφή της με τρόπο ανάλογο με τις τριγωνομετρικές λύσεις σε προβλήματα ταλαντώσεων μηχανικών συστημάτων. (Θα επιλύσουμε ένα τέτοιο πρόβλημα στην Εφαρμογή Α5.5 παρακάτω.) Θα επιτρέψει επίσης τον απλούστερο υπολογισμό της λύσεως του σχετικού προβλήματος αρχικών τιμών (5.5.35) και (5.5.36), το επαναλαμβάνουμε

$$\ddot{r}(t) - \omega^2 r(t) = 0, \quad r(0) = r_0, \quad \dot{r}(0) = v_0. \quad (5.5.44)$$

Η μετατροπή αυτή είναι πολύ εύκολη λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (1.5.6) της Παραγράφου Α1.5.2, δηλαδή ότι

$$e^x = \cosh x + \sinh x, \quad e^{-x} = \cosh x - \sinh x. \quad (5.5.45)$$

Εισάγοντας τις σχέσεις αυτές στη γενική λύση  $r_g(t)$  που προσδιορίσαμε στη σχέση (5.5.42) (εδώ με  $x = \omega t$ ), βρίσκουμε ότι

$$r_g(t) = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} = C_1 (\cosh \omega t + \sinh \omega t) + C_2 (\cosh \omega t - \sinh \omega t). \quad (5.5.46)$$

Άρα

$$r_g(t) = (C_1 + C_2) \cosh \omega t + (C_1 - C_2) \sinh \omega t = D_1 \cosh \omega t + D_2 \sinh \omega t. \quad (5.5.47)$$

Τελικά στην υπερβολική αυτή έκφραση της γενικής λύσεως  $r_g(t)$  χρησιμοποιήθηκαν οι νέες αυθαίρετες σταθερές  $D_1 = C_1 + C_2$  και  $D_2 = C_1 - C_2$ . Είναι πάρα πολύ εύκολη η επαλήθευση της γενικής αυτής λύσεως  $r_g(t)$  σαν λύσεως της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (5.5.35).

(δ) Αυτό που θα κάνουμε τώρα θα είναι να βρούμε και τη λύση  $r_p(t)$  του σχετικού προβλήματος αρχικών τιμών (5.5.44). Προς το σκοπό αυτό θα προσδιορίσουμε τις δύο αυθαίρετες σταθερές  $C_1$  και  $C_2$ , έτσι ώστε να ικανοποιούνται και οι δύο αρχικές συνθήκες  $r(0) = r_0$  και  $\dot{r}(0) = v_0$  στο πρόβλημα αρχικών τιμών (5.5.44).

Πρόκειται για μια πολύ εύκολη εργασία. Χρησιμοποιώντας την υπερβολική μορφή (5.5.47) της γενικής λύσεως  $r_g(t)$ , έχουμε

$$r_g(t) = D_1 \cosh \omega t + D_2 \sinh \omega t \implies \dot{r}_g(t) = \omega D_1 \sinh \omega t + \omega D_2 \cosh \omega t. \quad (5.5.48)$$

Εισάγοντας τώρα τις δύο αρχικές συνθήκες  $r(0) = r_0$  (αρχική θέση) και  $\dot{r}_0 = v_0$  (αρχική ταχύτητα) στις αμέσως πιο πάνω σχέσεις (5.5.48), διαπιστώνουμε αμέσως ότι

$$D_1 \cdot 1 + D_2 \cdot 0 = D_1 = r_0, \quad \omega D_1 \cdot 0 + \omega D_2 \cdot 1 = v_0, \quad \text{οπότε} \quad D_1 = r_0, \quad \omega D_2 = v_0 \quad (5.5.49)$$

και τελικά

$$D_1 = r_0, \quad D_2 = \frac{v_0}{\omega}. \quad (5.5.50)$$

Επομένως η λύση  $r_p(t)$  του προβλήματος αρχικών τιμών (5.5.44) (διαφορική εξίσωση και δύο αρχικές συνθήκες) θα έχει τη μορφή

$$r_p(t) = r_0 \cosh \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sinh \omega t. \quad (5.5.51)$$

(ε) Μας απομένει απλά η επαλήθευση της λύσεως αυτής  $r_p(t)$  του προβλήματος αρχικών τιμών (5.5.44), το επαναλαμβάνουμε

$$\ddot{r}(t) - \omega^2 r(t) = 0, \quad r(0) = r_0, \quad \dot{r}(0) = v_0. \quad (5.5.52)$$

Πρόκειται για μια μερική λύση (ή ειδική λύση) της αρχικής διαφορικής εξίσωσης (5.5.35), η οποία ικανοποιεί όμως και τις αρχικές συνθήκες (5.5.36). Ας προχωρήσουμε στη σχετική επαλήθευση.

Παραγωγίζοντας δύο φορές ως προς  $t$  τη μερική λύση  $r_p(t)$  της σχέσεως (5.5.51), έχουμε

$$\dot{r}_p(t) = \omega r_0 \sinh \omega t + v_0 \cosh \omega t \implies \ddot{r}_p(t) = \omega^2 r_0 \cosh \omega t + \omega v_0 \sinh \omega t. \quad (5.5.53)$$

Εισάγοντας τη λύση  $r_p(t)$  από τη σχέση (5.5.51) και τη δεύτερη παράγωγό της  $\ddot{r}_p(t)$  από τη δεύτερη σχέση (5.5.53) στη διαφορική εξίσωση  $\ddot{r}(t) - \omega^2 r(t) = 0$ , διαπιστώνουμε πάρα πολύ εύκολα την επαλήθευσή της, αφού

$$\ddot{r}_p(t) - \omega^2 r_p(t) = \omega^2 r_0 \cosh \omega t + \omega v_0 \sinh \omega t - \omega^2 \left( r_0 \cosh \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sinh \omega t \right) = 0. \quad (5.5.54)$$

Φυσικά δεν πρέπει να ξεχάσουμε την επαλήθευση και των αρχικών συνθηκών στο πρόβλημα αρχικών τιμών (5.5.52). Πράγματι θέτοντας  $t = 0$  στη λύση (5.5.51) διαπιστώνουμε ότι  $r_p(0) = r_0$ , αφού, όπως ξέρουμε,  $\cosh 0 = 1$  και  $\sinh 0 = 0$ . Εντελώς ανάλογα από την παράγωγο  $\dot{r}_p(t)$  που βρήκαμε στην πρώτη σχέση (5.5.53) διαπιστώνουμε άμεσα ότι  $\dot{r}_p(0) = v_0$ , ξανά γιατί  $\cosh 0 = 1$  και  $\sinh 0 = 0$ . Άρα ολοκληρώθηκε με επιτυχία η επαλήθευση της λύσεως  $r_p(t)$  στη σχέση (5.5.51) του προβλήματος αρχικών τιμών (5.5.52). ▲

► **Παρατήρηση A5.4:** Τονίζουμε ότι κατά την επαλήθευση της λύσεως  $r_p(t)$  ενός προβλήματος αρχικών τιμών θα πρέπει να ελέγχουμε ότι επαληθεύονται τόσο (α) η διαφορική εξίσωση όσο και (β) οι αρχικές συνθήκες. Ανάλογα και σε ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών, αλλ' εκεί με τις συνοριακές συνθήκες στη θέση των αρχικών συνθηκών.

► **Παρατήρηση A5.5:** Η παραπάνω λύση  $r_p(t)$  του προβλήματος αρχικών τιμών (5.5.52) προφανώς αποτελεί ταυτόχρονα και μια μερική λύση της αρχικής μας διαφορικής εξισώσεως (5.5.35), δηλαδή της διαφορικής εξισώσεως  $\ddot{r}(t) - \omega^2 r(t) = 0$  με καθορισμένες πια τις αυθαίρετες σταθερές  $C_1$  και  $C_2$  στη γενική λύση της  $r_g(t)$ . Παρά ταύτα η μερική λύση  $r_p(t)$  της σχέσεως (5.5.51) μπορεί και αυτή να ερμηνευθεί σαν γενική λύση της ίδιας διαφορικής εξισώσεως (5.5.35). Αρκεί οι δύο σταθερές  $r_0$  και  $v_0$  σ' αυτήν να ερμηνευθούν σαν αυθαίρετες σταθερές αντί σαν αρχικές συνθήκες.

### A5.5.3. Περίπτωση απλών συζυγών μιγαδικών ριζών

Γενικά όλες οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις  $n$ -τάξεως του Πολιτικού Μηχανικού είναι πραγματικές και πολύ συχνά και με σταθερούς συντελεστές. Άρα οι αντίστοιχες ομογενείς εξισώσεις είναι της μορφής (5.5.10), την επαναλαμβάνουμε

$$k_n y^{(n)}(x) + k_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + k_1 y'(x) + k_0 y(x) = 0 \tag{5.5.55}$$

με τους συντελεστές  $k_n, k_{n-1}, \dots, k_1, k_0$  σταθερούς, αλλά και πραγματικούς αριθμούς. Επομένως και οι σχετικές χαρακτηριστικές εξισώσεις

$$p_n(\mu) = k_n \mu^n + k_{n-1} \mu^{n-1} + \dots + k_1 \mu + k_0 = 0 \tag{5.5.56}$$

στη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως  $y_0(x) = e^{\mu x}$  θα είναι και αυτές πραγματικές. Στην προηγούμενη Παράγραφο A5.5.2 αναφερθήκαμε αποκλειστικά στην περίπτωση πραγματικών και απλών (δηλαδή διαφορετικών μεταξύ τους) ριζών της χαρακτηριστικής εξισώσεως (5.5.56).

Στην Παράγραφο αυτή A5.5.3 θα αναφερθούμε στην περίπτωση και πάλι απλών (δηλαδή διαφορετικών) ριζών της ίδιας χαρακτηριστικής εξισώσεως (5.5.56). Τώρα όμως θα υποθέσουμε τη δυνατότητα υπάρξεως και μιγαδικών ριζών  $\mu_k = \alpha_k + i\beta_k$  (με  $i = \sqrt{-1}$  τη φανταστική μονάδα, οπότε  $i^2 = -1$ ). Για πραγματικές πολυωνυμικές εξισώσεις, όπως ακριβώς είναι η χαρακτηριστική εξίσωση (5.5.56), η μόνη δυνατότητα υπάρξεως μιγαδικών ριζών  $\mu_k = \alpha_k + i\beta_k$  είναι βέβαια σε ζεύγη συζυγών μιγαδικών αριθμών, π.χ.  $\mu_1 = \alpha + i\beta$  και  $\mu_2 = \alpha - i\beta$ .

Έχοντας υποθέσει και στην παράγραφο αυτή απλές (όχι διπλές και γενικότερα πολλαπλές) ρίζες της χαρακτηριστικής εξισώσεως  $p_n(\mu) = 0$ , δηλαδή ρίζες διαφορετικές μεταξύ τους, ουσιαστικά τίποτε δεν αλλάζει σχετικά με την προηγούμενη παράγραφο εκτός βέβαια από τη δυνατότητα εμφάνισης μιγαδικών εκθετών, π.χ.  $\mu_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ , όπως ήδη αναφέραμε. Τέτοιοι συζυγείς μιγαδικοί εκθέτες  $\mu_{1,2} = \alpha \pm i\beta$  μπορούν να γραφούν απλά στη γενική λύση  $y_g(x)$  με τους εξής δύο όρους:

$$C_1 e^{\mu_1 x} + C_2 e^{\mu_2 x} = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x} \tag{5.5.57}$$

(πιθανότατα μεταξύ και άλλων όρων) με τα  $C_1$  και  $C_2$  αυθαίρετες σταθερές.

Μερικές, λίγες όμως φορές δεν έχουμε πρόβλημα με τη μιγαδική γραφή (5.5.57) δύο όρων που αντιστοιχούν σε δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες  $\mu_{1,2} = \alpha \pm i\beta$  της χαρακτηριστικής εξισώσεως (5.5.56).

Συνήθως όμως προτιμάμε την αντίστοιχη πραγματική γραφή, επειδή έτσι αποφεύγουμε τη φανταστική μονάδα  $i$  ( $i = \sqrt{-1}$ ) και επίσης αποφεύγουμε συζυγείς μιγαδικές τιμές των αυθαίρετων σταθερών  $C_1$  και  $C_2$  σε περιπτώσεις προσδιορισμού τους μέσω αρχικών συνθηκών, που είναι βέβαια γενικά πραγματικές (οι αρχικές συνθήκες) σε ένα πρόβλημα του Πολιτικού Μηχανικού.

Άρα μοναδικό στόχο της παρούσας παραγράφου αποτελεί απλά η επαναγραφή δύο όρων που αντιστοιχούν σε συζυγείς μιγαδικές ρίζες  $\mu_{1,2} = \alpha \pm i\beta$  της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $p_n(\mu) = 0$  σε πραγματική μορφή. Προς το σκοπό αυτό σημειώνουμε την ισχύ του πολύ γνωστού τύπου

$$e^{a+b} = e^a e^b \quad (5.5.58)$$

ακόμη και για μιγαδικούς αριθμούς, κάτι που θα το δούμε καλύτερα στις *Μιγαδικές Συναρτήσεις* στο Μέρος Δ των διδακτικών αυτών βιβλίων: στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙΙ για Πολιτικούς Μηχανικούς. Εδώ όμως θα «δανειστούμε» τη χρήση του τύπου (5.5.58), ο οποίος έτσι κι αλλιώς ισχύει και για πραγματικούς εκθέτες  $a$  και  $b$ , όχι μόνο για μιγαδικούς. Χρησιμοποιώντας επομένως τον τύπο αυτό  $e^{a+b} = e^a e^b$ , μπορούμε να ξαναγράψουμε τους δύο όρους (5.5.57) της γενικής λύσεως  $y_g(x)$  της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές (5.5.55) στην παραπέρα μορφή

$$C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x} = C_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + C_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x} \quad (5.5.59)$$

με  $a = \alpha x$  και  $b = \pm i\beta x$  στον τύπο (5.5.58).

Φυσικά δεν είμαστε ακόμη ευχαριστημένοι, αφού η φανταστική μονάδα  $i = \sqrt{-1}$  συνεχίζει να είναι παρούσα στο δεξιό μέλος της σχέσεως (5.5.59). Ας αποφασίσουμε να τη διώξουμε λοιπόν! Προς το σκοπό αυτό απλά χρησιμοποιούμε τους τύπους του Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x, \quad (5.5.60)$$

τους οποίους αναφέραμε ήδη στην Παράγραφο Α1.5.1 του Κεφαλαίου Α1: τύποι (1.5.3) και (1.5.4) αντίστοιχα, εδώ με  $\beta x$  αντί απλά  $x$ . Οι τύποι αυτοί (που είναι βέβαια και συζυγείς μιγαδικοί μεταξύ τους) μας επιτρέπουν να γράψουμε

$$e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \sin \beta x \quad \text{και επίσης} \quad e^{-i\beta x} = \cos \beta x - i \sin \beta x \quad (5.5.61)$$

στους δύο όρους (5.5.59) της γενικής λύσεως  $y_g(x)$  της διαφορικής μας εξίσωσης (5.5.55) που αντιστοιχούν στο ζεύγος  $\alpha + i\beta$  και  $\alpha - i\beta$  των συζυγών μιγαδικών ριζών  $\mu_{1,2}$  της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $p_n(\mu) = 0$ .

Επομένως οι δύο όροι στο δεξιό μέλος της σχέσεως (5.5.59) μπορούν τώρα να γραφούν και στην ακόλουθη πραγματική εκθετική-τριγωνομετρική μορφή:

$$\begin{aligned} C_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + C_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x} &= C_1 e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) + C_2 e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x) \\ &= (C_1 + C_2) e^{\alpha x} \cos \beta x + i(C_1 - C_2) e^{\alpha x} \sin \beta x \\ &= D_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + D_2 e^{\alpha x} \sin \beta x \\ &= e^{\alpha x} (D_1 \cos \beta x + D_2 \sin \beta x). \end{aligned} \quad (5.5.62)$$

Βέβαια στην πραγματική αυτή μορφή χρησιμοποιήσαμε και τις νέες αυθαίρετες σταθερές

$$D_1 = C_1 + C_2 \quad \text{και} \quad D_2 = i(C_1 - C_2) \quad (5.5.63)$$

στη θέση των αρχικών αυθαίρετων σταθερών  $C_1$  και  $C_2$ . (Αλλά και οι σταθερές  $D_1$  και  $D_2$  είναι φυσικά αυθαίρετες. Απλά έχουν υποκαταστήσει τις  $C_1$  και  $C_2$ .)

Το τελικό συμπέρασμά μας είναι ότι με τη χρήση των τύπων του Euler (5.5.60) μπορέσαμε να απαλλαγούμε από τη φανταστική μονάδα  $i = \sqrt{-1}$  σε περιπτώσεις συζυγών μιγαδικών ριζών  $\mu_{1,2}$  της χαρακτηριστικής εξισώσεως  $p_n(\mu) = 0$  μιας πραγματικής και ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως τάξεως  $n$  με σταθερούς συντελεστές. Υπάρχει επίσης και το πρόσθετο όφελος ότι τώρα οι τελικές σταθερές  $D_1$  και  $D_2$  θα είναι και αυτές πραγματικές (για πραγματικές αρχικές συνθήκες), ενώ οι αρχικές σταθερές  $C_1$  και  $C_2$  θα έπρεπε να ήσαν συζυγείς μιγαδικές. Αυτή ήταν όλη η συμβολή της παρούσας παραγράφου, η οποία συμπεριλαμβάνεται βέβαια στη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως  $y_0(x) = e^{\mu x}$ , εδώ για ζεύγη  $\mu_1 = \alpha + i\beta$  και  $\mu_2 = \alpha - i\beta$  συζυγών μιγαδικών ριζών  $\mu_{1,2}$  της χαρακτηριστικής εξισώσεως  $p_n(\mu) = 0$ .

Ας προχωρήσουμε τώρα σε δύο παραδείγματα και σε δύο εφαρμογές που θα μας επιτρέψουν μια καλύτερη κατανόηση της μεθόδου.

▼ **Παράδειγμα Α5.7:** Για τη διαφορική εξίσωση

$$y''(x) + 4y(x) = 0 \tag{5.5.64}$$

παρατηρούμε ότι είναι μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως με σταθερούς συντελεστές: τους 1 και 4. Άρα είναι εφαρμόσιμη η μέθοδος της εκθετικής αντικαταστάσεως

$$y_0(x) = e^{\mu x} \implies y_0''(x) = \mu^2 e^{\mu x} \implies \mu^2 e^{\mu x} + 4e^{\mu x} = 0 \implies (\mu^2 + 4)e^{\mu x} = 0. \tag{5.5.65}$$

Η μέθοδος αυτή οδηγεί στην αντίστοιχη δευτεροβάθμια χαρακτηριστική εξίσωση

$$\mu^2 + 4 = 0 \text{ με δύο συζυγείς φανταστικές ρίζες } \mu_{1,2} = \pm 2i. \tag{5.5.66}$$

Επομένως η γενική λύση  $y_g(x)$  της διαφορικής αυτής εξισώσεως (5.5.64) θα είναι η ακόλουθη:

$$y_g(x) = C_1 e^{2ix} + C_2 e^{-2ix} = C_1(\cos 2x + i \sin 2x) + C_2(\cos 2x - i \sin 2x) = D_1 \cos 2x + D_2 \sin 2x \tag{5.5.67}$$

σε μιγαδική εκθετική και σε τριγωνομετρική μορφή αντίστοιχα, στην τριγωνομετρική μορφή με  $D_1 = C_1 + C_2$  και  $D_2 = i(C_1 - C_2)$  με τα  $C_1, C_2, D_1$  και  $D_2$  αυθαίρετες σταθερές. ▲

▼ **Παράδειγμα Α5.8:** Για τη διαφορική εξίσωση

$$y'''(x) + 25y'(x) = 0 \tag{5.5.68}$$

παρατηρούμε ότι είναι μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση τρίτης τάξεως με σταθερούς συντελεστές: 1 και 25. Άρα είναι και εδώ εφαρμόσιμη η μέθοδος της εκθετικής αντικαταστάσεως

$$y_0(x) = e^{\mu x} \implies y_0'(x) = \mu e^{\mu x} \implies y_0'''(x) = \mu^3 e^{\mu x} \implies (\mu^3 + 25\mu)e^{\mu x} = 0 \tag{5.5.69}$$

και οδηγεί στην αντίστοιχη τριτοβάθμια χαρακτηριστική εξίσωση

$$\mu^3 + 25\mu = 0 \text{ με ρίζες της τις } \mu_1 = 0 \text{ και } \mu_{2,3} = \pm 5i, \tag{5.5.70}$$

δηλαδή με μία πραγματική ρίζα ( $\mu_1 = 0$ ) και δύο συζυγείς φανταστικές ρίζες ( $\mu_{2,3} = \pm 5i$ ).

Επομένως η γενική λύση  $y_g(x)$  της διαφορικής αυτής εξισώσεως (5.5.68) θα είναι η εξής:

$$y_g(x) = C_1 e^{0x} + C_2 e^{5ix} + C_3 e^{-5ix} = C_1 + C_2 e^{5ix} + C_3 e^{-5ix} \tag{5.5.71}$$

σε μιγαδική εκθετική μορφή με τα  $C_1, C_2$  και  $C_3$  τρεις αυθαίρετες σταθερές και

$$y_g(x) = C_1 + C_2(\cos 5x + i \sin 5x) + C_3(\cos 5x - i \sin 5x) = D_1 + D_2 \cos 5x + D_3 \sin 5x \tag{5.5.72}$$

σε τριγωνομετρική μορφή. Θα ισχύουν βέβαια και οι σχέσεις

$$D_1 = C_1, \quad D_2 = C_2 + C_3, \quad D_3 = i(C_2 - C_3) \quad (5.5.73)$$

για τις τρεις νέες αυθαίρετες σταθερές  $D_1, D_2$  και  $D_3$  στην τριγωνομετρική μορφή της λύσεως. ▲

▼ **Εφαρμογή Α5.5 (Δυναμική και Ταλαντώσεις):** Θεωρούμε το απόλυτα κλασικό και τόσο χρήσιμο για τον Πολιτικό Μηχανικό πρόβλημα των ελεύθερων ταλαντώσεων ενός μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος, π.χ. του γνωστού μας συστήματος υλικού σημείου  $M$  μάζας  $m$  και ελατηρίου  $S$  σταθεράς  $k$  (χωρίς αποσβεστήρα, χωρίς απόσβεση των ταλαντώσεων). Δε θεωρούμε εξωτερική φόρτιση (δύναμη), γι' αυτό και δικαιούμαστε να μιλάμε για ελεύθερες ταλαντώσεις με ειδική περίπτωση τους (χωρίς αρχικές συνθήκες) τις ιδιοταλαντώσεις, τους τρόπους ταλαντώσεως. Στο τόσο σημαντικό αυτό πρόβλημα του Πολιτικού Μηχανικού ισχύει η εξίσου γνωστή διαφορική εξίσωση

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0 \implies \ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0 \quad \text{με} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.5.74)$$

την ιδιοσυχνότητα (ή φυσική κυκλική συχνότητα) του μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος υλικού σημείου-ελατηρίου που εξετάζουμε. Στη διαφορική αυτή εξίσωση (5.5.74) άγνωστη συνάρτηση είναι η μετατόπιση  $u = u(t)$  του υλικού σημείου  $M$  ως προς τη θέση ισορροπίας του  $u = 0$  με  $t$  το χρόνο. Την ίδια εξίσωση την αναφέραμε αρχικά στην πρώτη Ενότητα Α1.1 αυτού του διδακτικού βιβλίου: διαφορική εξίσωση (1.1.3). Εκεί όμως υπήρχε και εξωτερική φόρτιση: είχαμε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις. Εδώ δεν υπάρχει τέτοια φόρτιση: έχουμε ελεύθερες ταλαντώσεις.

Στην παρούσα εφαρμογή ζητούνται: (α) Οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της διαφορικής εξίσωσης (5.5.74). (β) Με τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης η γενική λύση της  $u_g(t)$  σε μιγαδική εκθετική μορφή. (γ) Η μετατροπή της γενικής αυτής λύσεως  $u_g(t)$  σε τριγωνομετρική μορφή. (δ) Η λύση  $u_p(t)$  του σχετικού προβλήματος αρχικών τιμών με αρχικές συνθήκες τις

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0, \quad (5.5.75)$$

δηλαδή την αρχική θέση  $u_0$  και την αρχική ταχύτητα  $v_0$  του υλικού σημείου  $M$ . (ε) Η επαλήθευση της λύσεως  $u_p(t)$ .

**Λύση:** (α) Καταρχήν εύκολα διαπιστώνουμε ότι πρόκειται για (i) συνήθη διαφορική εξίσωση, (ii) δευτέρας τάξεως, (iii) πρώτου βαθμού, (iv) γραμμική, (v) ομογενή, (vi) με σταθερούς συντελεστές (τους  $m$  και  $k$  ή, ισοδύναμα, τους  $1$  και  $\omega_0^2 = k/m$ ), (vii) με άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) τη μετατόπιση  $u = u(t)$  του υλικού σημείου  $M$  από τη θέση ισορροπίας του  $u = 0$  και (viii) με ανεξάρτητη μεταβλητή το χρόνο  $t$ .

(β) Αφού πρόκειται για ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές, όπως είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα (α), μπορούμε να εφαρμόσουμε ξανά τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης, ώστε να προσδιορίσουμε τη λύση της. Επομένως δεχόμαστε λύση της μορφής  $u_0(t) = e^{\mu t}$  και υπολογίζουμε τις δύο πρώτες παραγωγούς της:

$$u_0(t) = e^{\mu t} \implies \dot{u}(t) = \mu e^{\mu t} \implies \ddot{u}(t) = \mu^2 e^{\mu t}. \quad (5.5.76)$$

Με την εκθετική αυτή αντικατάσταση η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση (5.5.74) παίρνει τώρα τη μορφή

$$\mu^2 e^{\mu t} + \omega_0^2 e^{\mu t} = (\mu^2 + \omega_0^2) e^{\mu t} = 0. \quad (5.5.77)$$

Επειδή μάλιστα ο εκθετικός παράγοντας  $e^{\mu t}$  δε μηδενίζεται ποτέ, για να ισχύει εκ ταυτότητος η σχέση αυτή (5.5.77), θα πρέπει οπωσδήποτε να μηδενίζεται το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$p_2(\mu) = \mu^2 + \omega_0^2 = 0. \quad (5.5.78)$$

Άρα η σταθερά  $\mu$  στον εκθέτη της πιθανής εκθετικής λύσεως  $u_0(t) = e^{\mu t}$  που δεχθήκαμε θα είναι ρίζα της πιο πάνω χαρακτηριστικής εξίσωσης (5.5.78), οπότε

$$p_2(\mu) = \mu^2 + \omega_0^2 = 0 \implies \mu^2 = -\omega_0^2 = (i\omega_0)^2 \implies \mu_1 = i\omega_0 \text{ και } \mu_2 = -i\omega_0. \quad (5.5.79)$$

Έχουμε λοιπόν τώρα διαθέσιμες τις δύο ρίζες  $\mu_1 = i\omega$  και  $\mu_2 = -i\omega$  της δευτεροβάθμιας χαρακτηριστικής εξίσωσης (5.5.78), ισοδύναμα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου  $p_2(\mu)$ . Μάλιστα στην παρούσα διαφορική εξίσωση (5.5.74) οι δύο αυτές ρίζες  $\mu_1 = i\omega_0$  και  $\mu_2 = -i\omega_0$  είναι συζυγείς φανταστικές και φυσικά διαφορετικές μεταξύ τους, είναι δηλαδή και απλές ρίζες. Επομένως οι δύο γραμμικά ανεξάρτητες μερικές λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (5.5.74) θα είναι οι λύσεις

$$u_1(t) = e^{i\omega_0 t}, \quad u_2(t) = e^{-i\omega_0 t} \quad (5.5.80)$$

(η πρώτη με  $\mu = \mu_1 = i\omega_0$  και η δεύτερη με  $\mu = \mu_2 = -i\omega_0$  στον εκθέτη). Κατά συνέπεια η σχετική γενική λύση  $u_g(t)$  της ίδιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (5.5.74) θα έχει τη μιγαδική εκθετική μορφή

$$u_g(t) = C_1 u_1(t) + C_2 u_2(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} \quad (5.5.81)$$

με τα  $C_1$  και  $C_2$  αυθαίρετες σταθερές.

(γ) Δε μας είναι ιδιαίτερα αρεστή η παραπάνω μιγαδική εκθετική λύση  $u_g(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}$ , επειδή περιέχει τη φανταστική μονάδα  $i = \sqrt{-1}$ . Επιπλέον και επειδή δίνει συζυγείς μιγαδικές τιμές στις δύο σταθερές  $C_1$  και  $C_2$  υπό πραγματικές αρχικές συνθήκες, όπως θα μπορούσαμε να διαπιστώσουμε. Ευτυχώς είναι εύκολο να μετατραπεί η γενική αυτή λύση (5.5.81) και σε πραγματική τριγωνομετρική μορφή, δηλαδή με τη χρήση των δύο τριγωνομετρικών συναρτήσεων συνημίτονο (cos) και ημίτονο (sin), ακριβώς όπως έγινε και στα δύο παραπάνω Παραδείγματα Α5.7 και Α5.8. Αυτό θα μας επιτρέψει και τον απλούστερο υπολογισμό της λύσεως του σχετικού προβλήματος αρχικών τιμών (5.5.74) και (5.5.75), ως το επαναλάβουμε

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0, \quad u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0. \quad (5.5.82)$$

Η μετατροπή αυτή σε τριγωνομετρική μορφή είναι και πάλι πολύ εύκολη λαμβάνοντας υπόψη τους τύπους του Euler (5.5.60), ως τους επαναλάβουμε και αυτούς

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x. \quad (5.5.83)$$

Εισάγοντας τους τύπους αυτούς στη γενική λύση  $u_g(t)$  που προσδιορίστηκε στη σχέση (5.5.81) (εδώ με  $x = \omega_0 t$ ), διαπιστώνουμε ότι

$$u_g(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} = C_1 (\cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t) + C_2 (\cos \omega_0 t - i \sin \omega_0 t). \quad (5.5.84)$$

Άρα

$$u_g(t) = (C_1 + C_2) \cos \omega_0 t + i(C_1 - C_2) \sin \omega_0 t = D_1 \cos \omega_0 t + D_2 \sin \omega_0 t. \quad (5.5.85)$$

Τελικά στην τριγωνομετρική αυτή έκφραση της γενικής λύσεως  $u_g(t)$  χρησιμοποιήθηκαν οι νέες αυθαίρετες σταθερές  $D_1 = C_1 + C_2$  και  $D_2 = i(C_1 - C_2)$ . Είναι πάρα πολύ εύκολη η επαλήθευση της γενικής αυτής λύσεως  $u_g(t)$  σαν λύσεως της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές (5.5.74) των ελεύθερων και χωρίς απόσβεση ταλαντώσεων που εξετάζουμε. Επομένως θα την παραλείψουμε.

(δ) Αυτό που πρόκειται να κάνουμε τώρα είναι να βρούμε και τη λύση  $u_p(t)$  του προβλήματος αρχικών τιμών (5.5.82). Προς το σκοπό αυτό θα προσδιορίσουμε τις δύο αυθαίρετες σταθερές  $D_1$  και  $D_2$  στην τελική τριγωνομετρική λύση (5.5.85), έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι δύο αρχικές συνθήκες  $u(0) = u_0$  και  $\dot{u}(0) = v_0$  στο πρόβλημα αρχικών τιμών (5.5.82).

Πρόκειται και πάλι για μια πάρα πολύ εύκολη εργασία. Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική μορφή (5.5.85) της γενικής λύσεως  $u_g(t)$ , έχουμε

$$u_g(t) = D_1 \cos \omega_0 t + D_2 \sin \omega_0 t \implies \dot{u}_g(t) = -\omega_0 D_1 \sin \omega_0 t + \omega_0 D_2 \cos \omega_0 t. \quad (5.5.86)$$

Εισάγοντας τώρα τις δύο αρχικές συνθήκες  $u(0) = u_0$  (αρχική μετατόπιση) και  $\dot{u}(0) = v_0$  (αρχική ταχύτητα) σ' αυτές τις σχέσεις (5.5.86), διαπιστώνουμε αμέσως ότι για  $t = 0$

$$D_1 \cdot 1 + D_2 \cdot 0 = D_1 = u_0, \quad -\omega_0 D_1 \cdot 0 + \omega_0 D_2 \cdot 1 = v_0, \quad \text{οπότε} \quad D_1 = u_0, \quad \omega_0 D_2 = v_0 \quad (5.5.87)$$

και τελικά

$$D_1 = u_0, \quad D_2 = \frac{v_0}{\omega_0}. \quad (5.5.88)$$

Επομένως η λύση  $u_p(t)$  του προβλήματος αρχικών τιμών (5.5.82) (διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως και δύο αρχικές συνθήκες) θα έχει τη μορφή

$$u_p(t) = u_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (5.5.89)$$

(ε) Μας απομένει τώρα η επαλήθευση της λύσεως αυτής  $u_p(t)$  του προβλήματος αρχικών τιμών (5.5.82), το ξαναεπιναλαμβάνουμε

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0, \quad u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0. \quad (5.5.90)$$

Πρόκειται για μια μερική (ή ειδική) λύση της αρχικής μας διαφορικής εξίσωσης (5.5.74), η οποία ικανοποιεί όμως και τις αρχικές συνθήκες (5.5.75). Ας προχωρήσουμε στη σχετική επαλήθευση.

Παραγωγίζοντας δύο φορές ως προς  $t$  τη μερική λύση  $u_p(t)$  της σχέσεως (5.5.89), έχουμε

$$\dot{u}_p(t) = -\omega_0 u_0 \sin \omega_0 t + v_0 \cos \omega_0 t \implies \ddot{u}_p(t) = -\omega_0^2 u_0 \cos \omega_0 t - \omega_0 v_0 \sin \omega_0 t. \quad (5.5.91)$$

Εισάγουμε τώρα τη λύση  $u_p(t)$  από τη σχέση (5.5.89) και τη δεύτερη παράγωγό της  $\ddot{u}_p(t)$  από τη δεύτερη σχέση (5.5.91) στη διαφορική μας εξίσωση  $\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0$ . Διαπιστώνουμε έτσι εύκολα την επαλήθευσή της συγκεκριμένα ότι

$$\ddot{u}_p(t) + \omega_0^2 u_p(t) = -\omega_0^2 u_0 \cos \omega_0 t - \omega_0 v_0 \sin \omega_0 t + \omega_0^2 \left( u_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) = 0. \quad (5.5.92)$$

Δεν πρέπει φυσικά να λησμονήσουμε την επαλήθευση και των δύο αρχικών συνθηκών στο πρόβλημα αρχικών τιμών (5.5.82). Πραγματικά, θέτοντας  $t = 0$  στη λύση (5.5.89), διαπιστώνουμε ότι  $u_p(0) = u_0$ , αφού, όπως πολύ καλά γνωρίζουμε,  $\cos 0 = 1$  και  $\sin 0 = 0$ . Εντελώς ανάλογα από την πρώτη παράγωγο  $\dot{u}_p(t)$ , την οποία υπολογίσαμε στην πρώτη σχέση (5.5.91), διαπιστώνουμε άμεσα ότι  $\dot{u}_p(0) = v_0$ , ξανά επειδή  $\cos 0 = 1$  και  $\sin 0 = 0$ . Έχει επομένως ολοκληρωθεί η επαλήθευση της λύσεως  $u_p(t)$  στη σχέση (5.5.89) του προβλήματος αρχικών τιμών (5.5.82). ▲

► **Παρατήρηση Α5.6:** Παρατηρούμε βέβαια ότι η πιο πάνω εφαρμογή ουσιαστικά ταυτίζεται με την προηγούμενη της Εφαρμογή Α5.4 στην προηγούμενη Παράγραφο Α5.5.2, μόνο που εκεί είχαμε αρνητικό συντελεστή  $-\omega^2$  στη διαφορική εξίσωση, ενώ εδώ έχουμε θετικό συντελεστή  $+\omega_0^2$ . Όπως είδαμε, αυτό συνεπάγεται συζυγείς φανταστικές ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης και επομένως τριγωνομετρική λύση. Αντίθετα στην Εφαρμογή Α5.4 είχαμε αντίθετες πραγματικές ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης και τελικά υπερβολική λύση. Πρόκειται για δύο μαθηματικά παρόμοιες εφαρμογές στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού, από φυσικής όμως απόψεως αρκετά διαφορετικές. Πέρα από το μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα, το οποίο είναι εντελώς διαφορετικό στις δύο αυτές εφαρμογές, διαφορετική είναι και η κίνηση του υλικού σημείου  $M$ . Συγκεκριμένα στην Εφαρμογή Α5.4 ήταν κίνηση χωρίς ταλαντώσεις (λόγω των υπερβολικών συναρτήσεων), ενώ εδώ, όπως είδαμε, έχουμε ταλαντώσεις στην κίνηση του υλικού σημείου γύρω



από το σημείο ισορροπίας του  $u = 0$ . Είναι βέβαια αυτονόητο ότι η παραπάνω εφαρμογή, αν και μαθηματικά κάπως δυσκολότερη από την Εφαρμογή Α5.4 (λόγω των φανταστικών λύσεων της χαρακτηριστικής εξίσωσης), εντούτοις από πρακτικής απόψεως είναι *πάρα πολύ πιο χρήσιμη* για τον Πολιτικό Μηχανικό.

► **Παρατήρηση Α5.7:** Πρέπει επίσης να τονισθεί η αναλογία των λύσεων (5.5.51) και (5.5.89) των προβλημάτων αρχικών τιμών των Εφαρμογών Α5.4 (στην προηγούμενη Παράγραφο Α5.5.2) και Α5.5 (αμέσως πιο πάνω στην παρούσα Παράγραφο Α5.5.3). Στις δύο σχετικές διαφορικές εξισώσεις είχαμε (α) δύο αντίθετες πραγματικές και (β) δύο συζυγείς φανταστικές ρίζες  $\mu_1$  και  $\mu_2$  αντίστοιχα των χαρακτηριστικών εξισώσεών τους  $p_2(\mu) = 0$ . Είναι πραγματικά πολύ σημαντικές οι δύο αυτές εφαρμογές (κυρίως όμως η δεύτερη) στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού και επιμένουμε σ' αυτές. Θα θέλαμε επίσης να προσθέσουμε ότι, αν και στην πιο πάνω Εφαρμογή Α5.5 είχαμε ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση, τη γενικότερη περίπτωση με αποσβεστήρα σταθεράς  $c$  θα την εξετάσουμε και αυτή λεπτομερώς στην Ενότητα Α6.1 του επόμενου Κεφαλαίου Α6.

► **Παρατήρηση Α5.8:** Είναι επίσης ενδιαφέρον να παρατηρηθεί ότι η πιο πάνω τριγωνομετρική λύση (5.5.85) (στη γενική της μορφή) και (5.5.89) (στο σχετικό πρόβλημα αρχικών τιμών (5.5.82)) μας δείχνει πως σωστά, πολύ σωστά η ποσότητα  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  έχει αποκληθεί **ιδιοσυχνότητα** (ή **φυσική κυκλική συχνότητα**) του παρόντος μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος υλικού σημείου-ελατηρίου. Είναι πραγματικά η κυκλική συχνότητα των ταλαντώσεων που προκύπτουν και εξαρτάται βέβαια μόνο από τις σταθερές  $m$  (μάζα) του υλικού σημείου και  $k$  του ελατηρίου.

▼ **Εφαρμογή Α5.6 (Δυναμική των Κατασκευών: Καμπτικές ιδιοταλαντώσεις δοκού):** Και τώρα προχωράμε στη Δυναμική των Κατασκευών. Εκεί η διαφορική εξίσωση

$$X''''(x) - \beta^4 X(x) = 0 \quad (5.5.93)$$

διέπει το πρόβλημα των **καμπτικών ιδιοταλαντώσεων** συνήθους δοκού με το  $\beta$  να θεωρείται εδώ γνωστή θετική σταθερά. Άγνωστη συνάρτηση είναι το προσημασμένο εύρος  $X(x)$  των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων και ανεξάρτητη μεταβλητή η θέση  $x$  κατά μήκος της δοκού. Εδώ ζητούνται: (α) Οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της διαφορικής αυτής εξίσωσης. (β) Η γενική λύση της  $X_g(x)$  σε εκθετική μορφή. (γ) Η μετατροπή της λύσεως αυτής σε υπερβολική-τριγωνομετρική μορφή. (δ) Η επαλήθευση της τελευταίας αυτής μορφής της λύσεως.

**Λύση:** (α) Πρόκειται για μια ομογενή γραμμική συνήθη διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως και φυσικά πρώτου βαθμού με σταθερούς συντελεστές: τους 1 και  $-\beta^4$ . Άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) είναι η  $X(x)$  και ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το  $x$ .

(β) Κατά συνέπεια και σε συμφωνία με τις διαπιστώσεις του προηγούμενου ερωτήματος είναι στ' αλήθεια εφαρμόσιμη η μέθοδος της εκθετικής αντικαταστάσεως

$$X_0(x) = e^{\mu x} \implies X_0''''(x) = \mu^4 e^{\mu x}. \quad (5.5.94)$$

Επομένως προκύπτει εύκολα η σχετική χαρακτηριστική εξίσωση  $p_4(\mu) = 0$  ως εξής:

$$\mu^4 e^{\mu x} - \beta^4 e^{\mu x} = 0 \implies (\mu^4 - \beta^4) e^{\mu x} = 0 \implies p_4(\mu) = \mu^4 - \beta^4 = 0. \quad (5.5.95)$$

Εύκολα λύνουμε την τεταρτοβάθμια αυτή χαρακτηριστική εξίσωση  $p_4(\mu) = 0$ :

$$\mu^4 - \beta^4 = 0 \implies (\mu^2 - \beta^2)(\mu^2 + \beta^2) = 0 \implies (\mu - \beta)(\mu + \beta)(\mu - i\beta)(\mu + i\beta) = 0 \quad (5.5.96)$$

(αφού  $i = \sqrt{-1}$ ) και προσδιορίζουμε τις τέσσερις ρίζες της  $\mu_{1,2,3,4}$

$$\mu_1 = \beta, \quad \mu_2 = -\beta, \quad \mu_3 = i\beta, \quad \mu_4 = -i\beta. \quad (5.5.97)$$

Οι δύο πρώτες ρίζες  $\mu_{1,2} = \pm\beta$  είναι πραγματικές και αντίθετες, ενώ οι δύο τελευταίες  $\mu_{3,4} = \pm i\beta$  είναι συζυγείς φανταστικές.

Επομένως η γενική λύση  $X_g(x)$  της διαφορικής εξίσωσης (5.5.93) για το προσημασμένο εύρος (τη χωρική συνιστώσα)  $X(x)$  των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων συνήθους δοκού θα έχει τη μορφή

$$X_g(x) = C_1 e^{\mu_1 x} + C_2 e^{\mu_2 x} + C_3 e^{\mu_3 x} + C_4 e^{\mu_4 x} = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} + C_3 e^{i\beta x} + C_4 e^{-i\beta x}, \quad (5.5.98)$$

η οποία περιέχει τέσσερις αυθαίρετες σταθερές: τις  $C_1, C_2, C_3$  και  $C_4$ . Τούτο είναι εύλογο, γιατί η διαφορική εξίσωση (5.5.93) είναι τετάρτης τάξεως. Είναι επίσης αναμενόμενο για τον Πολιτικό Μηχανικό, επειδή μια συνήθης δοκός έχει δύο άκρα (π.χ. τα  $x = 0$  και  $x = L$ ) με δύο συνοριακές συνθήκες στο καθένα τους, άρα συνολικά τέσσερις συνοριακές συνθήκες.

(γ) Συνήθως, σχεδόν πάντα ο Πολιτικός Μηχανικός προτιμάει την υπερβολική-τριγωνομετρική μορφή της λύσεως αυτής  $X_g(x)$  από την εκθετική μορφή της (5.5.98). Με βάση τους τόσο γνωστούς μας πια τύπους

$$e^{\pm x} = \cosh x \pm \sinh x, \quad e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x, \quad (5.5.99)$$

πολύ εύκολα ξαναγράφουμε τη γενική αυτή λύση  $X_g(x)$  στην υπερβολική-τριγωνομετρική μορφή

$$\begin{aligned} X_g(x) = & C_1(\cosh \beta x + \sinh \beta x) + C_2(\cosh \beta x - \sinh \beta x) \\ & + C_3(\cos \beta x + i \sin \beta x) + C_4(\cos \beta x - i \sin \beta x) \end{aligned} \quad (5.5.100)$$

και τελικά στη μορφή

$$X_g(x) = D_1 \cosh \beta x + D_2 \sinh \beta x + D_3 \cos \beta x + D_4 \sin \beta x \quad (5.5.101)$$

με τη χρήση και των νέων αυθαίρετων σταθερών  $D_1, D_2, D_3$  και  $D_4$ . Φυσικά στην τελευταία αυτή λύση είναι απύσχα η φανταστική μονάδα  $i = \sqrt{-1}$ . Συνεπώς εύλογα αναμένονται πραγματικές τιμές των σταθερών  $D_1, D_2, D_3$  και  $D_4$  σε αληθινά προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού.

(δ) Για την επαλήθευση της πιο πάνω γενικής λύσεως  $X_g(x)$ , απλά την παραγωγίζουμε τέσσερις φορές. Προκύπτουν έτσι οι τέσσερις πρώτες παράγωγοί της

$$X'_g(x) = \beta D_1 \sinh \beta x + \beta D_2 \cosh \beta x - \beta D_3 \sin \beta x + \beta D_4 \cos \beta x, \quad (5.5.102)$$

$$X''_g(x) = \beta^2 D_1 \cosh \beta x + \beta^2 D_2 \sinh \beta x - \beta^2 D_3 \cos \beta x - \beta^2 D_4 \sin \beta x, \quad (5.5.103)$$

$$X'''_g(x) = \beta^3 D_1 \sinh \beta x + \beta^3 D_2 \cosh \beta x + \beta^3 D_3 \sin \beta x - \beta^3 D_4 \cos \beta x, \quad (5.5.104)$$

$$X''''_g(x) = \beta^4 D_1 \cosh \beta x + \beta^4 D_2 \sinh \beta x + \beta^4 D_3 \cos \beta x + \beta^4 D_4 \sin \beta x. \quad (5.5.105)$$

Η τελευταία αυτή παράγωγος  $X''''_g(x)$  μαζί με την ίδια τη γενική λύση  $X_g(x)$  της σχέσεως (5.5.101) μας αρκούν για την παρούσα επαλήθευση. Με τη σύγκρισή τους είναι προφανές ότι

$$X''''_g(x) = \beta^4 X_g(x) \implies X''''_g(x) - \beta^4 X_g(x) = 0. \quad (5.5.106)$$

Άρα η συνάρτηση (5.5.101) επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση (5.5.93) των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων συνήθους δοκού για οποιεσδήποτε τιμές των σταθερών  $D_1, D_2, D_3$  και  $D_4$  σ' αυτήν. ▲

► **Παρατήρηση Α5.9:** Η παραπάνω γενική λύση  $X_g(x)$  θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη στο Κεφάλαιο Α9 σε σχετικό πρόβλημα συνοριακών τιμών για τον προσδιορισμό των ιδιοσυχνοτήτων  $\omega_n$  αμφιέρειστης δοκού σε καμπτικές ιδιοταλαντώσεις. Ανάλογα ισχύουν και για άλλες συνοριακές συνθήκες της δοκού: σε αμφίπακτη δοκό, σε μονόπακτη υπερστατική δοκό, σε πρόβολο, ακόμη και σε ελεύθερη δοκό. Ο προσδιορισμός των ιδιοσυχνοτήτων  $\omega_n$  δοκού σε καμπτικές ιδιοταλαντώσεις αποτελεί θεμελιώδους σημασίας πρόβλημα του Πολιτικού Μηχανικού στη Δυναμική των Κατασκευών. Ακόμη περισσότερα θα αναφερθούν στο Μέρος Β των διδακτικών αυτών βιβλίων: στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙΙ για Πολιτικούς Μηχανικούς. *Υπομονή λοιπόν προς το παρόν!*

**A5.5.4. Περίπτωση πολλαπλών ριζών**

Συνεχίζουμε και σε τούτη την Παράγραφο A5.5.4 τη διερεύνηση της ευρέσεως της γενικής λύσεως μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης της γενικής μορφής (5.5.10) ή (5.5.55), την επαναλαμβάνουμε

$$k_n y^{(n)}(x) + k_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + k_1 y'(x) + k_0 y(x) = 0 \tag{5.5.107}$$

με τους συντελεστές  $k_n, k_{n-1}, \dots, k_1, k_0$  σταθερούς, αλλά και πραγματικούς αριθμούς. Και πάλι η σχετική χαρακτηριστική εξίσωση

$$p_n(\mu) = k_n \mu^n + k_{n-1} \mu^{n-1} + \dots + k_1 \mu + k_0 = 0 \tag{5.5.108}$$

στη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως  $y_0(x) = e^{\mu x}$  θα είναι και αυτή πραγματική.

Στην προπροηγούμενη Παράγραφο A5.5.2 εξετάσαμε την περίπτωση απλών πραγματικών ριζών, ενώ στην προηγούμενη Παράγραφο A5.5.3 την περίπτωση και πάλι απλών, αλλά συζυγών μιγαδικών ριζών. Μας απομένει τώρα η περίπτωση που αγνοήσαμε: των πολλαπλών (διπλών, τριπλών, κλπ.) ριζών (είτε πραγματικών είτε μιγαδικών) της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $p_n(\mu) = 0$ .

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια ρίζα  $\mu_1$  της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $p_n(\mu) = 0$  με πολλαπλότητα  $m$  (π.χ. διπλή ρίζα για  $m = 2$ , τριπλή ρίζα για  $m = 3$ , κλπ.). Στην περίπτωση αυτή στη ρίζα αυτή  $\mu_1$  με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως θα αντιστοιχούν οι  $m$  εκθετικές συναρτήσεις

$$y_1(x) = y_2(x) = \dots = y_m(x) = e^{\mu_1 x}. \tag{5.5.109}$$

Αυτές όμως οι συναρτήσεις ταυτίζονται, συμπίπτουν μεταξύ τους. Άρα δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητες: είναι γραμμικά εξαρτημένες. Επομένως εκτός από την πρώτη τους  $y_1(x) = e^{\mu_1 x}$  δεν έχει κανένα νόημα το να τις περιλάβουμε στη λύση  $y_h(x)$  της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (5.5.107). Και αντίστροφα, εάν από λάθος ή άγνοια κάνουμε κάτι τέτοιο, δε θα διαθέτουμε στη λύση αυτή  $y_h(x)$   $n$  γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις στους όρους της. Άρα η σχετική οριζουσα Wronski  $W$  θα είναι ταυτοτικά μηδενική και η λύση  $y_h(x)$  δε θα είναι γενική λύση  $y_g(x)$  της διαφορικής εξίσωσης (5.5.107). Επιπλέον τελικά η λύση αυτή δε θα μπορεί να αποτελέσει λύση του σχετικού προβλήματος αρχικών τιμών, δηλαδή να ικανοποιήσει τις  $n$  αρχικές συνθήκες

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{5.5.110}$$

στο σημείο  $x_0$  του διαστήματος  $[a, b]$  ισχύος της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές (5.5.107).

Το πρόβλημα είναι απλά ότι για μια ρίζα  $\mu_1$  πολλαπλότητας  $m$  (π.χ. διπλή ή τριπλή ρίζα) της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $p_n(\mu) = 0$  παύουμε να διαθέτουμε  $m$  αντίστοιχες μερικές λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (5.5.107). Διαθέτουμε απλά μόνο μία μερική λύση: τη λύση  $y_1(x) = e^{\mu_1 x}$ , αλλά αυτό με κανέναν τρόπο δε μας είναι αρκετό.

Την απάντηση σ' αυτή τη δυσκολία μας τη δίνει η δυνατότητα επιλογής στ' αλήθεια  $m$  γραμμικά ανεξάρτητων μερικών λύσεων  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$  που να αντιστοιχούν όλες τους στην πολλαπλή ρίζα  $\mu_1$  της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $p_n(\mu) = 0$  (φυσικά με  $2 \leq m \leq n$ ). Μπορεί να αποδειχθεί, αν και εδώ παραλείπεται η απόδειξη, ότι  $m$  γραμμικά ανεξάρτητες μερικές λύσεις που αντιστοιχούν όλες τους στην ίδια πολλαπλή ρίζα  $\mu_1$  (πολλαπλότητας  $m$ ) της πιο πάνω χαρακτηριστικής εξίσωσης  $p_n(\mu) = 0$  είναι οι εξής  $m$  γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις:

$$y_1(x) = e^{\mu_1 x}, \quad y_2(x) = x e^{\mu_1 x}, \quad y_3(x) = x^2 e^{\mu_1 x}, \quad \dots, \quad y_m(x) = x^{m-1} e^{\mu_1 x} \tag{5.5.111}$$

της γενικής μορφής

$$y_k(x) = x^{k-1} e^{\mu_1 x}, \quad k = 1, 2, \dots, m. \tag{5.5.112}$$

Η ύπαρξη, όπως μπορεί να αποδειχθεί, αυτών των  $m$  γραμμικά ανεξάρτητων μερικών λύσεων της διαφορικής μας εξίσωσης (5.5.107) για μια ρίζα  $\mu_1$  πολλαπλότητας  $m$  της σχετικής χαρακτηριστικής εξίσωσης  $p_n(\mu) = 0$  (ή του αντίστοιχου χαρακτηριστικού πολυωνύμου  $p_n(\mu)$ ) μας «λύνει τα χέρια». Τώρα ακόμη και σε πολλαπλή ρίζα  $\mu_1$  (πολλαπλότητας  $m$ ) είτε πραγματική είτε μιγαδική αντιστοιχούν  $m$  γραμμικά ανεξάρτητες μερικές λύσεις  $y_k(x)$ . Αυτές δίνονται από τις παραπάνω σχέσεις (5.5.111) ή (5.5.112). Άρα όλες μαζί συμβάλλουν με το γραμμικό συνδυασμό τους

$$y^*(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_m y_m(x) \quad (5.5.113)$$

στη γενική λύση  $y_h(x) \equiv y_g(x)$  της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές (5.5.107). Οι υπόλοιπες ρίζες συμβάλλουν όπως εξηγήθηκε στις προηγούμενες δύο παραγράφους ανάλογα με το αν είναι πραγματικές ή συζυγείς μιγαδικές. Αν υπάρχουν και άλλες πολλαπλές ρίζες, συμβάλλουν και αυτές ακριβώς όπως η  $\mu_1$  πιο πάνω. Αν υπάρχουν πολλαπλές συζυγείς μιγαδικές ρίζες  $\alpha \pm i\beta$ , μπορούμε προφανώς με τους τύπους του Euler (5.5.60) να φέρουμε τις σχετικές συναρτήσεις σε τριγωνομετρική μορφή. Ακριβώς αυτό κάναμε ήδη στην προηγούμενη Παράγραφο Α5.5.3 για απλές συζυγείς μιγαδικές ρίζες.

Ας προχωρήσουμε τώρα σε ένα παράδειγμα και τρεις μάλλον ενδιαφέρουσες εφαρμογές στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Έτσι ελπίζεται ότι θα διασαφηνισθεί καλύτερα η παραπάνω διαδικασία στην περίπτωση πολλαπλών ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $p_n(\mu) = 0$ .

▼ **Παράδειγμα Α5.9:** Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$y''(x) - 10y'(x) + 25y(x) = 0. \quad (5.5.114)$$

Ασφαλώς πρόκειται για μια ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως με σταθερούς συντελεστές: τους 1,  $-10$  και  $25$ . Κατά συνέπεια είναι εφαρμόσιμη η μέθοδος της εκθετικής αντικατάστασης  $y_0(x) = e^{\mu x}$ . Με τη μέθοδο αυτή έχουμε

$$y_0(x) = e^{\mu x} \implies y'_0(x) = \mu e^{\mu x} \implies y''_0(x) = \mu^2 e^{\mu x}. \quad (5.5.115)$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε την εκθετική συνάρτηση  $y_0(x)$  που δοκιμάζουμε και τις δύο πιο πάνω πρώτες παραγώγους της  $y'_0(x)$  και  $y''_0(x)$  στη διαφορική εξίσωση (5.5.114) και παίρνουμε

$$y''_0(x) - 10y'_0(x) + 25y_0(x) = 0 \implies \mu^2 e^{\mu x} - 10\mu e^{\mu x} + 25e^{\mu x} \implies (\mu^2 - 10\mu + 25)e^{\mu x} = 0. \quad (5.5.116)$$

Οδηγούμαστε έτσι στη σχετική δευτεροβάθμια χαρακτηριστική εξίσωση

$$p_2(\mu) = \mu^2 - 10\mu + 25 = (\mu - 5)^2 = 0. \quad (5.5.117)$$

Η εξίσωση αυτή  $p_2(\mu) = 0$  έχει προφανώς μία διπλή ρίζα: τη ρίζα  $\mu_1 = 5$ . Στη ρίζα αυτή αντιστοιχεί η μερική λύση  $y_1(x) = e^{5x}$  της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (5.5.114). Όμως δε μας αρκεί η μερική αυτή λύση. Αυτό συμβαίνει, επειδή έχουμε μια γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως και επομένως απαιτείται να προσδιορισθούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες μερικές λύσεις της. Η μερική λύση  $y_1(x) = e^{5x}$  που προαναφέραμε είναι η μία μερική λύση. Ποια είναι η άλλη; Μα προφανώς σύμφωνα με τα όσα ήδη αναφέρθηκαν και ειδικότερα τις σχέσεις (5.5.111) και (5.5.112) (στο παράδειγμα αυτό με πολλαπλότητα  $m = 2$  της ρίζας  $\mu_1 = 5$ : διπλή ρίζα) η δεύτερη μερική λύση που ζητούμε θα είναι η λύση  $y_2(x) = x e^{5x}$ . Άρα θα έχουμε τελικά τις εξής δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις  $y_{1,2}(x)$  της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (5.5.114)

$$y_1(x) = e^{5x}, \quad y_2(x) = x e^{5x}, \quad \text{οπότε} \quad y_g(x) = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x} \implies y_g(x) = (C_1 + C_2 x) e^{5x} \quad (5.5.118)$$

για τη γενική λύση  $y_g(x)$  της διαφορικής εξίσωσης (5.5.114). Η γενική αυτή λύση  $y_g(x)$  περιέχει δύο αυθαίρετες σταθερές (τις  $C_1$  και  $C_2$ ). Τούτο είναι εύλογο και αναμενόμενο από τη γενική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης δευτέρας τάξεως.

Επίσης οι δύο μερικές λύσεις  $y_1(x) = e^{5x}$  και  $y_2(x) = xe^{5x}$ , των οποίων γραμμικό συνδυασμό αποτελεί η γενική λύση  $y_g(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες μεταξύ τους, όπως μπορεί να αποδειχθεί άμεσα εναλλακτικά με τη χρήση της σχετικής ορίζουσας Wronski. Άρα ορθά αποκλήθηκε η λύση  $y_g(x)$  στη σχέση (5.5.118) γενική λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές (5.5.114). Ας σημειώσουμε επίσης ότι με απλούστατους υπολογισμούς μπορεί να γίνει και η επαλήθευση της λύσεως αυτής  $y_g(x)$ . ▲

▼ **Εφαρμογή Α5.7 (Μηχανική των Υλικών: Δοκοί):** Στην Τεχνική Θεωρία της Κάμψεως τώρα στη Μηχανική των Υλικών ζητείται η γενική λύση της εξίσωσης της συνήθους δοκού υπό κάμψη

$$EIv''''(x) = p(x) \implies v''''(x) = \frac{p(x)}{EI}, \quad (5.5.119)$$

χωρίς όμως εξωτερική φόρτιση, δηλαδή με  $p(x) \equiv 0$ , με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως.

**Λύση:** Πρόκειται για την κλασική διαφορική εξίσωση της κάμψεως συνήθους δοκού με  $EI$  τη δυσκαμψία της. Τούτη την εξίσωση την κατασκευάσαμε ήδη στην Παράγραφο Α2.1.5 του Κεφαλαίου Α2: εξίσωση (2.1.34). Άγνωστη συνάρτηση είναι το βέλος κάμψεως  $v(x)$  κατά μήκος της δοκού (που με την κάμψη σχηματίζει την ελαστική γραμμή της) κι ανεξάρτητη μεταβλητή η θέση  $x$  επίσης κατά μήκος της δοκού. Εδώ εξετάζουμε απλά την αντίστοιχη ομογενή διαφορική εξίσωση

$$EIv''''(x) = 0 \implies v''''(x) = 0. \quad (5.5.120)$$

Με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως  $v_0(x) = e^{\mu x}$  μπορούμε να προσδιορίσουμε άμεσα τη σχετική χαρακτηριστική εξίσωση  $p_4(\mu) = 0$  ως εξής:

$$v_0(x) = e^{\mu x} \implies v_0''''(x) = \mu^4 e^{\mu x} = 0 \implies p_4(\mu) = \mu^4 = 0 \implies \mu_{1,2,3,4} = 0. \quad (5.5.121)$$

Έχουμε λοιπόν μια τετραπλή ρίζα  $\mu = \mu_1 = 0$  της πολύ απλής τεταρτοβάθμιας χαρακτηριστικής εξίσωσης  $p(\mu) = \mu^4 = 0$ . Στην τετραπλή αυτή ρίζα  $\mu = \mu_1 = 0$  αντιστοιχούν φυσικά τέσσερις γραμμικά ανεξάρτητες μερικές λύσεις, οι ακόλουθες λύσεις:

$$v_1(x) = 1, \quad v_2(x) = x, \quad v_3(x) = x^2, \quad v_4(x) = x^3, \quad \text{αφού } e^{0x} = e^0 = 1, \quad (5.5.122)$$

σύμφωνα με τις σχέσεις (5.5.111) και (5.5.112), εδώ με  $\mu_1 = 0$  και  $m = 4$  (ρίζα πολλαπλότητας τέσσερα). Άρα η γενική λύση  $v_h(x)$  της διαφορικής εξίσωσης της δοκού σε κάμψη στην ομογενή της μορφή (5.5.120) (δηλαδή χωρίς εξωτερική φόρτιση:  $p(x) \equiv 0$ ) είναι η εξής:

$$v_h(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 \quad (5.5.123)$$

με τα  $C_1, C_2, C_3$  και  $C_4$  τέσσερις αυθαίρετες σταθερές. Πρόκειται για ένα αυθαίρετο τριτοβάθμιο πολυώνυμο. Φυσικά σ' αυτό το στοιχειώδες πρόβλημα στην ίδια ακριβώς λύση  $v_h(x)$  καταλήγουμε απλά ολοκληρώνοντας τέσσερις φορές τη σχετική ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (5.5.120).

Ας σημειώσουμε επίσης ότι είναι δυνατή η κάμψη μιας δοκού και χωρίς κάθετη κατανομημένη φόρτιση  $p(x)$ , π.χ. με καμπτική ροπή σε στηριζόμενο άκρο (εδώ έδραση ή κύλιση) ή/και με συγκεντρωμένη δύναμη/ροπή σε ελεύθερο άκρο. Πέρα από αυτό η πιο πάνω γενική λύση (5.5.123) της παρούσας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (5.5.120) αποτελεί τη βάση για την εύρεση της γενικής λύσεως και της αντίστοιχης μη ομογενούς εξίσωσης (με  $p(x) \neq 0$ ), όπως θα δούμε σε επόμενες ενότητες αυτού του κεφαλαίου. Προβλήματα με συγκεντρωμένες δυνάμεις και ροπές σε εσωτερικά σημεία δοκού σε κάμψη θα μελετηθούν με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. ▲

▼ **Εφαρμογή Α5.8 (Μηχανική των Υλικών, Ελαστική Ευστάθεια: Λυγισμός):** Εξετάζουμε το πρόβλημα του ελαστικού λυγισμού ευθύγραμμου στύλου (ή ράβδου ή υποστυλώματος ή κολώνας) υπό θλιπτικό φορτίο για κάθε είδος στηρίξεων στα άκρα του στύλου. Στο πρόβλημα αυτό προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$v''''(x) + k^2 v''(x) = 0 \quad \text{με} \quad k = \sqrt{\frac{P}{EI}}. \quad (5.5.124)$$

Στη διαφορική αυτή εξίσωση  $v(x)$  είναι η εγκάρσια μετατόπιση (το βέλος κάμψεως) του στύλου που λύγισε,  $x$  η θέση κατά μήκος του στύλου,  $P$  το θλιπτικό φορτίο λυγισμού που έχει επιβληθεί στο στύλο και  $EI$  η δυσκαμψία του στύλου που ισχύει στο λυγισμό του αυτό. Ζητείται η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξισώσεως κατευθείαν με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως.

**Λύση:** Πρόκειται ασφαλώς για μια ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως με σταθερούς συντελεστές: τους 1 και  $k^2 = P/(EI)$ . Επομένως έχουμε τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως  $v_0(x) = e^{\mu x}$ . Έτσι προκύπτουν οι παράγωγοι

$$v_0(x) = e^{\mu x} \implies v_0'(x) = \mu e^{\mu x} \implies v_0''(x) = \mu^2 e^{\mu x} \implies v_0'''(x) = \mu^3 e^{\mu x} \implies v_0''''(x) = \mu^4 e^{\mu x} \quad (5.5.125)$$

και τελικά και η χαρακτηριστική εξίσωση  $p_4(\mu) = 0$  ως εξής:

$$v_0''''(x) + k^2 v_0''(x) = 0 \implies (\mu^4 + k^2 \mu^2) e^{\mu x} = 0 \implies p_4(\mu) = \mu^4 + k^2 \mu^2 = 0. \quad (5.5.126)$$

Πολύ εύκολα λύνεται η τεταρτοβάθμια αυτή χαρακτηριστική εξίσωση:

$$p_4(\mu) = \mu^4 + k^2 \mu^2 = \mu^2(\mu^2 + k^2) = 0 \implies \mu_1 = \mu_2 = 0, \quad \mu_3 = ik, \quad \mu_4 = -ik. \quad (5.5.127)$$

Έχουμε λοιπόν μια διπλή ρίζα, τη  $\mu_{1,2} = 0$ , και ένα ζεύγος συζυγών φανταστικών ριζών, τις  $\mu_{3,4} = \pm ik$ . Άρα οι γραμμικά ανεξάρτητες μερικές λύσεις για τη διαφορική μας εξίσωση θα είναι οι

$$v_1(x) = 1, \quad v_2(x) = x, \quad v_3(x) = \cos kx, \quad v_4(x) = \sin kx. \quad (5.5.128)$$

Στις λύσεις αυτές πήραμε μάλιστα την πρωτοβουλία να χρησιμοποιήσουμε κατευθείαν τριγωνομετρικές (αντί μιγαδικές εκθετικές) μερικές λύσεις για το ζεύγος των φανταστικών ριζών  $\mu_{3,4} = \pm ik$ . Άρα η γενική λύση  $v_h(x)$  της διαφορικής εξισώσεως του λυγισμού (5.5.124) θα είναι η ακόλουθη:

$$v_h(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos kx + C_4 \sin kx. \quad (5.5.129)$$

Η λύση αυτή περιέχει τέσσερις αυθαίρετες σταθερές, τις  $C_1, C_2, C_3$  και  $C_4$ , όπως πρέπει άλλωστε. ▲

▼ **Εφαρμογή Α5.9 (Ταλαντώσεις: Κρίσιμη απόσβεση):** Στο πρόβλημα των ελεύθερων ταλαντώσεων του κλασικού μηχανικού συστήματος υλικού σημείου-ελατηρίου-αποσβεστήρα υπό κρίσιμη (ούτε ασθενή ούτε ισχυρή) απόσβεση, λόγος αποσβέσεως  $\xi = 1$ , προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$\ddot{u}(t) + 2\omega_0 \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0 \quad (5.5.130)$$

με το  $\omega_0$  γνωστή σταθερά. Ζητείται η γενική λύση με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως.

**Λύση:** Πρόκειται για μια ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως με σταθερούς συντελεστές: τους 1,  $2\omega_0$  και  $\omega_0^2$ . Με την εκθετική αντικατάσταση  $u_0(t) = e^{\mu t}$  προσδιορίζουμε εύκολα τη σχετική χαρακτηριστική εξίσωση  $p_2(\mu) = 0$  και τις ρίζες της  $\mu_{1,2}$ :

$$u_0(t) = e^{\mu t} \implies (\mu^2 + 2\omega_0 \mu + \omega_0^2) e^{\mu t} = 0 \implies p_2(\mu) = (\mu + \omega_0)^2 = 0 \implies \mu_{1,2} = -\omega_0 \quad (5.5.131)$$

και από τη διπλή αυτή ρίζα  $\mu_{1,2} = -\omega_0$  τη γενική λύση  $u_h(t)$  της διαφορικής εξισώσεως (5.5.130)

$$u_h(t) = C_1 e^{-\omega_0 t} + C_2 t e^{-\omega_0 t} \implies u_h(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\omega_0 t}. \quad (5.5.132)$$

### Α5.6. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ EULER

Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε σε μια ειδική κατηγορία γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μη σταθερούς (μεταβλητούς) συντελεστές: στις **εξισώσεις Euler**, οι οποίες σπάνια καλούνται και **εξισώσεις Cauchy-Euler**. Η μη ομογενής διαφορική εξίσωση Euler  $n$ -τάξεως έχει τη μορφή

$$a_n x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_2 x^2 y''(x) + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = g(x) \quad (5.6.1)$$

με τα σύμβολα  $a_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) να δηλώνουν σταθερές (με  $a_n \neq 0$ ) και το δεξιό μέλος  $g(x)$  να είναι γνωστή συνάρτηση. Άγνωστη συνάρτηση είναι η συνάρτηση  $y(x)$ . Πρόκειται για μια γραμμική διαφορική εξίσωση  $n$ -τάξεως με μη σταθερούς (μεταβλητούς) συντελεστές της γενικής μορφής  $a_k x^k$  (μη σταθερούς, επειδή υπάρχει ο παράγοντας  $x^k$ ) και μη ομογενή (λόγω του δεξιού μέλους  $g(x)$ ).

Σ' αυτήν την ενότητα θα περιορίσουμε την προσοχή μας αποκλειστικά στην αντίστοιχη ομογενή διαφορική εξίσωση Euler (με  $g(x) \equiv 0$ ). Αυτή έχει προφανώς τη μορφή

$$a_n x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_2 x^2 y''(x) + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = 0 \quad (5.6.2)$$

(με  $a_n \neq 0$ ). Υποθέτουμε επίσης ότι  $x > 0$ . Για την επίλυσή της δεχόμαστε μερική λύση της μορφής

$$y_0(x) = x^\mu \implies y'_0(x) = \mu x^{\mu-1} \implies y''_0(x) = \mu(\mu-1)x^{\mu-2} \implies y'''_0(x) = \mu(\mu-1)(\mu-2)x^{\mu-3}, \quad (5.6.3)$$

κλπ. Στη λύση αυτή  $y_0(x) = x^\mu$  ο εκθέτης  $\mu$  είναι σταθερά που θέλουμε να την προσδιορίσουμε.

Προς το σκοπό αυτό απλά αντικαθιστούμε τη συνάρτηση  $y_0(x) = x^\mu$  και τις  $n$  πρώτες παραγώγους της  $y_0^{(k)}(x)$  στην ομογενή διαφορική εξίσωση Euler (5.6.2). Κατά τη διάρκεια αυτής της αντικατάστασης παρατηρούμε ότι ο εκθέτης του  $x$  σε κάθε παράγωγο ανωτέρας τάξεως είναι μειωμένος κατά μονάδα. Δηλαδή, ενώ η συνάρτηση  $y_0(x)$ , την οποία δοκιμάζουμε για μερική λύση, έχει  $x^\mu$ , η πρώτη παράγωγός της έχει  $x^{\mu-1}$ , η δεύτερη  $x^{\mu-2}$ , η τρίτη  $x^{\mu-3}$ , κλπ. Μειώνεται λοιπόν ο εκθέτης  $\mu$  του  $x$  κατά μονάδα σε κάθε επόμενη παράγωγο της συναρτήσεως  $y_0(x) = x^\mu$ . Από την άλλη πλευρά όμως ο όρος που περιέχει την πρώτη παράγωγο  $y'(x)$  στην ομογενή διαφορική εξίσωση Euler (5.6.2) έχει παράγοντα το  $x$ , ο όρος που περιέχει τη δεύτερη παράγωγο  $y''(x)$  το  $x^2$ , ο όρος που περιέχει την τρίτη παράγωγο  $y'''(x)$  το  $x^3$ , κλπ.

Είναι βέβαια προφανές ότι σε κάθε επόμενη παράγωγο ο εκθέτης του  $x$  στη λύση που δοκιμάζουμε  $y_0(x) = x^\mu$  είναι μειωμένος κατά μονάδα. Αυτό φαίνεται έτσι κι αλλιώς καθαρά και στις σχέσεις (5.6.3) με τις τρεις πρώτες παραγώγους της συναρτήσεως  $y_0(x) = x^\mu$ . Εντούτοις ο παράγοντας με τη δύναμη  $x^k$  του  $x$  στο συντελεστή κάθε όρου ξαναφέρει, επαναφέρει τη δύναμη  $x^\mu$  της λύσεως  $y_0(x)$  που έχουμε υποθέσει στην αρχική του τιμή: ακριβώς στην τιμή  $\mu$ . Παρατηρούμε έτσι ότι όταν θέσουμε  $y_0(x) = x^\mu$  για την άγνωστη συνάρτηση  $y(x)$  και τις  $n$  πρώτες παραγώγους της στην ομογενή διαφορική εξίσωση Euler (5.6.2), στο αποτέλεσμα ο όρος  $x^\mu$  θα είναι κοινός παράγοντας σε όλο το αριστερό μέλος. Για το λόγο αυτό η διαφορική εξίσωση Euler (5.6.1) ή (5.6.2) χαρακτηρίζεται μερικές φορές σαν **ισοδιάστατη**. Επομένως θα προκύψει μια εξίσωση της μορφής

$$p_n(\mu)x^\mu = 0, \quad \text{οπότε πρέπει να ισχύει} \quad p_n(\mu) = 0. \quad (5.6.4)$$

Προφανώς στην εξίσωση αυτή το σύμβολο  $p_n(\mu)$  δηλώνει το πολυώνυμο  $n$ -βαθμού που έχει προκύψει με την πιο πάνω αντικατάσταση:  $y_0(x) = x^\mu$  στην ομογενή διαφορική εξίσωση Euler (5.6.2). Ασφαλώς, αφού θέλουμε η διαφορική αυτή εξίσωση να ισχύει για κάθε τιμή του  $x$  στο διάστημα που μας ενδιαφέρει και έχουμε επίσης υποθέσει ότι  $x > 0$ , είναι απόλυτα αναγκαίο να ισχύει η δεύτερη πιο πάνω εξίσωση  $p_n(\mu) = 0$ .

Εντελώς ανάλογα με τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης, που εξετάσαμε λεπτομερώς στην προηγούμενη Ενότητα Α5.5, το πολυώνυμο  $p_n(\mu)$  καλείται και εδώ **χαρακτηριστικό πολυώνυμο**. Επίσης η αλγεβρική εξίσωση  $p_n(\mu) = 0$ , από την οποία θα προσδιορίσουμε τις κατάλληλες

τιμές του εκθέτη  $\mu$ , καλείται και εδώ **χαρακτηριστική εξίσωση**. Υπάρχει λοιπόν μια πάρα πολύ μεγάλη αναλογία ανάμεσα (α) στις ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές, για τις οποίες δοκιμάζουμε λύση της μορφής  $y_0(x) = e^{\mu x}$ , και (β) στις ομογενείς εξισώσεις Euler (με  $x > 0$ ), για τις οποίες δοκιμάζουμε λύση της μορφής  $y_0(x) = x^\mu = e^{\mu \ln x}$ . Και οι δύο καταλήγουν σε ένα χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $p_n(\mu)$  (σχεδόν ισοδύναμα σε μια χαρακτηριστική εξίσωση  $p_n(\mu) = 0$ ) με ρίζες τις ζητούμενες τιμές της σταθεράς  $\mu$ . Έτσι θα προκύψει λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως που εξετάζουμε: ή με σταθερούς συντελεστές ή Euler.

Σημειώνεται επίσης ότι με την αλλαγή της ανεξάρτητης μεταβλητής  $x = e^t$  (και  $t = \ln x$  με  $x > 0$ ) μπορεί να αποδειχθεί με την εκτέλεση των σχετικών παραγωγίσεων πως η τροποποιημένη άγνωστη συνάρτηση  $\hat{y}(t) = \hat{y}(\ln x) := y(x)$  επαληθεύει μια ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές αντί για την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση Euler (5.6.2). Από θεωρητικής απόψεως είναι πάρα πολύ ενδιαφέρον το συμπέρασμα αυτό: η μετατροπή μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως  $n$ -τάξεως με μη σταθερούς (μεταβλητούς) συντελεστές σε αντίστοιχη εξίσωση με σταθερούς συντελεστές. Πρακτικά όμως δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμο και έτσι η πιο πάνω άμεση διαδικασία επιλύσεως της ομογενούς διαφορικής εξισώσεως Euler προτιμάται έντονα. Αυτό συμβαίνει, επειδή η άμεση διαδικασία πλεονεκτεί σημαντικά από υπολογιστικής απόψεως σε σύγκριση με τη διαδικασία της αλλαγής ανεξάρτητης μεταβλητής  $x = e^t$ , συγκεκριμένα επειδή η αλλαγή μεταβλητής  $x = e^t$  προκαλεί σημαντική δυσκολία κατά τον υπολογισμό των παραγώγων.

Σε κάθε απλή ρίζα  $\mu_k$  της χαρακτηριστικής εξισώσεως  $p_n(\mu) = 0$  αντιστοιχεί η λύση  $y_k(x) = x^{\mu_k}$  της ομογενούς εξισώσεως Euler (5.6.2). Για άρρητες ή μιγαδικές ρίζες  $\mu_k$  χρησιμοποιείται σαν ορισμός της δυνάμεως  $x^{\mu_k}$  ο ορισμός

$$x^{\mu_k} = e^{\mu_k \ln x}. \quad (5.6.5)$$

Σε ρίζες  $\mu_k$  πολλαπλότητας  $m$  αντιστοιχούν οι  $m$  λύσεις

$$y_k(x) = x^{\mu_k}, \quad y_{k+1}(x) = x^{\mu_k} \ln x, \quad y_{k+2}(x) = x^{\mu_k} \ln^2 x, \quad \dots, \quad y_{k+m-1}(x) = x^{\mu_k} \ln^{m-1} x. \quad (5.6.6)$$

Ξαναυπενθυμίζουμε ότι έχουμε ήδη υποθέσει πως  $x > 0$ .

Όλες αυτές οι  $n$  συναρτήσεις  $y_k(x)$  για τις  $n$ -ρίζες  $\mu_k$  της χαρακτηριστικής εξισώσεως  $p_n(\mu) = 0$  (απλές και πολλαπλές, πραγματικές και μιγαδικές) αποδεικνύεται ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητες μεταξύ τους με μη μηδενική σχετική ορίζουσα Wronski  $W[y_1, y_2, \dots, y_n] \equiv W(x)$ . Δημιουργούν έτσι ένα **θεμελιώδες σύστημα λύσεων** (ή ισοδύναμα ένα **θεμελιώδες σύνολο λύσεων**) από  $n$  μερικές λύσεις  $y_k(x)$  (με  $k = 1, 2, \dots, n$ ) ειδικά στις πολλαπλές ρίζες με την έννοια των λύσεων (5.6.6). Άρα η γενική λύση  $y_g(x)$  της ομογενούς εξισώσεως Euler (5.6.2) θα είναι ο γραμμικός συνδυασμός των μερικών αυτών λύσεων  $y_k(x)$ , δηλαδή θα έχει τη μορφή

$$y_g(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_{n-1} y_{n-1}(x) + C_n y_n(x) \quad \text{με} \quad x > 0. \quad (5.6.7)$$

▼ **Παράδειγμα Α5.10:** Να βρεθεί η γενική λύση της ομογενούς εξισώσεως Euler δευτέρας τάξεως

$$a_2 x^2 y''(x) + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = 0 \quad \text{με} \quad a_2 \neq 0 \quad \text{και} \quad x > 0. \quad (5.6.8)$$

**Λύση:** Πρόκειται για ομογενή διαφορική εξίσωση Euler φυσικά με μη σταθερούς συντελεστές: τους συντελεστές  $a_2 x^2$ ,  $a_1 x$  και  $a_0$ . (Αφού οι δύο πρώτοι είναι μη σταθεροί, ολόκληρη η παρούσα γραμμική διαφορική εξίσωση χαρακτηρίζεται με μη σταθερούς συντελεστές.) Φυσικά δε δοκιμάζουμε για μερική λύση  $y_0(x)$  την εκθετική συνάρτηση  $y_0(x) = e^{\mu x}$ , όπως είχαμε κάνει στις ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές. Εδώ, σε εξίσωση Euler δοκιμάζουμε προφανώς μερική λύση της μορφής  $y_0(x) = x^\mu$ , όπως ήδη αναφέραμε στη σχέση (5.6.3), οπότε

$$y_0(x) = x^\mu \implies y_0'(x) = \mu x^{\mu-1} \implies y_0''(x) = \mu(\mu-1)x^{\mu-2}. \quad (5.6.9)$$



Αντικαθιστώντας τώρα τούτη τη συνάρτηση  $y_0(x) = x^\mu$  και τις δύο αυτές πρώτες παραγώγους της  $y_0'(x)$  και  $y_0''(x)$  στην ομογενή διαφορική εξίσωση Euler (5.6.8) που μας δόθηκε, παίρνουμε

$$a_2x^2[\mu(\mu - 1)x^{\mu-2}] + a_1x(\mu x^{\mu-1}) + a_0x^\mu = 0 \implies [a_2\mu(\mu - 1) + a_1\mu + a_0]x^\mu = 0. \quad (5.6.10)$$

Άρα το δευτεροβάθμιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $p_2(\mu)$  θα είναι τώρα το πολυώνυμο

$$p_2(\mu) = a_2\mu(\mu - 1) + a_1\mu + a_0 \quad \text{και ισοδύναμα} \quad p_2(\mu) = a_2\mu^2 + (a_1 - a_2)\mu + a_0. \quad (5.6.11)$$

Επίσης η αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση  $p_2(\mu) = 0$  θα είναι η σχετική εξίσωση

$$a_2\mu(\mu - 1) + a_1\mu + a_0 = 0 \quad \text{και ισοδύναμα} \quad a_2\mu^2 + (a_1 - a_2)\mu + a_0 = 0. \quad (5.6.12)$$

Διακρίνουμε τώρα τρεις περιπτώσεις: (α) Αν η χαρακτηριστική εξίσωση  $p_2(\mu) = 0$  έχει δύο απλές πραγματικές ρίζες  $\mu_1$  και  $\mu_2$  ( $\mu_1 \neq \mu_2$ ), τότε η γενική λύση  $y_g(x)$  της παρούσας ομογενούς διαφορικής εξισώσεως Euler δευτέρας τάξεως θα είναι της μορφής

$$y_g(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = C_1x^{\mu_1} + C_2x^{\mu_2}. \quad (5.6.13)$$

(β) Αντίθετα, αν η ίδια χαρακτηριστική εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα  $\mu_1$  (με πολλαπλότητα  $m = 2$ ), τότε μπορεί να αποδειχθεί (π.χ. με τη μέθοδο του υποβιβασμού της τάξεως της Ενότητας Α5.4) ότι η γενική λύση  $y_g(x)$  της ίδιας ομογενούς διαφορικής εξισώσεως Euler θα είναι της μορφής

$$y_g(x) = C_1y_1(x) + C_2y_1(x) \ln x = C_1x^{\mu_1} + C_2x^{\mu_1} \ln x = (C_1 + C_2 \ln x)x^{\mu_1}. \quad (5.6.14)$$

(γ) Τέλος, αν οι ρίζες  $\mu_1$  και  $\mu_2$  της χαρακτηριστικής εξισώσεως είναι συζυγείς μιγαδικές, δηλαδή αν

$$\mu_1 = \lambda + i\omega \quad \text{και} \quad \mu_2 = \lambda - i\omega \quad \text{με} \quad \omega \neq 0 \quad \text{και} \quad i = \sqrt{-1}, \quad (5.6.15)$$

τότε θα ισχύει η σχέση

$$y_1(x) = x^{\mu_1} = x^{\lambda+i\omega} = e^{(\lambda+i\omega)\ln x} = e^{\lambda \ln x} e^{i\omega \ln x} = x^\lambda [\cos(\omega \ln x) + i \sin(\omega \ln x)]. \quad (5.6.16)$$

Θα ισχύει επίσης και η απόλυτα ανάλογη συζυγής μιγαδική σχέση (τώρα με  $-i$  στη θέση του  $i$ )

$$y_2(x) = x^{\mu_2} = x^{\lambda-i\omega} = e^{(\lambda-i\omega)\ln x} = e^{\lambda \ln x} e^{-i\omega \ln x} = x^\lambda [\cos(\omega \ln x) - i \sin(\omega \ln x)], \quad (5.6.17)$$

που δίνει συζυγή μιγαδική λύση  $y_2(x)$ . Σημειώνεται βέβαια ότι στις δύο αυτές λύσεις  $y_1(x)$  και  $y_2(x)$  πήραμε υπόψη τους γνωστούς μας τύπους του Euler  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  και  $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ , δηλαδή τους τύπους (1.5.3) και (1.5.4) της Παραγράφου Α1.5.1 του Κεφαλαίου Α1. ▲

▼ **Παράδειγμα Α5.11:** Να βρεθεί η γενική λύση της ομογενούς εξισώσεως Euler δευτέρας τάξεως

$$x^2y'' - 3xy' - 5y = 0 \quad \text{πάλι με} \quad x > 0. \quad (5.6.18)$$

**Λύση:** Δεχόμαστε ξανά λύση της μορφής  $y_0(x) = x^\mu$  και χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (5.6.9) του προηγούμενου παραδείγματος. Από την πιο πάνω διαφορική εξίσωση προκύπτει έτσι η εξίσωση

$$x^2[\mu(\mu - 1)x^{\mu-2}] - 3x(\mu x^{\mu-1}) - 5x^\mu = 0 \implies [\mu(\mu - 1) - 3\mu - 5]x^\mu = 0. \quad (5.6.19)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση  $p_2(\mu) = 0$  θα είναι η ακόλουθη δευτεροβάθμια αλγεβρική εξίσωση:

$$p_2(\mu) = \mu(\mu - 1) - 3\mu - 5 = 0 \implies \mu^2 - 4\mu - 5 = 0. \quad (5.6.20)$$

Οι ρίζες της  $\mu_1$  και  $\mu_2$  είναι απλές ( $\mu_1 \neq \mu_2$ ), πραγματικές και έχουν προφανώς τις τιμές

$$\mu_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - (-5)} = 2 \pm \sqrt{9} = 2 \pm 3 \implies \mu_1 = 5 \text{ και } \mu_2 = -1. \quad (5.6.21)$$

Άρα η γενική λύση  $y_g(x)$  της παρούσας ομογενούς διαφορικής εξίσωσης Euler θα έχει τη μορφή

$$y_g(x) = C_1 x^{\mu_1} + C_2 x^{\mu_2} = C_1 x^5 + \frac{C_2}{x} \quad \text{με } x > 0. \quad (5.6.22)$$

Η επαλήθευση της γενικής αυτής λύσεως  $y_g(x)$  αποτελεί πολύ εύκολη εργασία και παραλείπεται. ▲

Μια κάπως δυσκολότερη διαφορική εξίσωση Euler (τετάρτης τάξεως και μη ομογενής) που παρουσιάζεται στο πρόβλημα της κάμψεως συνήθους κυκλικής πλάκας υπό ομοιόμορφη κάθετη καταμεμημένη φόρτιση  $p_0$  θα εξετασθεί σαν εφαρμογή στην Ενότητα Α8.1 του Κεφαλαίου Α8.

### Α5.7. ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Στις δύο προηγούμενες ενότητες αναφερθήκαμε εκτενώς σε ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε σε δύο πολύ βασικές και γενικές ιδιότητες των μη ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Θα τις διατυπώσουμε σε μορφή θεωρημάτων:

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ:** Σε μια μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (είτε με σταθερούς είτε με μη σταθερούς συντελεστές)  $n$ -τάξεως της γενικής μορφής

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x) \quad (5.7.1)$$

η διαφορά  $y_d(x) = y_1(x) - y_2(x)$  δύο οποιωνδήποτε λύσεων της  $y_1(x)$  και  $y_2(x)$  αποτελεί λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0. \quad (5.7.2)$$

**Απόδειξη:** Θα παραθέσουμε την απόδειξη αυτή μόνο στην αρκετά ειδική περίπτωση μιας μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δευτέρας τάξεως της γενικής μορφής

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x) \quad (5.7.3)$$

με αντίστοιχη ομογενή διαφορική εξίσωση (με  $g(x) \equiv 0$ ) την εξίσωση

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0. \quad (5.7.4)$$

Θεωρούμε λοιπόν δύο οποιεσδήποτε λύσεις  $y_1(x)$  και  $y_2(x)$  της πιο πάνω μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δευτέρας τάξεως (5.7.3). Αφού πρόκειται για λύσεις, θα έχουμε

$$a_2(x)y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_0(x)y_1(x) = g(x), \quad (5.7.5)$$

$$a_2(x)y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_0(x)y_2(x) = g(x). \quad (5.7.6)$$

Είναι τώρα πια προφανές πως πρέπει να αφαιρέσουμε κατά μέλη τις δύο αυτές σχέσεις, ώστε να πάρουμε μηδενικό δεξιό μέλος:  $g(x) - g(x) = 0$ . Πραγματικά με την αφαίρεση αυτή βρίσκουμε

$$a_2(x)[y_1''(x) - y_2''(x)] + a_1(x)[y_1'(x) - y_2'(x)] + a_0(x)[y_1(x) - y_2(x)] = 0. \quad (5.7.7)$$

Γνωρίζουμε όμως πολύ καλά από τις παραγώγους στο Διαφορικό Λογισμό ότι η παράγωγος (οποιασδήποτε τάξεως) της διαφοράς δύο επαρκώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων είναι ίση με τη διαφορά των αντίστοιχων παραγώγων. Επομένως και εδώ θα ισχύουν οι τύποι

$$[y_1(x) - y_2(x)]' = y_1'(x) - y_2'(x) \quad \text{και} \quad [y_1(x) - y_2(x)]'' = y_1''(x) - y_2''(x). \quad (5.7.8)$$

Χρησιμοποιώντας τους τύπους αυτούς στη σχέση (5.7.7), που μόλις αποδείξαμε, συνάγουμε ότι

$$a_2(x)[y_1(x) - y_2(x)]'' + a_1(x)[y_1(x) - y_2(x)]' + a_0(x)[y_1(x) - y_2(x)] = 0. \quad (5.7.9)$$

Αυτό δηλώνει σαφώς ότι η διαφορά

$$y_d(x) := y_1(x) - y_2(x) \quad (5.7.10)$$

των δύο λύσεων  $y_1(x)$  και  $y_2(x)$  της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (5.7.3) είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.7.4). Για ακόμη μεγαλύτερη σαφήνεια με τη χρήση του ορισμού (5.7.10) της διαφοράς  $y_d(x)$  ξαναγράφουμε τη σχέση (5.7.9) και στην πιο σύντομη μορφή της

$$a_2(x)y_d''(x) + a_1(x)y_d'(x) + a_0(x)y_d(x) = 0. \quad (5.7.11)$$

Επομένως η απόδειξη του θεωρήματος έχει συμπληρωθεί για δευτέρας τάξεως μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Τώρα η γενίκευσή της στην περίπτωση μη ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων  $n$ -τάξεως είναι απόλυτα ανάλογη και δεν παρουσιάζει καμία δυσκολία.  $\square$

Άμεση συνέπεια του θεωρήματος αυτού αποτελεί το επόμενο και πιο σημαντικό θεώρημα:

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ:** Σε μια μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση της μορφής (5.7.1) η γενική λύση της  $y_g(x)$  θα είναι το άθροισμα της γενικής λύσεως  $y_h(x)$  της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.7.2) συν μια οποιαδήποτε μερική λύση  $y_p(x)$  της αρχικής μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.7.1), δηλαδή

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x). \quad (5.7.12)$$

**Απόδειξη:** Απλά εφαρμόζουμε το πρώτο θεώρημα εδώ για τις δύο λύσεις  $y_1(x) = y_g(x)$  και  $y_2(x) = y_p(x)$ , δηλαδή τη γενική λύση  $y_g(x)$  και μια μερική λύση  $y_p(x)$  της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.7.1). Επομένως, σύμφωνα με το πρώτο θεώρημα η διαφορά τους  $y_1(x) - y_2(x) = y_g(x) - y_p(x)$  θα είναι οποιαδήποτε λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.7.2).

Αλλά κάθε λύση μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης, όπως είναι εδώ η διαφορική εξίσωση (5.7.2), εμπεριέχεται στη γενική λύση της  $y_h(x)$ , που περιλαμβάνει  $n$  αυθαίρετες σταθερές. Άρα κι η διαφορά  $y_g(x) - y_p(x)$  πρέπει κι αυτή να είναι της μορφής  $y_h(x)$ , δηλαδή  $y_g(x) - y_p(x) = y_h(x)$ . Επομένως, μεταφέροντας το  $y_p(x)$  δεξιά, παίρνουμε  $y_g(x) = y_h(x) + y_p(x)$  κι ισχύει η σχέση (5.7.12).

Και αντίστροφα μπορεί να αποδειχθεί άμεσα, δηλαδή με αντικατάσταση στη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (5.7.1), ότι η συνάρτηση  $y_g(x) = y_h(x) + y_p(x)$  αποτελεί λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης. Σημειώνουμε μάλιστα ότι η γενική λύση  $y_h(x)$  της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.7.2) περιέχει, όπως γνωρίζουμε,  $n$  αυθαίρετες σταθερές έχοντας τη μορφή

$$y_h(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_ny_n(x) \quad (5.7.13)$$

με  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων με μη μηδενική ορίζουσα Wronski. Επομένως από τη σχέση (5.7.12) συνάγεται αμέσως ότι και η λύση  $y_g(x)$  της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.7.1) θα περιέχει και αυτή τις ίδιες αυθαίρετες σταθερές  $C_k$  παίρνοντας τη μορφή

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_ny_n(x) + y_p(x). \quad (5.7.14)$$

Άρα είναι πραγματικά η γενική λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.7.1) έχοντας μάλιστα τη δυνατότητα να επαληθεύσει και οποιοσδήποτε αρχικές συνθήκες έχουν τεθεί σε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών με κατάλληλη επιλογή των  $n$  σταθερών  $C_k$ . Αυτό ισχύει, επειδή οι λύσεις  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  αποτελούν ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.7.2) με μη μηδενική ορίζουσα Wronski. Άρα το σχετικό σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (για τις αρχικές συνθήκες) θα έχει μία και μόνο μία λύση για τις  $n$  σταθερές  $C_k$ .  $\square$

## Α5.8. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

### Α5.8.1. Εισαγωγή στη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών

Η μέθοδος των **προσδιοριστέων συντελεστών** είναι μια εξαιρετικά χρήσιμη και διαδεδομένη μέθοδος ευρέσεως μιας **μερικής λύσεως** (ή **ειδικής λύσεως**)  $y_p(x)$  μιας μεγάλης κατηγορίας μη ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές  $a_k$  της μορφής

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = g(x) \quad \text{με} \quad a_n \neq 0. \quad (5.8.1)$$

(Σημειώνεται ότι πολύ σπάνια η μέθοδος των **προσδιοριστέων συντελεστών** καλείται και μέθοδος **των απροσδιόριστων συντελεστών**.)

Συγκεκριμένα η μέθοδος αυτή είναι εφαρμόσιμη όσες φορές το δεξιό μέλος  $g(x)$  αυτής της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως με σταθερούς συντελεστές είναι και το ίδιο λύση μιας διαφορετικής γραμμικής διαφορικής εξισώσεως επίσης με σταθερούς συντελεστές, τώρα όμως ομογενούς, ή άθροισμα τέτοιων λύσεων. Προς το σκοπό αυτό θα πρέπει το δεξιό μέλος  $g(x)$  της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως (5.8.1) να έχει τη γενική μορφή

$$g(x) = [P_{m1}(x) \cos bx + P_{m2}(x) \sin bx] e^{cx}, \quad (5.8.2)$$

όπου  $P_{m1}(x)$  και  $P_{m2}(x)$  είναι δύο γνωστά πολυώνυμα  $m$ -βαθμού (το ένα από αυτά ίσως και μικρότερου βαθμού) και  $b$  και  $c$  είναι γνωστές σταθερές, ή να είναι άθροισμα όρων αυτής της μορφής.

Πολύ σπάνια θα έχουμε προς επίλυση μια μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση  $n$ -τάξεως με τόσο πολύπλοκο δεξιό μέλος  $g(x)$ . Συνήθως έχουμε πολύ απλούστερα γνωστά δεξιά μέλη  $g(x)$ , όπως είναι τα εξής:

$$g_1(x) = d e^{cx}, \quad g_2(x) = d \cos bx, \quad g_3(x) = d \sin bx, \quad g_4(x) = P_{m1}(x). \quad (5.8.3)$$

Δηλαδή γενικά έχουμε σαν δεξιό μέλος  $g(x)$  στη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (5.8.1) μια εκθετική συνάρτηση, μια απλή τριγωνομετρική συνάρτηση ή ένα απλό πολυώνυμο. Φυσικά οι απλές περιπτώσεις (5.8.3) για το δεξιό μέλος  $g(x)$  είναι ειδικές περιπτώσεις της πολύ πιο γενικής μορφής του (5.8.2). Για παράδειγμα, η πιο πάνω εκθετική μορφή  $g_1(x) = d e^{cx}$  προκύπτει από τη γενική μορφή (5.8.2) με  $P_{m1}(x) = d$  και  $b = 0$ , οπότε  $\cos bx = \cos 0x = 1$  και  $\sin bx = \sin 0x = 0$ .

Μερικές φορές το δεξιό μέλος  $g(x)$  της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως  $n$ -τάξεως και με σταθερούς συντελεστές (5.8.1) είναι άθροισμα όρων  $g_k(x)$  της γενικής μορφής (5.8.2). Και στην περίπτωση αυτή είναι εφαρμόσιμη η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών, όπως θα έχουμε την ευκαιρία να δούμε παρακάτω.

Αρκετά όμως φλυαρήσαμε ως εδώ. Ας προχωρήσουμε τώρα στην παρουσίαση της μεθόδου των προσδιοριστέων συντελεστών ξεκινώντας από μια πολύ απλή περίπτωση και προχωρώντας βαθμιαία προς λίγο συνθετότερες περιπτώσεις. Στη μη γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές (5.8.1) υποθέτουμε συνεχώς για τον πρώτο συντελεστή  $a_n$  πως  $a_n \neq 0$ .

### Α5.8.2. Δεξιό μέλος εκθετικής μορφής

Στην παράγραφο αυτή εξετάζουμε τη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές (5.8.1) με δεξιό μέλος της απλής εκθετικής μορφής  $g(x) = d e^{cx}$ . Έχουμε δηλαδή τη διαφορική εξίσωση

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = d e^{cx} \quad (5.8.4)$$

με όλους τους συντελεστές  $a_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) στο αριστερό μέλος γνωστές σταθερές και επίσης τις σταθερές  $c$  και  $d$  στο δεξιό μέλος και αυτές γνωστές. Σχεδόν πάντα είναι και πραγματικές.

Τονίζουμε με όση έμφαση μπορούμε ότι η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών που εξετάζουμε στην ενότητα αυτή αφορά σε μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς (όχι με μεταβλητούς) συντελεστές.

Και τί πρέπει να κάνουμε τώρα; Σκεφτόμαστε: Ως προς τη γενική λύση  $y_h(x)$  της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως με σταθερούς συντελεστές, δηλαδή της εξισώσεως

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \quad (5.8.5)$$

(με  $g(x) \equiv 0$ ), απλά την προσδιορίζουμε με τη γνωστή μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως  $y_0(x) = e^{\mu x}$ , που την αναπτύξαμε στην Ενότητα Α5.5. Ξέροντας τη γενική λύση  $y_h(x)$  της ομογενούς διαφορικής εξισώσεως (5.8.5), αναζητούμε εδώ μια μερική λύση  $y_p(x)$  της μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως (5.8.4) και θα την προσδιορίσουμε εδώ με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών. Τότε η γενική λύση  $y_g(x)$  της μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως (5.8.4) θα είναι προφανώς, όπως έχουμε ήδη εξηγήσει στην προηγούμενη Ενότητα Α5.7, το άθροισμα ( $\alpha$ ) της γενικής λύσεως  $y_h(x)$  της ομογενούς διαφορικής εξισώσεως και ( $\beta$ ) μιας οποιασδήποτε μερικής λύσεως  $y_p(x)$  της μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως. Δηλαδή θα ισχύει η σχέση

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x). \quad (5.8.6)$$

Εδώ για τον προσδιορισμό με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών μιας (μία αρκεί!) μερικής λύσεως  $y_p(x)$  της μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως με σταθερούς συντελεστές (5.8.4) κάνουμε τον εξής συλλογισμό: Η εκθετική συνάρτηση  $e^{cx}$  στο δεξιό μέλος έχει σαν πρώτη παράγωγο τη συνάρτηση  $ce^{cx}$ , σαν δεύτερη παράγωγο τη συνάρτηση  $c^2 e^{cx}$  και γενικά σαν  $k$ -παράγωγο τη συνάρτηση

$$\frac{d^k}{dx^k} e^{cx} = c^k e^{cx} \quad \text{με } k = 1, 2, \dots \quad (5.8.7)$$

Άρα όλες οι παράγωγοι της εκθετικής συναρτήσεως  $e^{cx}$  είναι η ίδια ακριβώς εκθετική συνάρτηση  $e^{cx}$ , αλλά πολλαπλασιασμένη επί σταθερά. Όμως και στο δεξιό μέλος της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως με σταθερούς συντελεστές (5.8.4) έχουμε την ίδια ακριβώς εκθετική συνάρτηση  $e^{cx}$ . Είναι επομένως προφανές ότι μια μερική λύση  $y_p(x)$  αυτής της διαφορικής εξισώσεως θα έχει πάλι ανάλογη εκθετική μορφή πολλαπλασιασμένη επί μία κατάλληλη σταθερά: έναν προσδιοριστέο συντελεστή  $A$ . Υποθέτουμε έτσι απόλυτα εύλογα μερική λύση  $y_p(x)$  της μορφής

$$y_p(x) = Ae^{cx}. \quad (5.8.8)$$

Στη συνέχεια απλά θα επιδιώξουμε τον προσδιορισμό του προς το παρόν άγνωστου προσδιοριστέου συντελεστή  $A$  στη μερική αυτή λύση  $y_p(x)$ . Δηλαδή θα προσδιορίσουμε το συντελεστή αυτό  $A$ . Γι' αυτό και η παρούσα μέθοδος καλείται μέθοδος **των προσδιοριστέων συντελεστών** (και σπάνια, όπως ήδη αναφέραμε, **μέθοδος των απροσδιόριστων συντελεστών**). Εντούτοις στην απλή μας αυτή περίπτωση έχουμε ένα μόνο προσδιοριστέο συντελεστή: τον  $A$ . Παρακάτω θα συναντήσουμε πολλές περιπτώσεις με περισσότερους από έναν προσδιοριστέους συντελεστές.

Και τί απομένει τώρα; Μα φυσικά να προσδιορίσουμε τον προσδιοριστέο συντελεστή  $A$  στη μερική λύση (5.8.8). Προς το σκοπό αυτό πρέπει απλά να αντικαταστήσουμε τη μερική αυτή λύση  $y_p(x) = Ae^{cx}$ , την οποία μόλις υποθέσαμε στη σχέση (5.8.8), στην αρχική μας μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές (5.8.4), την επαναλαμβάνουμε

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = de^{cx}. \quad (5.8.9)$$

Με την αντικατάσταση αυτή προκύπτει αμέσως η εξίσωση

$$a_n A c^n e^{cx} + a_{n-1} A c^{n-1} e^{cx} + \dots + a_2 A c^2 e^{cx} + a_1 A c e^{cx} + a_0 A e^{cx} = de^{cx}. \quad (5.8.10)$$

Την ξαναγράφουμε και στην ισοδύναμη, αλλά απλοποιημένη μορφή της

$$A(a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_2 c^2 + a_1 c + a_0) e^{cx} = d e^{cx}. \quad (5.8.11)$$

Τελικά απλοποιούμε και τον εκθετικό παράγοντα  $e^{cx}$  (που δε μηδενίζεται) και στα δύο μέλη και γράφουμε την αμέσως πιο πάνω σχέση και στην τελική της μορφή

$$A(a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_2 c^2 + a_1 c + a_0) = d. \quad (5.8.12)$$

Τώρα λύνουμε απλά ως προς τον προσδιοριστέο συντελεστή  $A$ . Έτσι βρίσκουμε ότι

$$A = \frac{d}{a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_2 c^2 + a_1 c + a_0} \quad (5.8.13)$$

υποθέτοντας τον παρονομαστή διάφορο του μηδενός.

Προσδιορίσαμε έτσι το μέχρι τώρα προσδιοριστέο (ή έστω απροσδιόριστο) συντελεστή  $A$  στη μερική λύση  $y_p(x) = A e^{cx}$ , που σωστά υιοθετήσαμε στη σχέση (5.8.8). Άρα ξέρουμε τη μερική αυτή λύση  $y_p(x)$ . Την προσθέτουμε στη γενική λύση  $y_h(x)$  της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.8.5) και προσδιορίζουμε έτσι τη γενική λύση  $y_g(x) = y_h(x) + y_p(x)$  της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.8.4). Αυτό είναι όλο! Επαναλαμβάνουμε ότι η γενική λύση  $y_h(x)$  της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.8.5) προσδιορίζεται με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως, όπως την αναπτύξαμε στην Ενότητα Α5.5. Παρατηρούμε μάλιστα ότι στον παρονομαστή της τελικής σχέσεως (5.8.13) για το συντελεστή  $A$  που προσδιορίσαμε έχουμε απλά το χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $p_n(\mu)$  της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.8.5) για  $\mu = c$ . Επομένως μπορούμε να γράψουμε την ίδια σχέση (5.8.13) και στην πιο σύντομη μορφή

$$A = \frac{d}{p_n(c)}. \quad (5.8.14)$$

Αν μάλιστα χρησιμοποιήσουμε και το διαφορικό τελεστή  $D$  για την παράγωγο  $d/dx$ , μπορούμε να γράψουμε την αρχική μας μη ομογενή διαφορική εξίσωση (5.8.4) στην ισοδύναμη μορφή της

$$a_n D^n y(x) + a_{n-1} D^{n-1} y(x) + \dots + a_2 D^2 y(x) + a_1 D y(x) + a_0 y(x) = d e^{cx}. \quad (5.8.15)$$

Η ίδια διαφορική εξίσωση γράφεται και ακόμη πιο απλά στη μορφή

$$p_n(D) y(x) = d e^{cx} \quad (5.8.16)$$

με το «πολυώνυμο»  $p_n(D)$  του διαφορικού τελεστή  $D$  στο αριστερό μέλος. (Δεν είναι όμως αληθινό αλγεβρικό πολυώνυμο: γι' αυτό και θέσαμε τα εισαγωγικά στη λέξη «πολυώνυμο»). Φυσικά πρόκειται για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $p_n(\mu)$  της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.8.5), που το συναντήσαμε στη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως. Εδώ όμως το συναντάμε σαν  $p_n(D)$  στη διαφορική εξίσωση (5.8.16) και σαν  $p_n(c)$  στον προσδιορισμό (5.8.14) του προσδιοριστέου συντελεστή  $A$ . Ας προχωρήσουμε τώρα και σε ένα παράδειγμα της μεθόδου.

▼ **Παράδειγμα Α5.12:** Να υπολογισθεί η γενική λύση  $y_g(x)$  της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' - 3y' + 2y = 3e^{4x}. \quad (5.8.17)$$

**Λύση:** Πρόκειται για μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές και δεξιό μέλος εκθετικής μορφής  $d e^{cx}$  με  $d = 3$  και  $c = 4$ . Θα υπολογίσουμε τη ζητούμενη γενική λύση της  $y_g(x)$  σαν άθροισμα της γενικής λύσεως  $y_h(x)$  της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \quad (5.8.18)$$

και μιας μερικής λύσεως (ή ειδικής λύσεως)  $y_p(x)$  της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.8.17) που μας δόθηκε, συγκεκριμένα, επαναλαμβάνουμε

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x). \quad (5.8.19)$$

Για την ομογενή διαφορική εξίσωση (5.8.18) θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης  $y_0(x) = e^{\mu x}$  σύμφωνα με την Ενότητα Α5.5. Με την αντικατάσταση αυτή προκύπτει

$$\mu^2 e^{\mu x} - 3\mu e^{\mu x} + 2e^{\mu x} = 0 \implies (\mu^2 - 3\mu + 2)e^{\mu x} = 0 \implies p_2(\mu) = \mu^2 - 3\mu + 2 = 0. \quad (5.8.20)$$

Οι δύο ρίζες  $\mu_1$  και  $\mu_2$  της δευτεροβάθμιας αυτής χαρακτηριστικής εξίσωσης  $p_2(\mu) = 0$  προκύπτουν εύκολα: είναι οι  $\mu_1 = 1$  και  $\mu_2 = 2$ . Άρα η γενική λύση  $y_h(x)$  της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (5.8.18) είναι η εξής διπαραμετρική οικογένεια καμπύλων:

$$y_h(x) = C_1 e^{\mu_1 x} + C_2 e^{\mu_2 x} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} \quad (5.8.21)$$

με τα  $C_1$  και  $C_2$  δύο αυθαίρετες σταθερές.

Προχωράμε τώρα στη μερική λύση  $y_p(x)$  της αρχικής μας διαφορικής εξίσωσης: της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (5.8.17). Η εύρεση μιας μερικής λύσεως  $y_p(x)$  μιας αρκεί. Προς το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε όσα αναφέραμε προηγουμένως στην παρούσα μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών. Υποθέτουμε εύλογα μια μερική λύση  $y_p(x)$  της εκθετικής μορφής

$$y_p(x) = Ae^{4x} \quad (5.8.22)$$

με το  $A$  προσδιοριστέο συντελεστή. Επειδή η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση (5.8.17) που μας δόθηκε είναι δευτέρας τάξεως, παραγωγίζουμε δύο φορές ως προς  $x$  και βρίσκουμε

$$y_p'(x) = 4Ae^{4x} \quad \text{και} \quad y_p''(x) = 16Ae^{4x}. \quad (5.8.23)$$

Αντικαθιστούμε τώρα τη μερική λύση  $y_p(x)$  και τις δύο πρώτες παραγώγους της  $y_p'(x)$  και  $y_p''(x)$  στη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (5.8.17). Προκύπτει αμέσως

$$16Ae^{4x} - 12Ae^{4x} + 2Ae^{4x} = 3e^{4x} \quad (5.8.24)$$

και με απλοποίηση στο αριστερό μέλος

$$6Ae^{4x} = 3e^{4x}, \quad \text{οπότε} \quad 6A = 3 \implies A = \frac{1}{2}. \quad (5.8.25)$$

Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να είχαμε γράψει την αριστερή πιο πάνω εξίσωση και στη μορφή

$$(6A - 3)e^{4x} = 0, \quad \text{οπότε} \quad 6A - 3 = 0 \implies A = \frac{1}{2}, \quad (5.8.26)$$

όπως και προηγουμένως. Ίσως όμως είναι λίγο πιο επίσημα έτσι: Για να ισχύει εκ ταυτότητας η σχέση  $(6A - 3)e^{4x} = 0$ , θα πρέπει ο συντελεστής  $6A - 3$  της εκθετικής συναρτήσεως  $e^{4x}$  να μηδενίζεται, δηλαδή θα πρέπει να ισχύει  $A = \frac{1}{2}$ , όπως ήδη βρήκαμε.

Επομένως μια μερική λύση  $y_p(x)$  της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.8.17) είναι η λύση

$$y_p(x) = Ae^{4x} = \frac{1}{2} e^{4x}. \quad (5.8.27)$$

Κατά συνέπεια, με βάση τη σχέση (5.8.19) η γενική λύση  $y_g(x)$  της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (5.8.17) θα είναι το άθροισμα ( $\alpha$ ) της γενικής λύσεως  $y_h(x)$  της αντίστοιχης

ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.8.18), που δίνεται εδώ από τη σχέση (5.8.21), και (β) μιας μερικής λύσεως  $y_p(x)$  της αρχικής μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.8.17). Έτσι θα έχουμε

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^{4x}. \quad (5.8.28)$$

Είναι εύλογη η λύση αυτή και περιέχει και δύο αυθαίρετες σταθερές: τις  $C_1$  και  $C_2$ , όπως πρέπει να συμβαίνει σε μια διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως. Αν είχαμε μάλιστα και δύο αρχικές συνθήκες (ή δύο συνοριακές συνθήκες), θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε τις δύο αυτές σταθερές και να έχουμε έτσι τη λύση του σχετικού προβλήματος αρχικών τιμών (ή αντίστοιχα συνοριακών τιμών).

Γενικά αναθέτουμε το καθήκον της επαληθεύσεως της λύσεως μιας διαφορικής εξίσωσης στον αναγνώστη και στην αναγνώστρια Πολιτικό Μηχανικό των διδακτικών αυτών βιβλίων. Ας κάνουμε όμως εδώ, στο πρώτο παράδειγμα της μεθόδου των προσδιοριστέων συντελεστών, μια εξαίρεση επαληθεύοντας πλήρως τη γενική λύση  $y_g(x)$  στη σχέση (5.8.28).

Για την επαλήθευση αυτή απλά παραγωγίζουμε δύο φορές τη λύση που βρήκαμε και παίρνουμε

$$y'_g(x) = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} + 2e^{4x} \implies y''_g(x) = C_1 e^x + 4C_2 e^{2x} + 8e^{4x}. \quad (5.8.29)$$

Αντικαθιστούμε τώρα τη λύση  $y_g(x)$  και τις δύο αυτές παραγώγους της  $y'_g(x)$  και  $y''_g(x)$  στην αρχική μη ομογενή διαφορική εξίσωση (5.8.17): στην εξίσωση

$$y'' - 3y' + 2y = 3e^{4x}, \quad (5.8.30)$$

που λύσαμε. Προκύπτει

$$(C_1 e^x + 4C_2 e^{2x} + 8e^{4x}) - 3(C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} + 2e^{4x}) + 2(C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^{4x}) = 3e^{4x} \quad (5.8.31)$$

και με αναδιάταξη των όρων στο αριστερό μέλος

$$(1 - 3 + 2)C_1 e^x + (4 - 6 + 2)C_2 e^{2x} + (8 - 6 + 1)e^{4x} = 3e^{4x} \implies 3e^{4x} = 3e^{4x} \implies 0 = 0, \quad (5.8.32)$$

αφού  $1 - 3 + 2 = 0$ ,  $4 - 6 + 2 = 0$  και  $8 - 6 + 1 = 3$ . Άρα είναι πλήρης η επαλήθευση της γενικής λύσεως  $y_g(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^{4x}$  που βρήκαμε και είμαστε ευχαριστημένοι για το γεγονός αυτό! ▲

### A5.8.3. Αναγωγή σε ομογενή διαφορική εξίσωση

Η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών μπορεί να θεωρηθεί, λίγο πιο θεωρητικά, πως προκύπτει από τη δυνατότητα αναγωγής μιας μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές και με ειδικής μορφής δεξιό μέλος  $g(x)$  σε ομογενή. Στην παράγραφο αυτή θα περιορισθούμε στην επίδειξη αυτής της δυνατότητας στην περίπτωση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές (5.8.4), η οποία έχει δεξιό μέλος εκθετικής μορφής:  $g(x) = de^{cx}$ , δηλαδή στην εξίσωση

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = de^{cx}. \quad (5.8.33)$$

Αρκούμεστε μάλιστα εδώ στην περίπτωση  $n = 2$ , δηλαδή σε μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως. Έχουμε επομένως την εξίσωση

$$a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = de^{cx}. \quad (5.8.34)$$

Αυτήν τη μη ομογενή διαφορική εξίσωση μπορούμε να τη γράψουμε και στην ισοδύναμη μορφή

$$a_2 D^2 y(x) + a_1 D y(x) + a_0 y(x) = de^{cx} \implies (a_2 D^2 + a_1 D + a_0) y(x) = de^{cx} \quad (5.8.35)$$



με τη χρήση του γνωστού μας διαφορικού τελεστή  $D$ , εδώ με  $D \equiv d/dx$  και  $D^2 \equiv d^2/dx^2$ . Άρα

$$D^0 y(x) \equiv y(x), \quad D^1 y(x) \equiv Dy(x) \equiv y'(x), \quad D^2 y(x) \equiv D[Dy(x)] \equiv y''(x), \quad \text{κλπ.} \quad (5.8.36)$$

(Ένα απλό σύμβολο που δηλώνει παραγωγή είναι ο διαφορικός τελεστής  $D$ . Τίποτε άλλο!)

Ας εξετάσουμε τώρα και το δεξιό μέλος  $g(x) = de^{cx}$  της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (5.8.34) ή (5.8.35). Είναι ειδικής μορφής: της εκθετικής μορφής  $de^{cx}$ . Αφού μάλιστα

$$g(x) = de^{cx} \implies g'(x) = dce^{cx} \implies g'(x) - cg(x) = 0, \quad (5.8.37)$$

είναι προφανές ότι το δεξιό αυτό μέλος  $g(x) = de^{cx}$  είναι και το ίδιο λύση μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές: της εξίσωσης  $g'(x) - cg(x) = 0$ , στην οποία καταλήξαμε αμέσως πιο πάνω. Χρησιμοποιώντας μάλιστα και το διαφορικό τελεστή  $D$ , έχουμε

$$g'(x) - cg(x) = 0 \implies Dg(x) - cg(x) = 0 \implies (D - c)g(x) = 0. \quad (5.8.38)$$

Είναι αυτονόητο ότι ο διαφορικός τελεστής  $D - c$  ορίζεται με τον τύπο

$$(D - c)f(x) := Df(x) - cf(x) := f'(x) - cf(x) \quad (5.8.39)$$

για κάθε συνάρτηση  $f(x)$  που είναι μία φορά παραγωγίσιμη, δηλαδή διαθέτει πρώτη παράγωγο. Τέτοια συνάρτηση είναι εδώ η εκθετική συνάρτηση  $g(x) = de^{cx}$  στο δεξιό μέλος της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (5.8.34) ή (5.8.35).

Η επιτυχία της μεθόδου των προσδιοριστέων συντελεστών πραγματικά ισχύει μόνο σε περιπτώσεις μη ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές που έχουν ειδικών μορφών δεξιά μέλη  $g(x)$ . Συγκεκριμένα πρέπει να έχουν δεξιά μέλη  $g(x)$  που να είναι και τα ίδια λύσεις ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές ή αθροίσματα τέτοιων λύσεων. Αυτό συμβαίνει στην ειδική περίπτωση που εξετάζουμε με την εκθετική συνάρτηση  $g(x) = de^{cx}$  που υποθέσαμε και που επαληθεύει την ομογενή διαφορική εξίσωση (5.8.38).

Χάρη σ' αυτήν την καλή ιδιότητα της εκθετικής συναρτήσεως  $g(x) = de^{cx}$  μπορούμε τώρα να «πολλαπλασιάσουμε» (εννοείται από τα αριστερά) και τα δύο μέλη της αρχικής μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (5.8.35) που εξετάζουμε επί  $D - c$ . Έτσι παίρνουμε

$$(a_2 D^2 + a_1 D + a_0)y(x) = de^{cx} \implies (D - c)(a_2 D^2 + a_1 D + a_0)y(x) = (D - c)(de^{cx}). \quad (5.8.40)$$

Πρόκειται απλά για εφαρμογή του τελεστή  $D - c$  και στα δύο μέλη της διαφορικής μας εξίσωσης  $(a_2 D^2 + a_1 D + a_0)y(x) = de^{cx}$ . Δεν είναι αληθινός πολλαπλασιασμός με την έννοια της άλγεβρας. Ας ξαναθυμηθούμε τον ορισμό του τελεστή  $D - c$  στη σχέση (5.8.39), όταν αυτός εφαρμόζεται σε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f(x)$ . Απλά σημαίνει, υπενθύμιση,  $(D - c)f(x) := f'(x) - cf(x)$ .

Ας προχωρήσουμε τώρα: Επειδή η εκθετική συνάρτηση  $g(x) = de^{cx}$  επαληθεύει την ομογενή διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως (5.8.38), είναι προφανές ότι το δεξιό μέλος  $(D - c)(de^{cx})$  της δεύτερης διαφορικής εξίσωσης (5.8.40), στην οποία καταλήξαμε, είναι μηδέν. Επομένως με τον «πολλαπλασιασμό» αυτό επί  $D - c$  μετατρέψαμε τη μη ομογενή διαφορική μας εξίσωση (5.8.35): την πρώτη διαφορική εξίσωση στη σχέση (5.8.40), σε ομογενή διαφορική εξίσωση: στη δεύτερη διαφορική εξίσωση (5.8.40). Μπορούμε μάλιστα, αν θέλουμε, να τη γράψουμε και σε ισοδύναμη μορφή διαφορικής εξίσωσης τρίτης τάξεως εκτελώντας τους πολλαπλασιασμούς στον τελεστή  $(D - c)(a_2 D^2 + a_1 D + a_0)$  σαν να επρόκειτο για αλγεβρικά πολυώνυμα της μεταβλητής  $D$ . Αποδεικνύεται μάλιστα εύκολα ότι αυτό ισχύει σε περιπτώσεις σταθερών συντελεστών, όπως συμβαίνει εδώ με τους συντελεστές  $a_2$ ,  $a_1$  και  $a_0$  και τη σταθερά  $c$ . Προκύπτει έτσι η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση τρίτης τάξεως

$$[a_2 D^3 + (a_1 - ca_2)D^2 + (a_0 - ca_1)D - ca_0]y(x) = 0, \quad (5.8.41)$$

η οποία γράφεται βέβαια και στην ισοδύναμη πιο συνηθισμένη μορφή της

$$a_2 y'''(x) + (a_1 - ca_2) y''(x) + (a_0 - ca_1) y'(x) - ca_0 y(x) = 0. \quad (5.8.42)$$

Άρα κάθε λύση  $y_s(x)$  της αρχικής μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης δευτέρας τάξεως (5.8.34) είναι επίσης λύση και της παρούσας ομογενούς διαφορικής εξίσωσης τρίτης τάξεως (5.8.41) ή (5.8.42). Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει, επειδή η αρχική μη ομογενής διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως (5.8.34) παραγωγίσθηκε (με την εφαρμογή του τελεστή  $D - c$ ), ώστε να γίνει ομογενής, έγινε τώρα τρίτης τάξεως και τούτο έχει εισαγάγει επιπλέον λύσεις. Θα το δούμε αυτό σε λίγο.

Τώρα με τη γνωστή μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως  $y_0(x) = e^{\mu x}$  διαπιστώνουμε εύκολα πως η ομογενής διαφορική εξίσωση τρίτης τάξεως (5.8.41) ή (5.8.42) παίρνει τη μορφή

$$[a_2 \mu^3 + (a_1 - ca_2) \mu^2 + (a_0 - ca_1) \mu - ca_0] e^{\mu x} = 0 \quad (5.8.43)$$

με χαρακτηριστική εξίσωση  $p_3(\mu) = 0$  την τριτοβάθμια πολυωνυμική εξίσωση

$$a_2 \mu^3 + (a_1 - ca_2) \mu^2 + (a_0 - ca_1) \mu - ca_0 = 0, \quad \text{ισοδύναμα} \quad (\mu - c)(a_2 \mu^2 + a_1 \mu + a_0) = 0. \quad (5.8.44)$$

Η τελευταία εξίσωση προκύπτει, αν θυμηθούμε πώς ακριβώς έχει προσδιορισθεί η ομογενής διαφορική εξίσωση τρίτης τάξεως (5.8.41) ή (5.8.42): με «πολλαπλασιασμό» της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.8.35) επί  $D - c$ . Συνειδητοποιούμε επίσης ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$p_3(\mu) = a_2 \mu^3 + (a_1 - ca_2) \mu^2 + (a_0 - ca_1) \mu - ca_0 = (\mu - c)(a_2 \mu^2 + a_1 \mu + a_0) \quad (5.8.45)$$

είναι το πολυώνυμο που προκύπτει, αν στη διαφορική εξίσωση (5.8.41) θέσουμε  $\mu$  αντί για  $D$ , δηλαδή στη θέση του διαφορικού τελεστή παραγωγίσεως  $D \equiv d/dx$ .

Ας υποθέσουμε τώρα πως το χαρακτηριστικό αυτό πολυώνυμο  $p_3(\mu)$  στη σχέση (5.8.45) ή ισοδύναμα η αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση  $p_3(\mu) = 0$  στη σχέση (5.8.44) έχει τρεις απλές ρίζες. (Αυτές μπορεί να είναι είτε πραγματικές είτε και μιγαδικές: δύο συζυγείς μιγαδικές και μία πραγματική για πραγματικούς συντελεστές  $a_2, a_1$  και  $a_0$  και τη σταθερά  $c$  επίσης πραγματική.) Φυσικά οι τρεις αυτές ρίζες θα είναι οι δύο ρίζες  $\mu_1$  και  $\mu_2$  του δευτεροβάθμιου πολυωνύμου

$$p_2(\mu) = a_2 \mu^2 + a_1 \mu + a_0 \quad (5.8.46)$$

και η ρίζα  $\mu_3 = c$  του πρωτοβάθμιου πολυωνύμου

$$p_1(\mu) = \mu - c. \quad (5.8.47)$$

Αυτά είναι προφανή από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $p_3(\mu) = p_1(\mu)p_2(\mu)$  στη σχέση (5.8.45). Επομένως με την υπόθεση αυτή (τρεις απλές ρίζες) η γενική λύση  $y_{gh}(x)$  της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης τρίτης τάξεως (5.8.41) ή (5.8.42) θα είναι η ακόλουθη:

$$y_{gh}(x) = C_1 e^{\mu_1 x} + C_2 e^{\mu_2 x} + C_3 e^{cx}. \quad (5.8.48)$$

Η λύση αυτή εύλογα περιέχει τρεις αυθαίρετες σταθερές: τις  $C_1, C_2$  και  $C_3$ . Αυτό συμβαίνει, επειδή πρόκειται για διαφορική εξίσωση τρίτης τάξεως.

Συνεπώς, σύμφωνα με όσα προαναφέραμε, κάθε λύση  $y_s(x)$  της αρχικής μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δευτέρας τάξεως (5.8.34) ή (5.8.35) θα είναι αναμφίβολα λύση και της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης τρίτης τάξεως (5.8.41) ή (5.8.42). Επομένως θα είναι οπωσδήποτε της μορφής (5.8.48). Στο σημείο αυτό παρατηρούμε ότι το δευτεροβάθμιο πολυώνυμο  $p_2(\mu)$

στη σχέση (5.8.46) δεν είναι τίποτε άλλο παρά το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης δευτέρας τάξεως

$$a_2 D^2 y(x) + a_1 D y(x) + a_0 y(x) = 0 \implies (a_2 D^2 + a_1 D + a_0) y(x) = 0. \quad (5.8.49)$$

Αυτή αντιστοιχεί στην αρχική μη ομογενή διαφορική εξίσωση (5.8.34) ή (5.8.35) (εκεί με  $g(x) = de^{cx}$ ). Άρα οι δύο ρίζες  $\mu_1$  και  $\mu_2$  του πολυωνύμου αυτού  $p_2(\mu)$  (με  $\mu_1 \neq \mu_2$ ) μας δίνουν τη γενική λύση

$$y_h(x) = C_1 e^{\mu_1 x} + C_2 e^{\mu_2 x} \quad (5.8.50)$$

αυτής της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δευτέρας τάξεως (5.8.49). Δηλαδή δίνουν τον πρώτο όρο  $y_h(x)$  στη γενική λύση

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x) \quad (5.8.51)$$

της αρχικής μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.8.34) ή (5.8.35) που επιδιώκουμε να βρούμε.

Αλλά ξαναλέμε ότι η λύση αυτή  $y_g(x)$  πρέπει να είναι οπωσδήποτε της μορφής (5.8.48), γιατί η ομογενής διαφορική εξίσωση τρίτης τάξεως (5.8.41) ή (5.8.42) προέκυψε από την αρχική μη ομογενή διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως (5.8.34) ή (5.8.35) με «πολλαπλασιασμό» της επί το διαφορικό τελεστή  $D - c$ . Έτσι πετύχαμε να εξαλειφθεί το δεξιό μέλος της: να μετατραπεί από μη ομογενή σε ομογενή. Δυστυχώς όμως ο «πολλαπλασιασμός» αυτός επί  $D - c$  λόγω του διαφορικού τελεστή  $D$  είχε σαν συνέπεια και την αύξηση της τάξεως της γραμμικής μας διαφορικής εξίσωσης κατά μονάδα: από δευτέρας τάξεως σε τρίτης τάξεως. Αυτό ήταν το κόστος που «πληρώσαμε», για να την κάνουμε ομογενή από μη ομογενή. Τέλος πάντων, ας προχωρήσουμε.

Διαπιστώσαμε λοιπόν ότι και η γενική λύση  $y_g(x)$  της μη ομογενούς αρχικής διαφορικής εξίσωσης (5.8.34) ή (5.8.35) είναι οπωσδήποτε της μορφής  $y_{gh}(x)$  στη σχέση (5.8.48). Είδαμε επίσης ότι οι δύο πρώτοι όροι στη σχέση αυτή δεν είναι τίποτε άλλο παρά η γενική λύση  $y_h(x)$  της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης δευτέρας τάξεως (5.8.49) που αντιστοιχεί στην αρχική μη ομογενή διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως (5.8.34) ή (5.8.35). Άρα είναι προφανές ότι ο τρίτος όρος  $C_3 e^{cx}$  της λύσεως  $y_{gh}(x)$  μπορεί να μας δώσει θαυμάσια μια μερική λύση  $y_p(x)$  της αρχικής μας διαφορικής εξίσωσης (5.8.34) ή (5.8.35). Συνάγουμε έτσι το συμπέρασμα ότι μια τέτοια μερική λύση  $y_p(x)$  μπορεί σίγουρα να είναι της μορφής

$$y_p(x) = Ae^{cx} \quad (5.8.52)$$

έχοντας θέσει τον προσδιοριστέο συντελεστή  $A$  στη θέση της αυθαίρετης σταθεράς  $C_3$  στη γενική λύση (5.8.48). Αυτήν ακριβώς τη μερική λύση  $y_p(x)$  χρησιμοποιήσαμε ήδη στην προηγούμενη Παράγραφο Α5.8.2, συγκεκριμένα στη σχέση (5.8.8). Εκεί όμως υποθέσαμε τη μερική αυτή λύση  $y_p(x)$  με βάση διαφορετικό τρόπο σκέψης, πιο άμεσο, που αφορούσε κατευθείαν την αρχική μη ομογενή διαφορική εξίσωση. Εδώ αντίθετα αναγάγαμε πρώτα τη μη ομογενή διαφορική εξίσωση (5.8.34) σε ομογενή, την (5.8.42), και έπειτα οδηγηθήκαμε στην υπόθεση της μερικής λύσεως (5.8.52).

#### A5.8.4. Μια σημαντική ειδική περίπτωση

Στην Παράγραφο Α5.8.2 αμέσως μετά τη σχέση (5.8.13) αναφέραμε την υπόθεση μη μηδενικού παρονομαστή στη σχέση αυτή. Δηλαδή ουσιαστικά υποθέσαμε ότι

$$p_n(c) \neq 0 \quad (5.8.53)$$

στον παρονομαστή του δεξιού μέλους της σχέσεως (5.8.14). Με άλλα λόγια υποθέσαμε ήδη ότι η σταθερά  $c$  στον εκθέτη  $e^{cx}$  στο δεξιό μέλος της αρχικής μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (5.8.4) δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου  $p_n(\mu)$  ή ισοδύναμα της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $p_n(\mu) = 0$ . Δηλαδή, επαναλαμβάνουμε, υποθέσαμε πως  $p_n(c) \neq 0$ .

Για να είμαστε ειλικρινείς, σε σπάνιες περιπτώσεις (που τις αγνοήσαμε μέχρι τώρα) ο ανισοτικός περιορισμός (5.8.53) δεν ισχύει και η σταθερά  $c$  στον εκθετικό όρο  $e^{cx}$  είναι στ' αλήθεια ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $p_n(\mu) = 0$ . Δηλαδή σ' αυτές τις σπάνιες περιπτώσεις ισχύει η σχέση

$$p_n(c) = 0. \quad (5.8.54)$$

Σε μια τέτοια ειδική περίπτωση η εκθετική συνάρτηση  $e^{cx}$  είναι λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.8.5), αφού το  $c$  είναι ρίζα της χαρακτηριστικής της εξίσωσης  $p_n(\mu) = 0$ . Άρα σ' αυτήν τη σπάνια περίπτωση με κανέναν τρόπο δεν πρέπει να περιμένουμε μια συνάρτηση της μορφής  $y_p(x) = Ae^{cx}$  να είναι λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.8.4). Μια τέτοια συνάρτηση θα είναι λύση μόνο της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.8.5). Γι' αυτόν το λόγο και η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών (εδώ απλά του συντελεστή  $A$ ) αποτυγχάνει: Η σχέση (5.8.12) γίνεται  $A \cdot 0 = d$ , αφού  $p_n(c) = 0$ , ή αλλιώς ο παρονομαστής  $p_n(c)$  στη σχέση (5.8.14) γίνεται μηδέν. Είναι σαν να προσπαθεί ο προσδιοριστέος συντελεστής  $A$  να πάρει την τιμή άπειρο. Αδύνατο όμως! Η μερική λύση  $y_p(x) = Ae^{cx}$ , την οποία υποθέσαμε, αποτελεί εσφαλμένη υπόθεση, όταν η σταθερά  $c$  στον εκθέτη του δεξιού μέλους  $g(x) = de^{cx}$  της αρχικής διαφορικής εξίσωσης (5.8.4) είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου  $p_n(\mu)$ , ισοδύναμα της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $p_n(\mu) = 0$ , της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.8.5).

Για να αντιμετωπίσουμε αυτήν την ειδική περίπτωση, θα πρέπει βέβαια να τροποποιήσουμε την επιλογή μας (5.8.52) για τη μερική λύση  $y_p(x)$  της αρχικής μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (5.8.4), που επιδιώκουμε να λύσουμε. Προς το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τον τρόπο εργασίας της προηγούμενης Παραγράφου Α5.8.3 για την αναγωγή της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης σε ομογενή. Εκεί υποθέσαμε αρχικά ότι ισχύει η περίπτωση όπου το χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $p_3(\mu)$  έχει τρεις απλές ρίζες: τις  $\mu_1, \mu_2$  και  $\mu_3$ . Άρα η σταθερά  $c$  διαφέρει από τις δύο ρίζες  $\mu_1$  και  $\mu_2$  του χαρακτηριστικού πολυωνύμου  $p_2(\mu)$  της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης δευτέρας τάξεως που αντιστοιχεί στη μη ομογενή διαφορική εξίσωση επίσης δευτέρας τάξεως (5.8.34). Έτσι οδηγηθήκαμε στη μερική λύση  $y_p(x)$  της μορφής (5.8.52):  $y_p(x) = Ae^{cx}$ .

Στην παράγραφο αυτή υποθέτουμε αντίθετα ότι η σταθερά  $c$  συμπίπτει με τη ρίζα  $\mu_2$  του χαρακτηριστικού πολυωνύμου  $p_2(\mu)$  συνεχίζοντας όμως να υποθέτουμε ότι  $\mu_1 \neq \mu_2$ . Τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $p_3(\mu) = p_1(\mu)p_2(\mu)$  της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης τρίτης τάξεως (5.8.41) ή (5.8.42) θα έχει τις τρεις ρίζες:  $\mu_1, \mu_2$  και  $c = \mu_2$ , δηλαδή η ρίζα  $c = \mu_2$  θα είναι διπλή ρίζα. Επομένως η γενική λύση (5.8.48) της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης τρίτης τάξεως (5.8.41) ή (5.8.42) θα είναι τώρα της μορφής

$$y_{gh}(x) = C_1 e^{\mu_1 x} + C_2 e^{cx} + C_3 x e^{cx} = C_1 e^{\mu_1 x} + (C_2 + C_3 x) e^{cx}, \quad (5.8.55)$$

μια που η ρίζα  $c = \mu_2$  (ή  $\mu_2 = c$ ) είναι τώρα διπλή ρίζα. Αυτήν την περίπτωση τη μελετήσαμε ήδη στη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως στην Παράγραφο Α5.5.4. Από τους τρεις αυτούς όρους σε τούτη τη γενική λύση  $y_{gh}(x)$  οι δύο πρώτοι αφορούν στη γενική λύση  $y_h(x)$  της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0, \quad (5.8.56)$$

η οποία αντιστοιχεί στη μη ομογενή διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως (5.8.34) που εξετάζουμε. Δηλαδή με  $\mu_2 = c$

$$y_h(x) = C_1 e^{\mu_1 x} + C_2 e^{cx}. \quad (5.8.57)$$

Επομένως κάθε λύση  $y(x)$  της αρχικής μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δευτέρας τάξεως (5.8.34) πρέπει οπωσδήποτε να είναι της μορφής (5.8.55). Αυτή γράφεται και στη μορφή

$$y_{gh}(x) = y_h(x) + C_3 x e^{cx} \quad (5.8.58)$$

λόγω της σχέσεως (5.8.57). Κατά συνέπεια με τη λύση  $y_h(x)$  να αφορά στην ομογενή διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως (5.8.56), που αντιστοιχεί στην αρχική μη ομογενή διαφορική εξίσωση επίσης δευτέρας τάξεως (5.8.34), είναι προφανές από τη λύση  $y_{gh}(x)$  στη σχέση (5.8.58) ότι κατάλληλη μερική λύση  $y_p(x)$  της αρχικής μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως (5.8.34) θα είναι η λύση

$$y_p(x) = Ax e^{cx}. \tag{5.8.59}$$

Αυτή η λύση είναι, επαναλαμβάνουμε, της μορφής την οποία υποδηλώνει ο τρίτος όρος  $C_3 x e^{cx}$  της λύσεως (5.8.55) (επίσης στη λύση (5.8.58)) και δεν έχει καμία σχέση με τη λύση  $y_h(x)$  της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξισώσεως δευτέρας τάξεως (5.8.56). Φυσικά η σταθερά  $A$  στη μερική αυτή λύση  $y_p(x)$  δε μπορεί να θεωρηθεί αυθαίρετη, αλλά πρέπει να προσδιορισθεί, έτσι ώστε να επαληθεύεται η αρχική μη ομογενής διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως (5.8.34).

Δηλαδή πέρα από τη θεωρία που προηγήθηκε, πρακτικά μιλώντας, όταν η μερική λύση  $y_p(x)$  που δοκιμάζουμε σε μια μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση, εδώ της μορφής (5.8.34), είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως, συγκεκριμένα εδώ της διαφορικής εξισώσεως (5.8.56), τότε είναι ακατάλληλη δοκιμαστική μερική λύση. Η κατάλληλη δοκιμαστική μερική λύση θα πρέπει να είναι πολλαπλασιασμένη επί την ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$ . Εάν και πάλι έχουμε λύση της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως, τότε ο πολλαπλασιασμός θα πρέπει να γίνει επί  $x^2$  και ανάλογα σε διαφορικές εξισώσεις ανωτέρας τάξεως με πολλαπλές ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου τους  $p_n(\mu)$  (ισοδύναμα της χαρακτηριστικής εξισώσεώς τους  $p_n(\mu) = 0$ ). Το συμπέρασμά μας είναι ότι είναι ιδιαίτερα σημαντικό λάθος να δοκιμάζουμε για μερική λύση  $y_p(x)$  μιας μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως μια λύση που είναι ήδη λύση της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως (φυσικά της ίδιας τάξεως). Πρέπει πρώτα να την πολλαπλασιάσουμε επί  $x$ , εν ανάγκη και επί  $x^2$  ή ακόμη και επί  $x^3$ , ώστε να παύσει εκ των προτέρων να είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξισώσεως.

Ας αναφερθούμε στο σημείο αυτό και στην περίπτωση διπλής ρίζας  $\mu_1 = \mu_2$  του χαρακτηριστικού πολυωνύμου  $p_2(\mu)$  της ομογενούς διαφορικής εξισώσεως δευτέρας τάξεως (5.8.56), που αντιστοιχεί στη μη ομογενή διαφορική εξίσωση επίσης δευτέρας τάξεως (5.8.34), αλλά με  $c \neq \mu_1 = \mu_2$ . Τότε η γενική λύση (5.8.48) θα είναι της μορφής

$$y_{gh}(x) = C_1 e^{\mu_1 x} + C_2 x e^{\mu_1 x} + C_3 e^{cx} = (C_1 + C_2 x) e^{\mu_1 x} + C_3 e^{cx}, \tag{5.8.60}$$

αφού  $\mu_2 = \mu_1$  (διπλή ρίζα). Οι δύο πρώτοι όροι αποτελούν τη λύση

$$y_h(x) = C_1 e^{\mu_1 x} + C_2 x e^{\mu_1 x} = (C_1 + C_2 x) e^{\mu_1 x} \tag{5.8.61}$$

της ομογενούς διαφορικής εξισώσεως δευτέρας τάξεως (5.8.56), που αντιστοιχεί στη μη ομογενή διαφορική εξίσωση (5.8.34). Παραπέρα η μερική λύση αυτής της μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως (5.8.34) μπορεί να είναι θαυμάσια της μορφής (5.8.52), αρκεί βέβαια να ισχύει  $c \neq \mu_1 = \mu_2$ .

Εάν όμως αντίθετα  $c = \mu_1 = \mu_2$ , τότε η πιο πάνω γενική λύση  $y_{gh}(x)$  παίρνει τη μορφή

$$y_{gh}(x) = C_1 e^{cx} + C_2 x e^{cx} + C_3 x^2 e^{cx} = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^{cx}. \tag{5.8.62}$$

Στη λύση αυτή πάλι οι δύο πρώτοι όροι αποτελούν τη γενική λύση  $y_h(x)$  της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξισώσεως (5.8.56), ακριβώς όπως και στη σχέση (5.8.61). Ο τρίτος όμως όρος

$$y_p(x) = C_3 x^2 e^{cx} \quad \text{ή καλύτερα} \quad y_p(x) = Ax^2 e^{cx} \tag{5.8.63}$$

είναι εκείνος ο οποίος θα μας δώσει τη μερική λύση  $y_p(x)$  της μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως (5.8.34). Φυσικά αυτό θα επιτευχθεί με τον κατάλληλο προσδιορισμό του προσδιοριστέου συντελεστή  $A$  σ' αυτήν την πολύ ειδική περίπτωση όπου  $c = \mu_1 = \mu_2$ .

Ας σημειώσουμε τέλος ότι προφανώς όλα αυτά γενικεύονται και σε μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές τάξεως ανώτερης της δευτέρας.

▼ **Παράδειγμα Α5.13:** Να υπολογισθεί η γενική λύση  $y_g(x)$  της διαφορικής εξισώσεως

$$y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}. \quad (5.8.64)$$

**Λύση:** Πρόκειται για τη διαφορική εξίσωση (5.8.17) του προηγούμενου Παραδείγματος Α5.10, αλλά τώρα με  $3e^{2x}$  αντί με  $3e^{4x}$  στο δεξιό μέλος. (Δηλαδή απλά το 4 έχει αντικατασταθεί από το 2 στον εκθέτη του δεξιού μέλους.) Και πάλι η γενική λύση  $y_g(x)$  που ζητάμε να προδιορίσουμε θα είναι ίση με τη γενική λύση  $y_h(x)$  της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξισώσεως (5.8.18), που έχει ήδη βρεθεί στη σχέση (5.8.21), την επαναλαμβάνουμε

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} \quad (5.8.65)$$

συν μια μερική λύση  $y_p(x)$  της μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως (5.8.64).

Το ευκολότερο για μας θα ήτανε να δοκιμάζαμε μερική λύση της μη ομογενούς αυτής διαφορικής εξισώσεως της μορφής  $y_p(x) = Ae^{2x}$ . Αυτό όμως δεν είναι εφικτό, είναι εντελώς λάθος, επειδή η σταθερά 2 στον εκθέτη είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξισώσεως (5.8.20) (ή του χαρακτηριστικού πολυωνύμου) της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξισώσεως (5.8.18). Με άλλα λόγια κάθε συνάρτηση της μορφής  $Ae^{2x}$  είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξισώσεως (5.8.18), όπως φαίνεται καθαρά στη γενική λύση (5.8.65) αυτής της ομογενούς διαφορικής εξισώσεως. Άρα αυτό που πρέπει τώρα να κάνουμε, αν πραγματικά θέλουμε να βρούμε μια μερική λύση  $y_p(x)$  της μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως (5.8.64) (και σίγουρα το θέλουμε αυτό!), είναι να δοκιμάσουμε μερική λύση της μορφής

$$y_p(x) = Axe^{2x}. \quad (5.8.66)$$

Πρόκειται για δοκιμαστική λύση της μορφής (5.8.59) (εδώ με  $c = 2$ ) με βάση τη θεωρία που ήδη εκθέσαμε προηγουμένως και που εξηγεί αυτήν την επιλογή μας. Τώρα δοκιμάζουμε μια σωστή μερική λύση  $y_p(x)$ , που δεν είναι βέβαια λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξισώσεως (5.8.18).

Εκτελώντας δύο παραγωγίσεις της λύσεως αυτής  $y_p(x)$  που υιοθετήσαμε (σύμφωνα με τον κανόνα παραγωγίσεως γινομένου), βρίσκουμε εύκολα πως

$$y_p'(x) = A(e^{2x} + 2xe^{2x}) = A(2x + 1)e^{2x} \quad (5.8.67)$$

και στη συνέχεια

$$y_p''(x) = A[2e^{2x} + (2x + 1)2e^{2x}] = 4A(x + 1)e^{2x}. \quad (5.8.68)$$

Τώρα αντικαθιστούμε τη μερική λύση  $y_p(x)$  που υποθέσαμε στη σχέση (5.8.66) καθώς και τις δύο αυτές παραγώγους της  $y_p'(x)$  και  $y_p''(x)$  στη διαφορική εξίσωση (5.8.64). Έτσι βρίσκουμε ότι

$$4A(x + 1)e^{2x} - 3A(2x + 1)e^{2x} + 2Axe^{2x} = 3e^{2x}. \quad (5.8.69)$$

Αναδιατάσσοντας τους όρους στο αριστερό μέλος, παίρνουμε

$$(4Ax - 6Ax + 2Ax)e^{2x} + (4A - 3A)e^{2x} = 3e^{2x} \implies Ae^{2x} = 3e^{2x} \implies A = 3. \quad (5.8.70)$$

Επομένως η μερική λύση  $y_p(x)$  που αναζητάμε είναι η (5.8.66) με  $A = 3$ , δηλαδή η μερική λύση

$$y_p(x) = 3xe^{2x}. \quad (5.8.71)$$

Μπορούμε μάλιστα να την επαληθεύσουμε παραγωγίζοντας την δύο φορές, οπότε

$$y_p'(x) = 3(1 + 2x)e^{2x} \quad \text{και} \quad y_p''(x) = 3[2e^{2x} + (1 + 2x)2e^{2x}] = 12(1 + x)e^{2x}. \quad (5.8.72)$$

Με αντικατάσταση στη διαφορική εξίσωση (5.8.64) γίνεται επιτυχώς η επαλήθευση αυτή:

$$12(1+x)e^{2x} - 9(1+2x)e^{2x} + 6xe^{2x} = 3e^{2x} \implies 3e^{2x} = 3e^{2x} \implies 0 = 0 \quad (5.8.73)$$

μετά τις απλοποιήσεις.

Ως προς τη ζητούμενη γενική λύση  $y_g(x)$  της αρχικής μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές (5.8.64), αυτή θα είναι το άθροισμα (α) της γενικής λύσεως  $y_h(x)$  της αντίστοιχης ομογενούς στη σχέση (5.8.65) και (β) μιας μερικής λύσεως  $y_p(x)$  της μη ομογενούς, την οποία μόλις προσδιορίσαμε στη σχέση (5.8.71). Επομένως τελικά

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x) = (C_1e^x + C_2e^{2x}) + 3xe^{2x} \implies y_g(x) = C_1e^x + (C_2 + 3x)e^{2x}. \quad (5.8.74)$$

Ας υποθέσουμε τέλος ότι από άγνοια ή απερισκεψία κάνουμε το σοβαρό λάθος να δοκιμάσουμε σαν μερική λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.8.64) την εσφαλμένη μερική λύση

$$\tilde{y}_p(x) = Ae^{2x}, \quad \text{οπότε} \quad \tilde{y}'_p(x) = 2Ae^{2x} \quad \text{και} \quad \tilde{y}''_p(x) = 4Ae^{2x}. \quad (5.8.75)$$

Τότε η μη ομογενής διαφορική εξίσωση (5.8.64) θα μας δώσει

$$y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x} \implies (4A - 6A + 2A)e^{2x} = 3e^{2x} \implies 0 \cdot A = 3 \quad (5.8.76)$$

και δε θα μπορέσουμε βέβαια να προσδιορίσουμε τον προσδιοριστέο συντελεστή  $A$ .

Φυσικά το λάθος μας είναι ότι η λύση  $Ae^{2x}$  που εσφαλμένα δοκιμάσαμε αποτελεί ήδη μερική λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.8.18), όπως φαίνεται στη σχέση (5.8.65). Δεν υπάρχει λοιπόν καμία απολύτως δυνατότητα να είναι ταυτόχρονα και μερική λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.8.64). Ας είμαστε λοιπόν πολύ προσεκτικοί κάθε φορά που επιλέγουμε μια μερική λύση  $y_p(x)$ . Όχι μόνο θα πρέπει αυτή να είναι σύμφωνη με το δεξιό μέλος της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές που θέλουμε να επιλύσουμε, αλλά επίσης θα πρέπει επιπλέον να μην είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης. Με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών αναζητούμε μια μερική λύση  $y_p(x)$  της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης. Κατά συνέπεια κάθε λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι απόλυτα ακατάλληλη και απορριπτέα για το σκοπό μας αυτό. ▲

### A5.8.5. Δεξιό μέλος τριγωνομετρικής μορφής

Μέχρι τώρα, ξεκινώντας από την Παράγραφο Α5.8.2, περιορίσαμε την προσοχή μας σε δεξιό μέλος  $g(x)$  της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (5.8.1), την επαναλαμβάνουμε

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = g(x), \quad (5.8.77)$$

εκθετικής μορφής

$$g(x) = de^{cx}. \quad (5.8.78)$$

Στην παράγραφο αυτή θα αναφερθούμε σε δεξιό μέλος τριγωνομετρικής μορφής

$$g_1(x) = d_1 \cos bx \quad \text{ή} \quad g_2(x) = d_2 \sin bx \quad (5.8.79)$$

(ή του αντίστοιχου αθροίσματος  $g_1(x) + g_2(x)$ ) φυσικά με τα  $d_1$ ,  $d_2$  και  $b$  γνωστές σταθερές.

Είναι πάρα πολύ μικρή η διαφορά από την εκθετική μορφή του δεξιού μέλους  $g(x)$  στην παρούσα τριγωνομετρική μορφή του. Πραγματικά από τους δύο τύπους του Euler (1.5.3) και (1.5.4) στην Παράγραφο Α1.5.1 του Κεφαλαίου Α1

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{και} \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x \quad (5.8.80)$$

(ο δεύτερος τύπος του Euler με  $-i$  αντί για  $i$ ) προσθαφαιρώντας τους προκύπτει ότι

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{και} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \quad (5.8.81)$$

Άρα οι δύο τριγωνομετρικές συναρτήσεις συνημίτονο και ημίτονο δεν είναι τίποτε άλλο παρά ένας γραμμικός συνδυασμός δύο μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων: των  $e^{\pm ix}$ . Επομένως στην περίπτωση των δεξιών μελών (5.8.79), εκεί με  $bx$  αντί απλά για  $x$ , θα έχουμε

$$\cos bx = \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2} \quad \text{και} \quad \sin bx = \frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i}. \quad (5.8.82)$$

Υπ' αυτές τις συνθήκες θεωρούμε το δεξιό μέλος  $g(x)$  στη μη ομογενή διαφορική εξίσωση (5.8.77) της μορφής  $g_1(x)$  ή  $g_2(x)$  ή του αθροίσματός τους (γενικότερα του γραμμικού συνδυασμού τους)

$$g(x) = d_1 \cos bx + d_2 \sin bx. \quad (5.8.83)$$

Με τη χρήση των τύπων (5.8.82) το ξαναγράφουμε και στην ισοδύναμη μιγαδική εκθετική μορφή

$$g(x) = d_1 \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2} + d_2 \frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i} = a_g e^{ibx} + b_g e^{-ibx} \quad \text{με} \quad a_g = \frac{d_1 - id_2}{2}, \quad b_g = \frac{d_1 + id_2}{2}. \quad (5.8.84)$$

Με το δεξιό αυτό μέλος  $g(x)$  η προφανής επιλογή μας της αντίστοιχης μερικής λύσεως  $y_p(x)$  θα είναι βέβαια της μορφής

$$y_p(x) = A_0 e^{ibx} + B_0 e^{-ibx} \quad (5.8.85)$$

με τα  $A_0$  και  $B_0$  δύο προσδιοριστέους συντελεστές. Με τη χρήση όμως των τύπων του Euler (5.8.80) (εδώ προφανώς με  $ibx$  αντί απλά για  $ix$ ) μπορούμε να τη γράψουμε και στην τριγωνομετρική μορφή

$$y_p(x) = A_0(\cos bx + i \sin bx) + B_0(\cos bx - i \sin bx) \quad (5.8.86)$$

και τελικά

$$y_p(x) = A \cos bx + B \sin bx \quad \text{με} \quad A = A_0 + B_0 \quad \text{και} \quad B = i(A_0 - B_0) \quad (5.8.87)$$

δύο νέους προσδιοριστέους συντελεστές στη θέση των αρχικών  $A_0$  και  $B_0$ .

Ελπίζεται ότι έγινε έτσι κατανοητό ότι ακόμη και για τα απλά δεξιά μέλη  $g_1(x) = d_1 \cos bx$  και  $g_2(x) = d_2 \sin bx$  στις σχέσεις (5.8.79) είναι απόλυτα αναγκαίο η μερική λύση  $y_p(x)$  που δοκιμάζουμε στη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (5.8.77) να περιέχει τόσο συνημιτονικό όρο όσο και ημιτονικό όρο. Δηλαδή να έχει τη μορφή (5.8.87) εκτός βέβαια κι αν προτιμάμε την ισοδύναμη μιγαδική εκθετική μορφή (5.8.85), που δεν την προτιμάμε συνήθως. Γιατί να μπλέκουμε με μιγαδικούς αριθμούς, αφού μπορούμε τόσο εύκολα να τους αποφύγουμε; Ο απρόσεκτος χρήστης της μεθόδου, που ενώ έχει συνημιτονικό όρο δεξιά, δέχεται μερική λύση πάλι συνημιτονικής μορφής (παραλείποντας τον ημιτονικό όρο), απλά εκτός από ελάχιστες εξαιρέσεις θα αποτύχει να βρει τη μερική λύση  $y_p(x)$  που ζητάει. Χρειάζεται λοιπόν προσοχή με τη χρήση της μερικής λύσεως  $y_p(x)$  της μορφής (5.8.87) εκτός από εξαιρετικές περιπτώσεις.

▼ **Παράδειγμα Α5.14:** Να βρεθεί η γενική λύση  $y_g(x)$  της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + 5y' + 6y = 2 \sin 4x. \quad (5.8.88)$$

**Λύση:** Πρόκειται βέβαια για μια μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως με σταθερούς συντελεστές και με δεξιό μέλος  $g(x) = 2 \sin 4x$  ειδικής μορφής: εδώ τριγωνομετρικής (και σαφέστερα ημιτονικής) μορφής. Επομένως η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης θα είναι το άθροισμα (α) της γενικής λύσεως  $y_h(x)$  της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης



συν (β) μιας μερικής λύσεως  $y_p(x)$  της παρούσας μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης. Για την ομογενή διαφορική εξίσωση

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \tag{5.8.89}$$

με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως  $y_0(x) = e^{\mu x}$  βρίσκουμε εύκολα τη χαρακτηριστική εξίσωση

$$\mu^2 + 5\mu + 6 = 0 \quad \text{με ρίζες της τις } \mu_1 = -2 \quad \text{και} \quad \mu_2 = -3. \tag{5.8.90}$$

Άρα η γενική λύση  $y_h(x)$  της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.8.89) θα είναι

$$y_h(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}. \tag{5.8.91}$$

Παραπέρα για τον προσδιορισμό μιας μερικής λύσεως  $y_p(x)$  της αρχικής μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.8.88) σύμφωνα με τη θεωρία της παραγράφου αυτής θα δοκιμάσουμε λύση της τριγωνομετρικής μορφής

$$y_p(x) = A \cos 4x + B \sin 4x. \tag{5.8.92}$$

Πρέπει τώρα να προσδιορίσουμε τους δύο προς το παρόν άγνωστους προσδιοριστέους συντελεστές  $A$  και  $B$ . Παραγωγίζουμε δύο φορές τη λύση αυτή  $y_p(x)$  που υποθέσαμε και βρίσκουμε

$$y'_p(x) = -4A \sin 4x + 4B \cos 4x \quad \text{και} \quad y''_p(x) = -16A \cos 4x - 16B \sin 4x. \tag{5.8.93}$$

Ακολουθεί η αντικατάσταση της μερικής λύσεως  $y_p(x)$  και των δύο αυτών πρώτων παραγώγων της  $y'_p(x)$  και  $y''_p(x)$  στην αρχική μη ομογενή διαφορική εξίσωση (5.8.88). Προκύπτει αμέσως

$$(-16A \cos 4x - 16B \sin 4x) + 5(-4A \sin 4x + 4B \cos 4x) + 6(A \cos 4x + B \sin 4x) = 2 \sin 4x \tag{5.8.94}$$

και έπειτα

$$(-10A + 20B) \cos 4x + (-10B - 20A) \sin 4x = 2 \sin 4x. \tag{5.8.95}$$

Φυσικά η τριγωνομετρική αυτή σχέση θα πρέπει να ισχύει εκ ταυτότητος: για κάθε τιμή του  $x$  στο διάστημα που μας ενδιαφέρει. Άρα πρέπει να εξισώσουμε τους συντελεστές του συνημιτονικού όρου  $\cos 4x$  και του ημιτονικού όρου  $\sin 4x$  στα δύο μέλη της σχέσεως αυτής. Με τον τρόπο αυτό καταλήγουμε στο εξής μη ομογενές σύστημα των δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων:

$$-10A + 20B = 0 \quad \text{και} \quad -10B - 20A = 2 \quad \text{με λύση} \quad A = -\frac{2}{25} \quad \text{και} \quad B = -\frac{1}{25}. \tag{5.8.96}$$

Επομένως προσδιορίστηκαν οι δύο προσδιοριστέοι συντελεστές  $A$  και  $B$  στη μερική λύση  $y_p(x)$  που δοκιμάσαμε (μετά από σκέψη βέβαια, όχι στην τύχη!). Κατά συνέπεια η μερική αυτή λύση (5.8.92) παίρνει την τελική της μορφή

$$y_p(x) = -\frac{2}{25} \cos 4x - \frac{1}{25} \sin 4x. \tag{5.8.97}$$

Τελικά πρέπει βέβαια να προσθέσουμε (α) τη γενική λύση  $y_h(x)$  της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης, που τη βρήκαμε στη σχέση (5.8.91), και (β) την αμέσως πιο πάνω μερική λύση  $y_p(x)$  της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης. Έτσι θα έχουμε προσδιορίσει τη γενική λύση  $y_g(x)$  της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης: της αρχικής εξίσωσης (5.8.88). Προκύπτει αμέσως ότι

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} - \frac{2}{25} \cos 4x - \frac{1}{25} \sin 4x. \tag{5.8.98}$$

Καλό είναι στο τέλος να επαληθεύσουμε τη γενική αυτή λύση  $y_g(x)$ . Αυτό το κάναμε, αλλά για συντομία χώρου θα παραλείψουμε εδώ την επαλήθευση αυτή. Έτσι κι αλλιώς είναι απλή και άμεση: δεν παρουσιάζει καμία απολύτως δυσκολία. Προχωράμε τώρα σε ένα ακόμη παράδειγμα. ▲

▼ **Παράδειγμα Α5.15:** Να βρεθεί η γενική λύση  $y_g(x)$  της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + 6y = 2 \sin 4x. \quad (5.8.99)$$

Πρόκειται για παρόμοιο παράδειγμα με το προηγούμενο. Εδώ όμως λείπει η πρώτη παράγωγος  $y'$  στην παρούσα μη ομογενή διαφορική εξίσωση. Στο προηγούμενο παράδειγμα διαπιστώσαμε αναλυτικά ότι παρόλο που το δεξιό μέλος ήταν ημιτονικής μορφής,  $g(x) = 2 \sin 4x$ , η μερική λύση  $y_p(x)$  έπρεπε να έχει και συνημιτονικό και ημιτονικό όρο. Σωστά, πολύ σωστά ενεργήσαμε λοιπόν αναζητώντας τη μερική λύση στη μορφή (5.8.92). Αυτό συμβαίνει (γενικά μάλιστα), επειδή η πρώτη παράγωγος της ημιτονικής συναρτήσεως  $\sin 4x$  είναι η συνημιτονική συνάρτηση  $\cos 4x$ . (Ανάλογα και για όλες τις παραγώγους περιττής τάξεως.)

Εδώ όμως, στην παρούσα διαφορική εξίσωση (5.8.99), η οποία είναι μόλις δευτέρας τάξεως, η πρώτη παράγωγος  $y'$  απουσιάζει. Μπορούμε επομένως για κάποια απλοποίηση στις αναγκαίες πράξεις να δεχθούμε μερική λύση απλά της ημιτονικής μορφής

$$y_p(x) = B \sin 4x, \quad \text{οπότε} \quad y_p''(x) = -16B \sin 4x. \quad (5.8.100)$$

Η ιδέα είναι ότι επειδή δεν έχουμε πρώτη παράγωγο στη διαφορική εξίσωση (5.8.99) (ούτε βέβαια άλλη παράγωγο περιττής τάξεως), δοκιμάζοντας την ημιτονική αυτή λύση θα μπορέσουμε να προσδιορίσουμε τον προς το παρόν άγνωστο συντελεστή  $B$ . Πραγματικά με βάση τις παραπάνω σχέσεις (5.8.100): λύση  $y_p(x)$  που δοκιμάζουμε και δεύτερη παράγωγός της  $y_p''(x)$ , η μη ομογενής διαφορική εξίσωση (5.8.99) παίρνει εύκολα τη μορφή

$$-16B \sin 4x + 6B \sin 4x = 2 \sin 4x \quad \implies \quad -10B \sin 4x = 2 \sin 4x \quad \implies \quad B = -\frac{1}{5}. \quad (5.8.101)$$

Προσδιορίστηκε λοιπόν ο προσδιοριστέος συντελεστής  $B = -\frac{1}{5}$  στη μερική λύση (5.8.100). Έπαυσε να είναι προσδιοριστέος συντελεστής: έχει γίνει προσδιορισμένος συντελεστής: έχει προσδιοριστεί.

Με την τόσο γνωστή μας πια μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως  $y_0(x) = e^{\mu x}$  προσδιορίζουμε και τη γενική λύση  $y_g(x)$  της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης. Προκύπτει

$$\mu^2 + 6 = 0 \quad \implies \quad \mu = \pm i\sqrt{6} \quad \implies \quad y_h(x) = C_1 \cos \sqrt{6}x + C_2 \sin \sqrt{6}x. \quad (5.8.102)$$

Επομένως τελικά η γενική λύση  $y_g(x)$  της παρούσας μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης θα είναι

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 \cos \sqrt{6}x + C_2 \sin \sqrt{6}x - \frac{1}{5} \sin 4x. \quad (5.8.103)$$

Το παράδειγμα αυτό το παραθέσαμε, για να δείξουμε ότι σε σπάνιες περιπτώσεις μπορούμε να απλοποιούμε εκ των προτέρων τη μερική λύση  $y_p(x)$  που δοκιμάζουμε. Εάν εδώ είχαμε δοκιμάσει την πλήρη μερική λύση (5.8.92) (που έχει και συνημιτονικό όρο  $A \cos 4x$ ), απλά θα είχε προκύψει  $A = 0$  και η σωστή τιμή  $B = -\frac{1}{5}$ . Δε θα είχαμε κάνει κανένα λάθος! Εντούτοις θα είχαμε κάνει πολύ περισσότερες πράξεις με πολύ μεγαλύτερο κίνδυνο μάλιστα και των σχετικών υπολογιστικών λαθών. Γιατί να μην τις αποφύγουμε με την παρατήρηση ότι η πρώτη παράγωγος  $y'$  τώρα λείπει; ▲

▼ **Εφαρμογή Α5.10 (Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση):** Θεωρούμε το κλασικό μονοβάθμιο (με ένα βαθμό ελευθερίας) μηχανικό σύστημα υλικού σημείου (μάζας  $m$ ) και ελατηρίου (σταθεράς  $k$ ) χωρίς απόσβεση (χωρίς αποσβεστήρα) και με φόρτιση (εξωτερική δύναμη)

$$p(t) = p_0 \sin(\omega t + \alpha) \quad (5.8.104)$$

με  $p_0$  το εύρος της φορτίσεως,  $\omega$  την κυκλική συχνότητά της και  $\alpha$  τη γωνία φάσεως. Ζητείται η γενική λύση της σχετικής διαφορικής εξίσωσης για τη μετατόπιση  $u(t)$  του υλικού σημείου ως προς τη θέση ισορροπίας του  $u = 0$ .

**Λύση:** Η σχετική διαφορική εξίσωση μας είναι πολύ γνωστή ήδη από την Παράγραφο Α1.3.6, Εφαρμογή Α1.14, εξίσωση (1.3.34). Την υπενθυμίζουμε:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = p(t), \quad \text{εδώ} \quad m\ddot{u}(t) + ku(t) = p_0 \sin(\omega t + \alpha). \quad (5.8.105)$$

Εισάγοντας τη γνωστή μας ιδιοσυχνότητα (τη φυσική κυκλική συχνότητα) του μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος που εξετάζουμε  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  την ξαναγράφουμε και στην ισοδύναμη μορφή

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = p_0^* \sin(\omega t + \alpha) \quad (5.8.106)$$

με  $p_0^* = p_0/m$  το ανηγμένο (στη μάζα  $m$  του υλικού σημείου) εύρος της φορτίσεως  $p(t)$ . Η λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξισώσεως (με  $p_0 = p_0^* = 0$ : ιδιοταλαντώσεις και ελεύθερες ταλαντώσεις) μας είναι γνωστή από την Εφαρμογή Α5.5 της Παραγράφου Α5.5.3, σχέση (5.5.85):

$$u_h(t) = D_1 \cos \omega_0 t + D_2 \sin \omega_0 t \quad (5.8.107)$$

με τα σύμβολα  $D_1$  και  $D_2$  να δηλώνουν στη λύση αυτή δύο αυθαίρετες σταθερές.

Εδώ θα εστιάσουμε την προσοχή μας στην εύρεση μιας μερικής λύσεως της πιο πάνω μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως (5.8.106) στις παρούσες εξαναγκασμένες ταλαντώσεις. Σύμφωνα με όσα εκθέσαμε και ειδικότερα το προηγούμενο παράδειγμα η απουσία της πρώτης παραγώγου  $\dot{u}(t)$  στη διαφορική εξίσωση (5.8.106) μας οδηγεί στην εύλογη υπόθεση μερικής λύσεως της μορφής

$$u_p(t) = A \sin(\omega t + \alpha), \quad \text{οπότε} \quad \ddot{u}_p(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha) \quad (5.8.108)$$

με το  $A$  προσδιοριστέο συντελεστή. (Πρόκειται βέβαια για υπόθεση μερικής λύσεως  $u_p(t)$  απόλυτα ανάλογης με την εξωτερική φόρτιση  $p(t)$  που μας έχει δοθεί στην εκφώνηση της εφαρμογής.) Τώρα αντικαθιστούμε τη μερική αυτή λύση  $u_p(t)$  και τη δεύτερη παράγωγο της  $\ddot{u}_p(t)$  στη μη ομογενή διαφορική εξίσωση (5.8.106) στις παρούσες εξαναγκασμένες ταλαντώσεις. Με τον τρόπο αυτό προκύπτει ότι

$$-A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha) + \omega_0^2 A \sin(\omega t + \alpha) = p_0^* \sin(\omega t + \alpha) \quad (5.8.109)$$

και παραπέρα

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) \sin(\omega t + \alpha) = p_0^* \sin(\omega t + \alpha) \implies A(\omega_0^2 - \omega^2) = p_0^*. \quad (5.8.110)$$

Αν λοιπόν ο Πολιτικός Μηχανικός είναι τυχερός και  $\omega \neq \omega_0$ , τότε προκύπτει αμέσως

$$A = \frac{p_0^*}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \text{οπότε} \quad u_p(t) = A \sin(\omega t + \alpha) = \frac{p_0^*}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \alpha). \quad (5.8.111)$$

Σ' αυτήν την καλή περίπτωση η γενική λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως (5.8.106) στις παρούσες εξαναγκασμένες ταλαντώσεις θα είναι βέβαια

$$u_g(t) = u_h(t) + u_p(t) = D_1 \cos \omega_0 t + D_2 \sin \omega_0 t + \frac{p_0^*}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \alpha) \quad \text{με} \quad \omega \neq \omega_0, \quad (5.8.112)$$

όπως έχουμε ήδη υποθέσει. Απλά πήραμε το άθροισμα της γενικής λύσεως  $u_h(t)$  της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξισώσεως από τη σχέση (5.8.107) και της μερικής λύσεως  $u_p(t)$  της μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως, που μόλις βρήκαμε στη δεύτερη σχέση (5.8.111). Αυτή η λύση  $u_g(t)$ , που βασίζεται στην αντίστοιχη μερική λύση  $u_p(t)$ , που μόλις βρήκαμε, αφορά προφανώς στην περίπτωση που δεν έχουμε **συντονισμό**, δηλαδή  $\omega \neq \omega_0$ . Επαναλαμβάνουμε, δεν έχουμε συντονισμό στο παρόν πρόβλημα, όταν η κυκλική συχνότητα  $\omega$  της εξωτερικής φορτίσεως  $p(t) = p_0 \sin(\omega t + \alpha)$  είναι διαφορετική από την ιδιοσυχνότητα (τη φυσική κυκλική συχνότητα)  $\omega_0$  του μηχανικού μας συστήματος. Εδώ πρόκειται για το μηχανικό σύστημα υλικού σημείου-ελατηρίου ή μάζας-ελατηρίου, όπως πάρα πολύ συχνά καλείται αυτό το μονοβάθμιο σύστημα από τον Πολιτικό Μηχανικό.

Ας ενδιαφερθούμε τώρα και για την πιο δύσκολη και ανεπιθύμητη περίπτωση του συντονισμού, δηλαδή την περίπτωση όπου  $\omega = \omega_0$ . Τότε η διαφορική μας εξίσωση (5.8.106) παίρνει τη μορφή

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = p_0^* \sin(\omega_0 t + \alpha) \quad (5.8.113)$$

(με  $\omega = \omega_0$ ). Σ' αυτήν την ειδική περίπτωση είναι προφανές ότι η υπόθεση μερικής λύσεως  $u_p(t)$  της μορφής (5.8.108), δηλαδή (εδώ συνεχώς με  $\omega = \omega_0$ )

$$u_p(t) = A \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad \text{οπότε} \quad \ddot{u}_p(t) = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \alpha) \quad (5.8.114)$$

μας οδηγεί σε ένα απόλυτο αδιέξοδο. Αυτό συμβαίνει, επειδή η δοκιμαστική αυτή λύση επαληθεύει την αντίστοιχη ομογενή διαφορική εξίσωση: αυτή με  $p_0 = p_0^* = 0$ . Της είναι έτσι εντελώς αδύνατο να επαληθεύσει τη μη ομογενή διαφορική εξίσωση (5.8.113). Πιο μαθηματικά, οι ποσότητες  $\pm i\omega_0$  είναι οι δύο ρίζες της δευτεροβάθμιας χαρακτηριστικής εξισώσεως  $\mu^2 + \omega_0^2 = 0$  στην περίπτωση μας. Ή με άλλα λόγια η δεύτερη σχέση (5.8.110), που τόσο χρήσιμη μας φάνηκε προηγουμένως, παίρνει τώρα την εντελώς άχρηστη μορφή:  $A \cdot 0 = p_0^*$ , αφού τώρα έχουμε υποθέσει ότι  $\omega = \omega_0$ . Δε μπορούμε έτσι να προσδιορίσουμε το συντελεστή  $A$ .

Και τί κάνουμε τώρα; Μα φυσικά, όπως ήδη γνωρίζουμε, δοκιμάζουμε μια σωστή μερική λύση. Αυτή είναι η λύση

$$u_p(t) = t[A \cos(\omega_0 t + \alpha) + B \sin(\omega_0 t + \alpha)] \quad (5.8.115)$$

με την παρουσία του παράγοντα  $t$ , που την κάνει να μην είναι πλέον λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξισώσεως: χωρίς φόρτιση: με  $p_0 = p_0^* = 0$  (ιδιοταλαντώσεις και ελεύθερες ταλαντώσεις). Τώρα η δεύτερη παράγωγος  $\ddot{u}_p(t)$  της μερικής λύσεως  $u_p(t)$  που μόλις υποθέσαμε δεν είναι πια ένα απλό πολλαπλάσιό της. Γι' αυτόν το λόγο και υποχρεωθήκαμε να χρησιμοποιήσουμε όχι μόνο ημιτονικό, αλλά και συνημιτονικό όρο στη μερική αυτή λύση  $u_p(t)$  που υιοθετήσαμε.

Η συνέχεια είναι προφανής. Παραγωγίζουμε δύο φορές τη μερική αυτή λύση  $u_p(t)$ , που σωστά υποθέσαμε εδώ, χρησιμοποιούμε τον κανόνα παραγωγίσεως γινομένου και βρίσκουμε εύκολα ότι

$$\dot{u}_p(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha) + B \sin(\omega_0 t + \alpha) + \omega_0 t[-A \sin(\omega_0 t + \alpha) + B \cos(\omega_0 t + \alpha)] \quad (5.8.116)$$

για την πρώτη παράγωγο  $\dot{u}_p(t)$  και στη συνέχεια

$$\ddot{u}_p(t) = -2A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) + 2B\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha) - \omega_0^2 t[A \cos(\omega_0 t + \alpha) + B \sin(\omega_0 t + \alpha)]. \quad (5.8.117)$$

Αντικαθιστούμε τώρα τη μερική λύση  $u_p(t)$  και τη δεύτερη παράγωγό της  $\ddot{u}_p(t)$  από τις σχέσεις (5.8.115) και (5.8.117) αντίστοιχα στη μη ομογενή διαφορική μας εξίσωση (5.8.113). Μετά την απλοποίηση των αντίθετων όρων που προκύπτουν από τη δεύτερη παράγωγο  $\ddot{u}_p(t)$  και τη συνάρτηση  $u_p(t)$  στο δεύτερο όρο  $\omega_0^2 u_p(t)$ , η διαφορική εξίσωση (5.8.113) παίρνει την τελική μορφή

$$-2A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) + 2B\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha) = p_0^* \sin(\omega_0 t + \alpha). \quad (5.8.118)$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των συνημιτονικών και των ημιτονικών όρων αριστερά και δεξιά (παρατηρούμε όμως ότι συνημιτονικός όρος παρουσιάζεται μόνο αριστερά), για να καταστήσουμε την πιο πάνω σχέση ταυτότητα, συνάγουμε ότι πρέπει να ισχύουν οι δύο σχέσεις

$$-2A\omega_0 = p_0^* \implies A = -\frac{p_0^*}{2\omega_0} \quad \text{και} \quad 2B\omega_0 = 0 \implies B = 0. \quad (5.8.119)$$

Άρα με τις τιμές αυτές των προσδιοριστέων συντελεστών  $A$  και  $B$ , που τώρα έχουν προσδιορισθεί:  $A = -p_0^*/(2\omega_0)$  και  $B = 0$ , η μερική λύση  $u_p(t)$  στη σχέση (5.8.115) παίρνει την τελική μορφή

$$u_p(t) = -\frac{p_0^*}{2\omega_0} t \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (5.8.120)$$

Η αντίστοιχη γενική λύση  $u_g(t)$  που ζητείται θα είναι βέβαια, όπως πάρα πολύ καλά γνωρίζουμε ήδη, το άθροισμα της γενικής λύσεως  $u_h(t)$  της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης στη σχέση (5.8.107) συν τη μερική αυτή λύση  $u_p(t)$ , δηλαδή  $u_g(t) = u_h(t) + u_p(t)$ . Επομένως θα έχουμε

$$u_g(t) = D_1 \cos \omega_0 t + D_2 \sin \omega_0 t - \frac{P_0^*}{2\omega_0} t \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (5.8.121)$$

Αν λάβουμε μάλιστα υπόψη μας και δύο αρχικές συνθήκες, π.χ. τις  $u(0) = u_0$  και  $\dot{u}(0) = v_0$ , μπορούμε να προσδιορίσουμε και τις δύο αυθαίρετες σταθερές  $D_1$  και  $D_2$  στη γενική αυτή λύση. Έτσι θα έχουμε τη μερική λύση  $u(t)$  που θα είναι λύση του σχετικού προβλήματος αρχικών τιμών. **▲**

► **Παρατήρηση Α5.10:** Ας παρατηρήσουμε τέλος ότι ενώ η φόρτιση στο δεξιό μέλος της διαφορικής εξίσωσης (5.8.113) έχει ημιτονικό όρο  $\sin(\omega_0 t + \alpha)$ , η μερική λύση  $u_p(t)$  στη σχέση (5.8.120) έχει αντίστοιχο συνημιτονικό όρο  $\cos(\omega_0 t + \alpha)$ . Πολύ πιο σημαντικό είναι βέβαια το γεγονός ότι στη μερική αυτή λύση  $u_p(t)$  υπάρχει ο παράγοντας  $t$ . Αυτός προκαλεί συνεχή αύξηση του εύρους των ταλαντώσεων. Έχουμε εδώ προφανώς το ανεπιθύμητο για τον Πολιτικό Μηχανικό φαινόμενο του **συντονισμού**. Αυτό το φαινόμενο οφείλεται στο ότι η κυκλική συχνότητα  $\omega = \omega_0$  της φορτίσεως (της εξωτερικής δυνάμεως)  $p(t)$  συμπίπτει με την κυκλική ιδιοσυχνότητα (τη φυσική κυκλική συχνότητα)  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  του μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος υλικού σημείου-ελατηρίου. Υπό τις συνθήκες αυτές η μερική λύση  $u_p(t)$  αυξάνει συνεχώς κατά εύρος. Με την πάροδο του χρόνου  $t$  η λύση  $u_h(t)$  της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης, που δεν αυξάνει κατά εύρος, προφανώς μπορεί να αμεληθεί. Κυριαρχεί η μερική λύση  $u_p(t)$ , η οποία τείνει κατά εύρος στο άπειρο. Αυτό μπορεί βέβαια να προκαλέσει την έξοδο του ελατηρίου από την ελαστική συμπεριφορά και απόκριση με μετάβασή του στην πλαστική συμπεριφορά και απόκριση, στη διαρροή του υλικού του και τελικά στη θραύση του μηχανικού συστήματός μας. Στην πραγματικότητα ούτε καν θα φθάσουμε σε άπειρο εύρος ταλαντώσεων. Είναι λοιπόν ανεπιθύμητος ο συντονισμός και πρέπει πάση θυσία να αποφεύγεται. Ας σημειώσουμε τέλος ότι ένα ανάλογο πρόβλημα συντονισμού (για το ίδιο μηχανικό σύστημα) θα επιλύσουμε στην Παράγραφο Α11.9.2 του Κεφαλαίου Α11, εκεί όμως με μια εντελώς διαφορετική, μια καινούργια μέθοδο: με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace.

### Α5.8.6. Δεξιό μέλος πολυωνυμικής μορφής

Στην παράγραφο αυτή θεωρούμε και πάλι τη γενική μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές (5.8.1). Την υπενθυμίζουμε

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = g(x), \quad (5.8.122)$$

τώρα όμως με δεξιό μέλος  $g(x)$  της πολυωνυμικής μορφής

$$g(x) = P_m(x) = p_m x^m + p_{m-1} x^{m-1} + \dots + p_1 x + p_0 \quad (5.8.123)$$

με  $P_m(x)$  γνωστό πολυώνυμο βαθμού  $m$ .

Η πρώτη παράγωγος  $P'_m(x)$  του πολυωνύμου  $P_m(x)$  είναι και αυτή πολυώνυμο και μάλιστα  $m - 1$  βαθμού, η δεύτερη παράγωγος  $P''_m(x)$  πολυώνυμο  $m - 2$  βαθμού, κλπ. Άρα είναι εύλογο γενικά να δεχθούμε σαν μερική λύση  $y_p(x)$  της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.8.122) πολυώνυμο

$$y_p(x) = Q_m(x) = q_m x^m + q_{m-1} x^{m-1} + \dots + q_1 x + q_0 \quad (5.8.124)$$

επίσης  $m$  βαθμού. Το πολυώνυμο  $P_m(x)$  είναι γνωστό. Το πολυώνυμο  $Q_m(x)$  πρέπει να προσδιορισθεί. Οι συντελεστές του  $q_k$  είναι οι προσδιοριστέοι συντελεστές στο πρόβλημά μας. Θα προσδιορισθούν θέτοντας τη μερική λύση  $y_p(x) = Q_m(x)$  στη μη ομογενή διαφορική εξίσωση (5.8.122) και εξισώνοντας τους συντελεστές των ίσων δυνάμεων του  $x$  στο αριστερό και στο δεξιό μέλος, έτσι ώστε να προκύψει ταυτότητα. Ας δείξουμε τη διαδικασία αυτή σε ένα απλό παράδειγμα.

▼ **Παράδειγμα Α5.16:** Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = x^3 + 5x^2 + 3x - 7. \quad (5.8.125)$$

**Λύση:** Πρόκειται για μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση τρίτης τάξεως (με  $n = 3$ ) με σταθερούς συντελεστές. Το δεξιό μέλος είναι πολυωνυμικής μορφής: πολυώνυμο τρίτου βαθμού. Άρα θα δοκιμάσουμε μερική λύση  $y_p(x)$  που να είναι και αυτή πολυώνυμο τρίτου βαθμού  $Q_3(x)$ .

Προηγουμένως όμως προσδιορίζουμε τη γενική λύση  $y_h(x)$  της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης: με μηδενικό δεξιό μέλος. Με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως  $y_0(x) = e^{\mu x}$  βρίσκουμε εύκολα τη χαρακτηριστική εξίσωση

$$\mu^3 + 3\mu^2 + 3\mu + 1 = 0 \implies (\mu + 1)^3 = 0 \implies \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = -1. \quad (5.8.126)$$

Επομένως

$$y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x} = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^{-x}. \quad (5.8.127)$$

Τώρα θεωρούμε μερική λύση  $y_p(x)$  της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.8.125) της μορφής

$$y_p(x) = Q_3(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D. \quad (5.8.128)$$

Παρατηρούμε πρώτα ότι κανένας όρος της δεν είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης με γενική λύση την  $y_h(x)$  στη σχέση (5.8.127). Άρα προχωράμε. Παραγωγίζουμε τρεις φορές τη μερική αυτή λύση  $y_p(x) = Q_3(x)$  βρίσκοντας

$$y_p'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C \implies y_p''(x) = 6Ax + 2B \implies y_p'''(x) = 6A. \quad (5.8.129)$$

Αντικαθιστούμε τώρα τη συνάρτηση  $y_p(x)$  και τις τρεις αυτές παραγώγους της στη μη ομογενή διαφορική εξίσωση (5.8.125). Προκύπτει

$$6A + 3(6Ax + 2B) + 3(3Ax^2 + 2Bx + C) + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = x^3 + 5x^2 + 3x - 7. \quad (5.8.130)$$

Στο σημείο αυτό αναδιατάσσουμε τους όρους στο αριστερό μέλος και παίρνουμε

$$Ax^3 + (9A + B)x^2 + (18A + 6B + C)x + (6A + 6B + 3C + D) = x^3 + 5x^2 + 3x - 7. \quad (5.8.131)$$

Εξισώνουμε τέλος τους συντελεστές των ίσων δυνάμεων του  $x$  στο αριστερό και στο δεξιό μέλος. Προκύπτει έτσι το σύστημα των τεσσάρων γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων

$$A = 1, \quad 9A + B = 5, \quad 18A + 6B + C = 3, \quad 6A + 6B + 3C + D = -7. \quad (5.8.132)$$

Η πρώτη εξίσωση μας δίνει  $A = 1$ . Με την τιμή αυτή του  $A$  η δεύτερη εξίσωση μας δίνει  $B = -4$ . Με τις τιμές αυτές των  $A$  και  $B$  η τρίτη εξίσωση μας δίνει  $C = 9$ . Τέλος με τις τιμές αυτές των  $A$ ,  $B$  και  $C$  η τέταρτη εξίσωση μας δίνει  $D = -16$ . Άρα υπολογίσθηκαν οι προσδιοριστέοι συντελεστές:

$$A = 1, \quad B = -4, \quad C = 9, \quad D = -16. \quad (5.8.133)$$

Επομένως βρέθηκε μια μερική λύση  $y_p(x)$  της διαφορικής εξίσωσης (5.8.125): η λύση

$$y_p(x) = Q_3(x) = x^3 - 4x^2 + 9x - 16 \quad (5.8.134)$$

Κατά συνέπεια προσδιορίσθηκε και η γενική λύση της  $y_g(x)$ : η λύση

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x) = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^{-x} + x^3 - 4x^2 + 9x - 16 \quad (5.8.135)$$

με χρήση και της λύσεως της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης στη σχέση (5.8.127). ▲

Στο παραπάνω παράδειγμα κανένας όρος της μερικής λύσεως  $y_p(x)$  που υποθέσαμε δεν ήταν λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (με  $P_m(x) \equiv 0$ ), δηλαδή δεν περιεχόταν στη λύση  $y_h(x)$  στη σχέση (5.8.127). Με άλλες λέξεις το μηδέν δεν ήταν ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $p_3(\mu) = 0$  της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης στη σχέση (5.8.126).

Υπάρχει όμως και η σπανιότερη αντίθετη περίπτωση, δηλαδή να τύχει κάποιος όρος του πολυώνυμου  $Q_m(x)$  να είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης (με  $P_m(x) \equiv 0$ ). Τότε παίρνουμε για μερική λύση  $y_p(x)$  πολυώνυμο της μορφής  $xQ_m(x)$ , αν χρειασθεί και  $x^2Q_m(x)$ , κλπ., μέχρις ότου κανένας απολύτως όρος της μερικής λύσεως  $y_p(x)$  που δοκιμάζουμε να μην είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης (με  $P_m(x) \equiv 0$ ). Με άλλα λόγια, αν το μηδέν είναι ρίζα πολλαπλότητας  $\rho$  της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $p_n(\mu) = 0$  της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης τάξεως  $n$ , τότε παίρνουμε για μερική λύση το ακόλουθο πολυώνυμο  $m + \rho$  βαθμού:

$$y_p(x) = x^\rho Q_m(x), \tag{5.8.136}$$

πάλι όμως με  $m$  προσδιοριστέους συντελεστές. (Σημειώνουμε ότι στη συνηθισμένη περίπτωση που το μηδέν δεν είναι λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης έχουμε  $\rho = 0$  και  $y_p(x) = Q_m(x)$ .)

▼ **Παράδειγμα Α5.17:** Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'''' + 4y'' = 5x^2 - 3x + 10. \tag{5.8.137}$$

**Λύση:** Πρόκειται για μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως (με  $n = 4$ ) πάλι με σταθερούς συντελεστές. Το δεξιό μέλος της είναι πολυωνυμικής μορφής: εδώ πολυώνυμο δευτέρου βαθμού (με  $m = 2$ ). Άρα καταρχήν θα έπρεπε να δοκιμάσουμε μερική λύση  $y_p(x)$  που να είναι και αυτή πολυώνυμο δευτέρου βαθμού

$$y_p(x) = Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C. \tag{5.8.138}$$

Εντούτοις μια τέτοια δοκιμαστική λύση θα αποτύχει. Δε χρειάζεται και πολλή σκέψη, για να συνειδητοποιήσουμε ότι οι δύο τελευταίοι όροι  $Bx + C$  της μερικής αυτής λύσεως  $y_p(x)$  έχουν δεύτερη παράγωγο και παραγώγους ανωτέρας τάξεως μηδενικές. Άρα επαληθεύουν την αντίστοιχη ομογενή διαφορική εξίσωση

$$y'''' + 4y'' = 0. \tag{5.8.139}$$

Κατά συνέπεια είναι απόλυτα αφελές να αναζητούμε τον προσδιορισμό των δήθεν προσδιοριστέων συντελεστών  $B$  και  $C$  με βάση τη μη ομογενή διαφορική εξίσωση (5.8.137), για να «αντιμετωπίσουμε» το πολυώνυμο  $P_2(x) = 5x^2 - 3x + 10$  στο δεξιό μέλος της. Αυτό συμβαίνει, επειδή και οι δύο αυτοί συντελεστές  $B$  και  $C$  θα εξαφανισθούν από τη δεύτερη και την τέταρτη παράγωγο στο αριστερό μέλος της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.8.137). Πρόκειται για μια λίγο-πολύ ανόητη προσπάθεια, που είναι εκ των προτέρων καταδικασμένη σε αποτυχία.

Και με άλλα λόγια: με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως  $y_0(x) = e^{\mu x}$  βρίσκουμε εύκολα τη χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.8.139), που αντιστοιχεί στην αρχική μη ομογενή διαφορική εξίσωση (5.8.137)

$$p_4(\mu) = \mu^4 + 4\mu^2 = \mu^2(\mu^2 + 4) = 0 \quad \text{με ρίζες τις} \quad \mu_1 = \mu_2 = 0, \quad \mu_3 = 2i, \quad \mu_4 = -2i. \tag{5.8.140}$$

Αμέσως μετά βρίσκουμε τη γενική λύση  $y_h(x)$  της ίδιας ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.8.139)

$$y_h(x) = C_1 + C_2x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x \tag{5.8.141}$$

με τα  $C_1, C_2, C_3$  και  $C_4$  τέσσερις αυθαίρετες σταθερές. (Πολύ σωστά, αφού έχουμε διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως!)

Επομένως το μηδέν είναι διπλή ρίζα (ισοδύναμα ρίζα πολλαπλότητας 2) της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $p_4(\mu) = 0$  (με  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ). Άρα  $\rho = 2$  και κατάλληλη δοκιμαστική λύση  $\hat{y}_\rho(x)$  θα είναι η ακόλουθη:

$$\hat{y}_\rho(x) = x^2 Q_2(x) = x^2(Ax^2 + Bx + C) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 \quad (5.8.142)$$

με βάση τη σχέση (5.8.136) για  $\rho = 2$ . Είναι τώρα σαφές ότι ενεργούμε σωστά: κανένας όρος της τελευταίας δοκιμαστικής μερικής λύσεως  $\hat{y}_\rho(x)$  δεν αποτελεί πια μερική λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.8.139). Ευτυχώς, ησυχάσαμε από το πρόβλημα αυτό, που το είχαμε στην αρχική μερική λύση  $y_\rho(x)$ , την οποία κακώς είχαμε υποθέσει στη σχέση (5.8.138).

Προχωράμε λοιπόν τώρα στον προσδιορισμό των συντελεστών  $A, B$  και  $C$ . Πρώτα χρειάζονται τέσσερις παραγωγίσεις της μερικής λύσεως  $\hat{y}_\rho(x)$ . Πολύ εύκολη εργασία με αποτέλεσμα

$$\hat{y}'_\rho(x) = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx, \quad \hat{y}''_\rho(x) = 12Ax^2 + 6Bx + 2C, \quad \hat{y}'''_\rho(x) = 24Ax + 6B, \quad \hat{y}''''_\rho(x) = 24A. \quad (5.8.143)$$

Αντικαθιστούμε τώρα την τέταρτη παράγωγο  $\hat{y}''''_\rho(x)$  καθώς και τη δεύτερη παράγωγο  $\hat{y}''_\rho(x)$  στην αρχική μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (5.8.137):  $y'''' + 4y'' = 5x^2 - 3x + 10$  παίρνοντας

$$24A + 4(12Ax^2 + 6Bx + 2C) = 5x^2 - 3x + 10 \implies 48Ax^2 + 24Bx + 24A + 8C = 5x^2 - 3x + 10. \quad (5.8.144)$$

Εξισώνουμε τέλος τους συντελεστές των ίσων δυνάμεων του  $x$  στην πιο πάνω σχέση, ώστε αυτή να καταστεί ταυτότητα. Με τον τρόπο αυτό καταλήγουμε στις γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις

$$48A = 5 \quad 24B = -3, \quad 24A + 8C = 10 \quad (5.8.145)$$

με λύση

$$A = \frac{5}{48}, \quad B = -\frac{3}{24} = -\frac{1}{8}, \quad C = \frac{15}{16}. \quad (5.8.146)$$

Συνεπώς η μερική λύση  $\hat{y}_\rho(x)$  της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης που ζητάμε είναι η λύση

$$\hat{y}_\rho(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 = \frac{5}{48}x^4 - \frac{1}{8}x^3 + \frac{15}{16}x^2 = \frac{x^2}{48}(5x^2 - 6x + 45). \quad (5.8.147)$$

Αν προσθέσουμε τέλος και τη γενική λύση  $y_h(x)$  της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (5.8.139) από τη σχέση (5.8.141), παίρνουμε τη γενική λύση  $y_g(x)$  της αρχικής μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (5.8.137) στη μορφή

$$y_g(x) = y_h(x) + \hat{y}_\rho(x) = C_1 + C_2x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x + \frac{x^2}{48}(5x^2 - 6x + 45). \quad (5.8.148)$$

Φυσικά αυτή περιέχει, όπως και η  $y_h(x)$ , τις τέσσερις αυθαίρετες σταθερές  $C_1, C_2, C_3$  και  $C_4$ , κάτι το απόλυτα εύλογο για μια διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως (με  $n = 4$ ). Μπορούμε να τις προσδιορίσουμε εύκολα, αν διαθέτουμε είτε (α) τέσσερις αρχικές συνθήκες σε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών είτε (β) τέσσερις συνοριακές συνθήκες σε ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών. ▲

#### A5.8.7. Σταθερό δεξιό μέλος

Στην περίπτωση σταθερού δεξιού μέλους  $g(x) = p_0$  (με το  $p_0$  γνωστή σταθερά) η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση  $n$ -τάξεως και με σταθερούς συντελεστές (5.8.122) παίρνει τη μορφή

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = p_0. \quad (5.8.149)$$

Πρόκειται βέβαια για ειδική περίπτωση του δεξιού μέλους (α) εκθετικής μορφής  $g(x) = de^{cx}$  (φυσικά με  $d = p_0$  και  $c = 0$ , οπότε  $g(x) = p_0$ ) ή (β) τριγωνομετρικής μορφής  $g(x) = d_1 \cos bx + d_2 \sin bx$  (με  $d_1 = p_0$  και  $b = 0$ , οπότε και πάλι  $g(x) = p_0$ ) ή (γ) πολυωνυμικής μορφής  $g(x) = P_m(x)$  (με πολυώνυμο  $P_m(x)$  μηδενικού βαθμού,  $m = 0$ , οπότε πρόκειται για σταθερά:  $g(x) = P_0(x) = p_0$ ).



Σ' αυτήν την περίπτωση, που φυσικά αποτελεί ειδική περίπτωση των προηγούμενων, αλλά είναι και σημαντική από μόνη της στις εφαρμογές του Πολιτικού Μηχανικού, διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις για την επιλογή της μερικής λύσεως  $y_p(x)$ : (α) Εάν μεν  $a_0 \neq 0$ , δηλαδή παρουσιάζεται η συνάρτηση  $y(x)$  (χωρίς παράγωγο) στη μη ομογενή διαφορική εξίσωση (5.8.149), τότε προφανώς

$$y_p(x) = A, \text{ οπότε } 0 + a_0A = p_0 \implies A = \frac{p_0}{a_0} \text{ με } a_0 \neq 0. \quad (5.8.150)$$

Δηλαδή η μερική λύση είναι απλά σταθερά:  $y_p(x) = A = p_0/a_0$ . (β) Εάν αντίθετα ο συντελεστής  $a_0$  είναι μηδέν, τότε πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το  $A$  επί  $x$  στη μερική λύση  $y_p(x)$  που δοκιμάζουμε. Εάν επιπλέον και ο συντελεστής  $a_1$  είναι μηδέν, επί  $x^2$ , κλπ. Γενικά, εάν το  $\mu = 0$  είναι ρίζα πολλαπλότητας  $\rho$  της χαρακτηριστικής εξισώσεως  $p_n(\mu) = 0$  της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξισώσεως, τότε η μερική λύση  $y_p(x)$  που δοκιμάζουμε θα πρέπει να είναι της μορφής  $y_p(x) = Ax^\rho$ . Με αντικατάσταση της μερικής αυτής λύσεως  $y_p(x)$  στη μη ομογενή διαφορική εξίσωση (5.8.149) προσδιορίζεται αμέσως ο προσδιοριστέος συντελεστής  $A$  και η λύση  $y_p(x) = Ax^\rho$  είναι πια γνωστή.

▼ **Εφαρμογή Α5.11 (Μηχανική των Υλικών: Δοκοί):** (α) Να υπολογισθεί μια μερική λύση  $v_p(x)$  της διαφορικής εξισώσεως της δοκού επί ελαστικής βάσεως

$$Elv''''(x) + kv(x) = p_0, \text{ όπου } p_0 \neq 0, \quad El > 0 \text{ και } k \geq 0 \quad (5.8.151)$$

με  $El$  τη δυσκαμψία της δοκού και  $k$  τη συνολική σταθερά εδάφους-δοκού υπό ομοιόμορφη κάθετη φόρτιση  $p_0$ . (β) Το ίδιο ερώτημα για δοκό που δε στηρίζεται σε ελαστική βάση, δηλαδή με  $k = 0$ .

**Λύση:** (α) Στην πρώτη περίπτωση ( $k > 0$ ) δεχόμαστε σταθερή μερική λύση  $v_p(x)$  και βρίσκουμε

$$v_p(x) = A \implies v_p''''(x) = 0 \implies El \cdot 0 + kA = p_0 \implies A = \frac{p_0}{k} \implies v_p(x) = \frac{p_0}{k}. \quad (5.8.152)$$

(β) Στη δεύτερη περίπτωση ( $k = 0$ ) η διαφορική εξίσωση της δοκού μας απλοποιείται στη μορφή

$$Elv''''(x) = p_0 \quad (5.8.153)$$

με τετραπλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξισώσεως της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξισώσεως τη  $\mu = 0$ : με πολλαπλότητα  $\rho = 4$ . Επομένως η γενική λύση  $v_h(x)$  της ομογενούς θα είναι

$$v_h(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3. \quad (5.8.154)$$

Άρα δε μπορούμε να δεχθούμε σαν μερική λύση τη σταθερή λύση  $v_p(x) = A$ , αφού  $\rho = 4$ . Πρέπει να δεχθούμε τη λύση

$$v_p(x) = Ax^4 = Ax^4, \text{ οπότε } v_p''''(x) = 24A. \quad (5.8.155)$$

Αντικαθιστώντας τώρα την τέταρτη αυτή παράγωγο (που είναι, όπως περιμέναμε, σταθερά) στη διαφορική εξίσωση (5.8.153) (χωρίς βέβαια την παρουσία της ελαστικής βάσεως), βρίσκουμε ότι

$$24ElA = p_0 \implies A = \frac{p_0}{24El}, \text{ οπότε } v_p(x) = \frac{p_0}{24El} x^4. \quad (5.8.156)$$

Να και μια φορά που η δοκός επί ελαστικής βάσεως έχει απλούστερη επίλυση και λύση! Ωραία! ▲

### Α5.8.8. Η γενική περίπτωση δεξιού μέλους

Στις προηγούμενες παραγράφους ασχοληθήκαμε με αρκετές και λίγο-πολύ απλές μορφές δεξιού μέλους  $g(x)$  στη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (5.8.1): εκθετική, τριγωνομετρική, πολυωνυμική, σταθερά (πάντοτε με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών). Αυτές καλύπτουν την ευρεία πλειονότητα των περιπτώσεων που συναντώνται στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Εδώ απλά θα αναφερθούμε στη γενική περίπτωση (5.8.2) του δεξιού μέλους  $g(x)$  όπου

$$g(x) = [P_{m1}(x) \cos bx + P_{m2}(x) \sin bx]e^{cx} \quad (5.8.157)$$

με τα  $P_{m_1}(x)$  και  $P_{m_2}(x)$  δύο γνωστά πολυώνυμα  $m$ -βαθμού (το ένα ίσως και μικρότερου βαθμού) και τα  $b$  και  $c$  δύο γνωστές σταθερές. Στη γενική αυτή περίπτωση για τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών δοκιμάζουμε μερική λύση  $y_p(x)$  ανάλογης μορφής με το δεξιό μέλος  $g(x)$ , δηλαδή

$$y_p(x) = [Q_{m_1}(x) \cos bx + Q_{m_2}(x) \sin bx]e^{cx} \quad (5.8.158)$$

με άγνωστα τα δύο πολυώνυμα  $Q_{m_1}(x)$  και  $Q_{m_2}(x)$ , που είναι ακριβώς  $m$ -βαθμού (όχι μικρότερου!).

Μπορεί όμως να τύχει και κάποιος όρος της μερικής αυτής λύσεως  $y_p(x)$  να είναι ήδη λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης (με  $g(x) \equiv 0$ ). Τούτο δεν το θέλουμε με κανέναν τρόπο! Τότε πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τη μερική αυτή λύση  $y_p(x)$  επί  $x$ , αν χρειασθεί επί  $x^2$ , κλπ., ώστε να παύσει αυτό να ισχύει. Με λίγο πιο επίσημα λόγια, αν η ποσότητα  $\mu = c + ib$  (ή  $\mu = c - ib$ ) τύχει να είναι ρίζα πολλαπλότητας  $\rho$  της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $p_n(\mu) = 0$  της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης, τότε η πιο πάνω λύση  $y_p(x)$  πρέπει να πολλαπλασιασθεί ακριβώς επί  $x^\rho$ .

Εννοείται ότι τα δύο πολυώνυμα  $Q_{m_1}(x)$  και  $Q_{m_2}(x)$  έχουν συνολικά  $2m + 2$  συντελεστές. Τόσοι είναι και οι προσδιοριστέοι συντελεστές που πρέπει να υπολογισθούν στη γενική αυτή περίπτωση με αντικατάσταση στη μη ομογενή διαφορική εξίσωση (5.8.1). Ένα πρόγραμμα συμβολικών υπολογισμών είναι χρήσιμο σε τέτοιους υπολογισμούς περιλαμβάνοντας ίσως και το σχετικό αλγόριθμο.

#### A5.8.9. Μια χρήσιμη γενίκευση της μεθόδου

Στην παράγραφο αυτή θεωρούμε την περίπτωση όπου το δεξιό μέλος  $g(x)$  δεν είναι της γενικής μορφής (5.8.157), αλλ' εντούτοις μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα  $k$  συναρτήσεων  $g_j(x)$  της μορφής

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_k(x) \quad (5.8.159)$$

με την κάθε μια τους (τη  $g_1(x)$ , τη  $g_2(x)$ , ..., τη  $g_k(x)$ ) να είναι πραγματικά της γενικής μορφής (5.8.157) (ή και απλούστερων μορφών). Ας υποθέσουμε τώρα ότι γνωρίζουμε (ή μάλλον έχουμε υπολογίσει) τις  $k$  μερικές λύσεις  $y_{p1}(x)$ ,  $y_{p2}(x)$ , ...,  $y_{pk}(x)$  που αντιστοιχούν στα δεξιά μέλη  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$ , ...,  $g_k(x)$ . Τότε μπορεί άμεσα να διαπιστωθεί με αντικατάσταση στη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές (5.8.1) ότι μια μερική λύση της θα είναι η ακόλουθη:

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) + \dots + y_{pk}(x). \quad (5.8.160)$$

Αυτό ισχύει, επειδή στο δεξιό μέλος θα έχουμε τώρα απλά  $g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_k(x)$ , που μας δίνει τελικά το συνολικό δεξιό μέλος  $g(x)$  με βάση τη σχέση (5.8.159). Ας κάνουμε κι ένα παράδειγμα.

▼ **Παράδειγμα A5.18:** Να βρεθεί μια μερική λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$y'''' + 4y'' = 6e^{3x} - 2 \sin 8x + 5x^2 - 3x + 10. \quad (5.8.161)$$

**Λύση:** Εδώ παρατηρούμε πως το δεξιό μέλος  $g(x)$  δεν είναι με κανέναν τρόπο της γενικής μορφής (5.8.157), είναι όμως (ευτυχώς!) άθροισμα τριών συναρτήσεων αυτής της μορφής, δηλαδή

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) + g_3(x) \quad \text{με} \quad g_1(x) = 6e^{3x}, \quad g_2(x) = -2 \sin 8x, \quad g_3(x) = 5x^2 - 3x + 10. \quad (5.8.162)$$

Σ' αυτές τις συναρτήσεις  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$  και  $g_3(x)$  βρίσκουμε εύκολα ότι αντιστοιχούν οι μερικές λύσεις

$$y_{p1}(x) = \frac{2}{39} e^{3x}, \quad y_{p2}(x) = -\frac{1}{1920} \sin 8x \quad \text{και} \quad y_{p3}(x) = \frac{x^2}{48} (5x^2 - 6x + 45). \quad (5.8.163)$$

(Την τρίτη την υπολογίσαμε ήδη στο Παράδειγμα A5.17 της Παραγράφου A5.8.6, σχέση (5.8.147).) Άρα η συνολική μερική λύση  $y_p(x)$ , που αντιστοιχεί σ' ολόκληρο το δεξιό μέλος  $g(x)$ , θα είναι η εξής:

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) + y_{p3}(x) = \frac{2}{39} e^{3x} - \frac{1}{1920} \sin 8x + \frac{x^2}{48} (5x^2 - 6x + 45). \quad (5.8.164)$$

Αυτή είναι μια μερική λύση  $y_p(x)$  της παρούσας μη ομογενούς εξίσωσης (5.8.161). Η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς  $y_h(x)$  έχει κι αυτή βρεθεί στο Παράδειγμα A5.17: είναι η (5.8.141). ▲

## A5.9. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

### A5.9.1. Η βάση της μεθόδου της μεταβολής των παραμέτρων

Η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών είναι η μέθοδος που προτιμάται για την επίλυση μη ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων της γενικής μορφής (5.8.1), την υπενθυμίζουμε

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = g(x) \quad \text{με} \quad a_n \neq 0. \quad (5.9.1)$$

Την εξετάσαμε πολύ λεπτομερώς στην προηγούμενη Ενότητα Α5.8. Εντούτοις η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών έχει δύο σημαντικούς περιορισμούς. Για να είμαστε σαφείς, είναι εφαρμόσιμη, μόνο όταν η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση (5.9.1) είναι (i) με σταθερούς συντελεστές  $a_k$  και (ii) έχει δεξιό μέλος  $g(x)$  ειδικής μορφής, συγκεκριμένα της μορφής (5.8.2) ή έστω γραμμικού συνδυασμού συναρτήσεων  $g_i(x)$  αυτής της μορφής. Στην περίπτωση που δεν ισχύουν ταυτόχρονα και οι δύο αυτοί περιορισμοί, δε μπορεί με κανέναν τρόπο να εφαρμοσθεί.

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε μια πολύ πιο γενική μέθοδο επίλυσης μη ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων της μορφής (5.9.1): πρόκειται για τη **μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων**. Αυτή η μέθοδος οφείλεται στο Lagrange, γι' αυτό σπάνια καλείται και **μέθοδος του Lagrange**. Καλύπτει τις περιπτώσεις εφαρμογής της μεθόδου των προσδιοριστέων συντελεστών και δεν έχει όμως τους περιορισμούς της. Είναι εφαρμόσιμη, ακόμη και όταν η γραμμική διαφορική εξίσωση (5.9.1) έχει μη σταθερούς συντελεστές και δεξιό μέλος  $g(x)$  οποιασδήποτε μορφής, αρκεί βέβαια να υπάρχουν τα ολοκληρώματα που θα δούμε σε λίγο. Την έχουμε ήδη συναντήσει στο Εδάφιο Α3.4.3.1 σαν μέθοδο της μεταβολής της παραμέτρου για μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως. Εδώ θα τη γενικεύσουμε. Όμως προϋπόθεση εφαρμογής της είναι η γνώση της γενικής λύσεως  $y_h(x)$  της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως (με  $g(x) \equiv 0$  στο δεξιό μέλος). Στην περίπτωση των σταθερών συντελεστών  $a_k$  η γενική αυτή λύση  $y_h(x)$  προσδιορίζεται εύκολα με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως  $y_0(x) = e^{\mu x}$ .

Θεωρούμε λοιπόν γνωστή τη γενική αυτή λύση  $y_h(x)$ , η οποία είναι πάντοτε της μορφής του γραμμικού συνδυασμού

$$y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x). \quad (5.9.2)$$

Σ' αυτήν τη γενική λύση τα σύμβολα  $C_1, C_2, \dots, C_n$  δηλώνουν  $n$  αυθαίρετες σταθερές. Επίσης οι  $n$  συναρτήσεις  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  αποτελούν ένα θεμελιώδες σύστημα (ή σύνολο) λύσεων της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως που αντιστοιχεί στη γενική μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (5.9.1). Ένα τέτοιο σύστημα λύσεων έχει φυσικά μη μηδενική ορίζουσα Wronski

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n] \equiv W(x) \equiv W[y_1, y_2, \dots, y_n](x) \equiv W[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)] \neq 0 \quad (5.9.3)$$

στο διάστημα  $[a, b]$  μεταβολής της μεταβλητής  $x$  που μας ενδιαφέρει.

Εδώ στη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων για τη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση  $n$ -τάξεως της μορφής (5.9.1) απλά θα υποθέσουμε ότι η γενική λύση της  $y_g(x)$  θα είναι ανάλογη με τη γενική λύση  $y_h(x)$  της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως στη σχέση (5.9.2). Τώρα όμως οι  $n$  παράμετροι  $C_1, C_2, \dots, C_n$  θα είναι συναρτήσεις (όχι πια σταθερές!). Έτσι υποθέτουμε τη γενική λύση  $y_g(x)$  στη μορφή

$$y_g(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + \dots + C_n(x) y_n(x) \quad (5.9.4)$$

χωρίς να πειράζουμε τις συναρτήσεις  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ . Έτσι έχουμε τη **μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων**, η οποία λιγότερο συχνά καλείται και **μέθοδος της μεταβολής των σταθερών**.

**A5.9.2. Εφαρμογή στη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως**

Τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων θα την αναπτύξουμε κυρίως στην περίπτωση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δευτέρας τάξεως της μορφής

$$a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = g(x) \quad \text{με} \quad a_2 \neq 0 \quad (5.9.5)$$

στο διάστημα  $[a, b]$  που μας ενδιαφέρει στη διαφορική αυτή εξίσωση. Οι συντελεστές  $a_2$ ,  $a_1$  και  $a_0$  σ' αυτήν μπορούν να είναι είτε σταθεροί είτε μη σταθεροί (μεταβλητοί). Το δεξιό μέλος  $g(x)$  μπορεί να είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση, αρκεί να υπάρχουν τα ολοκληρώματα που θα συναντήσουμε λίγο πιο κάτω. Το σημαντικό όμως είναι να γνωρίζουμε τη γενική λύση

$$y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad (5.9.6)$$

της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (με  $g(x) \equiv 0$ ). Στη λύση αυτή  $y_h(x)$  οι δύο συναρτήσεις  $y_1(x)$  και  $y_2(x)$  αποτελούν θεμελιώδεις σύστημα λύσεων με μη μηδενική ορίζουσα Wronski:

$$W[y_1, y_2] \equiv W(x) \equiv W[y_1, y_2](x) \equiv W[y_1(x), y_2(x)] := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \neq 0. \quad (5.9.7)$$

Προχωράμε τώρα υποθέτοντας τη γενική λύση  $y_g(x)$  της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (5.9.5) (είτε με σταθερούς είτε με μη σταθερούς συντελεστές) στη μορφή (5.9.4), εδώ βέβαια με  $n = 2$ , οπότε

$$y_g(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x). \quad (5.9.8)$$

Δηλαδή επιτρέψαμε στις δύο παραμέτρους  $C_1$  και  $C_2$  να μεταβάλλονται με την ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$ . Αυτό το κάναμε ευελπιστώντας ότι θα μπορέσουμε έτσι να βρούμε τη γενική λύση  $y_g(x)$  της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δευτέρας τάξεως (5.9.5).

Θα δούμε ότι ναι, μπορούμε! Και βέβαια μπορούμε, αφού έχουμε δύο ολόκληρες άγνωστες συναρτήσεις  $C_1(x)$  και  $C_2(x)$  προς προσδιορισμό στη λύση (5.9.8) που δοκιμάζουμε και απλά ζητάμε την ισχύ μιας μόνο εξίσωσης: της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.9.5). Για τη λύση της εξίσωσης αυτής παραγωγίζουμε τώρα τη λύση  $y_g(x)$ , την οποία υποθέσαμε στην παραπάνω σχέση (5.9.8). Με τους κανόνες παραγωγίσεως αθροίσματος και γινομένου βρίσκουμε αμέσως ότι

$$\begin{aligned} y_g'(x) &= [C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x)] + [C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x)] \\ &= [C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)] + [C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x)] \\ &= C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x), \end{aligned} \quad (5.9.9)$$

αν κάνουμε και την υπόθεση ότι

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0. \quad (5.9.10)$$

Φαίνεται αυθαίρετη η υπόθεση αυτή και πραγματικά είναι αυθαίρετη. Μας εξυπηρετεί όμως στο σκοπό της ευρέσεως της γενικής λύσεως  $y_g(x)$  που αναζητούμε στη μορφή (5.9.8) με το λιγότερο υπολογιστικό κόπο. Από την άλλη πλευρά, όπως ήδη αναφέραμε, στη μορφή αυτή (5.9.8) έχουμε να προσδιορίσουμε δύο συναρτήσεις  $C_1(x)$  και  $C_2(x)$  από μία μόνο εξίσωση: τη μη ομογενή διαφορική εξίσωση (5.9.5). Ο προσδιορισμός δύο συναρτήσεων από μία μόνο εξίσωση γενικά δεν είναι εφικτός. Μας δίνεται λοιπόν η ευκαιρία, με άλλα λόγια έχουμε την «πολυτέλεια» να καθορίσουμε εμείς τη δεύτερη εξίσωση για τις δύο αυτές συναρτήσεις  $C_1(x)$  και  $C_2(x)$ . Και την καθορίσαμε ήδη με την αυθαίρετη υπόθεσή μας (5.9.10). Με τον τρόπο αυτό απλοποιήσαμε την πρώτη παράγωγο  $y_g'(x)$  στην τελευταία γραμμή της σχέσεως (5.9.9). Το ίδιο συμβαίνει και με την αντίστοιχη δεύτερη παράγωγο  $y_g''(x)$ .

Πραγματικά, παραγωγίζουμε την πρώτη παράγωγο  $y'_g(x)$  στην τελευταία μορφή της (5.9.9), όπου χρησιμοποιήσαμε την αυθαίρετη εξίσωση ή περιορισμό (5.9.10), τον οποίο ήδη θέσαμε. Έτσι βρίσκουμε αμέσως ξανά με τους απλούς κανόνες παραγωγίσεως αθροίσματος και γινομένου ότι

$$\begin{aligned} y''_g(x) &= [C'_1(x)y'_1(x) + C_1(x)y''_1(x)] + [C'_2(x)y'_2(x) + C_2(x)y''_2(x)] \\ &= [C_1(x)y''_1(x) + C_2(x)y''_2(x)] + [C'_1(x)y'_1(x) + C'_2(x)y'_2(x)]. \end{aligned} \quad (5.9.11)$$

► **Παρατήρηση Α5.11:** Προτού προχωρήσουμε, ας κάνουμε μια παρένθεση. Τονίζουμε ότι θα μπορούσαμε να είχαμε πάρει κάποια άλλη αυθαίρετη εξίσωση στη θέση της εξισώσεως (5.9.10) για τις δύο άγνωστες συναρτήσεις μας  $C_1(x)$  και  $C_2(x)$  στην παρούσα μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων. Θα οδηγούμασταν έτσι και πάλι στη σωστή γενική λύση  $y_g(x)$  της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως δευτέρας τάξεως (5.9.5). Ένα πολύ στοιχειώδες παράδειγμα μιας τέτοιας εναλλακτικής δυνατότητας αποτελεί η επιλογή της αυθαίρετης εξισώσεως

$$C_2(x) = 0, \quad \text{οπότε απλά} \quad y_g(x) = C_1(x)y_1(x) \quad (5.9.12)$$

στη σχέση (5.9.8). Ο προσεκτικός αναγνώστης/η προσεκτική αναγνώστρια Πολιτικός Μηχανικός μπορεί άμεσα να παρατηρήσει πως η τόσο στοιχειώδης αυτή επιλογή (5.9.12) απλά μας οδηγεί αμέσως στη μέθοδο του υποβιβασμού της τάξεως. Αυτήν την εξετάσαμε ήδη στην Ενότητα Α5.4, σχέση (5.4.4) και επόμενες σχέσεις. Εδώ διαφοροποιούμαστε στην επιλογή μας προτιμώντας την εξίσωση (5.9.10). Είναι πραγματικά προτιμότερη και θα το δούμε αμέσως. Προχωράμε λοιπόν!

Δε μας απομένει τώρα παρά να αντικαταστήσουμε τη συνάρτηση  $y_g(x)$  στη σχέση (5.9.8), που τη δοκιμάζουμε σαν γενική λύση, καθώς και τις δύο πρώτες παραγώγους της  $y'_g(x)$  και  $y''_g(x)$  από τις σχέσεις (5.9.9) (τελευταία γραμμή) και (5.9.11) (δεύτερη γραμμή) αντίστοιχα στην ίδια τη μη ομογενή διαφορική εξίσωση (5.9.5). Πολύ εύκολα παρατηρούμε ότι προκύπτει έτσι η σχέση

$$\begin{aligned} &a_2[C_1(x)y''_1(x) + C_2(x)y''_2(x) + C'_1(x)y'_1(x) + C'_2(x)y'_2(x)] \\ &+ a_1[C_1(x)y'_1(x) + C_2(x)y'_2(x)] + a_0[C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)] = g(x). \end{aligned} \quad (5.9.13)$$

Αναδιατάσσοντας τους όρους στο αριστερό μέλος, την ξαναγράφουμε στην απλούστερη μορφή

$$\begin{aligned} &C_1(x)[a_2y''_1(x) + a_1y'_1(x) + a_0y_1(x)] + C_2(x)[a_2y''_2(x) + a_1y'_2(x) + a_0y_2(x)] \\ &+ a_2[C'_1(x)y'_1(x) + C'_2(x)y'_2(x)] = g(x). \end{aligned} \quad (5.9.14)$$

Στην πρώτη γραμμή παρατηρούμε τώρα ότι κι οι δύο αγκύλες είναι ίσες με μηδέν. Αυτό συμβαίνει, απλά επειδή οι δύο συναρτήσεις  $y_1(x)$  και  $y_2(x)$  στις σχέσεις (5.9.6) και (5.9.8) έχουν από την αρχή σαφώς υποτεθεί σαν λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξισώσεως (με  $g(x) \equiv 0$ ). Και μάλιστα έχουμε επιπλέον υποθέσει πως αποτελούν ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων της ομογενούς αυτής εξισώσεως με μη μηδενική ορίζουσα Wronski:  $W[y_1, y_2] \neq 0$ . Συνεπώς θα έχουμε

$$a_2y''_1(x) + a_1y'_1(x) + a_0y_1(x) = 0 \quad \text{και επίσης} \quad a_2y''_2(x) + a_1y'_2(x) + a_0y_2(x) = 0. \quad (5.9.15)$$

Άρα μηδενίζεται ολόκληρη η πρώτη γραμμή στην εξίσωση (5.9.14). Έτσι αυτή παίρνει πλέον την πολύ απλή μορφή

$$C'_1(x)y'_1(x) + C'_2(x)y'_2(x) = \frac{g(x)}{a_2} \quad \text{με} \quad a_2 \neq 0, \quad (5.9.16)$$

ασφαλώς με την αναγκαία υπόθεση (την οποία ήδη έχουμε κάνει) ότι  $a_2 \neq 0$  σε ολόκληρο το διάστημα  $[a, b]$  που μας ενδιαφέρει στη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (5.9.5).

Και πού ακριβώς βρισκόμαστε τώρα; Μα σχεδόν στο τέλος. Οι δύο συναρτήσεις  $C_1(x)$  και  $C_2(x)$ , τις οποίες πρέπει να προσδιορίσουμε στη γενική λύση  $y_g(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ , σχέση (5.9.8),

που δοκιμάζουμε έχουν παραγώγους  $C_1'(x)$  και  $C_2'(x)$ , που επαληθεύουν ένα απλό σύστημα δύο γραμμικών αλγεβρικών (όχι διαφορικών) εξισώσεων. Δηλαδή επαληθεύουν (i) την εξίσωση (5.9.10): την υπόθεση που κάναμε, τον περιορισμό που αυθαίρετα βάλουμε, και (ii) την εξίσωση (5.9.16): την ίδια τη μη ομογενή διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως (5.9.5). Τις επαναλαμβάνουμε μαζί στην τελική τους μορφή (με έμφαση μάλιστα στο ότι οι παράγωγοι  $C_1'(x)$  και  $C_2'(x)$  είναι οι άγνωστοι)

$$y_1(x)C_1'(x) + y_2(x)C_2'(x) = 0, \quad (5.9.17)$$

$$y_1'(x)C_1'(x) + y_2'(x)C_2'(x) = g^*(x) \quad \text{φυσικά με } g^*(x) := g(x)/a_2 \quad \text{και } a_2 \neq 0. \quad (5.9.18)$$

Μπορούμε πολύ εύκολα να λύσουμε το σύστημα αυτό των δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων ως προς τις δύο άγνωστες παραγώγους  $C_1'(x)$  και  $C_2'(x)$ . Παρατηρούμε μάλιστα ότι η ορίζουσα των συντελεστών των δύο αυτών αγνώστων μας είναι απλά η ορίζουσα Wronski  $W[y_1, y_2] \equiv W(x)$ , στη σχέση (5.9.7). Και προς μεγάλη χαρά μας είναι μη μηδενική:  $W[y_1, y_2] \equiv W(x) \neq 0$  για το θεμελιώδες σύστημα λύσεων  $y_1(x)$  και  $y_2(x)$  της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (με  $g(x) \equiv 0$ ) που θεωρούμε.

Πρέπει τώρα να επιλύσουμε το πιο πάνω σύστημα των δύο γραμμικών αλγεβρικών (όχι διαφορικών) εξισώσεων (5.9.17) και (5.9.18). Προς το σκοπό αυτό μπορούμε είτε (i) να λύσουμε την πρώτη εξίσωση (5.9.17) ως προς  $C_1'(x)$  και να αντικαταστήσουμε στη δεύτερη εξίσωση (5.9.18) βρίσκοντας έτσι το  $C_2'(x)$  (ή αντίθετα) είτε (ii) να χρησιμοποιήσουμε κατευθείαν τον τόσο γνωστό από τη Γραμμική Άλγεβρα κανόνα του Cramer. Προτιμάμε ελαφρά τη δεύτερη αυτή δυνατότητα, δηλαδή τον κανόνα του Cramer. Έτσι καταλήγουμε στη λύση

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ g^*(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{W(x)} = -\frac{y_2(x)g^*(x)}{W(x)} \quad \text{και} \quad C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & g^*(x) \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{y_1(x)g^*(x)}{W(x)}. \quad (5.9.19)$$

Στη λύση αυτή οι παρονομαστές είναι απλά η ορίζουσα Wronski  $W(x)$  στη σχέση (5.9.7) των δύο συναρτήσεων  $y_1(x)$  και  $y_2(x)$ , δηλαδή η συνάρτηση

$$W(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \neq 0. \quad (5.9.20)$$

Η ορίζουσα αυτή είναι διάφορη του μηδενός, όπως ήδη αναφέραμε, για ένα θεμελιώδες σύστημα (ή θεμελιώδες σύνολο) λύσεων  $y_1(x)$  και  $y_2(x)$  της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (με  $g(x) \equiv 0$ ) της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.9.5). Αυτό το γνωρίζουμε ήδη πολύ καλά.

Εμείς βέβαια στην υπόθεση (5.9.8) της γενικής λύσεως  $y_g(x)$  της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.9.5) δε θέλουμε τις παραγώγους  $C_1'(x)$  και  $C_2'(x)$ . Χρειαζόμαστε τις ίδιες τις συναρτήσεις αυτές  $C_1(x)$  και  $C_2(x)$ . Πρέπει επομένως να ολοκληρώσουμε τις παραγώγους  $C_1'(x)$  και  $C_2'(x)$  που βρήκαμε στη λύση (5.9.19) γι' αυτές. Έτσι προκύπτουν οι δύο συναρτήσεις που ζητάμε

$$C_1(x) = -\int_{x_0}^x \frac{y_2(\xi)g^*(\xi)}{W(\xi)} d\xi + D_1 \quad \text{και} \quad C_2(x) = \int_{x_0}^x \frac{y_1(\xi)g^*(\xi)}{W(\xi)} d\xi + D_2 \quad (5.9.21)$$

φυσικά με τη χρήση μεταβλητού άνω ορίου ολοκληρώσεως  $x$  και σταθερού κάτω ορίου ολοκληρώσεως  $x_0$ . (Υποτίθεται ότι στο σημείο αυτό, το σημείο  $x = x_0$ , έχουμε τις δύο αρχικές συνθήκες σε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών.) Βέβαια στις πιο πάνω δύο ολοκληρώσεις περιλάβαμε εύλογα και τις σταθερές ολοκληρώσεως  $D_1$  και  $D_2$ . Αυτές είναι δύο αυθαίρετες σταθερές. Τέλος χρησιμοποιήσαμε το νέο σύμβολο  $\xi$  σαν μεταβλητή ολοκληρώσεως για την αποφυγή πιθανής συγχύσεως:  $\xi \in [x_0, x]$ .

Τώρα η γενική λύση  $y_g(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ , που υποθέσαμε στη σχέση (5.9.8) και ευτυχώς βλέπουμε πως κατορθώνουμε να βρούμε, παίρνει με τη χρήση των τύπων (5.9.21) τη μορφή

$$y_g(x) = \left[ -\int_{x_0}^x \frac{y_2(\xi)g^*(\xi)}{W(\xi)} d\xi + D_1 \right] y_1(x) + \left[ \int_{x_0}^x \frac{y_1(\xi)g^*(\xi)}{W(\xi)} d\xi + D_2 \right] y_2(x). \quad (5.9.22)$$

Τη γράφουμε πιο απλά (με τη σύμπτυξη των δύο ολοκληρωμάτων της σε ένα) στην τελική μορφή

$$y_g(x) = D_1 y_1(x) + D_2 y_2(x) + \int_{x_0}^x \frac{[y_1(\xi)y_2(x) - y_1(x)y_2(\xi)]g^*(\xi)}{W(\xi)} d\xi. \quad (5.9.23)$$

Βέβαια οι συναρτήσεις  $y_1(x)$  και  $y_2(x)$  αποτελούν θεμελιώδες σύστημα λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης. (Το έχουμε ήδη υποθέσει αυτό!) Επομένως η πιο πάνω γενική λύση  $y_g(x)$  της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.9.5) γράφεται και στην ισοδύναμη μορφή της

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x). \quad (5.9.24)$$

Στη μορφή αυτή  $y_h(x) = D_1 y_1(x) + D_2 y_2(x)$  είναι η γενική λύση (5.9.6) της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (εδώ με  $D_1$  και  $D_2$  αντί  $C_1$  και  $C_2$  για τα σύμβολα των αυθαίρετων σταθερών) και  $y_p(x)$  μια μερική (ή ειδική) λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.9.5). Η μερική αυτή λύση  $y_p(x)$  έχει εδώ τη μορφή του ολοκληρωτικού όρου στο δεξιό μέλος της γενικής λύσεως (5.9.23).

Ας σημειώσουμε τέλος ότι η γενική αυτή λύση  $y_g(x)$  στη σχέση (5.9.23) έχει εκφρασθεί με τη χρήση ολοκληρώματος. Για το λόγο αυτό λέμε ότι η σχέση (5.9.23) αποτελεί έναν ολοκληρωτικό τύπο για τη γενική λύση  $y_g(x)$  της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.9.5). Στην ολοκληρωτέα συνάρτηση του ολοκληρωτικού όρου παρατηρούμε ότι έχουμε παράγοντα το δεξιό μέλος  $g(x)$  (εδώ σαν  $g(\xi)$ ) της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.9.5), αφού  $g^*(x) := g(x)/a_2$  (με  $a_2 \neq 0$ ). Φυσικά για την αντίστοιχη ομογενή διαφορική εξίσωση (με  $g(x) \equiv 0$ ) ολόκληρος ο ολοκληρωτικός όρος στη σχέση (5.9.23) για τη γενική λύση  $y_g(x)$  εξαλείφεται. Τότε μας απομένει μόνο η γενική λύση  $y_h(x) = D_1 y_1(x) + D_2 y_2(x)$  της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης. Τέλος όσον αφορά στις δύο σταθερές  $D_1$  και  $D_2$  στη γενική λύση  $y_g(x)$  στη σχέση (5.9.23), αυτές μπορούν να προσδιορισθούν απλά από δύο συνθήκες, συχνά τις δύο αρχικές συνθήκες

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{και} \quad y'(x_0) = y'_0 \quad \text{σε ένα σημείο } x_0 \text{ με } x_0 \in [a, b]. \quad (5.9.25)$$

Βέβαια στην πράξη παίρνουμε (όσες φορές μπορούμε) τις δύο αρχικές συνθήκες στο σημείο  $x_0 = 0$ .

Για να ολοκληρώσουμε τώρα την εφαρμογή της μεθόδου της μεταβολής των παραμέτρων στη μη ομογενή διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως, πρέπει να κάνουμε μια σημαντική παρατήρηση:

► **Παρατήρηση Α5.12:** Ναι, πραγματικά καταλήξαμε στην παραπάνω σχέση (5.9.23) σαν τη γενική λύση  $y_g(x)$  της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (5.9.5). Αλλά αυτό το πετύχαμε έχοντας θυμηθεί τις δύο σταθερές ολοκληρώσεως  $D_1$  και  $D_2$  στις λύσεις (5.9.21) για τις δύο συναρτήσεις  $C_1(x)$  και  $C_2(x)$ . Έτσι ευτυχώς στο τέλος, στη σχέση (5.9.23), παρατηρούμε την παρουσία πρώτα-πρώτα της γενικής λύσεως  $y_h(x) = D_1 y_1(x) + D_2 y_2(x)$  της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης. Αυτή μας παρέχει και τις δύο αυθαίρετες σταθερές  $D_1$  και  $D_2$ , που είναι αναγκαίες στη γενική λύση  $y_g(x)$ , ώστε να μπορέσουν να ικανοποιηθούν δύο αυθαίρετες αρχικές συνθήκες: εδώ οι συνθήκες (5.9.25). Αντίστροφα, αποτελεί συνήθη πρακτική να παραλείπονται οι δύο σταθερές  $D_1$  και  $D_2$  στις ολοκληρώσεις (5.9.21). Τότε βέβαια δεν παίρνουμε τη ζητούμενη γενική λύση  $y_g(x)$ , αλλά μόνο μια μερική λύση  $y_p(x)$ . Σ' αυτήν πρέπει όμως να προσθέσουμε μετά και τη γενική λύση  $y_h(x)$  της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης σύμφωνα με το θεμελιώδη τύπο (5.9.24). Εδώ επιλέξαμε να μην υιοθετήσουμε τη δεύτερη αυτή και αρκετά δημοφιλή δυνατότητα, απλά επειδή δεν παρουσιάζει κανένα πλεονέκτημα έναντι της πιο πάνω άμεσης ευρέσεως της γενικής λύσεως  $y_g(x)$  της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.9.5). Έτσι στο τέλος είμαστε απαλλαγμένοι από το καθήκον να προσθέσουμε τη γενική λύση  $y_h(x)$  της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης. Αυτή έχει ήδη προστεθεί μόνη της στην αρχή της λύσεως (5.9.23) χάρη στις δύο αυθαίρετες σταθερές  $D_1$  και  $D_2$  των ολοκληρώσεων (5.9.21) που δεν τις αμελήσαμε.

Αρκετά όμως με τη θεωρία. Ας την επιδείξουμε τώρα σε δύο συγκεκριμένα παραδείγματα:

▼ **Παράδειγμα Α5.19:** Να προσδιορισθεί η γενική λύση  $y_g(x)$  της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' - 3y' + 2y = 3e^{4x} \quad (5.9.26)$$

με τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων.

**Λύση:** Πρόκειται για το ίδιο ακριβώς παράδειγμα επιλύσεως μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με το Παράδειγμα Α5.12 στην Παράγραφο Α5.8.2, εξίσωση (5.8.17). Μόνο που εκεί είχαμε χρησιμοποιήσει τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών. Αντίθετα, εδώ μας ζητείται να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων. Ξεκινάμε λοιπόν! Γνωρίζουμε ήδη από τη σχέση (5.8.21) του Παραδείγματος Α5.12 (με τη γνωστή μας πια μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως) τη γενική λύση  $y_h(x)$  της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (με δεξιό μέλος το μηδέν). Την υπενθυμίζουμε τη λύση αυτή (5.8.21):

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}. \quad (5.9.27)$$

Τώρα σύμφωνα με τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων, που ήδη λεπτομερώς εκθέσαμε στην παράγραφο αυτή, επιλέγουμε τη ζητούμενη γενική λύση  $y_g(x)$  στην αντίστοιχη μορφή

$$y_g(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{2x} \quad (5.9.28)$$

(τώρα όμως με συναρτήσεις  $C_1(x)$  και  $C_2(x)$  αντί για σταθερές). Την παραγωγίζουμε βρίσκοντας

$$y'_g(x) = C'_1(x)e^x + C_1(x)e^x + C'_2(x)e^{2x} + C_2(x)2e^{2x}. \quad (5.9.29)$$

Θέτουμε τώρα

$$C'_1(x)e^x + C'_2(x)e^{2x} = 0, \quad (5.9.30)$$

ώστε να απλοποιηθεί η πρώτη αυτή παράγωγος  $y'_g(x)$  στη μορφή

$$y'_g(x) = C_1(x)e^x + 2C_2(x)e^{2x} \quad (5.9.31)$$

με δύο μόλις όρους αντί για τέσσερις εξαιτίας της αυθαίρετης υποθέσεως (5.9.30). Χρειαζόμαστε και τη δεύτερη παράγωγο  $y''_g(x)$ . Ξαναπαραγωγίζουμε λοιπόν, τώρα βέβαια τη σχέση (5.9.31). Έτσι παίρνουμε

$$y''_g(x) = C'_1(x)e^x + C_1(x)e^x + 2C'_2(x)e^{2x} + 4C_2(x)e^{2x}. \quad (5.9.32)$$

Αντικαθιστούμε τώρα τη λύση  $y_g(x)$  που υποθέσαμε στη σχέση (5.9.28) σύμφωνα με τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων καθώς και τις δύο πρώτες παραγώγους της  $y'_g(x)$  και  $y''_g(x)$  με βάση τις δύο σχέσεις (5.9.31) και (5.9.32) αντίστοιχα στην ίδια τη μη ομογενή διαφορική εξίσωση (5.9.26) του παραδείγματος αυτού. Αμέσως βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} & [C'_1(x)e^x + C_1(x)e^x + 2C'_2(x)e^{2x} + 4C_2(x)e^{2x}] \\ & - 3[C_1(x)e^x + 2C_2(x)e^{2x}] + 2[C_1(x)e^x + C_2(x)e^{2x}] = 3e^{4x}. \end{aligned} \quad (5.9.33)$$

Διαπιστώνουμε μάλιστα ότι μπορούμε να κάνουμε πολλές απλοποιήσεις ξαναγράφοντας την πιο πάνω εξίσωση στη μορφή

$$C'_1(x)e^x + 2C'_2(x)e^{2x} = 3e^{4x}. \quad (5.9.34)$$

Σημειώνουμε ότι όλες αυτές οι απλοποιήσεις δεν ήταν κάτι το τυχαίο. Ήταν απλά η συνέπεια του γεγονότος ότι και οι δύο συναρτήσεις  $y_1(x) = e^x$  και  $y_2(x) = e^{2x}$  στις σχέσεις (5.9.27) και (5.9.28) είναι λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (με μηδενικό δεξιό μέλος). Τούτο έχει σαφώς δηλωθεί στη σχέση (5.9.27):  $y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ . Αυτός είναι ο λόγος των απλοποιήσεων. Πρόκειται για απόλυτα αναμενόμενες απλοποιήσεις υπό τις παρούσες συνθήκες!



Και τώρα; Μα τώρα έχουμε ένα τόσο απλό σύστημα δύο γραμμικών αλγεβρικών (όχι διαφορικών) εξισώσεων: (i) της υποθέσεως (ή περιορισμού) (5.9.30) και (ii) της εξισώσεως (5.9.34), όπου κατέληξε η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση (5.9.26) με βάση και την υπόθεση (5.9.30). Το παραθέτουμε το σύστημα αυτό σε μια μόνο γραμμή

$$C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{2x} = 0 \quad \text{και} \quad C_1'(x)e^x + 2C_2'(x)e^{2x} = 3e^{4x}. \quad (5.9.35)$$

Είναι απλούστατη η επίλυσή του, π.χ. με τον κανόνα του Cramer, ως προς  $C_1'(x)$  και  $C_2'(x)$ . Και μάλιστα, προφανώς η ορίζουσα των συντελεστών του είναι η ορίζουσα Wronski των γραμμικά ανεξάρτητων συναρτήσεων  $y_1(x)$  και  $y_2(x)$ . Άρα είναι μη μηδενική, όπως εύκολα διαπιστώνεται:

$$W[e^x, e^{2x}] \equiv W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x} - e^{3x} = e^{3x} \neq 0. \quad (5.9.36)$$

Στο σημείο αυτό που μόλις φθάσαμε η ζητούμενη λύση του συστήματος των δύο γραμμικών αλγεβρικών (όχι βέβαια διαφορικών) εξισώσεων (5.9.35) βρίσκεται πολύ εύκολα και είναι η εξής:

$$C_1'(x) = -3e^{3x} \quad \text{και} \quad C_2'(x) = 3e^{2x}. \quad (5.9.37)$$

Ολοκληρώνοντας, παίρνουμε τις ίδιες τις συναρτήσεις  $C_1(x)$  και  $C_2(x)$  από τις παραγώγους τους αυτές, συγκεκριμένα

$$C_1(x) = -e^{3x} + D_1 \quad \text{και} \quad C_2(x) = \frac{3}{2}e^{2x} + D_2. \quad (5.9.38)$$

(Ας σημειώσουμε σε παρένθεση ότι στοχεύοντας στην εύρεση της γενικής λύσεως  $y_g(x)$  δεν παραλείψαμε τις δύο αυθαίρετες σταθερές ολοκληρώσεως  $D_1$  και  $D_2$  στις δύο αυτές ολοκληρώσεις.)

Τώρα απομένει απλά η αντικατάσταση των δύο αυτών συναρτήσεων  $C_1(x)$  και  $C_2(x)$  στη γενική λύση  $y_g(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{2x}$ , που έχουμε υποθέσει στη σχέση (5.9.28). Έτσι προκύπτει τελικά

$$y_g(x) = (-e^{3x} + D_1)e^x + \left(\frac{3}{2}e^{2x} + D_2\right)e^{2x} = D_1e^x + D_2e^{2x} + \frac{1}{2}e^{4x} \quad (5.9.39)$$

με απλοποιήσεις και αναδιάταξη των όρων. Τώρα σε τούτη την τελική μορφή είναι εμφανές το άθροισμα της γενικής λύσεως της ομογενούς  $y_h(x) = D_1e^x + D_2e^{2x}$  και μιας μερικής λύσεως της μη ομογενούς  $y_p(x) = \frac{1}{2}e^{4x}$  και αυτό όφειλε πραγματικά να συμβαίνει στην παρούσα γενική λύση  $y_g(x)$ .

Παρατηρούμε επίσης ότι προφανώς προέκυψε ακριβώς η ίδια λύση (5.8.28) με το Παράδειγμα Α5.12. Ασφαλώς είμαστε πολύ ευχαριστημένοι γι' αυτό: η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών και η μέθοδος της μεταβολής των παραμέτρων έδωσαν ακριβώς την ίδια λύση. Ίσως οι υπολογισμοί εδώ στη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων να ήσαν κάπως δυσκολότεροι: περιλάμβαναν (i) την επίλυση του συστήματος των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (5.9.35) και (ii) τις ολοκληρώσεις (5.9.38). Όμως από την άλλη πλευρά ας θυμηθούμε ότι η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών έχει τους περιορισμούς ισχύος της μόνο σε διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές  $a_k$  και επίσης για αρκετά ειδικές μορφές δεξιού μέλους  $g(x)$ . Αυτοί οι δύο περιορισμοί λείπουν, απουσιάζουν εντελώς από τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων. ▲

Ακολουθεί τώρα και ένα δεύτερο παράδειγμα, αυτό όμως με γενικό, αυθαίρετο δεξιό μέλος  $g(x)$ .

▼ **Παράδειγμα Α5.20:** Να προσδιορισθεί η γενική λύση  $y_g(x)$  της διαφορικής εξισώσεως

$$y''(x) - a^2y(x) = g(x) \quad \text{με το } a \text{ μη μηδενική σταθερά: } a \neq 0 \quad (5.9.40)$$

και με το δεξιό μέλος  $g(x)$  μια αυθαίρετη (οποιαδήποτε, τυχαία) τμηματικά συνεχή συνάρτηση.

**Λύση:** Φυσικά η πιο πάνω μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δε μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών εξαιτίας του δεξιού μέλους της, που είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση  $g(x)$ . Μπορεί όμως θαυμάσια να λυθεί με τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων.

Δύο παραδείγματα με αυθαίρετες συναρτήσεις στις Ταλαντώσεις θα δοθούν παρακάτω στην Παράγραφο Α6.2 στο Κεφάλαιο Α6. Εδώ τώρα πρώτα-πρώτα για την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση

$$y''(x) - a^2 y(x) = 0 \quad (5.9.41)$$

βρίσκουμε αμέσως με τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης

$$y_0(x) = e^{\mu x}, \quad \text{οπότε} \quad y_0''(x) = \mu^2 e^{\mu x} \quad (5.9.42)$$

ότι

$$\mu^2 e^{\mu x} - a^2 e^{\mu x} = 0 \implies (\mu^2 - a^2) e^{\mu x} = 0 \implies \mu^2 - a^2 = 0 \implies \mu_{1,2} = \pm a. \quad (5.9.43)$$

Επομένως η γενική λύση  $y_h(x)$  της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης (5.9.41) θα είναι η ακόλουθη:

$$y_h(x) = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}. \quad (5.9.44)$$

Προχωράμε τώρα στην εφαρμογή της μεθόδου της μεταβολής των παραμέτρων. Δεχόμαστε τη γενική λύση  $y_g(x)$  της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (5.9.40) στη μορφή

$$y_g(x) = C_1(x) e^{ax} + C_2(x) e^{-ax}. \quad (5.9.45)$$

Δηλαδή τις δύο παραμέτρους  $C_1$  και  $C_2$  στη λύση  $y_h(x)$  τις θεωρούμε πια μεταβλητές:  $C_1(x)$  και  $C_2(x)$ . Παραγωγίζουμε τη γενική αυτή λύση  $y_g(x)$ , την οποία υποθέσαμε πιο πάνω, και έτσι παίρνουμε

$$y_g'(x) = C_1'(x) e^{ax} + C_1(x) a e^{ax} + C_2'(x) e^{-ax} + C_2(x) (-a e^{-ax}) = a C_1(x) e^{ax} - a C_2(x) e^{-ax} \quad (5.9.46)$$

με την υπόθεση ότι

$$C_1'(x) e^{ax} + C_2'(x) e^{-ax} = 0. \quad (5.9.47)$$

Η υπόθεση αυτή, όπως έχουμε ξαναπεί, είναι αυθαίρετη, αλλά μας είναι και χρήσιμη, ώστε να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς μας, το «υπολογιστικό κόστος» μας. Εδώ αυτό το πετύχαμε ήδη με την πιο πάνω πρώτη παράγωγο  $y_g'(x)$  με ανάλογη ευνοϊκή συνέπεια και στη δεύτερη παράγωγο  $y_g''(x)$ . Την υπολογίζουμε και αυτή με βάση το δεξιό μέλος της σχέσεως (5.9.46). Προκύπτει

$$y_g''(x) = a C_1'(x) e^{ax} + a^2 C_1(x) e^{ax} - a C_2'(x) e^{-ax} + a^2 C_2(x) e^{-ax}. \quad (5.9.48)$$

Αντικαθιστούμε τώρα τη δεύτερη αυτή παράγωγο  $y_g''(x)$  καθώς και την ίδια τη συνάρτηση  $y_g(x)$  στη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωσή μας (5.9.40). Με τον τρόπο αυτό παίρνουμε

$$[a C_1'(x) e^{ax} + a^2 C_1(x) e^{ax} - a C_2'(x) e^{-ax} + a^2 C_2(x) e^{-ax}] - a^2 [C_1(x) e^{ax} + C_2(x) e^{-ax}] = g(x) \quad (5.9.49)$$

και μετά τις προφανείς (και σίγουρα αναμενόμενες εδώ) απλοποιήσεις των αντίθετων όρων

$$C_1'(x) e^{ax} - C_2'(x) e^{-ax} = \frac{1}{a} g(x) \quad \text{έχοντας ήδη υποθέσει ότι} \quad a \neq 0. \quad (5.9.50)$$

Έχουμε επομένως καταλήξει σε ένα σύστημα δύο πάρα πολύ απλών γραμμικών αλγεβρικών (όχι βέβαια διαφορικών) εξισώσεων: των εξισώσεων (5.9.47) και (5.9.50). Προσθέτοντάς τις και αφαιρώντάς τις κατά μέλη, προσδιορίζουμε τις δύο παραγωγούς  $C_1'(x)$  και  $C_2'(x)$ , συγκεκριμένα

$$C_1'(x) = \frac{1}{2a} g(x) e^{-ax} \quad \text{και} \quad C_2'(x) = -\frac{1}{2a} g(x) e^{ax}. \quad (5.9.51)$$

Εμείς όμως θέλουμε τις ίδιες τις συναρτήσεις  $C_1(x)$  και  $C_2(x)$ . Τις προσδιορίζουμε με ολοκληρώσεις:

$$C_1(x) = D_1 + \frac{1}{2a} \int_0^x g(\xi) e^{-a\xi} d\xi \quad \text{και} \quad C_2(x) = D_2 - \frac{1}{2a} \int_0^x g(\xi) e^{a\xi} d\xi. \quad (5.9.52)$$

Σαν κάτω όριο στα ολοκληρώματα επιλέξαμε το σημείο  $x_0 = 0$ . (Αυτό πρέπει να είναι το σημείο όπου μπορεί να έχουμε τις αρχικές μας συνθήκες.) Δεν παραλείψαμε μάλιστα τις δύο αυθαίρετες σταθερές ολοκλήρωσεως  $D_1$  και  $D_2$ , έτσι ώστε να οδηγηθούμε στη γενική λύση  $y_g(x)$ . (Τις έχουμε βάλει και μπροστά μάλιστα! Καλώς!) Πραγματικά, τώρα η σχέση (5.9.45) μας δίνει τη γενική λύση

$$y_g(x) = \left[ D_1 + \frac{1}{2a} \int_0^x g(\xi) e^{-a\xi} d\xi \right] e^{ax} + \left[ D_2 - \frac{1}{2a} \int_0^x g(\xi) e^{a\xi} d\xi \right] e^{-ax}. \quad (5.9.53)$$

Αυτή γράφεται και στην ακόλουθη ισοδύναμη συνεπτυγμένη μορφή:

$$y_g(x) = D_1 e^{ax} + D_2 e^{-ax} + \frac{1}{2a} \int_0^x g(\xi) [e^{a(x-\xi)} - e^{-a(x-\xi)}] d\xi. \quad (5.9.54)$$

Σ' αυτήν συμπτύξαμε τα δύο ολοκληρώματα της γενικής λύσεως (5.9.53) σε ένα μόνο ολοκλήρωμα.

Γνωρίζουμε όμως πολύ καλά από την Παράγραφο Α1.5.2 για τις υπερβολικές συναρτήσεις ότι

$$e^{\pm x} = \cosh x \pm \sinh x \quad \text{και επίσης ότι} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \quad (5.9.55)$$

Μπορούμε έτσι να ξαναγράψουμε την πιο πάνω γενική λύση  $y_g(x)$  στην τελική της απλή μορφή

$$y_g(x) = D_1^* \cosh ax + D_2^* \sinh ax + \frac{1}{a} \int_0^x g(\xi) \sinh[a(x - \xi)] d\xi. \quad (5.9.56)$$

Σ' αυτή χρησιμοποιήσαμε υπερβολικές συναρτήσεις στη θέση της εκθετικής συναρτήσεως (εδώ πραγματικής!) και επίσης δύο νέες αυθαίρετες σταθερές: τις  $D_1^* = D_1 + D_2$  και  $D_2^* = D_1 - D_2$ . ▲

### A5.9.3. Εφαρμογή στη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση τρίτης τάξεως

Η εφαρμογή της μεθόδου της μεταβολής των παραμέτρων δεν περιορίζεται φυσικά σε μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως, στις οποίες εμείς περιορισθήκαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Είναι γενικεύσιμη, εφαρμόζεται και σε αντίστοιχες εξισώσεις κάθε τάξεως βέβαια με πολύ έντονη αύξηση του υπολογιστικού κόστους. Στην παράγραφο αυτή απλά θα την εφαρμόσουμε στη γενική μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση τρίτης τάξεως της μορφής

$$a_3 y'''(x) + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = g(x) \quad \text{με} \quad a_3 \neq 0. \quad (5.9.57)$$

Οι συντελεστές  $a_k$  μπορούν να είναι είτε σταθεροί είτε μεταβλητοί, συνήθως όμως είναι σταθεροί. Έτσι κι αλλιώς η μέθοδος της μεταβολής των παραμέτρων απαιτεί από μας προηγουμένως να διαθέτουμε τη γενική λύση

$$y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x) \quad (5.9.58)$$

της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξισώσεως (με  $g(x) \equiv 0$  στο δεξιό μέλος).

Τώρα υποθέτουμε τη γενική λύση  $y_g(x)$  της αρχικής μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως (5.9.57) ότι μπορεί να είναι της μορφής

$$y_g(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + C_3(x) y_3(x). \quad (5.9.59)$$

Έτσι οι πιο πάνω παράμετροι (σταθερές)  $C_1$ ,  $C_2$  και  $C_3$  έχουν τώρα υποτεθεί μεταβλητές: οι προς προσδιορισμό συναρτήσεις  $C_1(x)$ ,  $C_2(x)$  και  $C_3(x)$  αντίστοιχα.

Λοιπόν μία διαφορική εξίσωση, η (5.9.57), και τρεις προς προσδιορισμό συναρτήσεις. Αυτό είναι κάτι το ευχάριστο και μας διευκολύνει αφάνταστα. Έχουμε τώρα την «πολυτέλεια» να θέσουμε δύο αυθαίρετους περιορισμούς κατά την πορεία μας προς τη λύση. Ας ξεκινήσουμε χωρίς χρονοτριβή!

Παραγωγίζουμε τη γενική λύση  $y_g(x)$  που υποθέσαμε στη σχέση (5.9.59). Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} y_g'(x) &= [C_1'(x) y_1(x) + C_1(x) y_1'(x)] + [C_2'(x) y_2(x) + C_2(x) y_2'(x)] + [C_3'(x) y_3(x) + C_3(x) y_3'(x)] \\ &= [C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x) + C_3(x) y_3'(x)] + [C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) + C_3'(x) y_3(x)]. \end{aligned} \quad (5.9.60)$$

Τώρα ενεργούμε ακριβώς όπως είχαμε κάνει και στην προηγούμενη παράγραφο, εκεί όμως στη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως (5.9.5): υποθέτουμε ότι

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_3'(x)y_3(x) = 0. \quad (5.9.61)$$

Με την εξίσωση αυτή, ισοδύναμα με τον αυθαίρετο τούτο περιορισμό, η πρώτη παράγωγος  $y_g'(x)$  στη σχέση (5.9.60) παίρνει την πολύ απλή μορφή της

$$y_g'(x) = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) + C_3(x)y_3'(x). \quad (5.9.62)$$

(Σαν να μην ήσαν συναρτήσεις οι  $C_1(x)$ ,  $C_2(x)$  και  $C_3(x)$ . Σαν να ήσαν απλά σταθερές! Δεν είν' έτσι;)

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία παραγωγίζοντας ξανά: τώρα την πρώτη παράγωγο  $y_g'(x)$ , ώστε να βρούμε τη δεύτερη παράγωγο  $y_g''(x)$ . Εισάγοντας και το δεύτερο περιορισμό

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_3'(x)y_3'(x) = 0, \quad (5.9.63)$$

που είναι βέβαια ανάλογος με τον πρώτο περιορισμό (5.9.61), βρίσκουμε τη δεύτερη παράγωγο

$$y_g''(x) = C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + C_3(x)y_3''(x). \quad (5.9.64)$$

Τελείωσαν οι δυνατότητές μας να θέτουμε περιορισμούς: δύο μόνο μπορούμε. Η τρίτη εξίσωσή μας θα είναι η ίδια η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση τρίτης τάξεως (5.9.57). Χρειαζόμαστε όμως σ' αυτήν και την τρίτη παράγωγο  $y_g'''(x)$  (χωρίς κανένα νέο περιορισμό!). Προς το σκοπό αυτό παραγωγίζουμε τη δεύτερη παράγωγο  $y_g''(x)$  στην παραπάνω σχέση (5.9.64) και βρίσκουμε

$$\begin{aligned} y_g'''(x) &= [C_1'(x)y_1''(x) + C_1(x)y_1'''(x)] + [C_2'(x)y_2''(x) + C_2(x)y_2'''(x)] + [C_3'(x)y_3''(x) + C_3(x)y_3'''(x)] \\ &= [C_1(x)y_1'''(x) + C_2(x)y_2'''(x) + C_3(x)y_3'''(x)] + [C_1'(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2''(x) + C_3'(x)y_3''(x)]. \end{aligned} \quad (5.9.65)$$

Τώρα η δουλειά μας είναι απλά να αντικαταστήσουμε τη συνάρτηση  $y_g(x)$ , που έχουμε υποθέσει στη σχέση (5.9.59), και τις τρεις πρώτες παραγωγούς της, που έχουμε υπολογίσει στις σχέσεις (5.9.62), (5.9.64) και (5.9.65), στη μη ομογενή διαφορική εξίσωση (5.9.57). Δεν ξεχνάμε όμως πως και οι τρεις γνωστές συναρτήσεις  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  και  $y_3(x)$  που υπεισέρχονται σε όλες αυτές τις σχέσεις είναι μερικές λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξισώσεως. (Και μάλιστα αποτελούν θεμελιώδες σύστημα λύσεων με ορίζουσα Wronski  $W[y_1, y_2, y_3](x) \neq 0$ .) Άρα θα ισχύουν οι σχέσεις

$$a_3 y_k'''(x) + a_2 y_k''(x) + a_1 y_k'(x) + a_0 y_k(x) = 0 \quad \text{με} \quad k = 1, 2, 3. \quad (5.9.66)$$

Με τη χρήση και των τριών αυτών σχέσεων προκύπτει εύκολα ότι μετά τις σχετικές απλοποιήσεις η αρχική μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση τρίτης τάξεως (5.9.57) παίρνει τελικά τη μορφή

$$C_1'(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2''(x) + C_3'(x)y_3''(x) = g(x)/a_3 \quad \text{με} \quad a_3 \neq 0. \quad (5.9.67)$$

Διαθέτουμε τώρα το σύστημα των τριών γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (5.9.61): πρώτος περιορισμός, (5.9.63): δεύτερος περιορισμός, και (5.9.67): η ίδια η μη ομογενής διαφορική εξίσωση υπό τους δύο αυτούς περιορισμούς. Άγνωστες συναρτήσεις είναι οι τρεις παράγωγοι  $C_1'(x)$ ,  $C_2'(x)$  και  $C_3'(x)$ . Παρατηρούμε εύκολα πως η ορίζουσα των συντελεστών του είναι απλά η ορίζουσα Wronski  $W[y_1, y_2, y_3](x) \neq 0$ . Άρα το σύστημά μας έχει μία μόνο λύση  $C_1'(x)$ ,  $C_2'(x)$  και  $C_3'(x)$ , που την προσδιορίζουμε γενικά με τον κανόνα του Cramer. Στη συνέχεια πρέπει απλά να ολοκληρώσουμε τις τρεις αυτές παραγωγούς, ώστε να βρούμε τις αληθινές άγνωστες συναρτήσεις μας  $C_1(x)$ ,  $C_2(x)$  και  $C_3(x)$ . (Φυσικά κατανοούμε ότι οι ολοκληρώσεις αυτές μπορεί να είναι αναλυτικά πολύ δύσκολες έως και αδύνατες.) Επίσης στις τρεις αυτές ολοκληρώσεις δε λησμονούμε τις τρεις αυθαίρετες σταθερές ολοκληρώσεως  $D_1$ ,  $D_2$  και  $D_3$ . Διαθέτουμε λοιπόν τις τρεις συναρτήσεις  $C_1(x)$ ,  $C_2(x)$  και  $C_3(x)$ . Άρα τώρα πια η γενική λύση  $y_g(x)$  στη σχέση (5.9.59) έχει προσδιορισθεί πλήρως. Τέλος!

---

# Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο *Α6*

## ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

---

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Οι περισσότερες βασικές διαφορικές εξισώσεις της επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού, αλλά και άλλων επιστημών, είναι γραμμικές είτε κατευθείαν είτε μετά από γραμμικοποιήσεις που περικλείουν μικρότερο ή μεγαλύτερο βαθμό παραδοχών και προσεγγίσεων. Στο παρόν κεφάλαιο θα αναφερθούμε αποκλειστικά στη γραμμική μη ομογενή διαφορική εξίσωση του τόσο κλασικού μονοβάθμιου τριπαραμετρικού μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα υπό αρμονική εξωτερική δύναμη (φόρτιση) που ασκείται πάνω στη μάζα. Πρόκειται για εξαναγκασμένη ταλάντωση με απόσβεση ιδιαίτερου ενδιαφέροντος για τον Πολιτικό Μηχανικό. Τη γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξισώσεως θα την προσδιορίσουμε με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως (ή της χαρακτηριστικής εξισώσεως) διακρίνοντας τις τρεις περιπτώσεις: (α) της ασθενούς ή υποκρίσιμης αποσβέσεως, (β) της κρίσιμης αποσβέσεως και (γ) της ισχυρής ή υπερκρίσιμης αποσβέσεως. Στη συνέχεια θα προσδιορίσουμε και τη μερική λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών (με τη χρήση τόσο πραγματικών όσο και μιγαδικών συναρτήσεων). Θα δώσουμε βαρύτητα στη μόνιμη λύση που οφείλεται στην ίδια την εξωτερική δύναμη (τη φόρτιση) και όχι στο μεταβατικό φαινόμενο. (Το μεταβατικό φαινόμενο εξαλείφεται με την πάροδο του χρόνου λόγω της υποθεθείσας υπάρξεως του αποσβεστήρα και ουσιαστικά συχνά το αγνοούμε εκτός από ειδικές περιπτώσεις όπου παίζει πρωτεύοντα ρόλο, όπως σε προβλήματα που αφορούν σε σεισμούς.) Θα ορίσουμε επίσης και τη μιγαδική συνάρτηση αποκρίσεως  $G(\omega)$  ή  $H(\omega)$  (στο πεδίο της συχνότητας  $\omega$ ). Τα σχετικά αποτελέσματα θα τα χρησιμοποιήσουμε αργότερα στο Κεφάλαιο Α17 γενικεύοντάς τα για τυχαία περιοδική εξωτερική δύναμη (φόρτιση) σε συνδυασμό με τις σειρές Fourier. Στο Κεφάλαιο Α19 θα γίνει παραπέρα γενίκευση σε μη περιοδική εξωτερική δύναμη (φόρτιση) σε συνδυασμό με το μετασχηματισμό Fourier. Τέλος θα εξετάσουμε σ' αυτό εδώ το Κεφάλαιο Α6 και την περίπτωση της γενικής (αυθαίρετης, οποιασδήποτε) φορτίσεως  $p(t)$  του κλασικού μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα.

---

### Α6.1. ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΑΖΑΣ-ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ-ΑΠΟΣΒΕΣΤΗΡΑ

#### Α6.1.1. Το μηχανικό σύστημα και η διαφορική εξίσωσή του

Θεωρούμε το τόσο θεμελιώδες μηχανικό σύστημα του Πολιτικού Μηχανικού που αποτελείται από ένα υλικό σημείο  $M$  μάζας  $m$ , ένα ελατήριο  $S$  σταθεράς  $k$  και ένα αποσβεστήρα  $D$  σταθεράς  $c$ . Το ελατήριο  $S$  και ο αποσβεστήρας  $D$  είναι παράλληλα με το υλικό σημείο  $M$  στο κοινό ελεύθερο άκρο τους. Η άγνωστη συνάρτηση είναι η μετατόπιση  $u = u(t)$  (με  $t$  το χρόνο) του υλικού σημείου  $M$  ως προς τη θέση ισορροπίας του  $u = 0$ . Υποθέτουμε επίσης την ύπαρξη εξωτερικής δυνάμεως

(φορτίσεως)  $p = p(t)$  που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο  $M$ , οπότε μιλάμε γενικά για εξαναγκασμένη (και όχι ελεύθερη) ταλάντωση. Στο ίδιο υλικό σημείο  $M$  εφαρμόζονται επίσης: (α) η ελαστική δύναμη επαναφοράς  $F_s(t) = -ku(t)$  του ελατηρίου  $S$  (ανάλογη της μετατόπισης  $u(t)$  του υλικού σημείου  $M$ , αλλά με αρνητικό συντελεστή αναλογίας  $-k$ ) καθώς και (β) η δύναμη αντιστάσεως (ιξώδους τριβής)  $F_d(t) = -c\dot{u}(t)$  του αποσβεστήρα  $D$  (ανάλογη της ταχύτητας  $\dot{u}(t)$  του υλικού σημείου  $M$  και επίσης με αρνητικό συντελεστή αναλογίας  $-c$ ). Και οι δύο αυτές δυνάμεις  $F_s$  και  $F_d$  αντιτίθενται στην κίνηση του υλικού σημείου  $M$  (γι' αυτό και τα αρνητικά πρόσημα!). Το παρόν μηχανικό σύστημα είναι μονοβάθμιο, έχει δηλαδή ένα μόνο βαθμό ελευθερίας, γιατί έχει μία άγνωστη συνάρτηση: τη μετατόπιση  $u(t)$  του υλικού σημείου  $M$ . Είναι επίσης τριπαραμετρικό, έχει δηλαδή τρεις παραμέτρους: (α) τη μάζα  $m$  του υλικού σημείου  $M$ , (β) τη σταθερά  $k$  του ελατηρίου  $S$  και (γ) τη σταθερά  $c$  του αποσβεστήρα  $D$ . Πρόκειται δηλαδή για μονοβάθμιο τριπαραμετρικό μηχανικό σύστημα.

Σύμφωνα με το θεμελιώδη δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στη Δυναμική (1.2.1) η συνολική δύναμη  $F = F(t)$  που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο  $M$  είναι ίση με τη μάζα του  $m$  επί την επιτάχυνσή του  $a = a(t)$ , που είναι εδώ η δεύτερη παράγωγος  $\ddot{u}(t)$  της μετατοπίσεώς του  $u(t)$ , δηλαδή

$$F(t) = ma(t) = m\ddot{u}(t). \quad (6.1.1)$$

Τώρα ως προς τη συνολική αυτή δύναμη  $F(t)$  που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο  $M$  αυτή αποτελείται από: (α) την εξωτερική δύναμη  $p(t)$ , (β) την ελαστική δύναμη επαναφοράς  $F_s(t) = -ku(t)$  του ελατηρίου  $S$  και (γ) τη δύναμη αντιστάσεως (ιξώδους τριβής)  $F_d(t) = -c\dot{u}(t)$  του αποσβεστήρα  $D$ . Εάν το μηχανικό σύστημα είναι σε κατακόρυφη θέση, υπάρχει βέβαια και το βάρος του υλικού σημείου  $W = mg$  (με  $g$  την επιτάχυνση της βαρύτητας). Εμείς όμως δεχθήκαμε ότι αυτό έχει ήδη ληφθεί υπόψη μετρώντας τη μετατόπιση  $u(t)$  του υλικού σημείου  $M$  από τη θέση ισορροπίας του  $u = 0$ . Επομένως ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα (6.1.1) παίρνει στην περίπτωση μας τη μορφή

$$m\ddot{u}(t) = p(t) + F_s(t) + F_d(t) \implies m\ddot{u}(t) = p(t) - ku(t) - c\dot{u}(t), \quad (6.1.2)$$

μεταφέροντας δε τους όρους με τις παραγώγους της μετατοπίσεως  $u(t)$  στο αριστερό μέλος την τελική μορφή

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t). \quad (6.1.3)$$

Πρόκειται για μια συνήθη διαφορική εξίσωση, δευτέρας τάξεως, πρώτου βαθμού, γραμμική, με σταθερούς συντελεστές  $m$ ,  $c$  και  $k$  και μη ομογενή για  $p(t) \neq 0$ . Ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος  $t$  και άγνωστη συνάρτηση (εξαρτημένη μεταβλητή) η μετατόπιση  $u(t)$ . Εάν διαθέτουμε και τις ακόλουθες δύο αρχικές συνθήκες (τη χρονική στιγμή  $t = 0$ ):

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0, \quad (6.1.4)$$

τότε έχουμε ένα απλό πρόβλημα αρχικών τιμών που αποτελείται από τη διαφορική εξίσωση (6.1.3) και τις αρχικές συνθήκες (6.1.4).

Εισάγοντας επίσης την έννοια της αδρανειακής δυνάμεως  $F_i(t) = -m\ddot{u}(t)$  (με πρόσημο μείον φυσικά!), η διαφορική μας εξίσωση (6.1.2) γράφεται και σαν εξίσωση ψευδοστατικής ισορροπίας. Δεν υπάρχει αληθινή στατική ισορροπία: υπάρχει κίνηση σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. Η ψευδοστατική ισορροπία είναι προϊόν της εισαγωγής της έννοιας της αδρανειακής δυνάμεως  $F_i(t) = -m\ddot{u}(t)$ . Έτσι όλες οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο υλικό σημείο  $M$ , δηλαδή: (α) η εξωτερική δύναμη  $p(t)$ , (β) η ελαστική δύναμη επαναφοράς  $F_s(t)$  του ελατηρίου  $S$ , (γ) η δύναμη αντιστάσεως (ιξώδους τριβής)  $F_d(t)$  του αποσβεστήρα  $D$  και, τέλος, (δ) η αδρανειακή δύναμη  $F_i(t)$  (μείον η μάζα  $m$  επί την επιτάχυνση  $a(t) = \ddot{u}(t)$ ) ισορροπούν. Συγκεκριμένα έχουμε

$$p(t) + F_s(t) + F_d(t) + F_i(t) = 0. \quad (6.1.5)$$

Πάρα πολλές φορές ο Πολιτικός Μηχανικός ξαναγράφει τη βασική διαφορική εξίσωση (6.1.3) του μονοβάθμιου τριπααραμετρικού μηχανικού συστήματος που εξετάζουμε διαιρώντας την με τη μάζα  $m$  του υλικού σημείου  $M$ . Τότε προκύπτει ότι

$$\ddot{u}(t) + \frac{c}{m} \dot{u}(t) + \frac{k}{m} u(t) = \frac{p(t)}{m} \quad (6.1.6)$$

με  $p(t)/m$  την ανηγμένη στη μάζα  $m$  του υλικού σημείου  $M$  εξωτερική δύναμη (φόρτιση)  $p(t)$ . Στη συνέχεια εισάγονται τα σύμβολα

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \xi = \frac{c}{2m\omega_0} = \frac{c}{2\sqrt{km}}. \quad (6.1.7)$$

Το πρώτο από τα σύμβολα αυτά  $\omega_0$  εκφράζει τη φυσική κυκλική συχνότητα (την ιδιοσυχνότητα) ταλαντώσεων του αντίστοιχου με το παρόν μηχανικού συστήματος, αλλά χωρίς αποσβεση της κινήσεως (χωρίς αποσβεστήρα, δηλαδή με  $c = 0$ , οπότε και  $\xi = 0$ ). Το δεύτερο σύμβολο  $\xi$  είναι ο καλούμενος λόγος αποσβέσεως της παρούσας κινήσεως. Με τη χρήση των δύο αυτών συμβόλων  $\omega_0$  και  $\xi$  η ήδη ανηγμένη στη μάζα  $m$  διαφορική εξίσωση της κινήσεως του υλικού σημείου  $M$  (6.1.6) παίρνει την απλούστερη και υπολογιστικά πιο εύχρηστη μορφή της

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0\dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = \frac{p(t)}{m}. \quad (6.1.8)$$

Και αυτή η διαφορική εξίσωση συνοδεύεται βέβαια από τις δύο αρχικές συνθήκες (6.1.4): αρχική θέση  $u_0$  και αρχική ταχύτητα  $v_0$ . Έχουμε έτσι ένα πλήρες πρόβλημα αρχικών τιμών.

#### A6.1.2. Η γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξισώσεως

Η γενική λύση  $u(t)$  της μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως (6.1.8) ισούται με το άθροισμα της γενικής λύσεως  $u_h(t)$  της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξισώσεως (με  $p(t) \equiv 0$ )

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0\dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0 \quad (6.1.9)$$

συν μια μερική (ή ειδική) λύση  $u_p(t)$  της μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως (6.1.8), δηλαδή

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t). \quad (6.1.10)$$

Ξεκινώντας από την ομογενή διαφορική εξίσωση (6.1.9), θα χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως (ή χαρακτηριστικής εξισώσεως). Υποθέτουμε έτσι λύση  $u_0(t)$  της εκθετικής μορφής

$$u_0(t) = e^{\mu t} \implies \dot{u}_0(t) = \mu e^{\mu t} \implies \ddot{u}_0(t) = \mu^2 e^{\mu t} \quad (6.1.11)$$

με τη σταθερά  $\mu$  προς το παρόν άγνωστη. Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση  $u_0(t)$  και τις δύο αυτές παραγώγους της στην ομογενή διαφορική εξίσωση (6.1.9), προκύπτει ότι

$$\mu^2 e^{\mu t} + 2\xi\omega_0 \mu e^{\mu t} + \omega_0^2 e^{\mu t} = 0 \implies (\mu^2 + 2\xi\omega_0 \mu + \omega_0^2) e^{\mu t} = 0. \quad (6.1.12)$$

Επομένως, για να είναι η υιοθετηθείσα συνάρτηση  $u_0(t) = e^{\mu t}$  λύση της ομογενούς διαφορικής εξισώσεως (6.1.9), θα πρέπει η σταθερά  $\mu$  να είναι λύση της χαρακτηριστικής εξισώσεως

$$p_2(\mu) = \mu^2 + 2\xi\omega_0 \mu + \omega_0^2 = 0. \quad (6.1.13)$$

Πρόκειται για μια απλή δευτεροβάθμια αλγεβρική εξίσωση. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις: (α) της ασθενούς ή υποκρίσιμης αποσβέσεως με  $0 < \xi < 1$ , (β) της κρίσιμης αποσβέσεως με  $\xi = 1$  και (γ) της ισχυρής ή υπερκρίσιμης αποσβέσεως με  $\xi > 1$ . Τις τρεις αυτές περιπτώσεις θα τις εξετάσουμε χωριστά, γιατί οδηγούν σε αρκετά διαφορετικές μορφές της γενικής λύσεως  $u_h(t)$  της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως (6.1.9), την οποία επιχειρούμε να επιλύσουμε.

**(α) Ασθενής ή υποκρίσιμη απόσβεση:** Αυτή είναι η περίπτωση που πράγματι συναντά τις περισσότερες φορές στις ποικίλες τεχνικές εφαρμογές του ο Πολιτικός Μηχανικός, άρα τον ενδιαφέρει και περισσότερο. Ο λόγος αποσβέσεως  $\xi$ , ο οποίος έτσι κι αλλιώς είναι θετικός αριθμός ( $\xi > 0$ ), είναι στην περίπτωση αυτή μικρότερος της μονάδας, δηλαδή  $0 < \xi < 1$ , και μάλιστα πολύ συχνά πολύ μικρότερος της μονάδας. Επομένως στην παρούσα περίπτωση έχουμε δύο μιγαδικές ρίζες  $\mu_{1,2}$  της δευτεροβάθμιας χαρακτηριστικής εξίσωσης (6.1.13):  $p_2(\mu) = 0$ , τις εξής:

$$\mu_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \sqrt{\xi^2\omega_0^2 - \omega_0^2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1} = -\xi\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1 - \xi^2} = -\xi\omega_0 \pm i\omega_D. \quad (6.1.14)$$

Το σύμβολο  $i = \sqrt{-1}$  δηλώνει τη φανταστική μονάδα (με  $i^2 = -1$ ). Επίσης το σύμβολο  $\omega_D$  (συχνά χρησιμοποιείται αντί γι αυτό και το σύμβολο  $\omega_d$ ) δηλώνει τη βοηθητική ποσότητα

$$\omega_D = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}. \quad (6.1.15)$$

Η ποσότητα αυτή  $\omega_D$  είναι η κυκλική ιδιοσυχνότητα των ταλαντώσεων με απόσβεση στο παρόν μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα και προφανώς είναι επίσης πραγματική για  $0 < \xi < 1$ .

Με προσδιορισμένες τις ρίζες αυτές  $\mu_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm i\omega_D$  η γενική λύση  $u_h(t)$  της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (6.1.9) που εξετάζουμε έχει προφανώς τη μορφή γραμμικού συνδυασμού των λύσεων  $e^{\mu_1 t}$  και  $e^{\mu_2 t}$  (που είναι γραμμικώς ανεξάρτητες). Συγκεκριμένα έχουμε

$$u_h(t) = C_1 e^{\mu_1 t} + C_2 e^{\mu_2 t} = e^{-\xi\omega_0 t} (C_1 e^{i\omega_D t} + C_2 e^{-i\omega_D t}) \quad (6.1.16)$$

με τα  $C_1$  και  $C_2$  αυθαίρετες σταθερές, πραγματικές ή μάλλον (σχεδόν πάντοτε) μιγαδικές. Με τη χρήση των τύπων του Euler (1.5.3) και (1.5.4), δηλαδή των τύπων

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x \quad (6.1.17)$$

η λύση αυτή  $u_h(t)$  εύκολα γράφεται και στην ακόλουθη τριγωνομετρική μορφή της:

$$u_h(t) = e^{-\xi\omega_0 t} (D_1 \cos \omega_D t + D_2 \sin \omega_D t). \quad (6.1.18)$$

Στη μορφή αυτή έγινε χρήση των νέων αυθαίρετων σταθερών

$$D_1 = C_1 + C_2, \quad D_2 = i(C_1 - C_2). \quad (6.1.19)$$

Σημειώνεται ότι στη μορφή αυτή (6.1.18) της γενικής λύσεως  $u_h(t)$  της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (6.1.9) αρκεί οι δύο σταθερές  $D_1$  και  $D_2$  να είναι πραγματικές, ώστε να έχουμε πραγματική λύση. Τούτο σχεδόν πάντοτε το επιζητεί στα τεχνικά προβλήματά του ο Πολιτικός Μηχανικός. Αντίθετα στην αρχική μορφή (6.1.16) της ίδιας γενικής λύσεως  $u_h(t)$  οι δύο σταθερές  $C_1$  και  $C_2$  εκεί πρέπει να είναι μιγαδικές, ώστε να έχουμε τελικά πραγματική λύση. Αυτό συμβαίνει λόγω της παρουσίας της φανταστικής μονάδας  $i = \sqrt{-1}$  στους εκθέτες. Επιπλέον η φανταστική μονάδα  $i$  είναι απύσχα στην τριγωνομετρική μορφή της λύσεως (6.1.18).

**(β) Κρίσιμη απόσβεση:** Ο λόγος αποσβέσεως  $\xi$  είναι στην περίπτωση αυτή ίσος με τη μονάδα, δηλαδή  $\xi = 1$ . Άρα έχουμε μια διπλή ρίζα (ρίζα πολλαπλότητας 2) της δευτεροβάθμιας χαρακτηριστικής εξίσωσης (6.1.13):  $p_2(\mu) = 0$  (για λόγο αποσβέσεως  $\xi = 1$ )

$$p_2(\mu) = \mu^2 + 2\omega_0\mu + \omega_0^2 = (\mu + \omega_0)^2 = 0, \quad (6.1.20)$$

την εξής:

$$\mu_1 = -\omega_0. \quad (6.1.21)$$



Επομένως σύμφωνα με τη θεωρία για διπλές και, γενικότερα, πολλαπλές ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $p(\mu) = 0$ , η γενική λύση  $u_h(t)$  της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (6.1.9) θα είναι τώρα της μορφής

$$u_h(t) = C_1 e^{\mu_1 t} + C_2 t e^{\mu_1 t} = (C_1 + C_2 t) e^{-\omega_0 t} \quad (6.1.22)$$

με τα σύμβολα  $C_1$  και  $C_2$  να δηλώνουν αυθαίρετες (και γενικά πραγματικές) σταθερές.

**(γ) Ισχυρή ή υπερκρίσιμη απόσβεση:** Ο λόγος αποσβέσεως  $\xi$  στην περίπτωση αυτή υπερβαίνει τη μονάδα, δηλαδή  $\xi > 1$ . Άρα η δευτεροβάθμια χαρακτηριστική εξίσωση (6.1.13), δηλαδή η εξίσωση  $p_2(\mu) = \mu^2 + 2\xi\omega_0\mu + \omega_0^2 = 0$  έχει τώρα δύο πραγματικές ρίζες  $\mu_{1,2}$ , τις εξής:

$$\mu_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \sqrt{\xi^2\omega_0^2 - \omega_0^2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}, \quad (6.1.23)$$

οι οποίες είναι μάλιστα προφανώς και οι δύο αρνητικές. Επομένως η γενική λύση  $u_h(t)$  της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (6.1.9) παίρνει τώρα τη μορφή

$$u_h(t) = C_1 e^{\mu_1 t} + C_2 e^{\mu_2 t} = e^{-\xi\omega_0 t} \left( C_1 e^{\omega_0\sqrt{\xi^2-1}t} + C_2 e^{-\omega_0\sqrt{\xi^2-1}t} \right). \quad (6.1.24)$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τους γνωστούς τύπους (1.5.6)

$$e^x = \cosh x + \sinh x, \quad e^{-x} = \cosh x - \sinh x. \quad (6.1.25)$$

Αυτοί προέρχονται από τους ορισμούς (1.5.5) των υπερβολικών συναρτήσεων υπερβολικό συνημίτονο ( $\cosh$ ) και υπερβολικό ημίτονο ( $\sinh$ ), δηλαδή από τους τύπους

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \quad (6.1.26)$$

Γράφουμε έτσι τη λύση (6.1.24) και με τη μερική χρήση υπερβολικών συναρτήσεων στη μορφή

$$u_h(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \left[ D_1 \cosh \left( \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1} t \right) + D_2 \sinh \left( \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1} t \right) \right] \quad (6.1.27)$$

(αντίστοιχη της τριγωνομετρικής μορφής (6.1.18) για ασθενή ή υποκρίσιμη απόσβεση) με τη χρήση των νέων αυθαίρετων σταθερών

$$D_1 = C_1 + C_2, \quad D_2 = C_1 - C_2. \quad (6.1.28)$$

Χρησιμοποιώντας μάλιστα και το βοηθητικό σύμβολο

$$a_D = \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}, \quad (6.1.29)$$

το οποίο δεν παριστάνει βέβαια κυκλική συχνότητα, γιατί υποθέσαμε τώρα ισχυρή (υπερκρίσιμη) απόσβεση που αποκλείει τις ταλαντώσεις, ξαναγράφουμε τη γενική λύση (6.1.27) στη μορφή

$$u_h(t) = e^{-\xi\omega_0 t} (D_1 \cosh a_D t + D_2 \sinh a_D t). \quad (6.1.30)$$

Φυσικά, για να έχουμε πραγματική λύση, όπως σωστά επιθυμούμε, θα πρέπει και οι δύο αυθαίρετες σταθερές  $C_1$  και  $C_2$  (ή  $D_1$  και  $D_2$ ) να είναι πραγματικές.

Ας σημειωθεί τέλος ότι σε περίπτωση ελεύθερων ταλαντώσεων ( $p(t) \equiv 0$ ) ο προσδιορισμός των δύο σταθερών στη γενική λύση  $u_h(t)$  της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (6.1.9) μπορεί εύκολα να επιτευχθεί με τη χρήση των αρχικών συνθηκών (6.1.4) (αρχική θέση  $u_0$  και αρχική ταχύτητα  $v_0$ ). Αντίθετα, σε περίπτωση εξαναγκασμένων ταλαντώσεων ( $p(t) \neq 0$ ) οι σταθερές αυτές θα πρέπει να προσδιορισθούν από τη γενική λύση  $u(t)$  της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (6.1.8). Η λύση αυτή  $u(t)$  είναι το άθροισμα της γενικής λύσεως  $u_h(t)$  της ομογενούς

διαφορικής εξίσωσης (6.1.9) και μιας μερικής λύσεως  $u_p(t)$  της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (6.1.8). Τη μερική λύση  $u_p(t)$  θα την προσδιορίσουμε στην επόμενη παράγραφο στην ειδική περίπτωση αρμονικής (συνημιτονικής ή ημιτονικής) εξωτερικής δυνάμεως (φορτίσεως)  $p(t)$  που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο  $M$  στο μονοβάθμιο (δηλαδή με ένα μόνο βαθμό ελευθερίας) μηχανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα που εξετάζουμε.

### Α6.1.3. Η μερική λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης υπό αρμονική φόρτιση

Στην προηγούμενη Παράγραφο Α6.1.2 προσδιορίσαμε τη γενική λύση  $u_h(t)$  της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (6.1.9) με διάκριση τριών περιπτώσεων. Θα προχωρήσουμε τώρα στον προσδιορισμό μιας μερικής (ισοδύναμος όρος ειδικής) λύσεως  $u_p(t)$  της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (6.1.8) στην ειδική περίπτωση αρμονικής (συνημιτονικής ή ημιτονικής) φορτίσεως  $p(t)$ . Πρώτα για συνημιτονική φόρτιση της μορφής

$$p(t) = p_0 \cos \omega t \quad (6.1.31)$$

(με κυκλική συχνότητα  $\omega$ ) η μη ομογενής διαφορική εξίσωση (6.1.8) του μονοβάθμιου τριπαραμετρικού μηχανικού συστήματός μας παίρνει τη μορφή

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0 \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = \frac{p_0}{m} \cos \omega t. \quad (6.1.32)$$

Ασφαλώς είναι κατανοητό ότι το σύμβολο  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  αναφέρεται στη φυσική κυκλική συχνότητα (στην ιδιοσυχνότητα) του αντίστοιχου ιδεατού μηχανικού συστήματος χωρίς απόσβεση (με  $c = 0$ , ισοδύναμα με λόγο αποσβέσεως  $\xi = 0$ ) και είναι μια σταθερά του μηχανικού συστήματος. (Εμείς βέβαια υποθέσαμε στην ενότητα αυτή ότι υπάρχει απόσβεση:  $\xi > 0$ .) Αφετέρου το σύμβολο  $\omega$  αναφέρεται στην κυκλική συχνότητα της εξωτερικής δυνάμεως (φορτίσεως)  $p(t)$  που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο  $M$ . Αυτή η συχνότητα  $\omega$  δεν είναι ιδιοσυχνότητα (φυσική κυκλική συχνότητα) του μηχανικού συστήματος και αφορά στον έξω κόσμο. Άρα μπορεί να μεταβληθεί και δεν επηρεάζεται καθόλου από τις σταθερές  $m$ ,  $k$  και  $c$  του μηχανικού συστήματος που εξετάζουμε. Ανάλογα και η κυκλική συχνότητα  $\omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$  των ταλαντώσεων με απόσβεση (σε περίπτωση ασθενούς ή υποκρίσιμης αποσβέσεως:  $0 < \xi < 1$ ) στη σχέση (6.1.15) είναι και αυτή (ακριβώς όπως και η  $\omega_0$ ) σταθερά αποκλειστικά του μηχανικού συστήματος που εξετάζουμε.

Μόνο η συχνότητα  $\omega$  της υποθεθείσας εξωτερικής δυνάμεως  $p(t)$  στη σχέση (6.1.31) μπορεί να μεταβληθεί. Ας σημειωθεί επίσης ότι λόγω της υπάρξεως ιξώδους αποσβέσεως στην κίνηση του υλικού σημείου  $M$  (εξαιτίας του αποσβεστήρα  $D$ ) δεν υπάρχει περίπτωση συντονισμού στο παρόν πρόβλημα ταλαντώσεων. Συντονισμός θα μπορούσε να συμβεί μόνο στο αντίστοιχο μηχανικό σύστημα χωρίς απόσβεση (δηλαδή με  $c = 0$ , ισοδύναμα με λόγο αποσβέσεως  $\xi = 0$ , κάτι που όμως δε συμβαίνει εδώ), εάν και μόνο εάν  $\omega = \omega_0$ .

Για την εύρεση της ζητούμενης μερικής (ή ειδικής) λύσεως  $u_p(t)$  θα χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών. Η τριγωνομετρική μορφή (με κυκλική συχνότητα  $\omega$ ) της εξωτερικής δυνάμεως (φορτίσεως)  $p(t)$  στη σχέση (6.1.31) μας υποχρεώνει να αναζητήσουμε μερική λύση  $u_p(t)$  επίσης τριγωνομετρικής μορφής και με την ίδια κυκλική συχνότητα  $\omega$ , δηλαδή

$$u_p(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (6.1.33)$$

με τα  $A$  και  $B$  προσδιοριστέους συντελεστές. Σημειώνουμε ότι ο ημιτονικός όρος  $B \sin \omega t$  είναι και αυτός απόλυτα αναγκαίος. Ο συνημιτονικός όρος  $A \cos \omega t$  δεν αρκεί λόγω του όρου αποσβέσεως  $2\xi\omega_0 \dot{u}(t)$  στη διαφορική εξίσωση (6.1.32), που περιέχει και την πρώτη παράγωγο  $\dot{u}(t)$  της άγνωστης συναρτήσεως  $u(t)$ . Μόνο εάν έλειπε ο όρος αυτός (δηλαδή για  $\xi = 0$ ), θα μπορούσαμε να υποθέσουμε καθαρά συνημιτονική μερική λύση  $u_p(t) = A \cos \omega t$  στη γραμμική διαφορική εξίσωση (6.1.32).

Ο προσδιορισμός των άγνωστων σταθερών (των προσδιοριστέων συντελεστών)  $A$  και  $B$  στη μερική λύση  $u_p(t)$  που υποθέσαμε είναι υπόθεση ρουτίνας. Αρκούν δύο παραγωγίσεις της λύσεως αυτής

$$\dot{u}_p(t) = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t, \quad (6.1.34)$$

$$\ddot{u}_p(t) = -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t \quad (6.1.35)$$

και αντικατάσταση και αυτών στη διαφορική εξίσωση (6.1.32) που λύνουμε. Τότε προκύπτει άμεσα

$$\begin{aligned} (-A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t) + 2\xi\omega_0(-A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t) \\ + \omega_0^2(A \cos \omega t + B \sin \omega t) = \frac{\rho_0}{m} \cos \omega t \end{aligned} \quad (6.1.36)$$

έχοντας χρησιμοποιήσει τις σχέσεις (6.1.33), (6.1.34) και (6.1.35) (με αντίστροφη σειρά φυσικά!).

Επειδή μάλιστα οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις συνημίτονο και ημίτονο είναι γραμμικά ανεξάρτητες, θα πρέπει οι συνολικοί συντελεστές των συναρτήσεων αυτών στο αριστερό και στο δεξιό μέλος της εξίσωσης (6.1.36) να είναι ίσοι. Ξεκινώντας με τους συντελεστές της συναρτήσεως  $\cos \omega t$ , βρίσκουμε αμέσως ότι

$$-A\omega^2 + 2B\xi\omega\omega_0 + A\omega_0^2 = \frac{\rho_0}{m}. \quad (6.1.37)$$

Ανάλογα οι συντελεστές της συναρτήσεως  $\sin \omega t$  μας δίνουν και την αντίστοιχη εξίσωση

$$-B\omega^2 - 2A\xi\omega\omega_0 + B\omega_0^2 = 0. \quad (6.1.38)$$

Οι δύο εξισώσεις (6.1.37) και (6.1.38) αποτελούν ένα απλό σύστημα δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων με δύο αγνώστους: τους προσδιοριστέους συντελεστές  $A$  και  $B$  στη ζητούμενη μερική λύση  $u_p(t)$  στη σχέση (6.1.33). Ας το ξαναγράψουμε στην ελαφρά απλούστερη μορφή

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) + 2B\xi\omega\omega_0 = \frac{\rho_0}{m}, \quad (6.1.39)$$

$$-2A\xi\omega\omega_0 + B(\omega_0^2 - \omega^2) = 0. \quad (6.1.40)$$

Ένα πραγματικά απλούστατο σύστημα! Με την ορίζουσα  $\Delta$  των συντελεστών των αγνώστων ποσοτήτων  $A$  και  $B$  προφανώς ίση με

$$\Delta = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega\omega_0)^2 \quad (6.1.41)$$

οι συντελεστές  $A$  και  $B$  προσδιορίζονται εύκολα στη μορφή

$$A = \frac{\rho_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\Delta}, \quad (6.1.42)$$

$$B = \frac{\rho_0}{m} \frac{2\xi\omega\omega_0}{\Delta}. \quad (6.1.43)$$

Αν θέλουμε αυτούς τους τύπους στις πλήρεις μορφές τους, εισάγουμε σ' αυτούς την ποσότητα  $\Delta$  από τη σχέση προσδιορισμού της (6.1.41) και λαμβάνουμε τελικά

$$A = \frac{\rho_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega\omega_0)^2}, \quad (6.1.44)$$

$$B = \frac{\rho_0}{m} \frac{2\xi\omega\omega_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega\omega_0)^2}. \quad (6.1.45)$$

Είναι ίσως ακόμη καλύτερα να χρησιμοποιήσουμε και το λόγο

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (6.1.46)$$

της κυκλικής συχνότητας  $\omega$  της αρμονικής εξωτερικής δύναμης (φορτίσεως)  $p(t) = p_0 \cos \omega t$  προς τη σταθερή φυσική κυκλική συχνότητα (ιδιοσυχνότητα)  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  του αντίστοιχου μηχανικού συστήματος χωρίς απόσβεση (δηλαδή με  $c = 0$ , ισοδύναμα με λόγο αποσβέσεως  $\xi = 0$ ). Με τη χρήση του λόγου αυτού  $\beta$ , οι προσδιορισθέντες (όχι πια προσδιοριστέοι!) συντελεστές  $A$  και  $B$  στη ζητούμενη μερική λύση  $u_p(t)$ , σχέση (6.1.33), παίρνουν τις τελικές τους εκφράσεις

$$A = \frac{p_0}{k} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}, \quad (6.1.47)$$

$$B = \frac{p_0}{k} \frac{2\xi\beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}. \quad (6.1.48)$$

Στις εκφράσεις αυτές πήραμε μάλιστα την πρωτοβουλία να αντικαταστήσουμε στους παρονομαστές την παρουσιαζόμενη ποσότητα  $m\omega_0^2$  με την ίση της  $m(k/m) = k$ , επειδή  $\omega_0^2 = k/m$  (πρώτη σχέση (6.1.7)).

Επομένως αντικαθιστούμε τώρα τους δύο συντελεστές  $A$  και  $B$  που προσδιορίσαμε στη μερική λύση  $u_p(t)$ , όπως την υποθέσαμε στη σχέση (6.1.33), και βρίσκουμε την ακόλουθη τελική έκφρασή της:

$$u_c(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} [(1 - \beta^2) \cos \omega t + 2\xi\beta \sin \omega t]. \quad (6.1.49)$$

Μάλιστα στη σχέση αυτή (εδώ στο τέλος των υπολογισμών μας) πήραμε το θάρρος να μετονομάσουμε τη λύση που βρέθηκε από  $u_p(t)$  σε  $u_c(t)$ , ώστε να δοθεί έμφαση στο γεγονός της συνημιτονικής εξωτερικής δύναμης (φορτίσεως)  $p(t) = p_0 \cos \omega t$  που έχουμε υποθέσει.

Για την αντίστοιχη ημιτονική εξωτερική δύναμη (φόρτιση)  $p(t) = p_0 \sin \omega t$  με εντελώς ανάλογο τρόπο βρίσκουμε την αντίστοιχη μερική λύση

$$u_s(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} [-2\xi\beta \cos \omega t + (1 - \beta^2) \sin \omega t]. \quad (6.1.50)$$

Χρησιμοποιήσαμε τώρα στη μερική λύση  $u(t)$  το δείκτη  $s$  από το ημίτονο (sine) αντί του δείκτη  $c$  από το συνημίτονο (cosine), όπως είχαμε κάνει προηγουμένως στη λύση (6.1.49).

Ασφαλώς και οι δύο αυτές μερικές λύσεις (6.1.49) και (6.1.50) μπορούν να γραφούν και με ένα μόνο τριγωνομετρικό όρο (είτε συνημίτονο είτε ημίτονο) αρκεί να εισαχθεί η κατάλληλη γωνία φάσεως  $\delta$ . Αυτό είναι ένα χρήσιμο, αλλά και σχετικά εύκολο καθήκον για τον Πολιτικό Μηχανικό.

Ας σημειωθεί τέλος ότι σε μια γενικότερη εξωτερική δύναμη (φόρτιση) της μορφής

$$p(t) = p_c \cos \omega t + p_s \sin \omega t \quad (6.1.51)$$

απλά θα αθροισθούν οι σχετικές μερικές λύσεις που βρέθηκαν  $u_c(t)$  (φυσικά με  $p_c$  αντί  $p_0$ ) και  $u_s(t)$  (φυσικά με  $p_s$  αντί  $p_0$ ). Απόλυτα στοιχειώδης εργασία ανάξια καταγραφής σε τελικό τύπο!

#### **Α6.1.4. Η μερική λύση με τη χρήση της μιγαδικής εκθετικής συναρτήσεως**

Λαμβάνοντας υπόψη τον πρώτο τύπο του Euler (6.1.17), που γράφεται για  $x = \omega t$

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t, \quad (6.1.52)$$

οδηγούμαστε άμεσα και στους τύπους

$$\cos \omega t = \operatorname{Re} e^{i\omega t}, \quad \sin \omega t = \operatorname{Im} e^{i\omega t}. \quad (6.1.53)$$

Στους τύπους αυτούς τα σύμβολα  $\operatorname{Re}$  (real) και  $\operatorname{Im}$  (imaginary) δηλώνουν το πραγματικό μέρος (real part) και το φανταστικό μέρος (imaginary part) αντίστοιχα μιας μιγαδικής συναρτήσεως, εδώ της μιγαδικής εκθετικής συναρτήσεως  $e^{i\omega t}$ .

Επομένως η διαφορική εξίσωση (6.1.32) για την εξαναγκασμένη ταλάντωση με απόσβεση και υπό συνημιτονική εξωτερική δύναμη (φόρτιση)

$$p(t) = p_0 \cos \omega t = p_0 \operatorname{Re} e^{i\omega t} \quad (6.1.54)$$

(λόγω του πρώτου από τους τύπους (6.1.53)) μπορεί ασφαλώς να γραφεί και στην απόλυτα ισοδύναμη μορφή

$$\ddot{u}_c(t) + 2\xi\omega_0 \dot{u}_c(t) + \omega_0^2 u_c(t) = \frac{p_0}{m} \operatorname{Re} e^{i\omega t}. \quad (6.1.55)$$

Στη μορφή αυτή χρησιμοποιήσαμε το σύμβολο  $u_c(t)$  για την άγνωστη συνάρτηση  $u(t)$  (όπως ήδη κάναμε και στη λύση (6.1.49)), ώστε να δώσουμε κάποια έμφαση στη συνημιτονική φόρτιση (6.1.54).

Εντελώς ανάλογα στην περίπτωση ημιτονικής φορτίσεως

$$p(t) = p_0 \sin \omega t = p_0 \operatorname{Im} e^{i\omega t} \quad (6.1.56)$$

(λόγω του δεύτερου από τους τύπους (6.1.53)) η διαφορική εξίσωση (6.1.32) παίρνει την αντίστοιχη ημιτονική μορφή (με το σύμβολο  $u_s(t)$ ) τώρα για την άγνωστη συνάρτηση)

$$\ddot{u}_s(t) + 2\xi\omega_0 \dot{u}_s(t) + \omega_0^2 u_s(t) = \frac{p_0}{m} \operatorname{Im} e^{i\omega t}. \quad (6.1.57)$$

Χρησιμοποιούμε τώρα τη μιγαδική συνάρτηση

$$u_f(t) = u_c(t) + iu_s(t) \quad (6.1.58)$$

και προσθέτουμε τις δύο διαφορικές εξισώσεις (6.1.55) και (6.1.57), τη δεύτερη πολλαπλασιασμένη επί τη φανταστική μονάδα  $i = \sqrt{-1}$ . Καταλήγουμε έτσι στην εξής μιγαδική διαφορική εξίσωση:

$$\ddot{u}_f(t) + 2\xi\omega_0 \dot{u}_f(t) + \omega_0^2 u_f(t) = \frac{p_0}{m} e^{i\omega t}, \quad (6.1.59)$$

δηλαδή στην αρχική μας διαφορική εξίσωση (6.1.8), σαν να είχαμε όμως τώρα τη μιγαδική εκθετική φόρτιση  $p(t) = p_0 e^{i\omega t}$  (και πάλι με κυκλική συχνότητα  $\omega$ ).

Και αντίστροφα: υποθέτουμε ότι έχουμε βρει τη λύση  $u_f(t)$  (σε μιγαδική μορφή ασφαλώς) της μιγαδικής διαφορικής εξισώσεως (6.1.59). Μπορούμε έτσι άμεσα να πάρουμε το πραγματικό μέρος καθώς και (χωριστά) το φανταστικό μέρος αυτής της μιγαδικής διαφορικής εξισώσεως (6.1.59) και να επανέλθουμε στις πραγματικές διαφορικές εξισώσεις (6.1.55) και (6.1.57), από τις οποίες είχαμε ξεκινήσει. Τούτο ισχύει λόγω της σχέσεως (6.1.58), από την οποία προφανώς έχουμε

$$u_c(t) = \operatorname{Re} u_f(t), \quad u_s(t) = \operatorname{Im} u_f(t) \quad (6.1.60)$$

καθώς και των τύπων (6.1.53), που ήδη αποδείξαμε βάσει του τύπου του Euler (6.1.52).

Το συμπέρασμά μας είναι απλό. Παρόλο που οι πραγματικές διαφορικές εξισώσεις (6.1.55) και (6.1.57) είναι εκείνες που έχουν φυσική σημασία για τον Πολιτικό Μηχανικό (για συνημιτονική και ημιτονική φόρτιση  $p(t)$  αντίστοιχα), εντούτοις και η μιγαδική διαφορική εξίσωση (6.1.59), αν και δε διαθέτει μόνη της άμεση φυσική σημασία, μπορεί να φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη στον Πολιτικό Μηχανικό. Τούτο έχει την έννοια ότι η μιγαδική λύση  $u_f(t)$  της διαφορικής εξισώσεως (6.1.59), εάν είναι διαθέσιμη, προσφέρει σχεδόν έτοιμες τις αντίστοιχες λύσεις  $u_c(t)$  και  $u_s(t)$  για τις πραγματικές διαφορικές εξισώσεις (6.1.55) και (6.1.57) αντίστοιχα απλά με τη χρήση των σχέσεων (6.1.60).

Ασφαλώς η γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξισώσεως που αντιστοιχεί στη μη ομογενή διαφορική εξίσωση (6.1.59) είναι ήδη γνωστή από την Παράγραφο Α6.1.2 (με τις αυθαίρετες σταθερές βέβαια εν προκειμένω γενικά μιγαδικούς αριθμούς!). Το καθήκον μας τώρα είναι απλά η εύρεση

μιας μερικής (ή ειδικής) λύσεως  $u_{fp}(t)$  της μιγαδικής διαφορικής εξίσωσης (6.1.59). Ο χαρακτηρισμός της σαν μιγαδική οφείλεται απλά στη μιγαδική εκθετική φόρτιση  $p(t) = p_0 e^{i\omega t}$  στο δεξιό μέλος της. Στην εύρεση της μερικής αυτής λύσεως  $u_{fp}(t)$  θα προχωρήσουμε αμέσως παρακάτω.

Προς το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε και πάλι τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών, αν και εδώ έχουμε μόλις έναν προσδιοριστέο συντελεστή. Εύλογα υποθέτουμε μερική λύση  $u_{fp}(t)$  της εκθετικής μορφής

$$u_{fp}(t) = C e^{i\omega t} \quad (6.1.61)$$

εξαιτίας της μιγαδικής εκθετικής φορτίσεως  $p(t) = p_0 e^{i\omega t}$  που δεχθήκαμε. Παραγωγίζουμε δύο φορές τη μερική αυτή λύση που υποθέτουμε, οπότε προκύπτει ότι

$$\dot{u}_{fp}(t) = i\omega C e^{i\omega t}, \quad \ddot{u}_{fp}(t) = -\omega^2 C e^{i\omega t}. \quad (6.1.62)$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τη συνάρτηση  $u_{fp}(t)$  και τις δύο πιο πάνω παραγώγους της στη μιγαδική διαφορική εξίσωση (6.1.59). Καταλήγουμε έτσι στην πρωτοβάθμια αλγεβρική εξίσωση

$$C(-\omega^2 + 2i\xi\omega\omega_0 + \omega_0^2) e^{i\omega t} = \frac{p_0}{m} e^{i\omega t}. \quad (6.1.63)$$

Επειδή μάλιστα η εκθετική συνάρτηση  $e^{i\omega t}$  δε μηδενίζεται ποτέ, γιατί

$$|e^{i\omega t}| = |\cos \omega t + i \sin \omega t| = \sqrt{\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t} = 1 \quad (6.1.64)$$

(λόγω του τύπου του Euler (6.1.52)), την απλοποιούμε και, στη συνέχεια, προσδιορίζουμε άμεσα τον προσδιοριστέο συντελεστή  $C$ . Έτσι βρίσκουμε πολύ εύκολα ότι

$$C = \frac{p_0}{m} \frac{1}{-\omega^2 + 2i\xi\omega\omega_0 + \omega_0^2}. \quad (6.1.65)$$

Τώρα η μερική λύση  $u_{fp}(t)$  που επιζητούμε να προσδιορίσουμε προκύπτει από τη σχέση (6.1.61) στη μορφή

$$u_{fp}(t) = \frac{p_0}{m} \frac{e^{i\omega t}}{-\omega^2 + 2i\xi\omega\omega_0 + \omega_0^2}. \quad (6.1.66)$$

Αν μάλιστα χρησιμοποιήσουμε και το λόγο κυκλικών συχνοτήτων  $\beta = \omega/\omega_0$  (με  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ), τον οποίο λόγο  $\beta$  εισαγάγαμε προηγουμένως στη σχέση (6.1.46), τότε ο συντελεστής  $C$  που προσδιορίσαμε στη σχέση (6.1.65) παίρνει την κάπως απλούστερη μορφή

$$C = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2 + 2i\xi\beta}. \quad (6.1.67)$$

Αυτό συμβαίνει, επειδή  $m\omega_0^2 = m(k/m) = k$ , όπως ήδη είχαμε την ευκαιρία να παρατηρήσουμε. Επομένως με τη χρήση του λόγου  $\beta$  η μερική λύση (6.1.66) γράφεται και στην ισοδύναμη, αλλά κάπως κομψότερη, τελική μορφή της

$$u_{fp}(t) = \frac{p_0}{k} \frac{e^{i\omega t}}{1 - \beta^2 + 2i\xi\beta}. \quad (6.1.68)$$

Ο συζυγής μιγαδικός αριθμός του μιγαδικού παρονομαστή  $1 - \beta^2 + 2i\xi\beta$  είναι προφανώς ο μιγαδικός αριθμός  $1 - \beta^2 - 2i\xi\beta$  (με  $-i$  αντί  $i$ ). Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με το συζυγή αυτό μιγαδικό αριθμό στη σχέση (6.1.67) καθώς και στη μερική λύση (6.1.68), παίρνουμε και τις ισοδύναμες μορφές τους

$$C = \frac{p_0}{k} \frac{1 - \beta^2 - 2i\xi\beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}, \quad (6.1.69)$$

$$u_{fp}(t) = \frac{p_0}{k} \frac{(1 - \beta^2 - 2i\xi\beta) e^{i\omega t}}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \quad (6.1.70)$$

αντίστοιχα. Η φανταστική μονάδα  $i = \sqrt{-1}$  εμφανίζεται τώρα μόνο στους αριθμητές.

Ειδικά στον αριθμητή της μερικής λύσεως  $u_{fp}(t)$  στη σχέση (6.1.70) λαμβάνοντας υπόψη τον τύπο του Euler (6.1.52), δηλαδή ότι  $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ , και εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό των δύο μιγαδικών ποσοτήτων στον αριθμητή αυτό, βρίσκουμε ότι

$$(1 - \beta^2 - 2i\xi\beta) e^{i\omega t} = (1 - \beta^2 - 2i\xi\beta)(\cos \omega t + i \sin \omega t) \\ = [(1 - \beta^2) \cos \omega t + 2\xi\beta \sin \omega t] + i[-2\xi\beta \cos \omega t + (1 - \beta^2) \sin \omega t]. \quad (6.1.71)$$

Παίρνοντας επομένως το πραγματικό μέρος  $u_c(t)$  και το φανταστικό μέρος  $u_s(t)$  της προσδιορισθείσας στη σχέση (6.1.70) μερικής λύσεως  $u_{fp}(t)$ , άμεσα καταλήγουμε στις λύσεις (6.1.49) και (6.1.50) αντίστοιχα της προηγούμενης Παραγράφου Α6.1.3. Εκεί όμως είχαμε χρησιμοποιήσει δύο προσδιοριστέους συντελεστές, τους  $A$  και  $B$ , άρα και σύστημα δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Κάναμε επίσης ξεχωριστές πράξεις για τη συνημιτονική φόρτιση  $p(t) = p_0 \cos \omega t$  και την ημιτονική φόρτιση  $p(t) = p_0 \sin \omega t$ . Αντίθετα εδώ είχαμε ένα μόνο προσδιοριστέο συντελεστή, το  $C$ , και εκτέλεση των πράξεων μια μόνο φορά και για τις δύο ζητούμενες λύσεις  $u_c(t)$  και  $u_s(t)$ .

### Α6.1.5. Η γενική λύση

Ασφαλώς η γενική λύση  $u(t)$  στο εξεταζόμενο πρόβλημα εξαναγκασμένης ταλάντωσης με απόσβεση υπό αρμονική φόρτιση είναι το άθροισμα της γενικής λύσεως  $u_h(t)$  της ομογενούς διαφορικής εξισώσεως (6.1.9) και μιας μερικής λύσεως  $u_p(t)$  της μη ομογενούς (της πλήρους) διαφορικής εξισώσεως (6.1.8). Αυτή ήδη αναφέρθηκε ρητά στη σχέση (6.1.10). Όμως εξαιτίας της αποσβέσεως (έχουμε δεχθεί ότι  $c > 0$ , ισοδύναμα ότι  $\xi > 0$ ) η γενική λύση της ομογενούς  $u_h(t)$  περιέχει σε κάθε περίπτωση: (α) της ασθενούς ή υποκρίσιμης, (β) της κρίσιμης και (γ) της ισχυρής ή υπερκρίσιμης αποσβέσεως αρνητικό εκθετικό παράγοντα, όπως ήδη διαπιστώσαμε στην Παράγραφο Α6.1.2.

Επομένως με την εξαίρεση ορισμένων φαινομένων (όπως τα σεισμικά φαινόμενα) ο Πολιτικός Μηχανικός αγνοεί συνήθως το μεταβατικό (ή παροδικό) φαινόμενο, το οποίο οφείλεται στη γενική λύση  $u_h(t)$  της ομογενούς διαφορικής εξισώσεως (6.1.9). Έτσι κι αλλιώς το μεταβατικό φαινόμενο πολύ σύντομα δεν έχει ουσιαστική επιρροή στην ταλάντωση. Κατά συνέπεια ο Πολιτικός Μηχανικός περιορίζει την προσοχή του στη μόνιμη λύση (εδώ στη μόνιμη ταλάντωση)  $u_c(t)$  (για συνημιτονική φόρτιση  $p(t) = p_0 \cos \omega t$ ) ή  $u_s(t)$  (για ημιτονική φόρτιση  $p(t) = p_0 \sin \omega t$ ) με σταθερό εύρος, χωρίς καθόλου απόσβεση, εφόσον η εξωτερική αρμονική φόρτιση  $p(t)$  δεν έχει απόσβεση. Όπως είδαμε, στις λύσεις αυτές, που είναι μερικές λύσεις της μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως (6.1.8), οι αρχικές συνθήκες (6.1.4) δεν έχουν καμία απολύτως επιρροή. Ο ρόλος των αρχικών συνθηκών περιορίζεται στο μεταβατικό (ή παροδικό) φαινόμενο.

### Α6.1.6. Η μιγαδική συνάρτηση αποκρίσεως

Η μιγαδική μερική λύση (6.1.61) στο παρόν πρόβλημα που εκφράζει τη μόνιμη λύση (όχι το μεταβατικό ή παροδικό φαινόμενο) υπό αρμονική φόρτιση είτε συνημιτονικής μορφής είτε ημιτονικής μορφής (πραγματικό μέρος της,  $Re$ , και φανταστικό μέρος της,  $Im$ , αντίστοιχα) περιλαμβάνει το μιγαδικό συντελεστή  $C$ . Αυτόν ήδη τον προσδιορίσαμε στη σχέση (6.1.67). Ανάγοντας τον ίδιο συντελεστή  $C$  σε μοναδιαίο εύρος  $p_0$  της εξωτερικής αρμονικής φορτίσεως (δηλαδή απλά διαιρώντας τον με το  $p_0$ ), παίρνουμε τον ανηγμένο συντελεστή

$$G = \frac{1}{k} \frac{1}{1 - \beta^2 + 2i\xi\beta}. \quad (6.1.72)$$

Όταν χρησιμοποιούμε αυτόν το μιγαδικό συντελεστή  $G$ , θα πρέπει βέβαια να θυμόμαστε να τον πολλαπλασιάζουμε επί το εύρος  $p_0$  της εξωτερικής αρμονικής φορτίσεως (είτε συνημιτονικής είτε ημιτονικής). Τούτο δεν είναι καθόλου δύσκολο.

Αυτό όμως που πρέπει να μας απασχολεί κάπως περισσότερο είναι το εξής γεγονός. Καταρχήν το μονοβάθμιο τριπααραμετρικό μηχανικό σύστημα που εξετάζουμε (δηλαδή με τρεις παραμέτρους:

τη μάζα  $m$  του υλικού σημείου  $M$ , τη σταθερά  $k$  του ελατηρίου  $S$  και τη σταθερά  $c$  του αποσβεστήρα  $D$ ) είναι πλήρως καθορισμένο. Αντίθετα όμως η εξωτερική δύναμη που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο  $M$  (η φόρτιση)  $p(t)$  μπορεί να έχει σε μια περίπτωση μια συγκεκριμένη κυκλική συχνότητα  $\omega_1$ , ενώ σε κάποια άλλη περίπτωση μια άλλη συγκεκριμένη κυκλική συχνότητα  $\omega_2$ .

Επιδιώκοντας να δώσουμε βαρύτητα στο γεγονός αυτό, δηλώνουμε τον ανηγμένο συντελεστή  $G$  στη σχέση (6.1.72) σαν συνάρτηση της κυκλικής συχνότητας  $\omega$  της εξωτερικής αρμονικής φορτίσεως  $p(t)$ . Δηλαδή γράφουμε απλά

$$G(\omega) = \frac{1}{k} \frac{1}{1 - \beta^2 + 2i\xi\beta}, \quad \text{όπου } \beta = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad (6.1.73)$$

με το  $\omega_0$  ( $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ) σταθερά. Σαφέστερα μάλιστα, με ρητή αντικατάσταση του  $\beta$  από το λόγο κυκλικών συχνοτήτων  $\omega/\omega_0$ , σχέση (6.1.46), παίρνουμε (ανάλογα με τη σχέση (6.1.65))

$$G(\omega) = \frac{1}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\xi\omega\omega_0}, \quad (6.1.74)$$

επειδή  $\omega_0^2/k = (k/m)/k = 1/m$  (με  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ). Εάν θέλουμε μάλιστα, πολλαπλασιάζουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή του κυρίου κλάσματος επί τη συζυγή μιγαδική παράσταση του παρονομαστή. Τότε διαπιστώνουμε ότι

$$G(\omega) = \frac{1}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\xi\omega\omega_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega\omega_0)^2}. \quad (6.1.75)$$

Έχουμε επομένως στη διάθεσή μας το συντελεστή  $G$  γραμμένο σαν συνάρτηση  $G(\omega)$  της συχνότητας  $\omega$  της αρμονικής (συνημιτονικής ή ημιτονικής) εξωτερικής δυνάμεως (φορτίσεως)  $p(t)$  πάνω στο υλικό σημείο  $M$ . Άρα για κάθε αρμονική φόρτιση  $p(t) = p_0 \cos \omega t$  ή  $p(t) = p_0 \sin \omega t$  πολλαπλασιάζοντας απλά τη συνάρτηση  $G(\omega)$  επί το εύρος  $p_0$  της αρμονικής φορτίσεως  $p(t)$  καθώς και επί τη μιγαδική εκθετική συνάρτηση  $e^{i\omega t}$  με βάση τη σχέση (6.1.61), που τώρα γράφεται

$$u_{fp}(t) = G(\omega) p_0 e^{i\omega t}, \quad (6.1.76)$$

έχουμε τη ζητούμενη λύση. (Εννοούμε τη μόνιμη λύση, όχι το μεταβατικό φαινόμενο!) Αυτή είναι η μετατόπιση  $u(t)$  του υλικού σημείου ως προς τη θέση ισορροπίας του σε μιγαδική μορφή  $u_{fp}(t)$ .

Στη συνέχεια βέβαια παίρνουμε το πραγματικό μέρος της μιγαδικής συναρτήσεως  $u_{fp}(t)$  (για συνημιτονική φόρτιση  $p(t) = p_0 \cos \omega t$ ) ή το φανταστικό μέρος της ίδιας συναρτήσεως (για ημιτονική φόρτιση  $p(t) = p_0 \sin \omega t$ ). Προσδιορίζουμε έτσι την αληθινή λύση του προβλήματός μας, τη μόνιμη απόκριση του μονοβάθμιου τριπαραμετρικού μηχανικού συστήματός μας σε πραγματική μορφή. Και οφείλει βέβαια αυτή να είναι πραγματική: δε νοούνται μιγαδικές μετατοπίσεις στον πραγματικό κόσμο που ζούμε! Η χρήση της μιγαδικής μετατοπίσεως  $u_{fp}(t)$  ήταν απλά ένα μαθηματικό τέχνασμα με σκοπό τη μείωση των απαιτούμενων υπολογισμών. Αυτό είχαμε την ευκαιρία να το εξηγήσουμε εκτενώς στην παρούσα Ενότητα Α6.1, ιδίως στην Παράγραφο της Α6.1.4.

Λόγω της εξαιρετικής σημασίας και σπουδαιότητας της συναρτήσεως  $G(\omega)$  της κυκλικής συχνότητας  $\omega$  της αξίζει ένα ειδικό όνομα: Η συνάρτηση αυτή καλείται **μιγαδική συνάρτηση αποκρίσεως στο πεδίο της συχνότητας**. Για να είμαστε λίγο συντομότεροι, συχνά χρησιμοποιούμε και τον απλούστερο όρο **μιγαδική συνάρτηση αποκρίσεως** παραλείποντας τη φράση «στο πεδίο της συχνότητας». Εντούτοις ο Πολιτικός Μηχανικός πρέπει να έχει συνεχώς υπόψη του ότι η μιγαδική συνάρτηση αποκρίσεως  $G(\omega)$  αναφέρεται πάντοτε στο πεδίο της κυκλικής συχνότητας  $\omega$ .

Αυτά προς το παρόν! Περισσότερα για την τόσο σημαντική για τον Πολιτικό Μηχανικό (και όχι μόνο) μιγαδική συνάρτηση αποκρίσεως  $G(\omega)$  θα αναφερθούν στο σύντομο Κεφάλαιο Α17 πιο κάτω με τη χρήση των σειρών Fourier (Κεφάλαιο Α16) για τυχαίες περιοδικές φορτίσεις  $p(t)$  (με περίοδο  $T$ ). Εκεί θα φανεί ακόμη καλύτερα η χρησιμότητά της. Ανάλογα, αλλά σε γενικευμένη κάπως μορφή, και στο Κεφάλαιο Α19 για τυχαίες μη περιοδικές φορτίσεις  $p(t)$ , εκεί με τη χρήση του μετασχηματισμού Fourier (Κεφάλαιο Α18). *Υπομονή λοιπόν!*



## Α6.2. ΓΕΝΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΑΖΑΣ-ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ-ΑΠΟΣΒΕΣΤΗΡΑ

### Α6.2.1. Η διαφορική εξίσωση και οι αρχικές συνθήκες

Στην προηγούμενη ενότητα εξετάσαμε την περίπτωση αρμονικής φορτίσεως του τριπαραμετρικού μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα. Στην παρούσα ενότητα θα εξετάσουμε την περίπτωση γενικής (αυθαίρετης) φορτίσεως  $p(t)$ . Η σχετική διαφορική εξίσωση είναι η εξίσωση (6.1.8). Την ξαναγράφουμε με χρήση της ανηγμένης (στη μάζα  $m$ ) φορτίσεως  $p^*(t)$ :

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0\dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = p^*(t) \quad \text{με} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{και} \quad p^*(t) = \frac{p(t)}{m}. \quad (6.2.1)$$

Τονίζουμε τώρα ότι σκοπό μας αποτελεί η εύρεση της λύσεως της γενικής αυτής διαφορικής εξισώσεως στη μορφή ολοκληρωτικού τύπου που να ισχύει για κάθε φόρτιση  $p(t)$ . Προς το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων της Ενότητας Α5.9. Και μάλιστα στο Παράδειγμα Α5.20 της Ενότητας Α5.9 επιδείξαμε τη δυνατότητα της μεθόδου της μεταβολής των παραμέτρων στην επίλυση μιας μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως (συγκεκριμένα της διαφορικής εξισώσεως (5.9.40)) με γενικό (αυθαίρετο) δεξιό μέλος  $g(x)$ .

Εδώ θα εφαρμόσουμε και πάλι τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων στην περίπτωση της διαφορικής εξισώσεως (6.2.1) των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων του παρόντος μηχανικού συστήματος. Για εκπαιδευτικούς κυρίως λόγους θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: (α) εκείνη των ταλαντώσεων χωρίς απόσβεση (με  $\xi = 0$ ) και (β) εκείνη με ασθενή (ή υποκρίσιμη) απόσβεση (με  $0 < \xi < 1$ ). Αυτή είναι και η πιο συνηθισμένη περίπτωση σε προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού. Φυσικά η ίδια μέθοδος της μεταβολής των παραμέτρων είναι επίσης ανάλογα εφαρμόσιμη και στις περιπτώσεις: (γ) της κρίσιμης αποσβέσεως (με  $\xi = 1$ ) και (δ) της ισχυρής (ή υπερκρίσιμης) αποσβέσεως (με  $\xi > 1$ ). Για οικονομία χώρου δε θα αναφερθούμε εδώ στις δύο τελευταίες περιπτώσεις: αυτές με  $\xi \geq 1$ . (Ουσιαστικά δεν έχουμε καν ταλαντώσεις στις δύο αυτές περιπτώσεις!)

Πρέπει επίσης να σημειώσουμε στο σημείο αυτό ότι μια δεύτερη μέθοδος για την επίλυση της γενικής διαφορικής εξισώσεως (6.2.1) πέρα από τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων είναι η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace. Τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace θα την εκθέσουμε στο Κεφάλαιο Α10 και θα την εφαρμόσουμε στην πιο πάνω διαφορική εξίσωση (6.2.1) στις Ενότητες Α11.6: για εξαναγκασμένες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση (με  $\xi = 0$ ) και Α11.8: για εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με ασθενή (ή υποκρίσιμη) απόσβεση (με  $0 < \xi < 1$ ).

Πέρα από τη μη ομογενή διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως (6.2.1) διαθέτουμε συχνά και δύο αρχικές συνθήκες που τη συνοδεύουν. Παίρνοντας για αρχική χρονική στιγμή τη στιγμή  $t = 0$  (που μας διευκολύνει υπολογιστικά), έχουμε τις αρχικές συνθήκες (6.1.4), τις υπενθυμίζουμε

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0, \quad (6.2.2)$$

δηλαδή την αρχική θέση  $u_0$  και την αρχική ταχύτητα  $v_0$  της μάζας  $m$ .

### Α6.2.2. Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση

Η πρώτη περίπτωση που εξετάζουμε είναι η απλή περίπτωση των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων χωρίς απόσβεση (χωρίς αποσβεστήρα: με λόγο αποσβέσεως  $\xi = 0$ ). Στην ιδεατή αυτή περίπτωση η μη ομογενής διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως (6.2.1) απλοποιείται στη μορφή

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = p^*(t) \quad \text{με} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{και} \quad p^*(t) = \frac{p(t)}{m}. \quad (6.2.3)$$

Γνωρίζουμε ήδη από την Εφαρμογή Α5.5 στην Παράγραφο Α5.5.3 τη γενική λύση  $u_h(t)$  της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξισώσεως. Αυτή έχει την καθαρά τριγωνομετρική μορφή (5.5.85):

$$u_h(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t, \quad (6.2.4)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τα σύμβολα  $C_1$  και  $C_2$  για τις δύο αυθαίρετες σταθερές (αντί  $D_1$  και  $D_2$ ).

Στη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων, που την αναπτύξαμε στην Ενότητα Α5.9 του Κεφαλαίου Α5 και θα τη χρησιμοποιήσουμε εδώ, απλά υποτίθεται ότι οι παράμετροι (οι σταθερές)  $C_1$  και  $C_2$  αντικαθίστανται από συναρτήσεις  $C_1(t)$  και  $C_2(t)$  αντίστοιχα. Αυτό γίνεται για τον προσδιορισμό της γενικής λύσεως  $u_g(t)$  της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (6.2.3) αντί για τη λύση  $u_h(t)$  της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (με  $p^*(t) \equiv 0$ ). Έτσι υποθέτουμε ότι

$$u_g(t) = C_1(t) \cos \omega_0 t + C_2(t) \sin \omega_0 t. \quad (6.2.5)$$

Παραγωγίζοντας βρίσκουμε

$$\dot{u}_g(t) = -\omega_0 C_1(t) \sin \omega_0 t + \omega_0 C_2(t) \cos \omega_0 t \quad (6.2.6)$$

υπό τον περιορισμό

$$\dot{C}_1(t) \cos \omega_0 t + \dot{C}_2(t) \sin \omega_0 t = 0. \quad (6.2.7)$$

Τον περιορισμό αυτό το χρησιμοποιούμε γενικά στη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων για την απλούστευση του τύπου για την πρώτη παράγωγο της άγνωστης συναρτήσεως, εδώ της  $u(t)$ . Με μία ακόμη παραγωγή, αυτήν τη φορά της πρώτης παραγωγού  $\dot{u}_g(t)$ , προσδιορίζουμε και τη δεύτερη παράγωγο  $\ddot{u}_g(t)$  της ζητούμενης λύσεως  $u_g(t)$ :

$$\ddot{u}_g(t) = -\omega_0^2 [C_1(t) \cos \omega_0 t + C_2(t) \sin \omega_0 t] + \omega_0 [-\dot{C}_1(t) \sin \omega_0 t + \dot{C}_2(t) \cos \omega_0 t]. \quad (6.2.8)$$

Τώρα απλά αντικαθιστούμε τη γενική λύση  $u_g(t)$  και τις δύο πρώτες παραγωγούς της  $\dot{u}_g(t)$  και  $\ddot{u}_g(t)$  από τις τρεις σχέσεις (6.2.5), (6.2.6) και (6.2.8) αντίστοιχα στη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (6.2.3). Μετά τις απλοποιήσεις προκύπτει εύκολα ότι

$$-\dot{C}_1(t) \sin \omega_0 t + \dot{C}_2(t) \cos \omega_0 t = \frac{1}{\omega_0} p^*(t). \quad (6.2.9)$$

Οι εξισώσεις (6.2.7) και (6.2.9) συνιστούν σύστημα δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων ως προς τις δύο άγνωστες παραγωγούς  $\dot{C}_1(t)$  και  $\dot{C}_2(t)$ . Η ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος αυτού είναι  $\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t = 1$ . Το λύνουμε εύκολα με τον κανόνα του Cramer βρίσκοντας ότι

$$\dot{C}_1(t) = \frac{1}{\omega_0} \begin{vmatrix} 0 & \sin \omega_0 t \\ p^*(t) & \cos \omega_0 t \end{vmatrix} = -\frac{1}{\omega_0} p^*(t) \sin \omega_0 t, \quad (6.2.10)$$

$$\dot{C}_2(t) = \frac{1}{\omega_0} \begin{vmatrix} \cos \omega_0 t & 0 \\ -\sin \omega_0 t & p^*(t) \end{vmatrix} = \frac{1}{\omega_0} p^*(t) \cos \omega_0 t. \quad (6.2.11)$$

Το επόμενο βήμα μας είναι η ολοκλήρωση των δύο αυτών παραγωγών προς εύρεση των ίδιων των άγνωστων συναρτήσεων  $C_1(t)$  και  $C_2(t)$  που επιδιώκουμε να βρούμε. Δεν πρέπει όμως να λησμονήσουμε τις δύο σταθερές ολοκληρώσεως, ας τις ονομάσουμε  $D_1$  και  $D_2$ . Προκύπτει αμέσως ότι

$$C_1(t) = -\frac{1}{\omega_0} \int_0^t p^*(\tau) \sin \omega_0 \tau \, d\tau + D_1, \quad (6.2.12)$$

$$C_2(t) = \frac{1}{\omega_0} \int_0^t p^*(\tau) \cos \omega_0 \tau \, d\tau + D_2 \quad (6.2.13)$$

με κάτω όριο ολοκληρώσεως το  $\tau = 0$ , όπως ταιριάζει και στις αρχικές συνθήκες (6.2.2). Δεν πρέπει επίσης να λησμονήσουμε να αναφέρουμε ρητά ότι η συνάρτηση της φορτίσεως  $p(t)$  πρέπει να είναι κατάλληλη, ώστε να υπάρχουν τα ολοκληρώματα των δύο πιο πάνω τύπων. Το να είναι τμηματικά συνεχής συνάρτηση η  $p(t)$  αρκεί για το σκοπό αυτό: επαρκής, αλλ' όχι και αναγκαία συνθήκη.

Σχεδόν έχουμε τελειώσει! Τώρα αντικαθιστούμε απλά τις δύο αυτές συναρτήσεις  $C_1(t)$  και  $C_2(t)$  στη γενική λύση (6.2.5) της μεθόδου της μεταβολής των παραμέτρων. Προκύπτει αμέσως ότι

$$u_g(t) = \left[ -\frac{1}{\omega_0} \int_0^t p^*(\tau) \sin \omega_0 \tau \, d\tau + D_1 \right] \cos \omega_0 t + \left[ \frac{1}{\omega_0} \int_0^t p^*(\tau) \cos \omega_0 \tau \, d\tau + D_2 \right] \sin \omega_0 t. \quad (6.2.14)$$

Δε μας απομένει τώρα παρά να αναδιατάξουμε τους όρους στη γενική αυτή λύση  $u_g(t)$  και να συμπυκνώσουμε, να ενώσουμε τα δύο ολοκληρώματα σε ένα. Με τον τρόπο αυτό παίρνουμε

$$u_g(t) = D_1 \cos \omega_0 t + D_2 \sin \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0} \int_0^t p^*(\tau) (\sin \omega_0 t \cos \omega_0 \tau - \cos \omega_0 t \sin \omega_0 \tau) d\tau. \quad (6.2.15)$$

Λαμβάνουμε τώρα υπόψη μας τον πολύ γνωστό τριγωνομετρικό τύπο για το ημίτονο διαφοράς

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \quad (6.2.16)$$

Επίσης τον ορισμό  $p^*(t) := p(t)/m$  της ανηγμένης (στη μάζα  $m$ ) φορτίσεως  $p^*(t)$ . Με τον τρόπο αυτό η γενική λύση  $u_g(t)$  στον παραπάνω τύπο (6.2.15) παίρνει την τελική της μορφή

$$u_g(t) = D_1 \cos \omega_0 t + D_2 \sin \omega_0 t + \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t p(\tau) \sin[\omega_0(t - \tau)] d\tau. \quad (6.2.17)$$

Σημειώνουμε ότι οι αυθαίρετες σταθερές  $D_1$  και  $D_2$  είναι απόλυτα αναγκαίες, ώστε να μιλάμε για γενική λύση. Δεν έχουμε το δικαίωμα να τις αμελήσουμε. Οι δύο όροι  $D_1 \cos \omega_0 t$  και  $D_2 \sin \omega_0 t$  συνιστούν τη γενική λύση  $u_h(t)$  της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης: αυτής που ισχύει σε ελεύθερες ταλαντώσεις του μηχανικού μας συστήματος (με  $p(t) \equiv 0$ ). Αντίθετα ο τρίτος όρος, ο ολοκληρωτικός όρος  $\frac{1}{m\omega_0} \int_0^t p(\tau) \sin[\omega_0(t - \tau)] d\tau$  αποτελεί μια μερική λύση  $u_p(t)$  της παρούσας μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης για εξαναγκασμένες ταλαντώσεις (με  $p(t) \neq 0$ ).

Είναι επίσης προφανές ότι με δεδομένες αρχικές συνθήκες, π.χ. τις αρχικές συνθήκες (6.2.2), μπορούμε να προσδιορίσουμε τις δύο σταθερές  $D_1$  και  $D_2$  στη γενική λύση  $u_g(t)$  στη σχέση (6.2.17). Θέτοντας πρώτα  $t = 0$  στη λύση αυτή  $u_g(t)$  και παρατηρώντας ότι τόσο ο ημιτονικός όρος όσο και ο ολοκληρωτικός όρος μηδενίζονται (και οι δύο) για  $t = 0$ , διαπιστώνουμε αμέσως από την πρώτη αρχική συνθήκη  $u(0) = u_0$  ότι  $D_1 = u_0$ . Μετά από παραγωγή της γενικής λύσεως  $u_g(t)$  με ανάλογο τρόπο διαπιστώνουμε από τη δεύτερη αρχική συνθήκη  $\dot{u}(0) = v_0$  ότι  $D_2 = v_0/\omega_0$ .

Έτσι η γενική λύση (6.2.17) της διαφορικής εξίσωσής μας (6.2.3) μετατρέπεται στη λύση

$$u_\mu(t) = u_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t p(\tau) \sin[\omega_0(t - \tau)] d\tau \quad (6.2.18)$$

του προβλήματος αρχικών τιμών (6.2.3) και (6.2.2). Στην ίδια ακριβώς λύση (6.2.18) θα καταλήξουμε και στην Ενότητα Α11.6 του Κεφαλαίου Α11: σχέση (11.6.11), εκεί όμως με μια εντελώς διαφορετική μέθοδο: με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Εκεί θα τονίσουμε επίσης ότι ο τύπος (6.2.18) καλείται **ολοκληρωτικός τύπος του Duhamel** και είναι ιδιαίτερης σπουδαιότητας για τον Πολιτικό Μηχανικό στις Ταλαντώσεις. (Τούτο ισχύει και για τις ταλαντώσεις ολόκληρων κατασκευών από σεισμικά φαινόμενα, οι οποίες μελετώνται στη Δυναμική των Κατασκευών.)

Ας συνεχίσουμε όμως τώρα με την περίπτωση της ασθενούς (ή υποκρίσιμης) αποσβέσεως.

### Α6.2.3. Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με ασθενή απόσβεση

Τίποτε το ουσιαστικό δεν αλλάζει. Απλά έχουμε τώρα τη γενικότερη μη ομογενή διαφορική εξίσωση (6.2.1) με λόγο αποσβέσεως  $\xi$  με  $0 < \xi < 1$ . Η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (για ελεύθερες ταλαντώσεις) μας είναι και πάλι γνωστή και έχει τη μορφή (6.1.16), που τη βρήκαμε στην Παράγραφο Α6.1.2. Την επαναλαμβάνουμε και εδώ

$$u_h(t) = C_1 e^{\mu_1 t} + C_2 e^{\mu_2 t} \quad \text{με } \mu_{1,2} = -\xi \omega_0 \pm i \omega_D, \quad \text{όπου } \omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \quad \text{με } 0 < \xi < 1 \quad (6.2.19)$$

έχοντας λάβει υπόψη και τις σχέσεις (6.1.14) και (6.1.15) για τις ποσότητες  $\mu_{1,2}$  και  $\omega_D$  αντίστοιχα.

Με τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων απλά υποθέτουμε τη γενική λύση  $u_g(t)$  της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (6.2.1) στη μορφή

$$u_g(t) = C_1(t) e^{\mu_1 t} + C_2(t) e^{\mu_2 t}. \quad (6.2.20)$$

Δηλαδή θεωρούμε συναρτήσεις  $C_1(t)$  και  $C_2(t)$  στις θέσεις των σταθερών  $C_1$  και  $C_2$  της λύσεως  $u_h(t)$ .

Παραγωγίζουμε τώρα τη γενική αυτή λύση  $u_g(t)$  και βρίσκουμε

$$\dot{u}_g(t) = C_1(t)\mu_1 e^{\mu_1 t} + C_2(t)\mu_2 e^{\mu_2 t}. \quad (6.2.21)$$

Τούτο ισχύει βέβαια υπό τον οικείο μας πλέον σχετικό περιορισμό, στην παρούσα περίπτωση

$$\dot{C}_1(t)e^{\mu_1 t} + \dot{C}_2(t)e^{\mu_2 t} = 0. \quad (6.2.22)$$

Χρειαζόμαστε βέβαια και τη δεύτερη παράγωγο  $\ddot{u}_g(t)$ , που την προσδιορίζουμε με μία ακόμη παραγωγή. (Αυτό ακριβώς κάναμε και στην προηγούμενη παράγραφο, εκεί για τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση.) Αντικαθιστούμε τώρα τη συνάρτηση  $u_g(t)$  και τις δύο πρώτες παραγωγούς της  $\dot{u}_g(t)$  και  $\ddot{u}_g(t)$  στη μη ομογενή διαφορική εξίσωση (6.2.1) στις παρούσες εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με ασθενή (ή υποκρισίμη) απόσβεση. Έτσι προκύπτει τελικά η εξίσωση

$$\dot{C}_1(t)\mu_1 e^{\mu_1 t} + \dot{C}_2(t)\mu_2 e^{\mu_2 t} = p^*(t), \quad (6.2.23)$$

αφού και οι δύο συναρτήσεις  $u_1(t) = e^{\mu_1 t}$  και  $u_2(t) = e^{\mu_2 t}$  είναι λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (για ελεύθερες ταλαντώσεις: με  $p(t) \equiv 0$ ).

Λύνοντας τώρα το σύστημα των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (6.2.22) και (6.2.23) με τον κανόνα του Cramer, προσδιορίζουμε τις δύο παραγωγούς  $\dot{C}_1(t)$  και  $\dot{C}_2(t)$ . Αυτές έχουν τις μορφές

$$\dot{C}_1(t) = \frac{p^*(t)}{\mu_1 - \mu_2} e^{-\mu_1 t} = \frac{p(t)}{2im\omega_D} e^{-\mu_1 t} \quad \text{και} \quad \dot{C}_2(t) = -\frac{p^*(t)}{\mu_1 - \mu_2} e^{-\mu_2 t} = -\frac{p(t)}{2im\omega_D} e^{-\mu_2 t}, \quad (6.2.24)$$

αφού  $p^*(t) := p(t)/m$  και επίσης  $\mu_1 - \mu_2 = 2i\omega_D$ , όπως παρατηρούμε από τις σχέσεις (6.2.19).

Ολοκληρώνοντας τώρα εύκολα τις δύο αυτές παραγωγούς  $\dot{C}_1(t)$  και  $\dot{C}_2(t)$ , προσδιορίζουμε και τις δύο άγνωστες συναρτήσεις μας  $C_1(t)$  και  $C_2(t)$  στις μορφές

$$C_1(t) = \frac{1}{2im\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\mu_1 \tau} d\tau + D_1 \quad \text{και} \quad C_2(t) = -\frac{1}{2im\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\mu_2 \tau} d\tau + D_2 \quad (6.2.25)$$

με τα σύμβολα  $D_1$  και  $D_2$  να δηλώνουν και εδώ δύο αυθαίρετες σταθερές ολοκληρώσεως.

Απομένει η αντικατάσταση των συναρτήσεων αυτών  $C_1(t)$  και  $C_2(t)$  από τις σχέσεις (6.2.25) στη γενική λύση (6.2.20). Μετά τη σύμπτυξη των δύο ολοκληρωμάτων προκύπτει η γενική λύση

$$u_g(t) = D_1 e^{\mu_1 t} + D_2 e^{\mu_2 t} + \frac{1}{2im\omega_D} \int_0^t p(\tau) [e^{\mu_1(t-\tau)} - e^{\mu_2(t-\tau)}] d\tau. \quad (6.2.26)$$

Η γενική αυτή λύση  $u_g(t)$  με τη χρήση (α) των σχέσεων (6.2.19) για τις σταθερές  $\mu_1$  και  $\mu_2$ , (β) των τύπων του Euler καθώς και (γ) του τύπου (6.2.16) μπορεί να γραφεί και στην πραγματική μορφή

$$u_g(t) = e^{-\xi\omega_0 t} (D_1^* \cos \omega_D t + D_2^* \sin \omega_D t) + \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] d\tau \quad (6.2.27)$$

με τη χρήση δύο νέων αυθαίρετων σταθερών  $D_1^*$  και  $D_2^*$  αντί για τις αρχικές σταθερές  $D_1$  και  $D_2$ .

Προφανώς για εξαναγκασμένες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση (με  $\xi = 0$ ) η λύση αυτή (6.2.27) απλοποιείται στη λύση (6.2.17) της προηγούμενης παραγράφου. Επίσης για μηδενικές αρχικές συνθήκες ( $u(0) = 0$  και  $\dot{u}(0) = 0$ ) προκύπτει  $D_1^* = D_2^* = 0$  και η ίδια λύση απλοποιείται στη μορφή

$$u_\mu(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] d\tau \quad (6.2.28)$$

ενός **ολοκληρώματος Duhamel**. Μιλάμε και τώρα, όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, για **ολοκληρωτικό τύπο του Duhamel**, όταν αναφερόμαστε στη λύση  $u_g(t)$ . Τη μερική λύση (6.2.28) θα την προσδιορίσουμε και στην Ενότητα A11.8, σχέση (11.8.11), αλλά εκεί με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Τονίζουμε και πάλι τη σπουδαιότητα του τύπου του Duhamel (6.2.27) στις Ταλαντώσεις και στη Δυναμική των Κατασκευών, π.χ. στη μελέτη σεισμικών αποκρίσεων.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ *A7*

## ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε δύο εφαρμογές των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων στη Μηχανική των Υλικών. Η πρώτη αφορά σε δοκό-στυλό με αρχικό βέλος κάμψεως  $v_0(x)$  υπό θλιπτικό αξονικό φορτίο  $P$ . Αυτή θα την επιλύσουμε με τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης και στη συνέχεια τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών κάνοντας και πολύ μικρή εισαγωγή στο λυγισμό. Η δεύτερη αφορά σε συνήθη δοκό υπό αυθαίρετη κατανεμημένη κάθετη φόρτιση  $p(x)$ . Σ' αυτή θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων αντί για τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών, η οποία δεν είναι εφαρμόσιμη για αυθαίρετες συναρτήσεις  $p(x)$ . Φυσικά γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές, ομογενείς και μη ομογενείς (όπως εδώ) παρουσιάζονται και σε άλλα ενδιαφέροντα προβλήματα της Μηχανικής των Υλικών.

### Α7.1. ΔΟΚΟΣ-ΣΤΥΛΟΣ ΜΕ ΑΡΧΙΚΟ ΒΕΛΟΣ ΚΑΜΨΕΩΣ ΥΠΟ ΘΛΙΠΤΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ

#### Α7.1.1. Το πρόβλημα συνοριακών τιμών

Στο παρόν πρόβλημα του Πολιτικού Μηχανικού στη Μηχανική των Υλικών θεωρούμε δοκό μήκους  $L$  και δυσκαμψίας  $EI$ , αλλ' αρχικά όχι ευθύγραμμη: σχεδόν ευθύγραμμη, με αρχική καμπυλότητα, με αρχικό «βέλος κάμψεως» το

$$v_0(x) = a \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (7.1.1)$$

Η δοκός αυτή θεωρείται αμφιέρειστη (ή, σχεδόν ισοδύναμα, αμφιαρθρωτή, αρθρωμένη και στα δύο άκρα της  $x = 0$  και  $x = L$ ) και η ποσότητα  $a$  γνωστή μη μηδενική σταθερά. Έχουμε λοιπόν αρχικό βέλος κάμψεως  $v_0(x)$  κατά μήκος της παρούσας αμφιέρειστης δοκού, άρα και αρχική καμπυλότητα της. Δηλαδή η δοκός αυτή δεν είναι τελείως ευθύγραμμη, ίσως από κάπως κακή κατασκευή της ή από σκεύρωμα του ξύλου, αν την υποθέσουμε ξύλινη. Η ίδια δοκός καταπονείται από θλιπτικό αξονικό φορτίο  $P$  καθ' όλο το μήκος της. Αυτό προκαλεί πρόσθετο βέλος κάμψεως  $v_1(x)$  στη δοκό πέρα από το αρχικό βέλος κάμψεως  $v_0(x)$ . Έτσι το συνολικό βέλος κάμψεως της δοκού θα είναι

$$v(x) = v_0(x) + v_1(x). \quad (7.1.2)$$

Πρόκειται για ένα κλασικό πρόβλημα Μηχανικής των Υλικών και Ελαστικής Ευστάθειας. Επιλύεται π.χ. στο γνωστό σύγγραμμα των Timoshenko, S. P. and Gere, J. M. (1961), *Theory of Elastic Stability* (Θεωρία Ελαστικής Ευστάθειας). McGraw-Hill, New York, 2η έκδοση, 1961 (1η έκδοση το 1936) στην Ενότητα 1.12. Για την επίλυσή του θα χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή μας διαφορική εξίσωση της κάμψεως δοκού (2.1.32)

$$EIv_1''(x) = M(x) \quad (7.1.3)$$

με  $M(x)$  την καμπτική ροπή (ή ροπή κάμψεως). Εδώ όμως διαπιστώνεται γεωμετρικά ότι, αφού το βέλος κάμψεως είναι συνολικά  $v(x) = v_0(x) + v_1(x)$ , έτσι και η καμπτική ροπή  $M(x)$  θα είναι

$$M(x) = -Pv(x) = -P[v_0(x) + v_1(x)] = -Pv_0(x) - Pv_1(x) = -Pv_1(x) - Pv_0(x). \quad (7.1.4)$$

Αντίθετα το αρχικό βέλος κάμψεως  $v_0(x)$  της παρούσας δοκού-στύλου δεν επηρεάζει το αριστερό μέλος της διαφορικής εξίσωσης (7.1.3), γιατί θεωρείται ότι δεν προκαλεί τάσεις στη δοκό-στύλο.

Παίρνουμε τώρα υπόψη μας την έκφραση (7.1.4) της καμπτικής ροπής  $M(x)$  καθώς και την υπόθεση (7.1.1) που έχουμε κάνει για το αρχικό βέλος κάμψεως  $v_0(x)$  αυτής της δοκού-στύλου. Έτσι η διαφορική εξίσωση (7.1.3) της παρούσας δοκού-στύλου:  $Elv_1''(x) = M(x)$  παίρνει τη μορφή

$$Elv_1''(x) = -Pv_1(x) - Pv_0(x) = -Pv_1(x) - Pa \sin \frac{\pi x}{L}, \text{ ισοδύναμα } Elv_1''(x) + Pv_1(x) = -Pa \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (7.1.5)$$

Μας διευκολύνει μάλιστα η απλοποίησή της με διαίρεσή της δια  $El$  στη μορφή

$$v_1''(x) + k^2 v_1(x) = -ak^2 \sin \frac{\pi x}{L}, \text{ όπου } k = \sqrt{\frac{P}{El}}. \quad (7.1.6)$$

Το  $k$  είναι ένα κλασικό βοηθητικό σύμβολο σε προβλήματα δοκών-στύλων και προβλήματα λυγισμού. Η διαφορική αυτή εξίσωση είναι συνήθης, δευτέρας τάξεως, πρώτου βαθμού, γραμμική, με σταθερούς συντελεστές και μη ομογενής εξαιτίας του αρχικού βέλους κάμψεως στο δεξιό μέλος.

Στο πρόβλημα αυτό θλιπτικής αξονικής φορτίσεως  $P$  κατά μήκος της παρούσας δοκού-στύλου πέρα από τη διαφορική εξίσωση (7.1.6) όπου καταλήξαμε έχουμε και τις δύο συνοριακές συνθήκες

$$v(0) = 0 \quad \text{και} \quad v(L) = 0 \quad (7.1.7)$$

στα δύο άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  της δοκού-στύλου την οποία εξετάζουμε. Επειδή  $v(x) = v_0(x) + v_1(x)$  από τη σχέση (7.1.2) και επίσης  $v_0(0) = 0$  και  $v_0(L) = 0$ , όπως οφείλει να συμβαίνει και συνάγεται από τη σχέση (7.1.1), αυτές οι δύο αρχικές συνθήκες (7.1.7) γράφονται και στην τελική τους μορφή

$$v_1(0) = 0 \quad \text{και} \quad v_1(L) = 0. \quad (7.1.8)$$

Δηλαδή, για να συνοψίσουμε, στο παρόν πρόβλημα δοκού-στύλου υπό θλιπτική αξονική φόρτιση  $P$  έχουμε καταλήξει σε ένα αρκετά απλό πρόβλημα συνοριακών τιμών. Τούτο αποτελείται από τη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (7.1.6) και τις δύο συνοριακές συνθήκες (7.1.8).

#### **A7.1.2. Επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών**

Θα λύσουμε το παραπάνω ενδιαφέρον πρόβλημα συνοριακών τιμών με τα εξής πέντε βήματα:

**Βήμα 1:** Θα προσδιορίσουμε τη γενική λύση  $v_{1h}(x)$  της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$v_1''(x) + k^2 v_1(x) = 0, \quad (7.1.9)$$

η οποία αντιστοιχεί στη μη ομογενή διαφορική εξίσωση (7.1.6). **Βήμα 2:** Θα προσδιορίσουμε στη συνέχεια μια μερική λύση  $v_{1p}(x)$  της ίδιας μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (7.1.6).

**Βήμα 3:** Θα προσθέσουμε αυτές τις δύο λύσεις  $v_{1h}(x)$  και  $v_{1p}(x)$  και θα βρούμε τη γενική λύση

$$v_{1g}(x) = v_{1h}(x) + v_{1p}(x) \quad (7.1.10)$$

της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (7.1.6). **Βήμα 4:** Στη γενική αυτή λύση  $v_{1g}(x)$  θα λάβουμε υπόψη μας τις δύο συνοριακές συνθήκες (7.1.8) και θα οδηγηθούμε έτσι στη λύση  $v_1(x)$  του παρόντος προβλήματος συνοριακών τιμών. **Βήμα 5:** Τελικά, χρησιμοποιώντας τη σχέση (7.1.2), δηλαδή προσθέτοντας και το αρχικό βέλος κάμψεως  $v_0(x) = a \sin \frac{\pi x}{L}$ , θα έχουμε βρει το συνολικό

βέλος κάμψεως  $v(x) = v_0(x) + v_1(x)$ . Αυτό είναι το σχέδιό μας για την επίλυση του προβλήματος δοκού-στύλου που μελετάμε. Έχουμε κιάλας διαθέσιμες όλες τις απαιτούμενες γνώσεις από το προπροηγούμενο Κεφάλαιο Α5. Δε μας λείπει απολύτως τίποτε. Ας προχωρήσουμε λοιπόν ...

• **Βήμα 1:** Η γενική λύση  $v_{1h}(x)$  της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (7.1.9) δευτέρας τάξεως και με σταθερούς συντελεστές προκύπτει άμεσα με τη γνωστή μας μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως της Ενότητας Α5.5 του Κεφαλαίου Α5. Έτσι, θέτοντας  $v_{10}(x) = e^{\mu x}$ , παίρνουμε

$$v_1''(x) + k^2 v_1(x) = 0 \implies \mu^2 e^{\mu x} + k^2 e^{\mu x} = 0 \implies (\mu^2 + k^2)e^{\mu x} = 0 \implies \mu^2 + k^2 = 0. \quad (7.1.11)$$

Καταλήξαμε λοιπόν στη δευτεροβάθμια χαρακτηριστική εξίσωση

$$p_2(\mu) := \mu^2 + k^2 = 0 \quad \text{με δύο φανταστικές ρίζες: τις ρίζες} \quad \mu_{1,2} = \pm \sqrt{-k^2} = \pm ik. \quad (7.1.12)$$

Άρα η γενική λύση  $v_{1h}(x)$  της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (7.1.9) θα είναι η ακόλουθη:

$$v_{1h}(x) = C_{10} e^{ikx} + C_{20} e^{-ikx} \quad \text{με } C_{10} \text{ και } C_{20} \text{ δύο αυθαίρετες σταθερές.} \quad (7.1.13)$$

Με τη χρήση μάλιστα των γνωστών μας τύπων του Euler (1.5.3) και (1.5.4.):  $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$ , η λύση αυτή  $v_{1h}(x)$  μπορεί εύκολα να μετατραπεί στην ισοδύναμη τριγωνομετρική μορφή της

$$v_{1h}(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx \quad \text{με } C_1 \text{ και } C_2 \text{ επίσης δύο αυθαίρετες σταθερές.} \quad (7.1.14)$$

Αυτή η μορφή είναι απαλλαγμένη από τη φανταστική μονάδα  $i = \sqrt{-1}$ , είναι καθαρά πραγματική.

• **Βήμα 2:** Το βήμα αυτό αφορά στον υπολογισμό μιας οποιασδήποτε μερικής λύσεως  $v_{1p}(x)$  της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (7.1.6). Έχει περάσει λίγη ώρα! Ας την ξαναθυμηθούμε ...

$$v_1''(x) + k^2 v_1(x) = -ak^2 \sin \frac{\pi x}{L}, \quad \text{όπου} \quad k = \sqrt{\frac{P}{EI}}. \quad (7.1.15)$$

Για την εύρεση μιας μερικής λύσεως  $v_{1p}(x)$  θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών της Ενότητας Α5.8. (Δε μας συμφέρει εδώ η χρήση της μεθόδου της μεταβολής των παραμέτρων της Ενότητας Α5.9, επειδή το δεξιό μέλος είναι μια απλή τριγωνομετρική συνάρτηση.)

Καταρχήν σαν μερική λύση  $v_{1p}(x)$  θα οφείλαμε να δοκιμάσουμε λύση της μορφής

$$v_{1p}(x) = A \sin \frac{\pi x}{L} + B \cos \frac{\pi x}{L} \quad (\text{με δύο προσδιοριστέους συντελεστές: τα } A \text{ και } B) \quad (7.1.16)$$

και με ημιτονικό και με συνημιτονικό όρο. Αλλ' εδώ στη διαφορική εξίσωση (7.1.15) λείπει η πρώτη παράγωγος  $v_1'(x)$  στο αριστερό μέλος της. Όπως εξηγήσαμε όμως στο Παράδειγμα Α5.15 και στο πρώτο μέρος της Εφαρμογής Α5.10 στην Παράγραφο Α5.8.5 του Κεφαλαίου Α5, εδώ που λείπει η πρώτη παράγωγος  $v_1'(x)$  δεν απαιτείται να πάρουμε και συνημιτονικό όρο στη λύση  $v_{1p}(x)$  που δοκιμάζουμε. Ο ημιτονικός όρος είναι αρκετός! Άρα υποθέτουμε δοκιμαστική λύση της μορφής

$$v_{1p}(x) = A \sin \frac{\pi x}{L} \implies v_{1p}'(x) = A \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L} \quad (\text{με έναν προσδιοριστέο συντελεστή: το } A). \quad (7.1.17)$$

Τώρα απλά αντικαθιστούμε τη δοκιμαστική λύση  $v_{1p}(x)$  και τη δεύτερη παράγωγό της  $v_{1p}''(x)$  στη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωσή μας (7.1.15). Έτσι παίρνουμε

$$-A \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L} + k^2 A \sin \frac{\pi x}{L} = -ak^2 \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (7.1.18)$$

Για να ισχύει όμως εκ ταυτότητος (για κάθε  $x$  στη δοκό-στύλο) η σχέση αυτή, θα πρέπει βέβαια να μηδενίζεται ο συνολικός συντελεστής της ημιτονικής συναρτήσεως  $\sin \frac{\pi x}{L}$ . Έτσι προκύπτει ότι

$$-A \frac{\pi^2}{L^2} + k^2 A = -ak^2 \implies (\pi^2 - k^2 L^2)A = ak^2 L^2 \implies A = \frac{ak^2 L^2}{\pi^2 - k^2 L^2}. \quad (7.1.19)$$

Φυσικά υποτίθεται πως ο παρονομαστής  $\pi^2 - k^2L^2$  είναι διάφορος του μηδενός:  $\pi^2 - k^2L^2 \neq 0$ . Εμείς στην παρούσα εφαρμογή τον υποθέτουμε καλύτερα θετικό. Δηλαδή, παίρνοντας υπόψη και τον ορισμό της σταθεράς  $k = \sqrt{P/(EI)}$  στη δεύτερη σχέση (7.1.6) ή (7.1.15), υποθέτουμε ότι

$$\pi^2 - k^2L^2 > 0, \text{ οπότε } \pi^2 - \frac{P}{EI}L^2 > 0 \text{ και τελικά } P < \frac{\pi^2 EI}{L^2}. \quad (7.1.20)$$

Συγκεκριμένα υποθέτουμε το θλιπτικό αξονικό φορτίο  $P$  να μην ξεπερνάει την τιμή αυτή  $\pi^2 EI/L^2$ .

Κι έτσι η μερική (ή ειδική) λύση μας (7.1.17) ισχύει με το συντελεστή της  $A$  να είναι πλέον προσδιορισμένος από την τελευταία σχέση (7.1.19), όχι προσδιοριστέος τώρα. (Προσδιοριστέος ήταν πριν, προσδιορισμένος είναι τώρα!) Επομένως με το συντελεστή  $A$  να δίνεται από την τελευταία σχέση (7.1.19) η μερική λύση  $v_{1p}(x)$  στη σχέση (7.1.17) παίρνει την τελική της μορφή

$$v_{1p}(x) = \frac{ak^2L^2}{\pi^2 - k^2L^2} \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (7.1.21)$$

• **Βήμα 3:** Τώρα προσθέτουμε απλά τις δύο λύσεις  $v_{1h}(x)$  (γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης) και  $v_{1p}(x)$  (μερική λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης), που ήδη προσδιορίσαμε στις σχέσεις (7.1.14) και (7.1.21) αντίστοιχα. Προσδιορίζουμε έτσι με βάση τον τύπο (7.1.10) τη γενική λύση  $v_{1g}(x)$  της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (7.1.6) ή (7.1.15). Να τη:

$$v_{1g}(x) = v_{1h}(x) + v_{1p}(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + \frac{ak^2L^2}{\pi^2 - k^2L^2} \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (7.1.22)$$

• **Βήμα 4:** Τώρα πρέπει όμως να λάβουμε υπόψη και τις συνοριακές συνθήκες (7.1.8):  $v_1(0) = 0$  και  $v_1(L) = 0$  στην αμέσως πιο πάνω γενική λύση μας (7.1.22). Από την πρώτη συνθήκη παίρνουμε

$$v_1(0) = 0 \implies C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 + \frac{ak^2L^2}{\pi^2 - k^2L^2} \cdot 0 = 0, \text{ οπότε } C_1 = 0, \quad (7.1.23)$$

αφού  $\cos 0 = 1$  και  $\sin 0 = 0$ . Άρα η γενική λύση (7.1.22) παίρνει τώρα τη μερικότερη μορφή της

$$v_{1gp}(x) = C_2 \sin kx + \frac{ak^2L^2}{\pi^2 - k^2L^2} \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (7.1.24)$$

Στη λύση αυτή  $v_{1gp}(x)$  πρέπει τώρα να θέσουμε  $x = L$  και να λάβουμε υπόψη και τη δεύτερη συνοριακή συνθήκη  $v_1(L) = 0$  στην αμφιέριστη δοκό-στυλό. Δεν είναι δα και δύσκολο. Προκύπτει

$$v_1(L) = 0 \implies C_2 \sin kL + \frac{ak^2L^2}{\pi^2 - k^2L^2} \sin \pi = 0 \implies C_2 \sin kL = 0 \implies C_2 = 0, \quad (7.1.25)$$

αφού  $\sin \pi = 0$ . Όσο για τον όρο  $\sin kL$  από την πρώτη σχέση (7.1.20) (την υπόθεσή μας) προκύπτει ότι  $0 < kL < \pi$ , αφού  $kL < \pi$  και οι ποσότητες  $k$  και  $L$  είναι και οι δύο θετικές. Άρα  $\sin kL > 0$  και αναγκαστικά θα πρέπει να έχουμε  $C_2 = 0$ , ώστε να μηδενίζεται το γινόμενο  $C_2 \sin kL$ . Είναι πράγματι κάπως παράξενο, αλλ' έτυχε εδώ να μηδενισθούν και οι δύο αυθαίρετες σταθερές  $C_1$  και  $C_2$  και η λύση  $v_1(x)$  του παρόντος προβλήματος συνοριακών τιμών να ταυτίζεται με τη μερική (ή ειδική) λύση  $v_{1p}(x)$  της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (7.1.6) ή (7.1.15). Συνέβη κι αυτό! Έτσι με  $C_2 = 0$  η λύση  $v_{1gp}(x)$  της σχέσεως (7.1.24) παίρνει την τελική της μορφή  $v_1(x)$ :

$$v_1(x) = \frac{ak^2L^2}{\pi^2 - k^2L^2} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (7.1.26)$$

σαν λύση του παρόντος προβλήματος συνοριακών τιμών, το οποίο έχει βέβαια συγκεκριμένη λύση.

• **Βήμα 5:** Τέλος για το συνολικό βέλος κάμψεως  $v(x) = v_0(x) + v_1(x)$  με βάση την απλή γεωμετρική σχέση (7.1.2) θα έχουμε λόγω των σχέσεων (7.1.1) και (7.1.26)

$$v(x) = a \sin \frac{\pi x}{L} + \frac{ak^2L^2}{\pi^2 - k^2L^2} \sin \frac{\pi x}{L} = a \left( 1 + \frac{k^2L^2}{\pi^2 - k^2L^2} \right) \sin \frac{\pi x}{L} = a \frac{\pi^2}{\pi^2 - k^2L^2} \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (7.1.27)$$



Σημειώνουμε βέβαια ότι με βάση την υπόθεση (7.1.20) που κάναμε:  $\pi^2 - k^2 L^2 > 0$ , ο παρονομαστής στη λύση αυτή  $v(x)$ , στο συνολικό βέλος κάμψεως, είναι ένας θετικός αριθμός. Το ίδιο βέβαια ισχύει και στην προηγούμενη λύση  $v_1(x)$  στη σχέση (7.1.26), η οποία δεν περιελάμβανε όμως το αρχικό βέλος κάμψεως  $v_0(x) = a \sin \frac{\pi x}{L}$ . (Αυτό υποδηλώνει αρχική καμπυλότητα της δοκού-στύλου μας.)

### A7.1.3. Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού και ο τύπος του Euler

Λαμβάνουμε τώρα υπόψη τον ορισμό της βοηθητικής σταθεράς  $k$  στη δεύτερη σχέση (7.1.6)

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}}, \quad \text{οπότε} \quad k^2 = \frac{P}{EI}. \quad (7.1.28)$$

Παρατηρούμε μετά από την τελική λύση μας (7.1.27) ότι όταν ο παρονομαστής τείνει στο μηδέν:

$$\pi^2 - k^2 L^2 = \pi^2 - \frac{P}{EI} L^2 \rightarrow 0 \quad (\text{στο } 0^+ \text{ καλύτερα}) \quad \text{και ισοδύναμα} \quad P \rightarrow \frac{\pi^2 EI}{L^2}, \quad (7.1.29)$$

τότε το βέλος κάμψεως  $v(x)$  στη λύση (7.1.27) τείνει στο άπειρο και μάλιστα σε κάθε σημείο της δοκού-στύλου που εξετάζουμε. Άρα θα πρέπει το θλιπτικό αξονικό φορτίο  $P$  που καταπονεί τη δοκό-στύλο να διατηρείται μικρότερο μιας κρίσιμης τιμής του  $P_{cr}$ . Συγκεκριμένα πρέπει να ισχύει

$$P < P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}. \quad (7.1.30)$$

Τούτο είναι σαφές από τη δεύτερη σχέση (7.1.29).

Αλλιώς θα απειρισθεί το βέλος κάμψεως  $v(x)$  σε ολόκληρη τη δοκό-στύλο, κάτι που δεν είναι επιθυμητό και θα προκαλέσει βέβαια την αστοχία της εξαιτίας υπερβολικών τάσεων. Το ειδικό αυτό θλιπτικό αξονικό φορτίο  $P_{cr}$  καλείται **κρίσιμο φορτίο λυγισμού** και ο σχετικός τύπος (7.1.30) **τύπος του Euler**. Το φαινόμενο του λυγισμού ενός στύλου θα το μελετήσουμε εκτενώς στην Ενότητα Α9.1 του μεθεπόμενου Κεφαλαίου Α9. Εκεί η μελέτη του λυγισμού θα γίνει πολύ διαφορετικά από την παρούσα εφαρμογή σαν ένα πρόβλημα ιδιοτιμών, ενώ εδώ έγινε σαν μια οριακή διαδικασία για  $P \rightarrow P_{cr}$ . Το σίγουρο πάντως για τον Πολιτικό Μηχανικό είναι εδώ ότι η αρχικά καμπυλωμένη δοκός-στύλος του θα αστοχήσει καθώς  $P \rightarrow P_{cr}$ , πρακτικά λίγο πριν φθάσει την τιμή  $P_{cr}$  και το βέλος κάμψεως  $v(x)$  απειρισθεί. Αυτό θα οφείλεται στις υπερβολικές τάσεις που θα αναπτύσσονται καθώς  $P \rightarrow P_{cr}$  και στη διαρροή του υλικού της δοκού-στύλου ίσως μέχρι τη θραύση της στο τέλος.

Σημειώνουμε ότι ένα συγγενές κλασικό πρόβλημα για μη ιδεατή δοκό-στύλο αφορά στην περίπτωση που το θλιπτικό αξονικό φορτίο  $P$  ασκείται κάπως έκκεντρα, όχι ακριβώς στο κέντρο της διατομής. Για οικονομία χώρου θα παραλείψουμε την επίλυση αυτού του εξίσου κλασικού και ενδιαφέροντος συνάμα προβλήματος του Πολιτικού Μηχανικού. Και μια δεύτερη εφαρμογή τώρα ...

## A7.2. ΔΟΚΟΣ ΥΠΟ ΑΥΘΑΙΡΕΤΗ ΚΑΤΑΝΕΜΗΜΕΝΗ ΚΑΘΕΤΗ ΦΟΡΤΙΣΗ

### A7.2.1. Το πρόβλημα και η διαφορική εξίσωση

Στην προηγούμενη εφαρμογή επιλύσαμε μια μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξεως με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως της Ενότητας Α5.5 του προπροηγούμενου Κεφαλαίου Α5 και τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών της Ενότητας Α5.8. Στην παρούσα δεύτερη εφαρμογή θα εργασθούμε ανάλογα, αλλά τώρα με τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων της Ενότητας Α5.9 αντί για τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών της Ενότητας Α5.8.

Συγκεκριμένα θεωρούμε το πολύ απλό πρόβλημα μιας συνήθους δοκού μήκους  $L$  (με  $0 \leq x \leq L$ ) και δυσκαμψίας  $EI$  με γνωστές τις τέσσερις τιμές  $v_0$  (βέλος κάμψεως),  $\theta_0$  (γωνία στροφής ή απλά στροφή),  $M_0$  (καμπτική ροπή ή ροπή κάμψεως) και  $Q_0$  (τέμνουσα δύναμη ή διατμητική δύναμη) στο αριστερό άκρο της  $x = 0$ . Η δοκός καταπονείται από κατανεμημένη κάθετη φόρτιση  $p(x)$

(συνήθως σε kN/m) κατά μήκος της. Γνωρίζουμε ότι ισχύει η διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως

$$EIv''''(x) = p(x) \quad \text{και ισοδύναμα} \quad v''''(x) = \frac{p(x)}{EI}. \quad (7.2.1)$$

(Αυτή η βασική εξίσωση προσδιορίσθηκε στο Κεφάλαιο Α2, Παράγραφος Α2.1.5, εξίσωση (2.1.34). Τούτη τη μη ομογενή διαφορική εξίσωση της κάμψεως θα την επιλύσουμε εδώ για αυθαίρετη (όχι συγκεκριμένη, οποιαδήποτε, «τυχαία») κατανεμημένη κάθετη φόρτιση  $p(x)$  κατά μήκος της δοκού.

### Α7.2.2. Επίλυση της διαφορικής εξισώσεως

Τα πράγματα είναι (ή έστω ξεκινάνε) πολύ απλά: για την ομογενή διαφορική εξίσωση  $v''''(x) = 0$  γνωρίζουμε από την Εφαρμογή Α5.7 της Παραγράφου Α5.5.4 (για πολλαπλές ρίζες  $\mu_k$ ) του Κεφαλαίου Α5 την προφανή γενική λύση της (5.5.123). Την επαναλαμβάνουμε για διευκόλυνση κι εδώ:

$$v_h(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3. \quad (7.2.2)$$

Αυτή είναι απλά ένα τριτοβάθμιο πολυώνυμο και περιέχει τέσσερις αυθαίρετες σταθερές: τις σταθερές  $C_1, C_2, C_3$  και  $C_4$ . Στην Εφαρμογή Α5.7 δε θεωρήσαμε φόρτιση  $p(x)$ :  $p(x) \equiv 0$ . Εδώ όμως προχωράμε: θεωρούμε πως  $p(x) \neq 0$ . Την υποθέσαμε μάλιστα αυθαίρετη τη φόρτιση  $p(x)$ , όχι συγκεκριμένη. Επομένως με τις γνώσεις τις οποίες ήδη διαθέτουμε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων της Ενότητας Α5.9 του Κεφαλαίου Α5. Τώρα μάλιστα θα την εφαρμόσουμε σε μια μη ομογενή διαφορική εξίσωση: στην εξίσωση (7.2.1) τετάρτης τάξεως, κάτι που δεν το κάναμε μέχρι τώρα: εφαρμογή της σε διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως. Πάμε!

Με βάση τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων της Ενότητας Α5.9 απλά δεχόμαστε για τη μη ομογενή διαφορική εξίσωση (7.2.1) ότι οι τέσσερις σταθερές  $C_1, C_2, C_3$  και  $C_4$ , οι παράμετροι στη λύση (7.2.2), δεν είναι πλέον σταθερές, μεταβάλλονται. Γίνονται έτσι τέσσερις συναρτήσεις: οι συναρτήσεις  $C_1(x), C_2(x), C_3(x)$  και  $C_4(x)$  αντίστοιχα. Και ενώ η γενική λύση  $v_h(x)$  της ομογενούς διαφορικής εξισώσεως  $v''''(x) = 0$  είναι σίγουρα η (7.2.2), τώρα αναζητούμε γενική λύση  $v_g(x)$  της μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως (7.2.1):  $v''''(x) = p(x)/(EI)$  της μορφής

$$v_g(x) = C_1(x) + C_2(x)x + C_3(x)x^2 + C_4(x)x^3. \quad (7.2.3)$$

Πρέπει λοιπόν να προσδιορίσουμε τέσσερις μεταβαλλόμενες παραμέτρους, τέσσερις άγνωστες συναρτήσεις: τις  $C_1(x), C_2(x), C_3(x)$  και  $C_4(x)$  τις επαναλαμβάνουμε. Αλλά δε μας αρκεί η επανάληψη. Τις μάθαμε! Ας τις προσδιορίσουμε και μαζί τους και τη γενική αυτή λύση  $v_g(x)$  της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεώς μας για αυθαίρετη φόρτιση  $p(x)$  της δοκού. Στο στόχο μας τώρα!

Μετά την υπόθεσή μας (7.2.3) (σύμφωνα με τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων) για τη γενική λύση  $v_g(x)$  της μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως (7.2.1):  $v''''(x) = p(x)/(EI)$ , θα πρέπει βέβαια να υπολογίσουμε την τέταρτη παράγωγο  $v_g''''(x)$  της γενικής λύσεως  $v_g(x)$  που αναζητούμε.

Η πρώτη παράγωγος  $v_g'(x)$  πρώτα. Από τη λύση (7.2.3) που υποθέσαμε προκύπτει αμέσως

$$\begin{aligned} v_g'(x) &= C_1'(x) + [C_2'(x)x + C_2(x)] + [C_3'(x)x^2 + 2C_3(x)x] + [C_4'(x)x^3 + 3C_4(x)x^2] \\ &= [C_2(x) + 2C_3(x)x + 3C_4(x)x^2] + [C_1'(x) + C_2'(x)x + C_3'(x)x^2 + C_4'(x)x^3]. \end{aligned} \quad (7.2.4)$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων της Ενότητας Α5.9 του Κεφαλαίου Α5 τη δεύτερη τούτη αγκύλη την υποθέτουμε για διευκόλυνσή μας ίση με το μηδέν, δηλαδή θέτουμε

$$C_1'(x) + C_2'(x)x + C_3'(x)x^2 + C_4'(x)x^3 = 0. \quad (7.2.5)$$

Κατά συνέπεια η πρώτη παράγωγος  $v_g'(x)$  δίνεται τώρα: με την υπόθεση (7.2.5), από τη σχέση

$$v_g'(x) = C_2(x) + 2C_3(x)x + 3C_4(x)x^2. \quad (7.2.6)$$

Με μια απόλυτα ανάλογη διαδικασία και τη νέα, δεύτερη υπόθεσή μας ότι

$$C_2'(x) + 2C_3'(x)x + 3C_4'(x)x^2 = 0 \quad (7.2.7)$$

οδηγούμαστε στη δεύτερη παράγωγο  $v_g''(x)$  της λύσεως  $v_g(x)$  που υποθέσαμε στη σχέση (7.2.3):

$$v_g''(x) = 2C_3(x) + 6C_4(x)x. \quad (7.2.8)$$

Με όμοιο τρόπο και την τελευταία, τρίτη παραδοχή μας εδώ ότι

$$2C_3'(x) + 6C_4'(x)x = 0 \quad (7.2.9)$$

παίρνουμε και την αντίστοιχη τρίτη παράγωγο

$$v_g'''(x) = 6C_4(x). \quad (7.2.10)$$

Τέλος, χωρίς πια άλλη παραδοχή, παραγωγίζουμε και την τρίτη αυτή παράγωγο και βρίσκουμε

$$v_g''''(x) = 6C_4'(x). \quad (7.2.11)$$

Τώρα αυτήν την τέταρτη παράγωγο  $v_g''''(x)$  την εισάγουμε στη μη ομογενή διαφορική εξίσωση του προβλήματός μας (7.2.1):  $v''''(x) = p(x)/(EI)$ . Έτσι η διαφορική εξίσωση καταλήγει στη μορφή

$$6C_4'(x) = \frac{p(x)}{EI}. \quad (7.2.12)$$

Συγκεντρωτικά, αφού πρώτα είχαμε κάνει τις τρεις παραδοχές μας (7.2.5), (7.2.7) και (7.2.9), καταλήξαμε τελικά στην εξίσωση αυτή (7.2.12). Έχουμε λοιπόν τις τέσσερις εξισώσεις (ας τις συμμαζέψουμε λίγο ...)

$$C_1'(x) + C_2'(x)x + C_3'(x)x^2 + C_4'(x)x^3 = 0, \quad (7.2.13)$$

$$C_2'(x) + 2C_3'(x)x + 3C_4'(x)x^2 = 0, \quad (7.2.14)$$

$$2C_3'(x) + 6C_4'(x)x = 0, \quad (7.2.15)$$

$$6C_4'(x) = \frac{p(x)}{EI}. \quad (7.2.16)$$

Έχουμε λοιπόν καταλήξει σε ένα σύστημα τεσσάρων γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων ως προς τις τέσσερις παραγώγους  $C_1'(x)$ ,  $C_2'(x)$ ,  $C_3'(x)$  και  $C_4'(x)$ . Και είναι μάλιστα και σε τριγωνική μορφή ήδη από την αρχή και είμαστε τυχεροί στο σημείο αυτό στην παρούσα εφαρμογή, που επιτήδες βέβαια την επιλέξαμε απλή. Επομένως δε χρειαζόμαστε ούτε τον κανόνα του Cramer ούτε την απαλοιφή Gauss. Απλά λύνουμε την τελευταία (την τέταρτη) αλγεβρική εξίσωση (7.2.16) ως προς  $C_4'(x)$ . Στη συνέχεια με την τιμή  $C_4'(x)$  που βρίσκουμε λύνουμε την προτελευταία (την τρίτη) αλγεβρική εξίσωση (7.2.15) ως προς  $C_3'(x)$  και προχωράμε ανάλογα προς την πρώτη εξίσωση.

Με τη διαδικασία αυτή εύκολα προσδιορίζουμε τη λύση

$$C_4'(x) = \frac{1}{6EI} p(x), \quad (7.2.17)$$

$$C_3'(x) = -\frac{6}{2} C_4'(x)x = -3C_4'(x)x = -\frac{1}{2EI} p(x)x, \quad (7.2.18)$$

$$C_2'(x) = -2C_3'(x)x - 3C_4'(x)x^2 = \frac{1}{EI} p(x) \left( x^2 - \frac{x^2}{2} \right) = \frac{1}{2EI} p(x)x^2, \quad (7.2.19)$$

$$C_1'(x) = -C_2'(x)x - C_3'(x)x^2 - C_4'(x)x^3 = \frac{1}{EI} p(x) \left( -\frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} \right) = -\frac{1}{6EI} p(x)x^3 \quad (7.2.20)$$

του πιο πάνω συστήματος των τεσσάρων γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (7.2.13) έως (7.2.16).

Δεν αρκούμαστε βέβαια στις παραγώγους αυτές  $C_1'(x)$ ,  $C_2'(x)$ ,  $C_3'(x)$  και  $C_4'(x)$ . Θέλουμε τις ίδιες τις συναρτήσεις  $C_1(x)$ ,  $C_2(x)$ ,  $C_3(x)$  και  $C_4(x)$ . Αυτές είναι που υπεισέρχονται στη γενική λύση (7.2.3):

$$v_g(x) = C_1(x) + C_2(x)x + C_3(x)x^2 + C_4(x)x^3. \quad (7.2.21)$$

Είναι βέβαια προφανές πως πρέπει τώρα να ολοκληρώσουμε και τις τέσσερις παραγώγους (7.2.17) έως (7.2.20). Εδώ μάλιστα που έχουμε δοκό στο διάστημα  $[0, L]$  σκόπιμο είναι η ολοκλήρωση να γίνει από 0 μέχρι  $x$ . Έτσι βρίσκουμε πολύ εύκολα (χωρίς να ξεχνάμε και τις σταθερές στις ολοκληρώσεις!)

$$C_1(x) = \int_0^x C_1'(\xi) d\xi + D_1 = -\frac{1}{6EI} \int_0^x p(\xi) \xi^3 d\xi + D_1, \quad (7.2.22)$$

$$C_2(x) = \int_0^x C_2'(\xi) d\xi + D_2 = +\frac{1}{2EI} \int_0^x p(\xi) \xi^2 d\xi + D_2, \quad (7.2.23)$$

$$C_3(x) = \int_0^x C_3'(\xi) d\xi + D_3 = -\frac{1}{2EI} \int_0^x p(\xi) \xi d\xi + D_3, \quad (7.2.24)$$

$$C_4(x) = \int_0^x C_4'(\xi) d\xi + D_4 = +\frac{1}{6EI} \int_0^x p(\xi) d\xi + D_4 \quad (7.2.25)$$

με  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  και  $D_4$  τις τέσσερις σταθερές των ολοκληρώσεων αυτών. (Αν τύχει και τις λησμονήσουμε, ε τότε πρέπει να προσθέσουμε στη λύση (7.2.21) και τη γενική λύση  $v_h(x)$  στη σχέση (7.2.2) της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης  $v''''(x) = 0$ . Το ίδιο ακριβώς θα βρούμε κι έτσι!)

Και τώρα πανηγυρικά, σχεδόν τελειώσαμε, εισάγουμε τις συναρτήσεις αυτές  $C_1(x)$ ,  $C_2(x)$ ,  $C_3(x)$  και  $C_4(x)$  στη γενική λύση  $v_g(x)$  στη σχέση (7.2.21) της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης. Έτσι παίρνουμε

$$v_g(x) = \left[ -\frac{1}{6EI} \int_0^x p(\xi) \xi^3 d\xi + D_1 \right] + \left[ \frac{1}{2EI} \int_0^x p(\xi) \xi^2 d\xi + D_2 \right] x + \left[ -\frac{1}{2EI} \int_0^x p(\xi) \xi d\xi + D_3 \right] x^2 + \left[ \frac{1}{6EI} \int_0^x p(\xi) d\xi + D_4 \right] x^3. \quad (7.2.26)$$

Αναδιατάσσουμε μάλιστα τους όρους στη λύση αυτή θέτοντας τις δυνάμεις του  $x$  μέσα στα ολοκληρώματα. (Αυτές οι δυνάμεις δεν έχουν καμία σχέση με τη μεταβλητή ολοκλήρωσης  $\xi$ .) Συμπτύσσουμε επίσης και τα τέσσερα ολοκληρώματα σε ένα. Έτσι παίρνουμε το ενδιαφέρον αποτέλεσμα

$$v_g(x) = D_1 + D_2x + D_3x^2 + D_4x^3 + \frac{1}{6EI} \int_0^x (-\xi^3 + 3x\xi^2 - 3x^2\xi + x^3)p(\xi) d\xi \quad (7.2.27)$$

και τελικά

$$v_g(x) = D_1 + D_2x + D_3x^2 + D_4x^3 + \frac{1}{6EI} \int_0^x (x - \xi)^3 p(\xi) d\xi. \quad (7.2.28)$$

Επισημαίνουμε τέλος ότι από τη γενική αυτή λύση  $v_g(x)$  μπορούμε να βρούμε και τη λύση  $v(x)$  του σχετικού προβλήματος αρχικών τιμών με βάση τις δεδομένες αρχικές συνθήκες στο άκρο  $x = 0$ :

$$v(0) = v_0, \quad v'(0) = \theta_0, \quad v''(0) = \frac{M_0}{EI} \quad \text{και} \quad v'''(0) = \frac{Q_0}{EI}. \quad (7.2.29)$$

Έτσι τελικά (μετά από πράξεις που περιλαμβάνουν και παραγωγίσεις) προκύπτουν οι σταθερές

$$D_1 = v_0, \quad D_2 = \theta_0, \quad D_3 = \frac{M_0}{2EI} \quad \text{και} \quad D_4 = \frac{Q_0}{6EI} \quad (7.2.30)$$

και η λύση του προβλήματός μας:

$$v(x) = v_0 + \theta_0x + \frac{M_0}{2EI} x^2 + \frac{Q_0}{6EI} x^3 + \frac{1}{6EI} \int_0^x (x - \xi)^3 p(\xi) d\xi. \quad (7.2.31)$$

Στην ίδια ακριβώς λύση  $v(x)$  καταλήγουμε και στην Παράγραφο Α11.11.1 του Κεφαλαίου Α11: λύση (11.11.12) με τη χρήση της εντελώς διαφορετικής μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace. Λίγο πιο δύσκολα προβλήματα σε δοκούς παρουσιάζονται: (α) σε δοκό επί ελαστικής βάσεως με αυθαίρετη φόρτιση  $p(x)$  και (β) σε δοκό-στύλο με φόρτιση  $p(x)$  αλλά και θλιπτικό αξονικό φορτίο  $P$ .

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ *Αδ*

## ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ: ΑΛΛΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο κεφάλαιο αυτό έχουμε την πρόθεση να μελετήσουμε σύντομα τρεις ακόμη εφαρμογές των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Η πρώτη αφορά στην κάμψη συνήθους κυκλικής πλάκας. Η πλάκα αυτή φορτίζεται με ομοιόμορφη (σταθερή) φόρτιση και μπορεί να είναι είτε πακτωμένη είτε απλά στηριζόμενη στο σύνορό της (στην περιφέρεια του κύκλου). Το πρόβλημα αυτό ανάγεται στην επίλυση μιας μη ομογενούς εξισώσεως Euler τετάρτης τάξεως ως προς το βέλος κάμψεως  $w(r)$  της κυκλικής πλάκας. Η δεύτερη εφαρμογή αφορά στην αξονική φόρτιση πασσάλου στις Θεμελιώσεις, ενώ η τρίτη στη μεταφορά ρύπου σε υδατόρρευμα.

### Α8.1. ΠΛΑΚΕΣ: ΚΑΜΨΗ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΠΛΑΚΑΣ ΥΠΟ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΦΟΡΤΙΣΗ

#### Α8.1.1. Η μη ομογενής εξίσωση Euler

Θεωρούμε **συνήθη κυκλική πλάκα** ακτίνας  $a$  και πάχους  $h$  με κέντρο την αρχή των αξόνων  $O$ . Η **φόρτιση** της πλάκας είναι ομοιόμορφη (σταθερή) κάθετη κατανεμημένη φόρτιση  $p(r) = p_0$  και δεχόμαστε την ισχύ των **υποθέσεων του Kirchhoff** (μικρά βέλη κάμψεως, κλπ.) για την κάμψη πλακών. Η **δυσκαμψία της πλάκας** είναι

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (8.1.1)$$

με  $E$  (μέτρο ελαστικότητας) και  $\nu$  (λόγο του Poisson, με Ελληνικό  $\nu$ ) τις δύο σταθερές του ισότροπου και γραμμικά ελαστικού υλικού της. Τό **βέλος κάμψεως**  $w$  της πλάκας σχηματίζει την **ελαστική επιφάνειά** της. Όμως η πλάκα είναι κυκλική (έχει **κυκλική συμμετρία**) και επίσης και η φόρτισή της έχει κυκλική συμμετρία, αφού δεχθήκαμε ομοιόμορφη φόρτιση. Κατά συνέπεια σε πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$  το βέλος κάμψεως  $w(r)$  της πλάκας θα εξαρτάται μόνο από την πολική ακτίνα  $r$  (με  $0 \leq r \leq a$ ), όχι όμως και από την πολική γωνία  $\theta$  (με  $0 \leq \theta < 2\pi$ ) έχοντας κυκλική συμμετρία. Το ίδιο θα ισχύει και για την ελαστική επιφάνεια της πλάκας, που σχηματίζει το βέλος κάμψεως.

Η σχετική διαφορική εξίσωση προκύπτει στη Θεωρία των Πλακών, είναι τετάρτης τάξεως και έχει την ακόλουθη μορφή υπό συνθήκες κυκλικής συμμετρίας (συμμετρίας ως προς το κέντρο  $O$ )

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = \frac{p(r)}{D} \quad (8.1.2)$$

υπό γενικότερη συμμετρική φόρτιση  $p(r)$ . Με την εφαρμογή των παραγωγίσεων που υποδηλώνει ο διαφορικός τελεστής στις πρώτες παρενθέσεις πάνω στις παραγώγους του βέλους κάμψεως  $w(r)$

στις δεύτερες παρενθέσεις προκύπτει η προσιτή αναλυτική μορφή της διαφορικής μας εξίσωσης

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{p(r)}{D}. \quad (8.1.3)$$

Λαμβάνουμε τέλος υπόψη μας ότι εδώ έχουμε δεχθεί ομοιόμορφη (σταθερή) φόρτιση  $p(r) = p_0$  και πολλαπλασιάζουμε επί  $r^4$  και τα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης, οπότε απαλείφονται και οι παρονομαστές. Γράφουμε έτσι τη διαφορική αυτή εξίσωση (8.1.3) στην τελική της μορφή

$$r^4 \frac{d^4 w}{dr^4} + 2r^3 \frac{d^3 w}{dr^3} - r^2 \frac{d^2 w}{dr^2} + r \frac{dw}{dr} = \frac{p_0}{D} r^4 \quad (8.1.4)$$

φυσικά με  $w = w(r)$  και  $0 < r \leq a$  και ισοδύναμα

$$r^4 w''''(r) + 2r^3 w'''(r) - r^2 w''(r) + r w'(r) = \frac{p_0}{D} r^4. \quad (8.1.5)$$

Στη μορφή αυτή αναγνωρίζουμε αμέσως ότι πρόκειται για μια μη ομογενή εξίσωση Euler τετάρτης τάξεως, που είναι μια ισοδιάστατη εξίσωση λόγω των παραγόντων  $r^k$  στους συντελεστές της.

Για την επίλυσή της με βάση τη θεωρία των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων θα πρέπει να προσδιορίσουμε καταρχήν τη γενική λύση  $w_h(r)$  της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$r^4 w''''(r) + 2r^3 w'''(r) - r^2 w''(r) + r w'(r) = 0. \quad (8.1.6)$$

Στη συνέχεια θα πρέπει να προσδιορίσουμε και μια μερική λύση (ή ειδική λύση)  $w_p(r)$  της αρχικής μη ομογενούς εξίσωσης Euler (8.1.4) και να τις αθροίσουμε. Θα προκύψει έτσι η γενική λύση

$$w_g(r) = w_h(r) + w_p(r) \quad (8.1.7)$$

της παρούσας μη ομογενούς εξίσωσης Euler (8.1.5).

Από τη γενική αυτή λύση  $w_g(r)$  με τη χρήση (α) των αναγκαίων φυσικών συνθηκών (στο κέντρο της πλάκας  $r = 0$ ) καθώς και (β) των συνοριακών συνθηκών (στην περιφέρεια  $r = a$  της πλάκας) θα προκύψει στο τέλος η λύση  $w(r)$  του προβλήματος της παρούσας πλάκας.

Τα θέματα αυτά θα τα πραγματευθούμε λεπτομερώς στις επόμενες παραγράφους.

### Α8.1.2. Η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης Euler

Για την πιο πάνω ομογενή εξίσωση Euler (8.1.6) με βάση τη σχετική θεωρία της Ενότητας Α5.6 του Κεφαλαίου Α5 δεχόμαστε μερική λύση της μορφής

$$w_0(r) = r^\mu, \quad \text{εδώ με } 0 < r \leq a \quad (8.1.8)$$

και με το  $\mu$  προσδιοριστέα σταθερά. Τώρα υπολογίζουμε τις τέσσερις πρώτες παραγώγους της

$$w_0'(r) = \mu r^{\mu-1}, \quad (8.1.9)$$

$$w_0''(r) = \mu(\mu-1)r^{\mu-2}, \quad (8.1.10)$$

$$w_0'''(r) = \mu(\mu-1)(\mu-2)r^{\mu-3}, \quad (8.1.11)$$

$$w_0''''(r) = \mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)r^{\mu-4}. \quad (8.1.12)$$

Το επόμενο βήμα μας είναι η αντικατάσταση των τεσσάρων αυτών παραγώγων στην ομογενή εξίσωση Euler (8.1.6). (Παρατηρούμε ότι η ίδια η άγνωστη συνάρτηση  $w(r)$  έτυχε να λείπει στη διαφορική αυτή εξίσωση. Καλύτερα έτσι!) Προκύπτει αμέσως ότι

$$[\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3) + 2\mu(\mu-1)(\mu-2) - \mu(\mu-1) + \mu]r^\mu = 0 \quad (8.1.13)$$

με κοινό παράγοντα το  $r^\mu$ . Τούτο συμβαίνει πάντοτε στις ομογενείς εξισώσεις Euler, που είναι βέβαια ισοδιάστατες. Με απλοποίηση της εξίσωσης αυτής προκύπτει ότι

$$\mu^2(\mu-2)^2 r^\mu = 0, \quad \text{οπότε } p_4(\mu) := \mu^2(\mu-2)^2 = 0. \quad (8.1.14)$$

Αυτή η τελευταία εξίσωση  $p_4(\mu) = 0$  είναι η χαρακτηριστική εξίσωση της παρούσας ομογενούς εξισώσεως Euler (8.1.6). Είναι τετάρτου βαθμού και έχει προφανώς δύο διπλές ρίζες: τις ρίζες

$$\mu_1 = \mu_2 = 0 \quad \text{και} \quad \mu_3 = \mu_4 = 2. \quad (8.1.15)$$

Άρα η γενική λύση  $w_h(r)$  της ομογενούς εξισώσεως Euler (8.1.6) θα είναι η εξής:

$$w_h(r) = C_{1,0} + C_2 \ln r + C_{3,0}r^2 + C_4(\ln r)r^2 \quad \text{με} \quad 0 < r \leq a \quad (8.1.16)$$

με  $C_{1,0}$ ,  $C_2$ ,  $C_{3,0}$  και  $C_4$  τέσσερις αυθαίρετες σταθερές. Σημειώνουμε ότι οι δύο όροι που περιέχουν το λογάριθμο  $\ln r$  οφείλονται στο γεγονός ότι έχουμε δύο διπλές ρίζες (ρίζες με πολλαπλότητα δύο:  $m = 2$ ). Τούτο το έχουμε αναφέρει στην Ενότητα Α5.6 για τις εξισώσεις Euler, σχέσεις (5.6.6).

Θα κάνουμε σοβαρό λάθος από φυσικής απόψεως αφήνοντας τη γενική αυτή λύση  $w_h(r)$  στην πιο πάνω μορφή της, επειδή δεν επιτρέπεται να έχουμε μήκος (όπως είναι η πολική ακτίνα  $r$  στην παρούσα πλάκα) σαν όρισμα της λογαριθμικής συναρτήσεως. Έτσι είμαστε αναγκασμένοι να τροποποιήσουμε λίγο τις δύο αυθαίρετες σταθερές  $C_{1,0}$  και  $C_{3,0}$ . Συγκεκριμένα θέτουμε

$$C_{1,0} = C_1 - C_2 \ln a \quad \text{και} \quad C_{3,0} = C_3 - C_4 \ln a \quad (8.1.17)$$

εισάγοντας τις δύο νέες αυθαίρετες σταθερές  $C_1$  και  $C_2$  στη θέση των  $C_{1,0}$  και  $C_{3,0}$  αντίστοιχα. (Υπενθυμίζουμε επίσης ότι  $a$  είναι η ακτίνα της κυκλικής πλάκας που μελετάμε.) Παίρνουμε ακόμη υπόψη μας και το γνωστό τύπο  $\ln \alpha - \ln \beta = \ln(\alpha/\beta)$  με τα  $\alpha$  και  $\beta$  δύο θετικούς αριθμούς. Έτσι μπορούμε να γράψουμε τη γενική λύση της ομογενούς στη σχέση (8.1.16) στην τελική της μορφή

$$w_h(r) = C_1 + C_2 \ln\left(\frac{r}{a}\right) + C_3 r^2 + C_4 \ln\left(\frac{r}{a}\right) r^2 \quad \text{με} \quad 0 < r \leq a \quad (8.1.18)$$

ξανά με τέσσερις αυθαίρετες σταθερές, τις  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  και  $C_4$ , σ' αυτήν τη λύση.

### Α8.1.3. Μια μερική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως Euler

Έχουμε επομένως τελειώσει με τη γενική λύση  $w_h(r)$  της ομογενούς εξισώσεως Euler (8.1.6). Το επόμενο βήμα μας είναι βέβαια ο προσδιορισμός μιας μερικής λύσεως  $w_p(r)$  της μη ομογενούς εξισώσεως Euler (8.1.5). Αυτό θέλει τώρα λίγη σκέψη ... Αν υιοθετούσαμε μια μερική λύση στη μορφή σταθεράς  $w_p(r) = A$ , το αριστερό μέλος της μη ομογενούς εξισώσεως Euler (8.1.5) απλά θα μηδενιζόταν, αφού όλοι οι όροι του έχουν κάποια παράγωγο. Στη συνέχεια, αν υιοθετούσαμε μια μερική λύση στη μορφή  $w_p(r) = Ar$ , το αριστερό μέλος δε θα μηδενιζόταν, θα ήταν ίσο με  $Ar$ , αλλά πάλι δε θα μπορούσε να γίνει ίσο με το δεξιό μέλος  $g(r) = p_0 r^4/D$ . Ανάλογα συμβαίνουν και με μερικές λύσεις των μορφών  $w_p(r) = Ar^2$  (και αυτή η συνάρτηση τυχαίνει μάλιστα να είναι λύση της ομογενούς εξισώσεως Euler (8.1.6)!) και  $w_p(r) = Ar^3$ .

Αντίθετα, με την υπόθεση μερικής λύσεως  $w_p(r)$  της μορφής

$$w_p(r) = Ar^4, \quad \text{οπότε} \quad w_p'(r) = 4Ar^3, \quad w_p''(r) = 12Ar^2, \quad w_p'''(r) = 24Ar, \quad w_p''''(r) = 24A, \quad (8.1.19)$$

παρατηρούμε ότι η μη ομογενής εξίσωση Euler (8.1.5) παίρνει στο τέλος τη μορφή

$$[24A + 2 \cdot 24A - 12A + 4A]r^4 = \frac{p_0}{D} r^4, \quad \text{οπότε} \quad 64A = \frac{p_0}{D} \quad \text{και τελικά} \quad A = \frac{p_0}{64D}. \quad (8.1.20)$$

Με την τιμή αυτή του προσδιοριστέου (και τώρα πια προσδιορισμένου!) συντελεστή  $A$  στη μερική λύση  $w_p(r) = Ar^4$ , η μερική λύση  $w_p(r)$  της μη ομογενούς εξισώσεως Euler (8.1.5) θα πάρει τη μορφή

$$w_p(r) = \frac{p_0}{64D} r^4. \quad (8.1.21)$$

► **Παρατήρηση Α8.1:** Στην ίδια λύση φθάνουμε και από την αρχική εξίσωση (8.1.3) (με  $p(r) = p_0$ ).

**Α8.1.4. Η γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης Euler**

Με βάση τον τύπο (8.1.7) αθροίζουμε τώρα (α) τη γενική λύση  $w_h(r)$  (στη σχέση (8.1.18)) της ομογενούς εξίσωσης Euler (8.1.6) και (β) τη μερική λύση  $w_p(r)$  (στη σχέση (8.1.21)) της μη ομογενούς εξίσωσης Euler (8.1.5). Προκύπτει έτσι η γενική λύση  $w_g(r)$  της μη ομογενούς εξίσωσης Euler (8.1.5) στη μορφή

$$w_g(r) = w_h(r) + w_p(r) = C_1 + C_2 \ln\left(\frac{r}{a}\right) + C_3 r^2 + C_4 \ln\left(\frac{r}{a}\right) r^2 + \frac{p_0}{64D} r^4 \quad (8.1.22)$$

με τέσσερις σταθερές, τις  $C_1, C_2, C_3$  και  $C_4$ , προς προσδιορισμό σε μια συγκεκριμένη κυκλική πλάκα.

**Α8.1.5. Φυσικές συνθήκες στο κέντρο της πλάκας**

Στο κέντρο  $r = 0$  της πλάκας προφανώς δε μπορεί να απειριζέται το βέλος κάμψεως  $w(0)$ . Τούτο όμως δυστυχώς συμβαίνει με τη γενική λύση (8.1.22), στην οποία έχουμε καταλήξει, επειδή  $\lim_{r \rightarrow 0} \ln r = -\infty$ . Για να αποφύγουμε αυτόν τον απειρισμό, ο οποίος είναι απαράδεκτος σε μια αληθινή πλάκα, πρέπει να δεχθούμε ότι  $C_2 = 0$ . Με την ίδια λογική χρησιμοποιούμε την καμπτική ροπή  $M_r(r)$  ή την καμπτική ροπή  $M_\theta(r)$ . Αυτές δίνονται στην παρούσα πλάκα από τους τύπους

$$M_r(r) = -D \left[ w''(r) + \frac{\nu}{r} w'(r) \right] \quad \text{και} \quad M_\theta(r) = -D \left[ \nu w''(r) + \frac{1}{r} w'(r) \right]. \quad (8.1.23)$$

(Υπενθυμίζουμε ότι  $D$  είναι η δυσκαμψία της πλάκας και  $\nu$  (Ελληνικό νι) ο λόγος του Poisson του ισότροπου και γραμμικά ελαστικού υλικού της.) Και οι δύο παράγωγοι  $w'(r)$  (μαζί με το  $\nu/r$  ή  $1/r$  σαν συντελεστή) και  $w''(r)$  στους δύο αυτούς τύπους μας αναγκάζουν να θεωρήσουμε και τη σταθερά  $C_4$  του δεύτερου λογαριθμικού όρου στη γενική λύση (8.1.22) για το βέλος κάμψεως  $w(r)$  επίσης μηδενική. Άρα τώρα (με  $C_2 = C_4 = 0$ ) η γενική αυτή λύση  $w_g(r)$  απλοποιείται στη μορφή

$$w_g(r) = C_1 + C_3 r^2 + \frac{p_0}{64D} r^4. \quad (8.1.24)$$

Οφείλουμε τώρα να προσδιορίσουμε μόνο δύο σταθερές: τις  $C_1$  και  $C_3$ . Αυτές έχουν απομείνει!

**Α8.1.6. Συνοριακές συνθήκες στο σύνορο της πλάκας και λύση του προβλήματος**

Στο σημείο αυτό υποθέτουμε την πλάκα πακτωμένη στο σύνορό της (στην περιφέρεια  $r = a$ ). Τότε στο σύνορο αυτό λόγω της πακτώσεως θα πρέπει να ισχύουν οι δύο συνοριακές συνθήκες

$$w(a) = 0 \quad \text{και} \quad w'(a) = 0, \quad (8.1.25)$$

που εκφράζουν μηδενικό βέλος κάμψεως και μηδενική κλίση στο σύνορο αυτό  $r = a$ . Η λύση  $w_g(r)$  στη σχέση (8.1.24) και η πρώτη παράγωγός της  $w'_g(r)$  μας δίνουν τώρα εύκολα για  $r = a$

$$C_1 + C_3 a^2 + \frac{p_0}{64D} a^4 = 0 \quad \text{και} \quad 2C_3 a + \frac{4p_0}{64D} a^3 = 0 \quad \implies \quad C_3 = -\frac{2p_0}{64D} a^2. \quad (8.1.26)$$

Τώρα από την πρώτη πιο πάνω συνθήκη προσδιορίζουμε και τη σταθερά  $C_1$  που έχει απομείνει:

$$C_1 = -C_3 a^2 - \frac{p_0}{64D} a^4 = \frac{2p_0}{64D} a^4 - \frac{p_0}{64D} a^4 = \frac{p_0}{64D} a^4. \quad (8.1.27)$$

Με αντικατάσταση αυτών των τιμών των σταθερών  $C_1$  και  $C_3$  στη λύση  $w_g(r)$  στη σχέση (8.1.24) για το βέλος κάμψεως  $w(r)$  στην παρούσα κυκλική πλάκα, καταλήγουμε εύκολα στην τελική λύση

$$w_c(r) = \frac{p_0}{64D} (a^4 - 2a^2 r^2 + r^4) \quad \text{και} \quad \text{τελικά} \quad w_c(r) = \frac{p_0}{64D} (a^2 - r^2)^2 \quad \text{φυσικά με} \quad 0 \leq r \leq a. \quad (8.1.28)$$

Η μέγιστη τιμή  $w_{\max} = p_0 a^4 / (64D)$  (που ενδιαφέρει!) παρουσιάζεται στο κέντρο  $r = 0$  της πλάκας.

Ανάλογα ισχύουν και στην περίπτωση κυκλικής πλάκας με απλή στήριξη στο σύνορό της. Τότε όμως οι δύο συνοριακές συνθήκες παίρνουν τις μορφές:  $w(a) = 0$  και  $M_r(a) = 0$ , δηλαδή αλλάζει η δεύτερη συνοριακή συνθήκη. Πρέπει τώρα να πάρουμε υπόψη μας και τον πρώτο τύπο (8.1.23).



### Α8.2. ΘΕΜΕΛΙΩΣΕΙΣ: ΑΞΟΝΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ ΠΑΣΣΑΛΟΥ

Το πρόβλημα της αξονικής φορτίσεως κυλινδρικού πασσάλου μήκους  $L$  και ακτίνας  $a$  στο έδαφος (με  $0 \leq z \leq L$ ) μελετήθηκε στην Ενότητα Α2.3 του Κεφαλαίου Α2 (σχετικό το Σχήμα Α2.7). Στην ίδια ενότητα έγινε και η αναγωγή του στην ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως

$$w''(z) = \eta^2 w(z) \quad \text{ισοδύναμα} \quad \frac{d^2 w}{dz^2} = \eta^2 w, \quad \text{σχέση (2.3.7),} \quad (8.2.1)$$

με  $w = w(z)$  την αξονική μετατόπιση των σημείων του πασσάλου και  $\eta$  μια συνολική σταθερά του μηχανικού συστήματος πασσάλου-εδάφους. Με γνωστή τη συνάρτηση αυτή  $w(z)$  μπορεί να υπολογισθεί η θλιπτική αξονική φόρτιση  $P(z)$  κατά μήκος του πασσάλου με τη χρήση του τύπου

$$P(z) = -\pi a^2 E_p w'(z) \quad \text{από τη δεύτερη σχέση (2.3.6)} \quad (8.2.2)$$

με  $E_p$  το μέτρο ελαστικότητας (ή μέτρο του Young) του γραμμικά ελαστικού υλικού του πασσάλου.

Με  $P_0$  το γνωστό θλιπτικό φορτίο το οποίο ασκείται εξωτερικά στον πάσσαλο στην επιφάνεια του εδάφους  $z = 0$  η σχετική συνοριακή συνθήκη θα είναι με βάση την παραπάνω σχέση (8.2.2)

$$P_0 = P(0) = -\pi a^2 E_p w'(0) \quad \implies \quad w'(0) = -\frac{P_0}{\pi a^2 E_p}. \quad (8.2.3)$$

Εδώ υποθέτουμε επίσης πως το μήκος  $L$  του πασσάλου είναι αρκετά μεγάλο μέσα στο έδαφος, μαθηματικά  $L \rightarrow \infty$ . Με την υπόθεση αυτή, που δεν είναι βέβαια αναγκαία ούτε από μαθηματικής αλλ' ούτε και από φυσικής απόψεως, η δεύτερη συνοριακή συνθήκη θα είναι για φυσικούς λόγους

$$w(\infty) := \lim_{z \rightarrow \infty} w(z) = 0. \quad (8.2.4)$$

Θα πρέπει τώρα να επιλύσουμε αυτό το πρόβλημα συνοριακών τιμών, το οποίο αποτελείται: (α) από τη διαφορική εξίσωση (8.2.1) και (β) τις δύο συνοριακές συνθήκες μας (8.2.3) και (8.2.4). Θα βρούμε πρώτα τη γενική λύση  $w_g(z)$  της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσώσεως (8.2.1). Αυτό θα γίνει βέβαια με την τόσο απλή μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως. Υποθέτουμε ότι

$$w_0(z) = e^{\mu z} \quad \implies \quad w'_0(z) = \mu e^{\mu z} \quad \implies \quad w''_0(z) = \mu^2 e^{\mu z}. \quad (8.2.5)$$

Αντικαθιστώντας τις εκθετικές αυτές εκφράσεις των  $w_0(z)$  και  $w'_0(z)$  στη διαφορική εξίσωση (8.2.1), βρίσκουμε τη σχετική χαρακτηριστική εξίσωση:  $\mu^2 = \eta^2$  και τις ρίζες της  $\mu_{1,2}$ . Συγκεκριμένα

$$w''_0(z) = \eta^2 w_0(z) \quad \implies \quad \mu^2 e^{\mu z} = \eta^2 e^{\mu z} \quad \implies \quad \mu^2 = \eta^2 \quad \text{με ρίζες τις} \quad \mu_{1,2} = \pm \eta. \quad (8.2.6)$$

Κατά συνέπεια η γενική λύση  $w_g(z)$  της διαφορικής εξίσώσεως (8.2.1):  $w''(z) = \eta^2 w(z)$  θα είναι η

$$w_g(z) = C_1 e^{\mu_1 z} + C_2 e^{\mu_2 z} = C_1 e^{\eta z} + C_2 e^{-\eta z} \quad (8.2.7)$$

με τα  $C_1$  και  $C_2$  δύο αυθαίρετες σταθερές. Τώρα θα προσδιορίσουμε και τις δύο αυτές σταθερές  $C_1$  και  $C_2$  με βάση τις δύο συνοριακές συνθήκες (8.2.3) και (8.2.4). Ξεκινάμε με τη δεύτερη συνθήκη:

$$w(\infty) = 0, \quad \text{οπότε αναγκαστικά} \quad C_1 = 0, \quad \text{αφού} \quad \eta > 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty. \quad (8.2.8)$$

Επομένως  $w(z) = C_2 e^{-\eta z}$ . Θα προσδιορίσουμε τώρα και τη δεύτερη αυθαίρετη σταθερά: τη  $C_2$ , αυτή βέβαια από την πρώτη συνοριακή συνθήκη (8.2.3):  $w'(0) = -P_0/(\pi a^2 E_p)$ . Εύκολο είναι κι αυτό:

$$w(z) = C_2 e^{-\eta z} \quad \implies \quad w'(z) = -\eta C_2 e^{-\eta z}, \quad w'(0) = -\frac{P_0}{\pi a^2 E_p} \quad \implies \quad \eta C_2 = \frac{P_0}{\pi a^2 E_p} \quad \implies \quad C_2 = \frac{P_0}{\pi a^2 E_p \eta}. \quad (8.2.9)$$

Άρα  $w(z) = \frac{P_0}{\pi a^2 E_p \eta} e^{-\eta z}$  κι από τη σχέση (8.2.2) προκύπτει τελικά  $P(z) = P_0 e^{-\eta z}$ . (8.2.10)

Πρόκειται για ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα: εκθετική μείωση του αξονικού φορτίου  $P(z)$  με το βάθος.

### Α8.3. ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΗ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ: ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΡΥΠΟΥ ΣΕ ΥΔΑΤΟΡΡΕΥΜΑ

Στην ενότητα αυτή αναφερόμαστε στο πρόβλημα της μεταφοράς ρύπου σε υδατόρρευμα με μεταγωγή και διάχυση-διασπορά υπό μόνιμες συνθήκες. Υπάρχει επίσης και αποδόμηση του ρύπου πρώτης τάξεως. Θα επιλύσουμε την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως

$$Dc''(x) - Vc'(x) - kc(x) = 0 \quad \text{ισοδύναμα} \quad D \frac{d^2c}{dx^2} - V \frac{dc}{dx} - kc = 0. \quad (8.3.1)$$

Αυτή είναι η εξίσωση (2.5.8) της Ενότητας Α2.5 του Κεφαλαίου Α2 με σχετικό σχήμα το Σχήμα Α2.9.

Αφού πρόκειται για ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση και μάλιστα με σταθερούς συντελεστές: τους  $D$ ,  $-V$  και  $-k$ , θα χρησιμοποιήσουμε ασφαλώς τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης της Ενότητας Α5.5 του Κεφαλαίου Α5. (Η μέθοδος της εκθετικής αντικατάστασης δεν είναι εφαρμόσιμη σε περιπτώσεις μη σταθερών, μεταβλητών συντελεστών!) Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή υποθέτουμε για τη συγκέντρωση  $c = c(x)$  του ρύπου πως αυτή είναι της εκθετικής μορφής

$$c_0(x) = e^{\mu x}, \quad \text{οπότε} \quad c'_0(x) = \mu e^{\mu x} \quad \text{και} \quad c''_0(x) = \mu^2 e^{\mu x}. \quad (8.3.2)$$

Τώρα αντικαθιστούμε τις εκθετικές αυτές εκφράσεις των  $c_0(x)$ ,  $c'_0(x)$  και  $c''_0(x)$  στη διαφορική μας εξίσωση (8.3.1). Με αυτόν τον τρόπο προκύπτει η σχετική χαρακτηριστική εξίσωση

$$D\mu^2 e^{\mu x} - V\mu e^{\mu x} - ke^{\mu x} = 0 \implies (D\mu^2 - V\mu - k)e^{\mu x} = 0 \implies D\mu^2 - V\mu - k = 0, \quad (8.3.3)$$

αφού  $e^{\mu x} \neq 0$ . Πρόκειται βέβαια για μια δευτεροβάθμια αλγεβρική εξίσωση με δύο ρίζες  $\mu_{1,2}$ : τις

$$\mu_1 = \frac{V + \sqrt{V^2 + 4kD}}{2D} > 0 \quad \text{και} \quad \mu_2 = \frac{V - \sqrt{V^2 + 4kD}}{2D} < 0, \quad (8.3.4)$$

αφού και οι τρεις ποσότητες  $D$ ,  $V$  και  $k$  είναι θετικοί αριθμοί.

Υποθέτουμε τώρα τη σταθερή (μόνιμη) πηγή του ρύπου (έστω μια βιομηχανία) ότι βρίσκεται στη θέση  $x = 0$  του υδατορρέυματος και ότι αυτό έχει επαρκές μήκος πέρα από την πηγή αυτή. Έτσι δεχόμαστε το υδατόρρευμα ημιάπειρο ως προς τη μεταφορά του ρύπου στο διάστημα  $[0, \infty)$ . Τότε θα πρέπει η συγκέντρωση  $c = c(x)$  του ρύπου να μηδενίζεται για  $x \rightarrow \infty$  εξαιτίας της αποδομήσεώς του. Επομένως από τη γενική λύση (με δύο αυθαίρετες σταθερές: τις  $C_1$  και  $C_2$ )

$$c_g(x) = C_1 e^{\mu_1 x} + C_2 e^{\mu_2 x} \quad \text{παίρνουμε εδώ} \quad c(x) = C_2 e^{\mu_2 x} \quad \text{με} \quad C_1 = 0, \quad (8.3.5)$$

επειδή μόνο η ρίζα  $\mu_2$  στις σχέσεις (8.3.4) είναι αρνητική. (Η ρίζα  $\mu_1$  είναι θετική: άρα  $C_1 = 0$ .)

Εάν μάλιστα διαθέτουμε και την αρχική (αρχική ως προς τη θέση  $x$ ) συγκέντρωση του ρύπου  $c(0) = c_0$  στην πηγή του στη θέση  $x = 0$ , προσδιορίζουμε αμέσως και τη σταθερά  $C_2$ . Συγκεκριμένα

$$c(x) = C_2 e^{\mu_2 x} \quad \text{και} \quad c(0) = c_0, \quad \text{οπότε} \quad c(0) = C_2 = c_0. \quad (8.3.6)$$

Κατά συνέπεια η λύση  $c(x)$  παίρνει τελικά την εκθετική μορφή (εδώ με εκθετική μείωσή της:  $\mu_2 < 0$ )

$$c(x) = c_0 e^{\mu_2 x}, \quad \text{όπου} \quad \mu_2 = \frac{V - \sqrt{V^2 + 4kD}}{2D} < 0 \quad (8.3.7)$$

από τη δεύτερη σχέση (8.3.4). Την ίδια τελική λύση  $c(x)$  θα την προσδιορίσουμε και με διαφορετική μέθοδο: με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace στην Ενότητα Α11.17 του Κεφαλαίου Α11.

► **Παρατήρηση Α8.2:** Όταν δεν υπάρχει ο όρος διαχύσεως-διασποράς:  $D = 0$ , μπορούμε να λύσουμε από την αρχή την ίδια διαφορική εξίσωση, όμως με  $D = 0$ . Εναλλακτικά με τη χρήση του προσεγγιστικού τύπου  $\sqrt{1 + \varepsilon} \approx 1 + (\varepsilon/2)$  για πολύ μικρές τιμές του  $\varepsilon$  διαπιστώνουμε ότι για  $D = 0$

$$\lim_{D \rightarrow 0} \mu_2 = \lim_{D \rightarrow 0} \frac{V - \sqrt{V^2 + 4kD}}{2D} = \lim_{D \rightarrow 0} \frac{V - V(1 + 2kD/V^2)}{2D} = -\frac{k}{V} \implies c(x) = c_0 e^{\mu_2 x} = c_0 e^{-kx/V}. \quad (8.3.8)$$

# Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο *A9*

## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στις διαφορικές εξισώσεις εκτός από προβλήματα αρχικών τιμών, αρκετές φορές παρουσιάζονται και προβλήματα συνοριακών τιμών. Σ' αυτά τα τόσο ενδιαφέροντα προβλήματα οι συνθήκες που συνοδεύουν τη διαφορική εξίσωση αναφέρονται στα δύο άκρα του διαστήματος  $[a, b]$  ισχύος της. Παραδείγματος χάρη, σε μια συνήθη δοκό μήκους  $L$  αναφέρονται στα δύο άκρα της δοκού  $x = 0$  και  $x = L$ . Στα προβλήματα συνοριακών τιμών έχουμε ήδη αναφερθεί σύντομα στην Παράγραφο A1.9.2 του Κεφαλαίου A1. Στην ίδια παράγραφο παραθέσαμε επίσης και τις τέσσερις συνοριακές συνθήκες (δύο στο αριστερό άκρο και δύο στο δεξιό) που αφορούν σε ορισμένα απλά προβλήματα συνήθων δοκών. Αυτό έγινε στις συνοριακές συνθήκες (1.9.10) για (α) μια αμφίπακτη δοκό, (β) μια μονόπακτη υπερστατική δοκό, (γ) μια αμφιέρειστη δοκό και (δ) έναν πρόβολο.

Στο παρόν Κεφάλαιο A9 θα συνεχίσουμε τη μελέτη των προβλημάτων συνοριακών τιμών ασφαλώς και πάλι ως προς τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις που εξετάζουμε στο παρόν μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II. Αυτό όμως θα το κάνουμε με βάση μια γενικότερη εξέταση του προβλήματος. Συγκεκριμένα υποθέτουμε ότι σε ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών έχουμε μια ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με τουλάχιστον ένα συντελεστή της να εξαρτάται από μία παράμετρο  $\lambda$ . Προφανώς μια τέτοια εξίσωση, αφού είναι ομογενής, θα έχει σαν λύση την τετριμμένη μηδενική λύση, που την καλούμε απλά τετριμμένη λύση. Εμείς ενδιαφερόμαστε για τις τιμές  $\lambda_n$  της παραμέτρου αυτής  $\lambda$ , αν βέβαια υπάρχουν, που να οδηγούν σε μη τετριμμένες (δηλαδή μη μηδενικές) λύσεις το σχετικό πρόβλημα συνοριακών τιμών. Το πρόβλημα αυτό αποτελείται βέβαια από την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση και τις συνοριακές συνθήκες που τη συνοδεύουν στα δύο άκρα  $a$  και  $b$  του διαστήματος ισχύος της και που τις υποθέτουμε για απλότητα επίσης ομογενείς.

Οι ειδικές αυτές τιμές  $\lambda_n$  της παραμέτρου  $\lambda$  σε ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών που οδηγούν σε μη τετριμμένες (μη μηδενικές) λύσεις καλούνται ιδιοτιμές (ή χαρακτηριστικές τιμές) του προβλήματος συνοριακών τιμών. (Εδώ βέβαια, όπως ήδη σημειώσαμε, θα αναφερθούμε κυρίως σε ομογενή προβλήματα συνοριακών τιμών, δηλαδή με ομογενή και τη διαφορική εξίσωση που ισχύει, αλλά και τις συνοριακές συνθήκες που τη συνοδεύουν.) Η μη τετριμμένη (μη μηδενική) λύση  $v_n(x)$  του προβλήματος συνοριακών τιμών που αντιστοιχεί σε μια ιδιοτιμή (ή χαρακτηριστική τιμή)  $\lambda_n$  καλείται ιδιοσυνάρτηση (ή χαρακτηριστική συνάρτηση). Τέλος τέτοια ειδικά προβλήματα συνοριακών τιμών καλούνται προβλήματα ιδιοτιμών και σ' αυτά θα αφιερώσουμε ολόκληρο το παρόν Κεφάλαιο A9.

Πιο συγκεκριμένα θα αναφερθούμε στα εξής δύο προβλήματα ιδιοτιμών: (α) Στον προσδιορισμό των φορτίων λυγισμού  $P_n$  σε συνήθη στυλό υπό συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες στα άκρα του και υπό αξονική θλιπτική φόρτιση  $P$  που έχει προκαλέσει το λυγισμό και (β) Στον προσδιορισμό των ιδιοσυχνοτήτων  $\omega_n$  σε καμπτικές ιδιοταλαντώσεις και ελεύθερες ταλαντώσεις γενικότερα σε συνήθη δοκό. Φυσικά είναι προφανές ότι και τα δύο αυτά προβλήματα αποτελούν δίχως καμία αμφιβολία ιδιαίτερα χρήσιμα προβλήματα ιδιοτιμών στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού.

## A9.1. ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ: ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΣΤΥΛΟΥ

### A9.1.1. Λυγισμός αμφιαρθρωτού στύλου

Θεωρούμε το πρόβλημα του λυγισμού ενός αμφιαρθρωτού στύλου (ή ράβδου ή υποστυλώματος) μήκους  $L$  και σταθερής διατομής. Η ελάχιστη δυσκαμψία του στύλου, που σχετίζεται με την ελάχιστη ροπή αδρανείας  $I$  της διατομής του, είναι  $EI$  με  $E$  το μέτρο ελαστικότητας (ή μέτρο του Young) του υλικού του στύλου. Ο στύλος υποτίθεται ότι έχει λυγίσει υπό την επίδραση αξονικού θλιπτικού φορτίου λυγισμού  $P$ , που εφαρμόζεται στα άκρα του  $x = 0$  και  $x = L$ . Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι αυτό το αξονικό θλιπτικό φορτίο  $P$  προκαλεί καμπτική ροπή (ή ροπή κάμψεως)

$$M(x) = -Pv(x) \quad (9.1.1)$$

κατά μήκος του στύλου με  $v(x)$  το βέλος κάμψεώς του (κάθετα στο στύλο, εγκάρσια μετατόπιση), που οφείλεται στο λυγισμό του.

Υπό τις συνθήκες αυτές η γνωστή μας από την Παράγραφο A2.1.5 γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως της κάμψεως συνήθους δοκού (2.1.32)

$$v''(x) = \frac{M(x)}{EI}, \quad \text{ισοδύναμα} \quad EIv''(x) = M(x) \quad (9.1.2)$$

παίρνει την τροποποιημένη μορφή

$$EIv''(x) = -Pv(x) \quad (9.1.3)$$

και παραπέρα

$$EIv''(x) + Pv(x) = 0 \quad \implies \quad v''(x) + \frac{P}{EI}v(x) = 0. \quad (9.1.4)$$

Επομένως έχει μετατραπεί σε μια ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως. Εισάγοντας μάλιστα και τη βοηθητική σταθερά

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}}, \quad (9.1.5)$$

ξαναγράφουμε την πιο πάνω διαφορική εξίσωση (9.1.4) στην απλούστερη μορφή της

$$v''(x) + k^2v(x) = 0. \quad (9.1.6)$$

Δεν πρέπει επίσης να ξεχνάμε ότι ο στύλος (ή ράβδος ή υποστυλώμα) που εξετάζουμε έχει υποτεθεί εξαρχής αμφιαρθρωτός. Δηλαδή και τα δύο άκρα του  $x = 0$  και  $x = L$  έχουν αρθρώσεις, άρα μηδενικά βέλη κάμψεως, οπότε

$$v(0) = 0, \quad v(L) = 0. \quad (9.1.7)$$

Ας σημειωθεί εντούτοις ότι οι αρθρώσεις αυτές δεν είναι απαγορευτικές για το λυγισμό του στύλου. Δηλαδή επιτρέπουν μια μικρή μείωση της μεταξύ τους αποστάσεως σαν η μία άρθρωση (π.χ. στο πάνω άκρο  $x = L$  του στύλου) να είναι στην πραγματικότητα κύλιση.

Συνοψίζοντας, έχουμε το εξής πρόβλημα συνοριακών τιμών: (α) την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως (9.1.6) και (β) τις δύο συνοριακές συνθήκες (9.1.7) που τη συνοδεύουν. Ας επιχειρήσουμε τώρα την επίλυσή του.

Πρώτα για τη διαφορική εξίσωση (9.1.6) χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης

$$v_0(x) = e^{\mu x}, \quad \text{οπότε} \quad v_0''(x) = \mu^2 e^{\mu x}, \quad (9.1.8)$$

οδηγούμαστε εύκολα στη σχετική χαρακτηριστική εξίσωση  $p_2(\mu) = 0$ . Συγκεκριμένα

$$\mu^2 e^{\mu x} + k^2 e^{\mu x} = 0 \quad \implies \quad (\mu^2 + k^2)e^{\mu x} = 0 \quad \implies \quad p_2(\mu) = \mu^2 + k^2 = 0. \quad (9.1.9)$$

Πρόκειται για μια πολύ απλή δευτεροβάθμια αλγεβρική εξίσωση με λύσεις

$$\mu_{1,2} = \pm ik. \quad (9.1.10)$$

Επομένως με τη χρήση και των γνωστών τύπων του Euler (1.5.3) και (1.5.4), δηλαδή των τύπων  $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$ , η γενική λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (9.1.6) παίρνει τη μορφή

$$v_h(x) = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx} = C_1 (\cos kx + i \sin kx) + C_2 (\cos kx - i \sin kx) \quad (9.1.11)$$

με τα  $C_1$  και  $C_2$  δύο αυθαίρετες σταθερές και τελικά

$$v_h(x) = (C_1 + C_2) \cos kx + i(C_1 - C_2) \sin kx = D_1 \cos kx + D_2 \sin kx. \quad (9.1.12)$$

Στο τέλος χρησιμοποιήθηκαν οι νέες αυθαίρετες σταθερές  $D_1 = C_1 + C_2$  και  $D_2 = i(C_1 - C_2)$ .

Τώρα για τον προσδιορισμό των δύο τελικών αυθαίρετων σταθερών  $D_1$  και  $D_2$  στην τριγωνομετρική αυτή μορφή (9.1.12) της γενικής λύσεως  $v_h(x)$  προφανώς πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις δύο ομογενείς συνοριακές συνθήκες (9.1.7) στα δύο άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  του στύλου μας. Η πρώτη από τις συνθήκες αυτές,  $v(0) = 0$ , στο κάτω άκρο  $x = 0$  του στύλου δίνει για την πιο πάνω γενική λύση  $v_h(x)$

$$v_h(0) = 0 \implies D_1 \cdot 1 + D_2 \cdot 0 = D_1 = 0. \quad (9.1.13)$$

Άρα η πρώτη σταθερά  $D_1$  είναι ίση με το μηδέν και η λύση μας  $v_h(x)$  στη σχέση (9.1.12) παίρνει τώρα την απλούστερη μορφή

$$v_h(x) = D_2 \sin kx, \quad (9.1.14)$$

η οποία ασφαλώς σέβεται, επαληθεύει την πρώτη συνοριακή συνθήκη  $v_h(0) = 0$ .

Στη συνέχεια για το πάνω άκρο  $x = L$  του στύλου απαιτείται η ισχύς και της δεύτερης συνοριακής συνθήκης  $v(L) = 0$ . Επομένως, θέτοντας  $x = L$  στη λύση αυτή  $v_h(x) = D_2 \sin kx$  και απαιτώντας να ισχύει η συνθήκη  $v_h(L) = 0$ , διαπιστώνουμε ότι

$$v_h(L) = D_2 \sin kL = 0. \quad (9.1.15)$$

Μη λησμονώντας τον ορισμό (9.1.5) ( $k = \sqrt{P/(EI)}$ ) της βοηθητικής σταθεράς  $k$  και μιλώντας γενικά, θα ισχύει  $\sin kL \neq 0$  και επομένως αναγκαστικά παίρνουμε  $D_2 = 0$ . Τότε (με  $D_2 = 0$ ) η λύση (9.1.14) θα πάρει την τελική της μορφή

$$v_h(x) = 0. \quad (9.1.16)$$

Θα προκύψει δηλαδή η προφανής τετριμμένη (η μηδενική) λύση του παρόντος ομογενούς προβλήματος συνοριακών τιμών (9.1.6) και (9.1.7).

Είναι πάρα πολύ ωραία να ισχύει η λύση αυτή  $v_h(x) = 0$  (εκ ταυτότητας ίσον) στο πρόβλημα συνοριακών τιμών (9.1.6) και (9.1.7). Είναι θαυμάσια! Όχι βέβαια απλά επειδή στην περίπτωση αυτή ισχύει η διαφορική εξίσωση (9.1.6) και οι δύο συνοριακές συνθήκες (9.1.7), κάτι που έχει μαθηματικό ενδιαφέρον. Είναι θαυμάσια, γιατί η λύση αυτή  $v_h(x) = 0$  του παρόντος προβλήματος συνοριακών τιμών (9.1.6) και (9.1.7) μας δείχνει ότι ο στύλος μας άνθεξε, δε λύγισε παρά την ύπαρξη του αξονικού θλιπτικού φορτίου  $P$  κατά μήκος του, που έχει υπεισέλθει στη βοηθητική σταθερά  $k = \sqrt{P/(EI)}$  της σχέσεως (9.1.5). Αυτό είναι πολύ ευχάριστο για τον Πολιτικό Μηχανικό.

Δυστυχώς όμως έχουμε αναφερθεί πιο πάνω στη γενική περίπτωση, όπου (γενικά) ισχύει ότι  $\sin kL \neq 0$ . Εντούτοις δεν είναι πάντοτε ακριβές αυτό, επειδή υπάρχει και η αντίθετη περίπτωση, δηλαδή να ισχύει  $\sin kL = 0$ . Σπάνια μεν αλλ' είναι δυνατή, δε μπορεί να αποκλεισθεί και η περίπτωση αυτή. Ας τη διερευνήσουμε κάπως λεπτομερέστερα. Το πρόβλημά μας σ' αυτήν την περίπτωση είναι ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών που οδηγεί σε ένα πρόβλημα ιδιοτιμών.

### Α9.1.2. Το πρόβλημα των ιδιοτιμών

Στην παράγραφο αυτή θα διερευνήσουμε την περίπτωση αληθινού λυγισμού του στύλου, δηλαδή την περίπτωση όπου το πρόβλημα συνοριακών τιμών (9.1.6) και (9.1.7) έχει μη τετριμμένη (μη μηδενική) λύση. Άρα υπάρχει αληθινό βέλος κάμψεως  $v(x)$  του στύλου υπό την αξονική θλιπτική φόρτιση  $P$  που έχουμε υποθέσει κατά μήκος του. Στο πρόβλημα ιδιοτιμών αυτό θα προσδιορίσουμε τις τιμές  $k_n$  της σταθεράς  $k = \sqrt{P/(EI)}$  που επιτρέπουν μη τετριμμένη (μη μηδενική) λύση, δηλαδή το λυγισμό του στύλου. Αυτές είναι οι **ιδιοτιμές** (ή **χαρακτηριστικές τιμές**) στο παρόν πρόβλημα συνοριακών τιμών (9.1.6) και (9.1.7). Σε κάθε τέτοια ιδιοτιμή  $k_n$  θα αντιστοιχεί και μια μη τετριμμένη λύση  $v_n(x)$  του ίδιου προβλήματος συνοριακών τιμών. Οι μη τετριμμένες λύσεις  $v_n(x)$  καλούνται **ιδιοσυναρτήσεις** (ή **χαρακτηριστικές συναρτήσεις**) στο παρόν πρόβλημα ιδιοτιμών.

Καταρχήν σημειώνουμε ξανά τον ορισμό (9.1.5) της σταθεράς  $k$ , δηλαδή ότι  $k = \sqrt{P/(EI)}$ . Τότε για το μηδενισμό του τριγωνομετρικού παράγοντα  $\sin kL$  στη σχέση (9.1.15) θα έχουμε

$$\sin kL = \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} L = 0 \implies k_n L = \sqrt{\frac{P_n}{EI}} L = n\pi \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \quad (9.1.17)$$

Στις σχέσεις αυτές χρησιμοποιήθηκαν και τα σύμβολα  $k_n$  και  $P_n$  αντί για τα  $k$  και  $P$  αντίστοιχα, ώστε να δηλωθεί με περισσότερο έντονο τρόπο ότι η σχέση  $\sin kL = 0$  ισχύει για πολλές (και μάλιστα εδώ για άπειρες) τιμές  $k_n$  της σταθεράς  $k$ . Για όλες αυτές τις τιμές, δηλαδή για τις τιμές

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{με } n = 1, 2, \dots, \quad (9.1.18)$$

η τριγωνομετρική ποσότητα  $\sin kL$  μηδενίζεται. Επομένως για  $k = k_n$  θα έχουμε στη σχέση (9.1.15)  $v_n(L) = D_2 \sin kL = 0$ . Τούτο εκφράζει την άρθρωση (ή έστω την κύλιση) του στύλου στο πάνω άκρο του  $x = L$  με μηδενισμό του σχετικού βέλους κάμψεως:  $v(L) = 0$ , ακριβώς όπως απαιτεί η δεύτερη συνοριακή συνθήκη (9.1.7). Άρα δεν είναι αναγκαίο να μηδενίζεται η σταθερά  $D_2$ , ο πρώτος παράγοντας στο γινόμενο  $D_2 \sin kL$ . Απλά εδώ μηδενίζεται ο ημιτονικός παράγοντας  $\sin kL$  και επομένως η σταθερά  $D_2$  μπορεί, δυστυχώς μπορεί να μην είναι μηδενική.

Και τότε; Μα τότε ισχύει η λύση (9.1.14) χωρίς να είναι  $D_2 = 0$ , δηλαδή χωρίς να πρόκειται για την τετριμμένη (τη μηδενική) λύση. Πιο συγκεκριμένα για τις πιο πάνω τιμές  $k_n = n\pi/L$  θα έχουμε

$$v_n(x) = D_2 \sin k_n x = D_2 \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \quad (9.1.19)$$

Πήραμε μάλιστα και την πρωτοβουλία να τονίσουμε το γεγονός ότι πρόκειται για διαφορετικές μη τετριμμένες (μη μηδενικές) λύσεις  $v_n(x)$  (με  $n = 1, 2, \dots$ ) του πιο πάνω προβλήματος συνοριακών τιμών (9.1.6) και (9.1.7). Η κάθε μια τους αντιστοιχεί σε μια διαφορετική τιμή  $k_n = n\pi/L$  της βοηθητικής σταθεράς  $k = \sqrt{P/(EI)}$ , η οποία ορίστηκε στη σχέση (9.1.5).

Ας σημειώσουμε επίσης ότι πολύ εύκολα επαληθεύεται ότι όλες οι παραπάνω λύσεις (9.1.19) είναι πραγματικά λύσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών (9.1.6) και (9.1.7) στην ειδική βέβαια περίπτωση όπου  $k = k_n = n\pi/L$ , όπως βρήκαμε στη σχέση (9.1.18). Πραγματικά η διαφορική εξίσωση (9.1.6) για  $k = k_n = n\pi/L$  παίρνει τη μορφή

$$v''(x) + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 v(x) = 0. \quad (9.1.20)$$

Αντικαθιστώντας στη διαφορική αυτή εξίσωση τη λύση  $v_n(x)$  της σχέσεως (9.1.19) στο παρόν πρόβλημα συνοριακών τιμών (καθώς και τη δεύτερη παράγωγο της  $v_n''(x)$ ), διαπιστώνουμε ότι

$$-D_2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin \frac{n\pi x}{L} + D_2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin \frac{n\pi x}{L} = 0. \quad (9.1.21)$$

Ακόμη πιο εύκολη, απλούστατη είναι η επαλήθευση των συνοριακών συνθηκών (9.1.7). Πράγματι

$$v_n(0) = D_2 \sin \frac{n\pi \cdot 0}{L} = \sin 0 = 0, \quad v_n(L) = D_2 \sin \frac{n\pi L}{L} = \sin n\pi = 0. \quad (9.1.22)$$

Συνοψίζοντας, το πρόβλημα συνοριακών τιμών (9.1.6) και (9.1.7) έχει πάντοτε την τετριμμένη (μηδενική) λύση  $v_t(x) = 0$  (εκ ταυτότητας ίσον:  $v_t(x) \equiv 0$ ). Για τις ιδιοτιμές (ή χαρακτηριστικές τιμές) του όμως  $k_n = n\pi/L$ , που ήδη προσδιορίστηκαν στη σχέση (9.1.18), έχει και τις αντίστοιχες μη τετριμμένες (μη μηδενικές) λύσεις  $v_n(x)$  ( $v_n(x) \not\equiv 0$ ), που βρέθηκαν στις σχέσεις (9.1.19). Αυτές είναι οι ιδιοσυναρτήσεις (ή χαρακτηριστικές συναρτήσεις) του ίδιου προβλήματος. Η εύρεση των ιδιοτιμών  $k_n$  και των αντίστοιχων ιδιοσυναρτήσεων  $v_n(x)$  που έγινε πιο πάνω αποτελεί την επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών που αντιστοιχεί στο πρόβλημα συνοριακών τιμών (9.1.6) και (9.1.7).

### A9.1.3. Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού

Ακούγονται λίγο-πολύ ωραία αυτά από μαθηματικής απόψεως, αλλ' ο Πολιτικός Μηχανικός δεν είναι ευχαριστημένος. Πρώτα-πρώτα δε θα ήθελε καθόλου να υπάρχουν ιδιοτιμές  $k_n$  και αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις  $v_n(x)$  στο παρόν πρόβλημα συνοριακών τιμών, γιατί τούτο δηλώνει το λυγισμό του στύλου (ή ράβδου ή υποστυλώματος), που δεν είναι καθόλου αρεστός στον Πολιτικό Μηχανικό. (Αλίμονο αν ένας Πολιτικός Μηχανικός ήθελε το λυγισμό ενός στύλου σε μια κατασκευή!)

Αλλά και πέρα από αυτό, ακόμη και αν συμβιβασθεί (με δυσαρέσκεια βέβαια) ο Πολιτικός Μηχανικός με τον ανεπιθύμητο λυγισμό του στύλου του, εντούτοις θέλει (και έχει πραγματικά το δικαίωμα) να ξέρει υπό ποιες προϋποθέσεις θα λάβει χώρα ο λυγισμός αυτός. Είναι πολύ εύκολη η σχετική απάντηση. Η θετική βοηθητική σταθερά  $k$  (η παράμετρος στη διαφορική εξίσωση (9.1.6)) με ιδιοτιμές  $k_n = n\pi/L$  συνδέεται με το θλιπτικό φορτίο  $P$  που ασκείται πάνω στο στύλο με τη σχέση ορισμού της (9.1.5), δηλαδή με τη σχέση

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}} \iff P = k^2 EI \quad (9.1.23)$$

με  $EI$  (υπενθυμίζεται) την ελάχιστη δυσκαμψία του στύλου. Άρα για τις ιδιοτιμές  $k_n = n\pi/L$  που ήδη προσδιορίστηκαν στις σχέσεις (9.1.18) τα αντίστοιχα φορτία  $P_n$  θα δίνονται από τους τύπους

$$P_n = k_n^2 EI = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \quad (9.1.24)$$

Τα συγκεκριμένα αυτά φορτία  $P_n$  καλούνται *φορτία λυγισμού* και φυσικά αυξάνονται καθώς αυξάνει ο δείκτης  $n = 1, 2, \dots$ .

Έτσι το παρόν πρόβλημα συνοριακών τιμών (9.1.6) και (9.1.7) επιδέχεται μη τετριμμένη (μη μηδενική) λύση μόνο για τα παραπάνω φορτία λυγισμού  $P_n$ . Προφανώς το πραγματικά σημαντικό από τα φορτία αυτά είναι το πρώτο  $P_1$ , δηλαδή το θλιπτικό φορτίο με  $n = 1$  στο οποίο για πρώτη φορά συμβαίνει λυγισμός του στύλου. Τούτο το φορτίο λυγισμού  $P_1$  καλείται από τον Πολιτικό Μηχανικό **κρίσιμο φορτίο λυγισμού** και προκύπτει απλά θέτοντας  $n = 1$  στη σχέση (9.1.24). Έτσι παίρνουμε τον τύπο

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \approx \frac{9.8696 EI}{L^2} \approx \frac{10 EI}{L^2} \quad (9.1.25)$$

για το κρίσιμο φορτίο λυγισμού, το οποίο συμβολίζεται συνήθως σαν  $P_{cr}$  αντί για  $P_1$ . Ο τύπος αυτός είναι ο τύπος του Euler για τον αμφιαρθρωτό στύλο που εξετάζουμε και μας λέει ότι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού  $P_{cr}$  είναι ανάλογο της ελάχιστης δυσκαμψίας  $EI$  του στύλου και αντιστρόφως ανάλογο του τετραγώνου  $L^2$  του μήκους του  $L$ . Επομένως με διπλασιασμό του μήκους  $L$  του στύλου (χωρίς όμως αλλαγή των υπόλοιπων χαρακτηριστικών του: υλικού και διατομής) το κρίσιμο φορτίο λυγισμού του στύλου  $P_{cr}$  θα υποτετραπλασιασθεί, θα γίνει, δυστυχώς, τέσσερις φορές μικρότερο. Άρα ο στύλος θα λυγίσει πολύ πιο εύκολα.

Θα ήταν πολύ σοβαρή παράλειψη να μη σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι ο λυγισμός του στύλου εξετάστηκε μέσα στα πλαίσια της Ελαστικότητας και των συνήθων παραδοχών της Τεχνικής Θεωρίας της Κάμψεως στη Μηχανική των Υλικών. Τα πράγματα όπως δεν είναι έτσι στην πραγματικότητα. Εκεί με την αύξηση του αξονικού θλιπτικού φορτίου  $P$  από το μηδέν μέχρι το κρίσιμο

φορτίο λυγισμού  $P_{cr}$  δεν έχει επέλθει λυγισμός στο στύλο. Ο λυγισμός επέρχεται στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού  $P_{cr}$  (για  $P = P_{cr}$ ). Μετά όμως το λυγισμό αυτό του στύλου (δηλαδή για  $P > P_{cr}$ ) ο στύλος στην πραγματικότητα δεν επανέρχεται στην ευθύγραμμη πριν από το λυγισμό μορφή του, γιατί παύουν να ισχύουν οι παραδοχές που έχουν γίνει. Για να γίνουμε κάπως πιο σύντομοι, ο Πολιτικός Μηχανικός γενικά αρκείται στη γνώση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού  $P_{cr}$ , δηλαδή του πρώτου φορτίου λυγισμού  $P_1 = P_{cr}$ . Από κει και πέρα, αν έχει συμβεί ο λυγισμός στην κατασκευή του, μόνη πιθανή λύση είναι η μείωση του θλιπτικού φορτίου  $P$  ( $P < P_{cr}$ ) και όχι η παραπέρα αύξησή του ( $P > P_{cr}$ ). Αυτή μπορεί μάλιστα να οδηγήσει σε φαινόμενα εμφανίσεως πλαστικότητας, σε διαρροή, ακόμη και σε θραύση του στύλου για πολύ μεγάλη τιμή του θλιπτικού φορτίου  $P$ .

Επομένως ο Πολιτικός Μηχανικός πρέπει να φροντίσει το αξονικό θλιπτικό φορτίο του  $P$ , το οποίο ασκείται σε ένα στύλο (ράβδο, υποστύλωμα, κολώνα) να μην πλησιάσει το κρίσιμο φορτίο λυγισμού  $P_{cr}$ . Έτσι με ασφάλεια θα αποφευχθεί ο λυγισμός. Για ενδεχόμενα μεγαλύτερα θλιπτικά φορτία  $P$  θα πρέπει εκ των προτέρων (σε μια μελέτη του, π.χ. μιας μεταλλικής κατασκευής) να έχει μεριμνήσει ώστε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού  $P_{cr}$  να είναι το κατάλληλο, π.χ. με αύξηση της ελάχιστης δυσκαμψίας  $EI$  του στύλου. Ειδικότερα για συγκεκριμένο ελαστικό υλικό του στύλου και επίσης συγκεκριμένη μάζα του στύλου (μήκους  $L$ ) ένας στύλος δακτυλιοειδούς διατομής υπερέχει ως προς το λυγισμό από ένα συμπαγή στύλο κυκλικής διατομής (της ίδιας ακριβώς μάζας). Αυτό συμβαίνει, επειδή η δακτυλιοειδής διατομή εξασφαλίζει μεγαλύτερη ροπή αδρανείας  $I$  στη δυσκαμψία  $EI$  του στύλου, η οποία είναι μάλιστα προφανώς η ίδια προς όλες τις κατευθύνσεις (μόνο για κυκλικές και δακτυλιοειδείς διατομές). Τούτο ισχύει λόγω της αξονικής (ή κυκλικής) συμμετρίας μιας τέτοιας διατομής.

#### A9.1.4. Λυγισμός στύλου με πακτωμένο το ένα άκρο του και ελεύθερο το άλλο

Ο τύπος (9.1.25) για το κρίσιμο φορτίο λυγισμού  $P_{cr}$ , ας τον επαναλάβουμε

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \approx \frac{9.8696 EI}{L^2} \approx \frac{10 EI}{L^2}, \quad (9.1.26)$$

ισχύει μόνο στην περίπτωση αμφιαρθρωτού στύλου, όπως ήδη είδαμε με την επίλυση του σχετικού προβλήματος συννοριακών τιμών και ιδιοτιμών. Δεν είναι όμως αυτή η μοναδική δυνατότητα που υπάρχει στις συννοριακές συνθήκες στα άκρα ενός στύλου υπό αξονικό θλιπτικό φορτίο  $P$ . Στην παράγραφο αυτή θα αναφερθούμε και σε μια άλλη ενδιαφέρουσα περίπτωση στύλου: αυτή με το κάτω άκρο του στύλου  $x = 0$  πακτωμένο και το πάνω άκρο του  $x = L$  ελεύθερο. Φυσικά το θλιπτικό φορτίο  $P$  ασκείται ουσιαστικά στο πάνω, στο ελεύθερο άκρο  $x = L$  του στύλου με διεύθυνση όμως προς τα κάτω, προς το πακτωμένο άκρο  $x = 0$  του ίδιου στύλου.

Υποθέτουμε τώρα ότι το θλιπτικό φορτίο  $P$  έχει προκαλέσει το λυγισμό του στύλου και επίσης ότι η εγκάρσια μετατόπιση στο πάνω άκρο του  $x = L$  είναι τώρα (λόγω του λυγισμού) ίση με  $\delta$ . Η διαδικασία των προηγούμενων παραγράφων πρέπει να τροποποιηθεί κάπως στην παρούσα περίπτωση στύλου. Πρώτα επειδή η καμπτική ροπή (ή ροπή κάμψεως)  $M(x)$  θα δίνεται τώρα από τον τύπο

$$M(x) = P[\delta - v(x)] \quad (9.1.27)$$

λόγω και της εγκάρσιας μετατοπίσεως  $\delta$  στο πάνω άκρο  $x = L$  του στύλου. Άρα η γνωστή διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως (9.1.2):  $EIv''(x) = M(x)$ , η οποία συνδέει την εγκάρσια (κάθετη) μετατόπιση  $v(x)$  με την καμπτική ροπή  $M(x)$  θα πάρει στο παρόν πρόβλημα λυγισμού τη μορφή

$$EIv''(x) = P[\delta - v(x)] \implies EIv''(x) + Pv(x) = P\delta. \quad (9.1.28)$$

Πρόκειται δηλαδή για μια μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως σε σύγκριση με την αντίστοιχη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (9.1.4), στην οποία δεν υπήρχε



ο όρος  $P\delta$  στο δεξιό μέλος. Προφανώς μια μερική (ή ειδική) λύση της  $v_p(x)$  είναι η συνάρτηση

$$v_p(x) = \frac{P\delta}{P} = \delta, \quad (9.1.29)$$

μια σταθερά. Χρησιμοποιώντας μάλιστα και τη γνωστή μας βοηθητική σταθερά  $k = \sqrt{P/(EI)}$ , που ορίστηκε στη σχέση (9.1.5), μπορούμε άμεσα να διαπιστώσουμε ότι η γενική λύση  $v_h(x)$  της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι η ίδια με εκείνη στον αμφιαρθρωτό στύλο που ήδη εξετάσαμε, έχει δηλαδή τη μορφή

$$v_h(x) = D_1 \cos kx + D_2 \sin kx \quad \text{με} \quad k = \sqrt{\frac{P}{EI}}. \quad (9.1.30)$$

Άρα η γενική λύση  $v_g(x)$  της παρούσας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δευτέρας τάξεως (9.1.28) θα είναι ίση με το άθροισμα της πιο πάνω γενικής λύσεως  $v_h(x)$  της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης συν μια μερική (ή ειδική) λύση  $v_p(x)$  της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης, εδώ απλά τη λύση (9.1.29). Έτσι θα έχουμε τελικά τη γενική λύση

$$v_g(x) = v_h(x) + v_p(x) = D_1 \cos kx + D_2 \sin kx + \delta, \quad \text{οπότε} \quad v'_g(x) = -kD_1 \sin kx + kD_2 \cos kx. \quad (9.1.31)$$

Προς το παρόν η διαφορά της παρούσας γενικής λύσεως (9.1.31) από την αντίστοιχη γενική λύση (9.1.12) για τον αμφιαρθρωτό στύλο είναι ο τρίτος όρος  $\delta$  στη γενική λύση (9.1.31). Δυστυχώς όμως υπάρχει και μια άλλη σημαντική διαφορά: στις συνοριακές συνθήκες. Στον παρόντα στύλο (με πάκτωση-ελεύθερο άκρο) έχουμε τις εξής τρεις συνοριακές συνθήκες:

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v(L) = \delta. \quad (9.1.32)$$

Οι δύο πρώτες συνθήκες είναι απλά οι συνθήκες πακτώσεως στο κάτω άκρο  $x = 0$  του στύλου. Η τρίτη συνθήκη, που είναι μάλιστα μη ομογενής, δηλώνει απλά την υπόθεσή μας (ξεκινώντας από την καμπτική ροπή (9.1.27)) ότι λόγω του πιθανού λυγισμού του στύλου το βέλος κάμψεως του  $v(L)$  στο πάνω άκρο του  $x = L$  είναι ίσο με  $\delta$ . Πράγματι είναι μια κάπως παράξενη συνοριακή συνθήκη, που είναι όμως απόλυτα αναγκαίο να ληφθεί υπόψη. Έχει χρησιμοποιηθεί ήδη και στην ίδια τη διαφορική εξίσωση (9.1.28). Μπορούμε λοιπόν να την παραλείψουμε; Ασφαλώς όχι!

Ποια είναι επομένως τώρα η εργασία που πρέπει να κάνουμε; Πρώτα οφείλουμε να προσδιορίσουμε τις δύο αυθαίρετες σταθερές  $D_1$  και  $D_2$  στη γενική λύση  $v_g(x)$  της πιο πάνω σχέσεως (9.1.31) με βάση τις δύο συνοριακές συνθήκες πακτώσεως  $v(0) = v'(0) = 0$ , δηλαδή τις δύο πρώτες συνοριακές συνθήκες (9.1.32). Στη συνέχεια θα πρέπει να προχωρήσουμε και στην τρίτη συνοριακή συνθήκη (9.1.32). Αυτή είναι που θα μας οδηγήσει στον τύπο για το κρίσιμο φορτίο λυγισμού  $P_{cr}$ .

Ξεκινάμε λοιπόν! Οι δύο πρώτες συνοριακές συνθήκες  $v(0) = v'(0) = 0$  με τη χρήση της γενικής λύσεως (9.1.31) που ήδη βρήκαμε (και της πρώτης παραγώγου της  $v'_g(x)$ ) παίρνουν τις μορφές

$$D_1 \cdot 1 + D_2 \cdot 0 + \delta = 0, \quad -kD_1 \cdot 0 + kD_2 \cdot 1 = 0. \quad (9.1.33)$$

Άρα οι δύο αρχικά αυθαίρετες σταθερές  $D_1$  και  $D_2$  στη γενική λύση (9.1.31) παίρνουν τώρα τις συγκεκριμένες τιμές

$$D_1 = -\delta, \quad D_2 = 0, \quad (9.1.34)$$

οπότε παίρνουμε τελικά την εξής μερική λύση  $v_b(x)$  στο παρόν πρόβλημα λυγισμού:

$$v_b(x) = D_1 \cos kx + D_2 \sin kx + \delta = -\delta \cos kx + 0 \cdot \sin kx + \delta = \delta(1 - \cos kx). \quad (9.1.35)$$

Ασφαλώς η λύση αυτή επαληθεύει τόσο τη διαφορική εξίσωση (9.1.28) όσο και τις δύο πρώτες συνοριακές συνθήκες (9.1.32): τις συνθήκες πακτώσεως  $v(0) = v'(0) = 0$  στο κάτω άκρο  $x = 0$  του στύλου που εξετάζουμε.

Και η τρίτη, η κάπως παράξενη συνοριακή συνθήκη  $v(L) = \delta$ ; Αυτή είναι η κρίσιμη συνθήκη για τον προσδιορισμό των φορτίων λυγισμού  $P_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) του στύλου και ειδικότερα του πρώτου φορτίου λυγισμού  $P_1 = P_{cr}$ , του κρίσιμου φορτίου λυγισμού. Ας μη χρονοτριβούμε! Εισάγουμε τη μερική λύση  $v_b(x)$  της πιο πάνω σχέσεως (9.1.35) στην τρίτη συνοριακή συνθήκη  $v(L) = \delta$  και βρίσκουμε ότι

$$v(L) = \delta \implies \delta(1 - \cos kL) = \delta \implies \delta - \delta \cos kL = \delta \implies \delta \cos kL = 0. \quad (9.1.36)$$

Αν δεν έχουμε λυγισμό, τότε  $\delta = 0$  και όλα είναι θαυμάσια για τον Πολιτικό Μηχανικό: ευτυχώς δεν έχει παρουσιασθεί λυγισμός του στύλου. Αν όμως αντίθετα έχει παρουσιασθεί λυγισμός για κάποια (ίσως αρκετά μεγάλη) τιμή του θλιπτικού φορτίου  $P$ ; Ε τότε  $\delta \neq 0$  και επομένως είναι απόλυτα αναγκαίο να ισχύει η τριγωνομετρική εξίσωση

$$\cos kL = 0 \text{ με λύσεις } k_n L = \frac{(2n-1)\pi}{2} \implies k_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L} \text{ με } n = 1, 2, \dots \quad (9.1.37)$$

Στο παρόν πρόβλημα λυγισμού (για στύλο με το κάτω άκρο του  $x = 0$  πακτωμένο και το πάνω άκρο του  $x = L$  ελεύθερο) βρήκαμε λοιπόν ότι υπάρχουν άπειρες ιδιοτιμές (ή χαρακτηριστικές τιμές)  $k_n$  που οδηγούν σε αντίστοιχες μη τετριμμένες λύσεις

$$v_n(x) = \delta(1 - \cos k_n x) = \delta \left( 1 - \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \right) \text{ με } n = 1, 2, \dots, \quad (9.1.38)$$

όπως παρατηρούμε άμεσα από τη λύση  $v_b(x) = \delta(1 - \cos kx)$  στη σχέση (9.1.35). Τώρα όμως έχουμε περιορισθεί στις ιδιοτιμές  $k_n$  της παραμέτρου μας  $k$  έχοντας επομένως εξασφαλίσει την πλήρωση και της τρίτης συνοριακής συνθήκης  $v_n(L) = \delta$ , αφού στις λύσεις (9.1.38)

$$\cos k_n L = \cos \frac{(2n-1)\pi L}{2L} = \cos \frac{(2n-1)\pi}{2} = 0, \quad (9.1.39)$$

όπως γνωρίζουμε από την Τριγωνομετρία.

Προσδιορίσαμε λοιπόν τις ιδιοτιμές  $k_n$  στις σχέσεις (9.1.37). Και τώρα; Τώρα απλά θα βρούμε και τα αντίστοιχα φορτία λυγισμού  $P_n$ . Προς το σκοπό αυτό λαμβάνουμε και πάλι υπόψη τον τύπο ορισμού (9.1.5) της βοηθητικής σταθεράς  $k = \sqrt{P/(EI)}$  καθώς και τους τύπους (9.1.37) για τις ιδιοτιμές  $k_n$  της σταθεράς  $k$ . Έτσι βρίσκουμε ότι

$$k_n = \sqrt{\frac{P_n}{EI}} \implies P_n = k_n^2 EI = \frac{(2n-1)^2 \pi^2 EI}{4L^2} \text{ με } n = 1, 2, \dots \quad (9.1.40)$$

για τα αντίστοιχα φορτία λυγισμού  $P_n$ . Φυσικά οι τύποι αυτοί (9.1.40) είναι ανάλογοι με τους τύπους (9.1.23) και (9.1.24) που ισχύουν στην περίπτωση του αφιαρθρωτού στύλου, την οποία είχαμε εξετάσει προηγουμένως.

Ειδικά για  $n = 1$  προκύπτει το πρώτο φορτίο λυγισμού  $P_1$ , που είναι και το κρίσιμο φορτίο λυγισμού  $P_{cr}$ . Έχουμε έτσι τη σχέση

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \approx \frac{2.4674 EI}{L^2} \approx \frac{2.5 EI}{L^2}. \quad (9.1.41)$$

Παρατηρούμε επίσης ότι στον παρόντα στύλο (με το κάτω άκρο του  $x = 0$  πακτωμένο και το πάνω άκρο του  $x = L$  ελεύθερο) το κρίσιμο φορτίο λυγισμού  $P_{cr}$  είναι μόλις το ένα τέταρτο του αντίστοιχου κρίσιμου φορτίου λυγισμού για τον αφιαρθρωτό στύλο. Αυτό προκύπτει αμέσως με τη σύγκριση των τύπων (9.1.41) (για τον παρόντα στύλο) και (9.1.25) για τον αφιαρθρωτό στύλο.

Προφανώς τα προβλήματα αυτά συνοριακών τιμών για στύλους (ή ράβδους ή υποστυλώματα ή κολώνες) παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον για τον Πολιτικό Μηχανικό. Και δεν πρέπει μάλιστα αυτός να ξεχνάει ότι δεν επιτρέπεται να φθάνει ή να ξεπερνάει το κρίσιμο φορτίο λυγισμού  $P_{cr}$  είτε σε ένα στύλο σε μια υπάρχουσα κατασκευή (π.χ. μια μεταλλική κατασκευή) με την υπερβολική

φόρτισή της  $P$  (δηλαδή με  $P \geq P_{cr}$ ) είτε σε μια υπό μελέτη κατασκευή για τη φόρτιση  $P$ , την οποία μπορεί να κληθεί να αντιμετωπίσει ένας στύλος της.

Θα ήταν τέλος μια ασυγχώρητη παράλειψη να μην αναφερθεί σε τούτο το διδακτικό βιβλίο, το οποίο απευθύνεται σε Πολιτικούς Μηχανικούς, ότι το παρόν πρόβλημα λυγισμού στύλου (με πάκτωση-ελεύθερο άκρο) μελετήθηκε για πρώτη φορά από τον Euler. Αυτό συνέβη στην εργασία του «*De curvis elasticis*» («Ελαστικές καμπύλες» ή καλύτερα στην Ελληνική ορολογία του Πολιτικού Μηχανικού «Ελαστικές γραμμές»). Η εργασία αυτή δημοσιεύθηκε το 1744 σε παράρτημα σχετικού βιβλίου του Euler. Γι' αυτό και ο σχετικός τύπος (9.1.41) για το κρίσιμο φορτίο λυγισμού  $P_{cr}$  καλείται τύπος του Euler. Εννοείται ότι ο τύπος του Euler (9.1.41) για το κρίσιμο φορτίο λυγισμού  $P_{cr}$  δεν έχει καμία σχέση με τους τύπους και πάλι του Euler (1.5.3) και (1.5.4) της Παραγράφου Α1.5.1:

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x. \quad (9.1.42)$$

Αυτοί οι τύποι του Euler αφορούν στη μιγαδική εκθετική συνάρτηση  $e^{\pm ix}$  και στις αντίστοιχες τριγωνομετρικές συναρτήσεις  $\cos x$  και  $\sin x$  και όχι βέβαια σε κρίσιμα φορτία λυγισμού  $P_{cr}$ .

#### Α9.1.5. Η διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως του λυγισμού στύλου

Στις προηγούμενες παραγράφους είχαμε χρησιμοποιήσει γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως για την εγκάρσια μετατόπιση (το βέλος κάμψεως)  $v(x)$  στύλου (ή ράβδου ή υποστυλώματος ή κολώνας) σε λυγισμό. Συγκεκριμένα είχαμε χρησιμοποιήσει τις δύο γραμμικές διαφορικές εξισώσεις (9.1.4) και (9.1.28), τις επαναλαμβάνουμε

$$EIv''(x) + Pv(x) = 0 \quad \text{για αμφιαρθρωτό στύλο,} \quad (9.1.43)$$

$$EIv''(x) + Pv(x) = P\delta \quad \text{για στύλο πακτωμένο στο ένα άκρο του και ελεύθερο στο άλλο.} \quad (9.1.44)$$

Παρατηρούμε βέβαια ότι από τις δύο αυτές γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως η πρώτη είναι ομογενής, ενώ αντίθετα η δεύτερη είναι μη ομογενής.

Πολύ συχνά στο παρόν πρόβλημα συνοριακών τιμών και ιδιοτιμών (στο πρόβλημα του λυγισμού στύλου) ο Πολιτικός Μηχανικός επιθυμεί να έχει μία μόνο γενική γραμμική διαφορική εξίσωση και μάλιστα ομογενή που να ισχύει για όλες τις περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών του στύλου στα άκρα του. Στη γενική αυτή περίπτωση αποδεικνύεται στη Μηχανική των Υλικών (ή Αντοχή των Υλικών) ότι ισχύει η ακόλουθη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως:

$$EIv''''(x) + P''v''(x) = 0. \quad (9.1.45)$$

Και πάλι βέβαια  $v(x)$  είναι η εγκάρσια μετατόπιση (το βέλος κάμψεως) του στύλου,  $EI$  η δυσκαμψία του (συνήθως η ελάχιστη, αφού ενδιαφερόμαστε για το ελάχιστο κρίσιμο φορτίο λυγισμού  $P_{cr}$ ) και  $P$  το αξονικό θλιπτικό φορτίο που ασκείται στο στύλο. Σημειώνουμε επίσης ότι για τις περιπτώσεις στύλων (9.1.43) και (9.1.44) οι διαφορικές αυτές εξισώσεις μεταπίπτουν (και οι δύο) στη νέα εξίσωση (9.1.45), αρκεί να παραγωγισθούν δύο φορές. Πρόκειται για μια γραμμική διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως, ενώ οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις (9.1.43) και (9.1.44) ήταν δευτέρας τάξεως, αλλά με το πλεονέκτημα της γενικότητας ως προς τις συνοριακές συνθήκες. Έτσι πολλές φορές η νέα αυτή διαφορική εξίσωση (9.1.45) λόγω των δύο πλεονεκτημάτων της:

- Της γενικότητάς της, δηλαδή της ανεξαρτησίας της από τις συνοριακές συνθήκες, και
- Του γεγονότος ότι είναι πάντοτε ομογενής

προτιμάται από τον Πολιτικό Μηχανικό παρά τα δύο σοβαρά μειονεκτήματά της:

- Ότι είναι δυστυχώς τετάρτης τάξεως αντί δευτέρας και
- Άρα, αφού είναι τετάρτης τάξεως, ότι απαιτεί τέσσερις συνοριακές συνθήκες στο παρόν πρόβλημα, συγκεκριμένα ανά δύο συνθήκες σε κάθε άκρο του στύλου: τέσσερις συνολικά.

### A9.1.6. Λυγισμός αμφίπακτου στύλου

Στις Παραγράφους A9.1.1 έως A9.1.3 της παρούσας Ενότητας A9.1 εξετάσαμε ήδη το λυγισμό αμφιαρθρωτού στύλου μήκους  $L$  (με  $0 \leq x \leq L$ ) και τελικά καταλήξαμε στον τύπο (9.1.25) για το κρίσιμο φορτίο λυγισμού  $P_{cr}$ . Στη συνέχεια στην Παράγραφο A9.1.4 εξετάσαμε το λυγισμό στύλου πακτωμένου στο ένα άκρο του και ελεύθερου στο άλλο και καταλήξαμε στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού (9.1.41). Και στις δύο αυτές περιπτώσεις λυγισμού λύσαμε βέβαια το σχετικό πρόβλημα συνοριακών τιμών και ιδιοτιμών έχοντας βασισθεί στις σχετικές διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως. Θα μπορούσαμε βέβαια να έχουμε χρησιμοποιήσει και τη γενική διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως (9.1.45) φυσικά μαζί με τέσσερις συνοριακές συνθήκες. Δε θα το κάνουμε όμως στην παράγραφο αυτή, αν και είναι εφικτό, προτιμώντας την επίσης ενδιαφέρουσα και διαφορετική περίπτωση ενός αμφίπακτου στύλου. Για το στύλο αυτό δεν έχουμε προσδιορίσει ακόμη το κρίσιμο φορτίο λυγισμού  $P_{cr}$ , αν και παρουσιάζει και αυτός ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τον Πολιτικό Μηχανικό στις κατασκευές του.

Θεωρούμε επομένως έναν αμφίπακτο στύλο μήκους  $L$  (επαναλαμβάνουμε με  $0 \leq x \leq L$ ) που έχει και τα δύο άκρα του  $x = 0$  και  $x = L$  πακτωμένα. Θα χρησιμοποιήσουμε την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως (9.1.45). Είναι προφανές ότι διευκολυνόμαστε χρησιμοποιώντας επίσης και τη βοηθητική σταθερά  $k = \sqrt{P/(EI)}$ , που ήδη ορίσαμε στη σχέση (9.1.5). Με τη χρήση της σταθεράς αυτής  $k$  η διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως (9.1.45) απλοποιείται λίγο:

$$EIv''''(x) + Pv''(x) = 0 \implies v''''(x) + k^2v''(x) = 0 \quad \text{με} \quad k = \sqrt{\frac{P}{EI}}. \quad (9.1.46)$$

Φυσικά το παρόν πρόβλημα συνοριακών τιμών αποτελείται όχι μόνο από τη γραμμική διαφορική εξίσωση (9.1.46), αλλά και από τις τέσσερις συνοριακές συνθήκες που τη συνοδεύουν:

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v(L) = 0, \quad v'(L) = 0. \quad (9.1.47)$$

Είναι πολύ απλές (και ομογενείς φυσικά, με δεξιά μέλη ίσα με το μηδέν) οι τέσσερις αυτές συνοριακές συνθήκες, επειδή έχουμε πακτώσεις και στα δύο άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  του στύλου: αμφίπακτος στύλος. Αφού και η ίδια η διαφορική εξίσωση (9.1.46) είναι ομογενής, έχουμε ένα ομογενές πρόβλημα συνοριακών τιμών, παραπέρα και ομογενές πρόβλημα ιδιοτιμών, όταν θα προσδιορίσουμε τις ιδιοτιμές (ή χαρακτηριστικές τιμές)  $k_n$  της σταθεράς  $k$  για μη τετριμμένες (μη μηδενικές) λύσεις.

Καταρχήν για την επίλυση της πιο πάνω ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης τετάρτης τάξεως (9.1.46) (στη δεύτερη φυσικά μορφή της) μπορούμε ασφαλώς να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως, αφού οι συντελεστές της είναι σταθεροί: 1 και  $k^2$ . Δεχόμαστε λοιπόν εκθετική λύση  $v_0(x)$  της μορφής

$$v_0(x) = e^{\mu x}, \quad \text{οπότε} \quad v_0''(x) = \mu^2 e^{\mu x} \quad \text{και στη συνέχεια} \quad v_0''''(x) = \mu^4 e^{\mu x}. \quad (9.1.48)$$

Αντικαθιστούμε τώρα απλά τις παραγώγους αυτές  $v_0''(x)$  και  $v_0''''(x)$  στην ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (9.1.46) και βρίσκουμε τη σχετική τεταρτοβάθμια χαρακτηριστική εξίσωση  $p_4(\mu) = 0$ :

$$\mu^4 e^{\mu x} + k^2 \mu^2 e^{\mu x} = 0 \implies (\mu^4 + k^2 \mu^2) e^{\mu x} = 0 \implies p_4(\mu) = \mu^4 + k^2 \mu^2 = \mu^2 (\mu^2 + k^2) = 0. \quad (9.1.49)$$

Προφανώς οι τέσσερις ρίζες της χαρακτηριστικής αυτής εξίσωσης  $p_4(\mu) = 0$  είναι οι εξής:

$$\mu_{1,2} = 0, \quad \mu_{3,4} = \pm ik. \quad (9.1.50)$$

Σημειώνουμε βέβαια ότι η μηδενική ρίζα  $\mu_{1,2} = 0$  είναι επιπλέον και διπλή ρίζα. Επίσης ότι οι ρίζες  $\mu_{3,4} = \pm ik$  είναι συζυγείς φανταστικές. Επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους

του Euler:  $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$ . Άρα σύμφωνα και με τις γνώσεις μας για τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης από την Παράγραφο A5.5 παίρνουμε τελικά την ακόλουθη γενική λύση:

$$v_h(x) = A + Bx + C \cos kx + D \sin kx \quad (9.1.51)$$

της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεώς μας τετάρτης τάξεως (9.1.46). Ασφαλώς οι τέσσερις σταθερές  $A$ ,  $B$ ,  $C$  και  $D$  στη γενική αυτή λύση (9.1.51) είναι αυθαίρετες προς το παρόν τουλάχιστον. Αυτό συμβαίνει, επειδή δεν έχουμε ακόμη πάρει υπόψη μας τις τέσσερις συνοριακές συνθήκες πακτώσεως (9.1.47) στα δύο πακτωμένα άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  του αμφίπακτου στύλου που μελετάμε. Στις συνθήκες αυτές (συγκεκριμένα στη δεύτερη και στην τέταρτη) χρειαζόμαστε επίσης και την πρώτη παράγωγο  $v'_h(x)$  της πιο πάνω γενικής λύσεως  $v_h(x)$ , που είναι η εξής:

$$v'_h(x) = B - kC \sin kx + kD \cos kx. \quad (9.1.52)$$

Με βάση τη γενική λύση (9.1.51) που βρήκαμε και την παράγωγό της (9.1.52) οι τέσσερις συνοριακές συνθήκες (9.1.47) για τις πακτώσεις του αμφίπακτου στύλου στα δύο άκρα του  $x = 0$  και  $x = L$  παίρνουν τις μορφές

$$A + C = 0, \quad (9.1.53)$$

$$B + kD = 0, \quad (9.1.54)$$

$$A + BL + C \cos kL + D \sin kL = 0, \quad (9.1.55)$$

$$B - kC \sin kL + kD \cos kL = 0. \quad (9.1.56)$$

Γενικά ισχύει η τετριμμένη (μηδενική) λύση  $v_t(x) \equiv 0$  του παρόντος προβλήματος συνοριακών τιμών (9.1.46) και (9.1.47). Αυτή δηλώνει την έλλειψη λυγισμού, κάτι το πολύ ευχάριστο για τον Πολιτικό Μηχανικό. Σε ειδικές όμως περιπτώσεις, τις οποίες διερευνούμε τώρα, έχουμε και μη τετριμμένες (μη μηδενικές) λύσεις. Τούτο μπορεί να συμβεί, μόνο εφόσον το παραπάνω σύστημα των τεσσάρων ομογενών γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (9.1.53) έως (9.1.56) έχει πέρα από την προφανή τετριμμένη (μηδενική) λύση  $A = B = C = D = 0$  και μη τετριμμένη (μη μηδενική) λύση. Όπως γνωρίζουμε από τη Γραμμική Άλγεβρα, για να συμβαίνει αυτό σε ένα ομογενές σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (εδώ με αγνώστους τις σταθερές  $A$ ,  $B$ ,  $C$  και  $D$ ), θα πρέπει η ορίζουσα  $D_t$  των συντελεστών των αγνώστων να ισούται με μηδέν. Δηλαδή στην περίπτωση μας θα πρέπει να ισχύει

$$D_t = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 1 & L & \cos kL & \sin kL \\ 0 & 1 & -k \sin kL & k \cos kL \end{vmatrix} = 0 \quad (9.1.57)$$

Υπολογίζοντας τη σχετική ορίζουσα  $D_t$  και διαιρώντας με  $k$  ( $k > 0$  για μη τετριμμένες λύσεις), προκύπτει τελικά η τριγωνομετρική (όχι απλά αλγεβρική) εξίσωση

$$2(1 - \cos kL) - kL \sin kL = 0, \quad (9.1.58)$$

στην οποία υπεισέρχονται οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις  $\cos kL$  και  $\sin kL$ . Αυτή είναι η χαρακτηριστική εξίσωση για τον προσδιορισμό των ιδιοτιμών  $k_n$  της σταθεράς  $k = \sqrt{P/(EI)}$  που επιτρέπουν μη τετριμμένη (μη μηδενική) λύση στο πρόβλημα του λυγισμού αμφίπακτου στύλου. Δηλαδή μόνο γι' αυτές τις τιμές  $k_n$  της σταθεράς  $k$  παρουσιάζεται το φαινόμενο του λυγισμού του στύλου.

Αν και προφανώς δε μπορούμε να αποφύγουμε τις συνοριακές συνθήκες (9.1.47) καθώς και το σχετικό σύστημα των ομογενών γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (9.1.53) έως (9.1.56), εντούτοις μπορούμε σχετικά εύκολα να έχουμε μια απλούστερη ορίζουσα  $D_t^*$  μόλις δευτέρας τάξεως.

Προς το σκοπό αυτό απλά λύνουμε τις δύο πρώτες (τις απλούστερες) ομογενείς γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις (9.1.53) και (9.1.54) του πιο πάνω συστήματος βρίσκοντας

$$A + C = 0 \implies A = -C \quad \text{και επίσης} \quad B + kD = 0 \implies B = -kD. \quad (9.1.59)$$

Αντικαθιστούμε τώρα τις λύσεις αυτές  $A = -C$  και  $B = -kD$  στις δύο τελευταίες (τις δυσκολότερες) ομογενείς γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις (9.1.55) και (9.1.56). Αυτές παίρνουν τότε τις μορφές

$$-C + (-kD)L + C \cos kL + D \sin kL = 0, \quad (9.1.60)$$

$$-kD - kC \sin kL + kD \cos kL = 0, \quad (9.1.61)$$

που αμέσως απλοποιούνται ως εξής:

$$C(\cos kL - 1) + D(\sin kL - kL) = 0, \quad (9.1.62)$$

$$C(-\sin kL) + D(\cos kL - 1) = 0. \quad (9.1.63)$$

(Στη δεύτερη εξίσωση διαιρέσαμε και με τη σταθερά  $k$  με  $k > 0$ .)

Τώρα έχουμε ένα σύστημα δύο μόνο ομογενών γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (αντί τεσσάρων προηγουμένως) με αγνώστους τις σταθερές  $C$  και  $D$ . Ο μηδενισμός της σχετικής οριζουσας  $D_t^*$

$$D_t^* = \begin{vmatrix} \cos kL - 1 & \sin kL - kL \\ -\sin kL & \cos kL - 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (9.1.64)$$

επιτρέπει μη τετριμμένες (μη μηδενικές) λύσεις του παρόντος προβλήματος συνοριακών τιμών και ιδιοτιμών. Υπολογίζοντας την οριζουσα αυτή  $D_t^*$  (μόλις δευτέρας τάξεως, όχι τετάρτης), διαπιστώνουμε αμέσως ότι, για να έχουμε λυγισμό του αμφίπακτου στύλου μας, θα πρέπει να ισχύει

$$(\cos kL - 1)^2 + (\sin kL - kL) \sin kL = 0. \quad (9.1.65)$$

Την τριγωνομετρική αυτή εξίσωση την ξαναγράφουμε στη μορφή

$$\cos^2 kL + 1 - 2 \cos kL + \sin^2 kL - kL \sin kL = 0. \quad (9.1.66)$$

Αφού μάλιστα πάντοτε  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ , όπως πολύ καλά γνωρίζουμε από την Τριγωνομετρία, παίρνουμε τελικά

$$2(1 - \cos kL) - kL \sin kL = 0. \quad (9.1.67)$$

Πρόκειται για την ίδια ακριβώς τριγωνομετρική εξίσωση για τις ιδιοτιμές  $k_n$  της σταθεράς  $k$  που είχαμε βρει και πρωτύτερα, εξίσωση (9.1.58), με τη χρήση της οριζουσας τετάρτης τάξεως  $D_t$ .

Αφού κάναμε που κάναμε τόσο κόπο, δε βλέπεται να παρατηρήσουμε ότι η ίδια τριγωνομετρική εξίσωση (9.1.58) ή (9.1.67) μπορεί να προκύψει εδώ και με ακόμη απλούστερο τρόπο χωρίς καθόλου τη χρήση οριζουσας  $D_t$  ή  $D_t^*$ . Ο τρόπος αυτός συνίσταται απλά στο να φέρουμε τους όρους οι οποίοι περιέχουν τη σταθερά  $D$  στα δεξιά μέλη των δύο ομογενών γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (9.1.62) και (9.1.63). Τότε αυτές παίρνουν τις απόλυτα ισοδύναμες μορφές τους

$$C(\cos kL - 1) = -D(\sin kL - kL), \quad (9.1.68)$$

$$C(-\sin kL) = -D(\cos kL - 1). \quad (9.1.69)$$

Υποθέτοντας τις σταθερές  $C$  και  $D$  μη μηδενικές στη μη τετριμμένη (μη μηδενική) λύση του προβλήματος λυγισμού που εξετάζουμε, απλά διαιρούμε τη δεύτερη πιο πάνω εξίσωση δια της πρώτης. Έτσι βρίσκουμε

$$\frac{-\sin kL}{\cos kL - 1} = \frac{\cos kL - 1}{\sin kL - kL} \implies (\cos kL - 1)^2 + (\sin kL - kL) \sin kL = 0. \quad (9.1.70)$$

Καταλήγουμε επομένως και πάλι στην ίδια τριγωνομετρική εξίσωση (9.1.65) και από αυτήν στην ισοδύναμή της εξίσωση (9.1.67). Ας την επαναλάβουμε:

$$2(1 - \cos kL) - kL \sin kL = 0. \quad (9.1.71)$$

Θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε κατευθείαν στην αριθμητική επίλυση της τριγωνομετρικής αυτής εξίσωσης (9.1.71). Όμως αυτό δε θεωρείται καθόλου κομψό στη Μηχανική των Υλικών και παραπέρα στην Ελαστική Ευστάθεια, όπου ανήκουν τα προβλήματα λυγισμού. Ο λυγισμός αμφίπακτου στύλου είναι ένα ιδιαίτερα κλασικό πρόβλημα και πολύ χρήσιμο για τον Πολιτικό Μηχανικό. Γι' αυτό προτιμάμε να ακολουθήσουμε το συνήθη τρόπο εργασίας που παρουσιάζεται στα συγγράμματα του Πολιτικού Μηχανικού: Μηχανικής των Υλικών και Ελαστικής Ευστάθειας. Η διαδικασία αυτή προβλέπει την παραπέρα απλοποίηση της τριγωνομετρικής εξίσωσης (9.1.71) με τη χρήση των δύο γνωστών τριγωνομετρικών τύπων:

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x \implies 1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x \quad \text{και επίσης} \quad \sin 2x = 2 \cos x \sin x. \quad (9.1.72)$$

Στην περίπτωση μας με τη χρήση των τύπων αυτών για  $x = kL/2$ , ξαναγράφουμε την τριγωνομετρική εξίσωση (9.1.71) στη νέα μορφή της

$$4 \sin^2 \frac{kL}{2} - 2kL \cos \frac{kL}{2} \sin \frac{kL}{2} = 0. \quad (9.1.73)$$

Διαιρώντας μάλιστα δια 4 και βγάζοντας κοινό παράγοντα τον όρο  $\sin(kL/2)$ , παίρνουμε την τριγωνομετρική εξίσωση

$$\left( \sin \frac{kL}{2} - \frac{kL}{2} \cos \frac{kL}{2} \right) \sin \frac{kL}{2} = 0. \quad (9.1.74)$$

Με διαίρεση του πρώτου παράγοντα (αυτού μέσα στις παρενθέσεις) με  $\cos(kL/2)$ , η ίδια τριγωνομετρική εξίσωση (9.1.74) γράφεται και στην τελική της μορφή

$$\left( \tan \frac{kL}{2} - \frac{kL}{2} \right) \sin \frac{kL}{2} = 0. \quad (9.1.75)$$

Αν μάλιστα ούτε αυτή η τριγωνομετρική εξίσωση μας πολυαρέσει, την απλοποιούμε θέτοντας

$$z = \frac{kL}{2}, \quad \text{οπότε παίρνουμε την εξίσωση} \quad (\tan z - z) \sin z = 0. \quad (9.1.76)$$

Για τις θετικές λύσεις  $z = kL/2 > 0$  (αφού  $k > 0$  για μη τετριμμένες λύσεις και επίσης  $L > 0$ ) της τελικής αυτής τριγωνομετρικής εξίσωσης μόνο δύο δυνατότητες υπάρχουν. Η πρώτη δυνατότητα είναι να μηδενίζεται ο πρώτος παράγοντας, δηλαδή

$$\tan z - z = 0 \quad \text{με μικρότερη προσεγγιστική λύση τη λύση} \quad z_{1,1} \approx 4.49341, \quad (9.1.77)$$

η οποία προκύπτει με αριθμητική επίλυση (π.χ. με τη μέθοδο Newton-Raphson). Η δεύτερη δυνατότητα είναι να μηδενίζεται ο δεύτερος παράγοντας, δηλαδή

$$\sin z = 0 \implies z_{n,2} = n\pi \implies \frac{k_{n,2}L}{2} = n\pi \implies k_{n,2} = \frac{2n\pi}{L} \quad \text{με} \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.1.78)$$

Από όλες αυτές τις θετικές λύσεις της εξίσωσης (9.1.76) παρατηρούμε ότι η μικρότερη είναι η λύση  $z_{\min} = z_{1,2} = 1 \cdot \pi = \pi \approx 3.14159$ . Σ' αυτήν τη λύση αντιστοιχεί και η μικρότερη ιδιοτιμή

$$k_{\min} = \frac{2z_{\min}}{L} = \frac{2\pi}{L}, \quad \text{αφού} \quad z = \frac{kL}{2}, \quad \text{οπότε} \quad k = \frac{2z}{L}. \quad (9.1.79)$$

Δεν απομένει πια παρά να θυμηθούμε το βασικό τύπο (9.1.5),  $k = \sqrt{P/(EI)}$ . Από αυτόν προκύπτει και ο τύπος

$$P_{cr} = k_{\min}^2 EI \quad (9.1.80)$$

για το ελάχιστο φορτίο λυγισμού, αυτό που ο Πολιτικός Μηχανικός αποκαλεί πάντοτε κρίσιμο φορτίο λυγισμού  $P_{cr}$ . Επομένως στο παρόν πρόβλημα με βάση την πιο πάνω σχέση (9.1.79), δηλαδή  $k_{\min} = 2\pi/L$ , από τον τύπο (9.1.80) θα έχουμε τον ακόλουθο τελικό τύπο για το κρίσιμο φορτίο λυγισμού  $P_{cr}$  σε αμφίπακτο στύλο μήκους  $L$  και ελάχιστης δυσκαμψίας  $EI$ :

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \approx \frac{40EI}{L^2}. \quad (9.1.81)$$

Αυτό είναι που ενδιαφέρει τον Πολιτικό Μηχανικό: πότε πραγματικά θα λυγίσει ο αμφίπακτος στύλος. Ας σημειωθεί βέβαια και το αναμενόμενο αποτέλεσμα ότι το κρίσιμο αυτό φορτίο λυγισμού  $P_{cr}$  είναι 4 φορές μεγαλύτερο από εκείνο για τον αμφιαρθρωτό στύλο, τύπος (9.1.25), και επίσης 16 φορές μεγαλύτερο από εκείνο για το στύλο με πάκτωση στο κάτω άκρο του και άρθρωση στο πάνω άκρο του, τύπος (9.1.41), με το ίδιο μήκος στύλου  $L$  και την ίδια δυσκαμψία  $EI$ .

◆ **Συμπέρασμα:** Επομένως, εάν ο Πολιτικός Μηχανικός καταφέρει σε ένα στύλο με πακτωμένο το κάτω άκρο του  $x = 0$  και ελεύθερο το επάνω  $x = L$  να πακτώσει και το επάνω άκρο, πετυχαίνει αύξηση κατά 16 φορές του κρίσιμου φορτίου λυγισμού  $P_{cr}$ . Ένα μάλλον ενδιαφέρον συμπέρασμα!

## Α9.2. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ: ΚΑΜΠΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΔΟΚΟΥ

### Α9.2.1. Το γενικό πρόβλημα συνοριακών τιμών και ιδιοτιμών

Ένα εξίσου σημαντικό με το λυγισμό στύλου πρόβλημα συνοριακών τιμών και ιδιοτιμών στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού αφορά στις καμπτικές ιδιοταλαντώσεις (και γενικότερα στις ελεύθερες ταλαντώσεις) μιας συνήθους δοκού, συγκεκριμένα στη Δυναμική των Κατασκευών. Στο πρόβλημα του λυγισμού στύλου το επιθυμητό ήταν κυρίως ο προσδιορισμός των φορτίων λυγισμού  $P_n$ . Στο πρόβλημα των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων δοκού το επιθυμητό είναι κυρίως ο προσδιορισμός των ιδιοσυχνοτήτων (κυκλικών ιδιοσυχνοτήτων)  $\omega_n$  των ταλαντώσεων αυτών. Το πρόβλημα του λυγισμού στύλου το εξετάσαμε στην προηγούμενη Ενότητα Α9.1. Το πρόβλημα των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων συνήθους δοκού θα το εξετάσουμε στην παρούσα Ενότητα Α9.2.

Η συνήθης διαφορική εξίσωση για το παρόν πρόβλημα των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων συνήθους δοκού προκύπτει ότι είναι γραμμική, ομογενής και τετάρτης τάξεως. Όπως θα μάθουμε στο επόμενο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙΙ, η διαφορική αυτή εξίσωση έχει τη μορφή

$$X''''(x) - \beta^4 X(x) = 0 \quad \text{με} \quad 0 < x < L, \quad (9.2.1)$$

όπου  $L$  δηλώνει το μήκος της ιδιοταλαντούμενης συνήθους δοκού. Ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η θέση  $x$  κατά μήκος της δοκού (με  $0 < x < L$ ) και άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) είναι το προσημασμένο εύρος (ή χωρική συνιστώσα)  $X(x)$  του βέλους κάμψης  $v$  της δοκού. Η σταθερά  $\beta$  στη διαφορική αυτή εξίσωση είναι μια παράμετρος που δίνεται από τον εξής τύπο:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2}{EI}}. \quad (9.2.2)$$

Στον τύπο αυτό υπεισέρχονται η πυκνότητα  $\rho$  του ελαστικού υλικού της δοκού, το εμβαδόν  $A$  της διατομής της, η κυκλική συχνότητα  $\omega$  των ιδιοταλαντώσεών της και η δυσκαμψία της  $EI$ . Η δυσκαμψία  $EI$  είναι ίση με το γινόμενο του μέτρου ελαστικότητας (ή μέτρου του Young)  $E$  του ελαστικού υλικού της δοκού επί τη ροπή αδρανεΐας  $I$  της διατομής της ως προς τον ουδέτερο άξονά της στην κάμψη. Ας σημειώσουμε παρενθετικά ότι, όπως το γινόμενο  $EI$  εκφράζει τη δυσκαμψία της δοκού, έτσι και το γινόμενο  $\rho A$  (πυκνότητα  $\rho$  επί εμβαδόν διατομής  $A$ ) εκφράζει τη γραμμική πυκνότητα της δοκού. Η σταθερά  $\beta$  στη διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως (9.2.1) είναι η σχετική παράμετρος, για την οποία θα βρούμε παρακάτω τις ιδιοτιμές (ή χαρακτηριστικές τιμές)  $\beta_n$ . Μόλις το πετύχουμε αυτό, με γνωστές τις σταθερές  $\rho A$  (γραμμική πυκνότητα) και  $EI$  (δυσκαμψία)



θα μπορέσουμε να προσδιορίσουμε τις ιδιοσυχνότητες των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων (ή απλά ιδιοσυχνότητες)  $\omega_n$  της δοκού με βάση τον τύπο (9.2.2) ορισμού της σταθεράς  $\beta$ , συγκεκριμένα

$$\beta_n = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega_n^2}{EI}} \implies \beta_n^2 = \omega_n \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \implies \omega_n = \beta_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \quad (9.2.3)$$

Ας παρατηρήσουμε ότι η σταθερά παράμετρος  $\beta$  στην παρούσα διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως (9.2.1) παίζει το ρόλο της σταθεράς παραμέτρου  $k = \sqrt{P/(EI)}$  στην αντίστοιχη διαφορική εξίσωση για το λυγισμό στύλου, π.χ. στη διαφορική εξίσωση (επίσης τετάρτης τάξεως) (9.1.46). Επίσης, όπως οι ιδιοτιμές  $k_n$  της σταθεράς  $k$  μας επιτρέπουν να υπολογίζουμε τα φορτία λυγισμού  $P_n$ , έτσι ακριβώς και οι ιδιοτιμές  $\beta_n$  της σταθεράς  $\beta$  θα μας επιτρέψουν στην ενότητα αυτή να υπολογίζουμε τις ιδιοσυχνότητες  $\omega_n$  των καμπτικών ταλαντώσεων. Φυσικά για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τους παραπάνω τύπους (9.2.3).

Για να μπορέσουμε όμως να προχωρήσουμε στο έργο μας αυτό, θα πρέπει βέβαια να έχουμε διαθέσιμες και τις τέσσερις συνοριακές συνθήκες στα δύο άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  της δοκού που εξετάζουμε. Αυτές ποικίλλουν ανάλογα με τη στήριξη ή την έλλειψη στηρίξεως σε ένα άκρο δοκού. Παραδείγματος χάρη, σε ένα συγκεκριμένο άκρο δοκού  $x = a$  θα έχουμε

$$X(a) = 0, \quad X'(a) = 0 \quad \text{για ένα πακτωμένο άκρο,} \quad (9.2.4)$$

$$X(a) = 0, \quad X''(a) = 0 \quad \text{για ένα απλά στηριζόμενο άκρο: άρθρωση ή κύλιση,} \quad (9.2.5)$$

$$X''(a) = 0, \quad X'''(a) = 0 \quad \text{για ένα ελεύθερο άκρο.} \quad (9.2.6)$$

Οι συνοριακές αυτές συνθήκες είναι απόλυτα ανάλογες με τις αντίστοιχες συνθήκες για μη ταλαντούμενη συνήθη δοκό σε κάμψη, που έχουμε ήδη αναφέρει στην Παράγραφο Α2.1.6 του Κεφαλαίου Α2. Συγκεκριμένα εκεί αναφέραμε τις συνθήκες (2.1.37) για πάκτωση, τις συνθήκες (2.1.38) για απλή στήριξη (δηλαδή για άρθρωση ή κύλιση) και τις συνθήκες (2.1.39) για ελεύθερο άκρο.

Φυσικά για τη συνήθη δοκό μας μήκους  $L$  με αριστερό άκρο το σημείο  $x = 0$  και δεξιό άκρο το σημείο  $x = L$ , οι δύο δυνατές τιμές του  $a$  είναι μόνο  $x = 0$  και  $x = L$ . Παραδείγματος χάρη, για μια αμφιέριστη δοκό (με άρθρωση-κύλιση στα δύο άκρα της  $x = 0$  και  $x = L$  ή αντίστροφα) θα χρησιμοποιήσουμε μόνο τις συνοριακές συνθήκες (9.2.5) με  $a = 0$  (για το αριστερό άκρο) και  $a = L$  (για το δεξιό άκρο). Έτσι θα έχουμε στο παράδειγμα αυτό τις εξής τέσσερις συνοριακές συνθήκες:

$$X(0) = 0, \quad X''(0) = 0, \quad X(L) = 0, \quad X''(L) = 0. \quad (9.2.7)$$

Από φυσικής απόψεως στις συνοριακές αυτές συνθήκες οι μηδενισμοί της ίδιας της άγνωστης συναρτήσεως  $X(x)$  στα δύο άκρα της δοκού,  $X(0) = X(L) = 0$ , δηλώνουν την ανυπαρξία βέλους κάμψεως  $v$  στα δύο αυτά σημεία στις παρούσες καμπτικές ιδιοταλαντώσεις. Τούτο είναι εύλογο λόγω των απλών στηρίξεων (αρθρώσεως και κυλίσεως ή αντίστροφα) στα δύο αυτά άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  της καμπτικά ιδιοταλαντούμενης δοκού. Παραπέρα οι μηδενισμοί της δευτέρας παραγώγου  $X''(x)$  της άγνωστης συναρτήσεως  $X(x)$  στα ίδια άκρα της δοκού,  $X''(0) = X''(L) = 0$ , δηλώνουν την ανυπαρξία καμπτικής ροπής (ροπής κάμψεως)  $M$  στις ίδιες καμπτικές ιδιοταλαντώσεις που εξετάζουμε. Ανάλογα εργαζόμαστε και για άλλα είδη δοκών: (α) αμφίπακτη δοκό, (β) μονόπακτη υπερστατική δοκό και (γ) πρόβολο. Είναι επίσης απόλυτα δυνατή η μελέτη και μιας ελεύθερης και στα δύο άκρα της δοκού. Όμως στην ειδική αυτή περίπτωση η δοκός μπορεί φυσικά να κινείται και σαν ελεύθερο σώμα, δηλαδή και με μηδενική κυκλική συχνότητα  $\omega_0 = 0$ . Ανάλογα ισχύουν και σε περίπτωση δοκού με το ένα άκρο της αρθρωμένο ή κυλιόμενο και το άλλο άκρο της ελεύθερο.

Έτσι σε κάθε περίπτωση καμπτικά ιδιοταλαντούμενης δοκού το πρόβλημα συνοριακών τιμών και ιδιοτιμών που έχουμε να επιλύσουμε αποτελείται από την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως (9.2.1) και τις σχετικές τέσσερις συνοριακές συνθήκες που τη συνοδεύουν. Για παράδειγμα, σε περίπτωση αμφιέριστης δοκού, όπου και θα εστιάσουμε την προσοχή μας,

θα ισχύουν οι τέσσερις συνοριακές συνθήκες (9.2.7). Τόσο η διαφορική εξίσωση (9.2.1) όσο και οι συνοριακές συνθήκες (9.2.4), (9.2.5) και (9.2.6) (ανάλογα με τη στήριξη ή την έλλειψη στηρίξεως της δοκού στα άκρα της), συγκεκριμένα για την αμφιέριστη δοκό τελικά οι τέσσερις συνοριακές συνθήκες (9.2.7), είναι ομογενείς. Επομένως έχουμε προς επίλυση ένα ομογενές πρόβλημα συνοριακών τιμών και ιδιοτιμών με προφανή λύση του την τετριμμένη λύση (τη μηδενική λύση)

$$X_i(x) = 0 \quad \text{ή σαφέστερα} \quad X_i(x) \equiv 0. \quad (9.2.8)$$

Δεν ενδιαφερόμαστε όμως για τη λύση αυτή. Θα ήμασταν εξαιρετικά αφελείς, αν κάναμε κάτι τέτοιο, αφού η τετριμμένη (η μηδενική) λύση  $X_i(x) \equiv 0$  υποδηλώνει την ανυπαρξία καμπτικών ιδιοταλαντώσεων της δοκού. Ανάλογα και στο πρόβλημα του λυγισμού ενός στύλου η τετριμμένη (η μηδενική) λύση  $v_i(x) \equiv 0$  υποδηλώνει την έλλειψη λυγισμού του στύλου. Εδώ εμείς θα προσδιορίσουμε τις ιδιοτιμές  $\beta_n$  της βοηθητικής σταθεράς  $\beta$ , της παραμέτρου στη διαφορική εξίσωση (9.2.1), που θα μας δώσουν μη τετριμμένες (μη μηδενικές) λύσεις  $X_n(x)$ :  $X_n(x) \not\equiv 0$ . Αυτές θα είναι οι ιδιοσυναρτήσεις (ή χαρακτηριστικές συναρτήσεις) του προβλήματος των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων δοκού. Ο Πολιτικός Μηχανικός τις αποκαλεί συνήθως ιδιομορφές της δοκού.

### A9.2.2. Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

Ασφαλώς, όπως κάναμε και στο λυγισμό στύλου, το πρώτο μας μέλημα είναι ο προσδιορισμός της γενικής λύσεως  $X_h(x)$  της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης τετάρτης τάξεως (9.2.1) των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων συνήθους δοκού. Την επαναλαμβάνουμε:

$$X''''(x) - \beta^4 X(x) = 0 \quad \text{με} \quad 0 < x < L. \quad (9.2.9)$$

Δεν πρόκειται για δύσκολη διαφορική εξίσωση. Για την επίλυσή της μπορούν να χρησιμοποιηθούν: είτε (α) η μέθοδος της εκθετικής αντικαταστάσεως είτε (β) η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace. Η μέθοδος της εκθετικής αντικαταστάσεως είναι λίγο απλούστερη. Την προτιμάμε.

Δεχόμαστε έτσι πιθανή εκθετική λύση της μορφής

$$X_0(x) = e^{\mu x}, \quad \text{οπότε} \quad X_0''''(x) = \mu^4 e^{\mu x}. \quad (9.2.10)$$

Με αντικατάσταση των εκθετικών αυτών εκφράσεων της άγνωστης συναρτήσεως  $X(x)$  και της τετάρτης παραγώγου της  $X''''(x)$  στη διαφορική εξίσωση (9.2.9) προσδιορίζουμε εύκολα τη σχετική τεταρτοβάθμια χαρακτηριστική εξίσωση  $p_4(\mu) = 0$  για τον άγνωστο εκθέτη  $\mu$ . Έτσι έχουμε

$$\mu^4 e^{\mu x} - \beta^4 e^{\mu x} = 0 \implies (\mu^4 - \beta^4) e^{\mu x} = 0 \implies p_4(\mu) = \mu^4 - \beta^4 = (\mu^2 - \beta^2)(\mu^2 + \beta^2) = 0, \quad (9.2.11)$$

αν θυμηθούμε και τον τόσο γνωστό μας αλγεβρικό τύπο  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$  για τη διαφορά δύο τετραγώνων:  $a^2$  μείον  $b^2$ .

Κατά συνέπεια οι τέσσερις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $p_4(\mu) = 0$  είναι οι εξής:

$$\mu_{1,2} = \pm\beta, \quad \mu_{3,4} = \pm i\beta \quad \text{με} \quad i = \sqrt{-1} \quad \text{τη φανταστική μονάδα.} \quad (9.2.12)$$

Πρόκειται για τέσσερις απλές (διαφορετικές) ρίζες: οι δύο πρώτες ρίζες ( $\mu_{1,2} = \pm\beta$ ) είναι πραγματικές, ενώ οι δύο άλλες ρίζες ( $\mu_{3,4} = \pm i\beta$ ) είναι συζυγείς μιγαδικές (εδώ συζυγείς φανταστικές).

Επομένως η γενική λύση  $X_h(x)$  της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης τετάρτης τάξεως (9.2.1) των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων συνήθους δοκού θα έχει τη γενική μορφή

$$X_h(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} + C_3 e^{i\beta x} + C_4 e^{-i\beta x} \quad (9.2.13)$$

με τα σύμβολα  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  και  $C_4$  να δηλώνουν τέσσερις αυθαίρετες σταθερές. Είναι μαθηματικά σωστή και αποδεκτή η γενική αυτή λύση  $X_h(x)$ , αλλά δεν πολυαρέσει στον Πολιτικό Μηχανικό,

ο οποίος προτιμάει τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις αντί για τις μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις. Μπορούμε εύκολα να κάνουμε τη σχετική μετατροπή, αν θυμηθούμε τους γνωστούς τύπους (1.5.6) για τις υπερβολικές συναρτήσεις καθώς και (1.5.3) και (1.5.4) για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις:

$$e^{\pm x} = \cosh x \pm \sinh x, \quad e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x. \quad (9.2.14)$$

Οι δύο πρώτοι τύποι,  $e^{\pm x} = \cosh x \pm \sinh x$ , προκύπτουν άμεσα από τους ορισμούς (1.5.5) των υπερβολικών συναρτήσεων  $\cosh x$  και  $\sinh x$ . Οι δύο δεύτεροι τύποι,  $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$ , είναι οι γνωστοί μας τύποι του Euler για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις  $\cos x$  και  $\sin x$ .

Ας σημειώσουμε ότι για λόγους συμμετρίας, αλλά και ουσιαστικής διευκολύνσεώς μας στις αλγεβρικές πράξεις, θα μετατρέψουμε όχι μόνο τις μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις  $e^{\pm i\beta x}$ , αλλά και τις πραγματικές εκθετικές συναρτήσεις  $e^{\pm \beta x}$  σε συναρτήσεις συνημιτόνων και ημιτόνων: τριγωνομετρικών και υπερβολικών αντίστοιχα. Έτσι με τη χρήση των τύπων (9.2.14) η πιο πάνω γενική λύση  $X_h(x)$  της διαφορικής εξισώσεως (9.2.9), που δίνεται από τη σχέση (9.2.13), παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} X_h(x) = & C_1(\cosh \beta x + \sinh \beta x) + C_2(\cosh \beta x - \sinh \beta x) \\ & + C_3(\cos \beta x + i \sin \beta x) + C_4(\cos \beta x - i \sin \beta x). \end{aligned} \quad (9.2.15)$$

Εισάγοντας μάλιστα και τις τέσσερις νέες αυθαίρετες σταθερές

$$A = C_1 + C_2, \quad B = C_1 - C_2, \quad C = C_3 + C_4, \quad D = i(C_3 - C_4), \quad (9.2.16)$$

διαπιστώνουμε πολύ εύκολα ότι η γενική αυτή λύση (9.2.15) μπορεί να γραφεί και στην καθαρά πραγματική μορφή

$$X_h(x) = A \cosh \beta x + B \sinh \beta x + C \cos \beta x + D \sin \beta x. \quad (9.2.17)$$

Για πραγματικές τιμές των νέων αυθαίρετων σταθερών  $A, B, C$  και  $D$  η τελευταία μορφή (9.2.17) της γενικής λύσεως  $X_h(x)$  είναι καθαρά πραγματική. Ακριβώς τούτο επιθυμεί ο Πολιτικός Μηχανικός στο παρόν πρόβλημά του των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων δοκού, αλλά και σχεδόν σε όλα τα τεχνικά προβλήματά του. Φυσικά αυτά αφορούν σε πραγματικές ποσότητες, εδώ στην άγνωστη συνάρτηση  $X(x)$  της διαφορικής εξισώσεως (9.2.9). Άρα και οι σχετικές λύσεις  $X_h(x)$  θα πρέπει οπωσδήποτε να είναι (τελικά τουλάχιστον) πραγματικές. Αλίμονό μας, αν καταλήξουμε σε μιγαδική λύση του παρόντος προβλήματος συνοριακών τιμών και ιδιοτιμών! Δε θα είναι σωστό αυτό!

### A9.2.3. Το πρόβλημα συνοριακών τιμών και ιδιοτιμών για αμφιέρριστη δοκό

Είναι βέβαια προφανές και έχει ήδη αναφερθεί ότι το ομογενές πρόβλημα συνοριακών τιμών για ιδιοταλαντούμενη δοκό έχει την τετριμμένη λύση  $X_t(x) \equiv 0$ . Αυτή όμως δεν παριστάνει ιδιοταλαντώσεις της δοκού (αντίθετα αφορά σε πλήρη έλλειψη ταλαντώσεων) και επομένως απορρίπτεται. Η απόρριψη αυτή δε σημαίνει βέβαια ότι ο Πολιτικός Μηχανικός θέλει να έχει ιδιοταλαντώσεις (και γενικότερα ελεύθερες ταλαντώσεις) στις δοκούς του. Ασφαλώς δεν τις θέλει! Αλλά ... Αλλά τί;

Το έργο του Πολιτικού Μηχανικού δεν περιορίζεται στις ευνοϊκές περιπτώσεις. Είναι σίγουρα ευνοϊκή περίπτωση να μην έχει λυγίσει ένας στύλος σε μια κατασκευή, αλλά δυστυχώς ο Πολιτικός Μηχανικός πρέπει στη μελέτη του να λάβει υπόψη του ότι για αξονική θλιπτική φόρτιση  $P$  ίση με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού  $P_{cr}$  ο στύλος θα λυγίσει, ώστε τα αληθινά θλιπτικά φορτία  $P$  που ασκούνται στο στύλο να είναι μικρότερα του  $P_{cr}$ . Έτσι και στις καμπτικές ιδιοταλαντώσεις δοκού, θα ήταν πάρα πολύ ωραία να μην παρουσιάζονταν καθόλου στις δοκούς μιας κατασκευής, όπως:

- Σε μια καλωδιωτή ή κρεμαστή γέφυρα, όταν περνάει ένα βαρύ όχημα ή όταν φυσάει πολύ δυνατός άνεμος.
- Στον πύργο ελέγχου ενός αεροδρομίου, όταν απογειώνεται ένα πολύ μεγάλο αεροπλάνο.
- Σε έναν ουρανοξύστη, όταν φυσάει πάρα πολύ ισχυρός άνεμος.

- Σε μια συνηθισμένη αστική κατασκευή, π.χ. σε μια μονώροφη οικοδομή ή σε μια πολυκατοικία, όπως βέβαια και σε μια μεταλλική κατασκευή, σε μια γέφυρα, σε έναν ουρανοξύστη, κλπ., όταν παρουσιασθεί ξαφνικά ένα απευκταίο ισχυρό σεισμικό φαινόμενο.

Θα ήταν πολύ ωραία να μην υπήρχαν τα δυναμικά αυτά φαινόμενα, που οδηγούν στη διαφορική εξίσωση (9.2.1) ή (9.2.9), αλλά δυστυχώς υπάρχουν. Έτσι ο Πολιτικός Μηχανικός έχει καθήκον να μελετάει, να σχεδιάζει τις κατασκευές του (από πολυκατοικίες και μεταλλικές κατασκευές μέχρι γέφυρες και πύργους ελέγχου αεροδρομίων), έτσι ώστε να μην υπάρχει κίνδυνος αστοχίας τους ακόμη και για σεισμικά φαινόμενα. Τούτο αποτελεί την αντισεισμική μελέτη κατασκευών ή, καλύτερα, τον αντισεισμικό σχεδιασμό κατασκευών. Προς το σκοπό αυτό ο Πολιτικός Μηχανικός πρέπει να ξέρει να υπολογίζει τις ιδιοσυχνότητες  $\omega_n$ . Εδώ στο 2ο Εξάμηνο Σπουδών ξεκινάει από τις καμπτικές ιδιοταλαντώσεις μιας συνήθους δοκού. Στη συνέχεια προχωράει σε σύνθετες δυναμικές καταπονήσεις δοκών (π.χ. υπό ταυτόχρονη θλίψη, κάμψη και στρέψη) και παραπέρα σε δυναμικές καταπονήσεις σύνθετων κατασκευών, όπως είναι οι οικοδομές, οι γέφυρες, κλπ.

Υποτίθεται ότι τα σχόλια αυτά έχουν πείσει ακόμη και τον πολύ δύσπιστο Πολιτικό Μηχανικό να συνεχίσει τη μελέτη του παρόντος προβλήματος συντομικών τιμών και ιδιοτιμών για την καμπτική ιδιοταλαντούμενη αμφιέρειστη δοκό. Πρόκειται, ειλικρινά, για τη μαθηματικά και υπολογιστικά απλούστερη περίπτωση καμπτικών ιδιοταλαντώσεων δοκού, γι' αυτό και επιλέχθηκε αυτή στην παρούσα παράγραφο. Ας προχωρήσουμε τώρα στην εργασία μας.

Προσδιορίσαμε ήδη στη σχέση (9.2.17) τη γενική λύση  $X_h(x)$  της διαφορικής εξίσωσης (9.2.1) ή (9.2.9). Ας την επαναλάβουμε

$$X_h(x) = A \cosh \beta x + B \sinh \beta x + C \cos \beta x + D \sin \beta x. \quad (9.2.18)$$

Εδώ όμως μας ενδιαφέρει και η δεύτερη παράγωγός της  $X_h''(x)$ . Ας την υπολογίσουμε:

$$X_h''(x) = \beta^2 (A \cosh \beta x + B \sinh \beta x - C \cos \beta x - D \sin \beta x). \quad (9.2.19)$$

Αγνοούμε την ευνοϊκή περίπτωση ελλείψεως καμπτικών ιδιοταλαντώσεων στη δοκό, δηλαδή την περίπτωση όπου

$$A = B = C = D = 0, \quad \text{οπότε} \quad X_h(x) \equiv 0. \quad (9.2.20)$$

Θα βρούμε τις ιδιοτιμές  $\beta_n$  της σταθεράς (της παραμέτρου)  $\beta$  που επιτρέπουν αληθινές καμπτικές ιδιοταλαντώσεις (και ελεύθερες ταλαντώσεις) της αμφιέρειστης δοκού που εξετάζουμε. Πώς θα το κατορθώσουμε αυτό; Μα λαμβάνοντας υπόψη και τις τέσσερις συντομικές συνθήκες (9.2.7) για την αμφιέρειστη δοκό μας. Τις επαναλαμβάνουμε και αυτές:

$$X(0) = 0, \quad X''(0) = 0, \quad X(L) = 0, \quad X''(L) = 0. \quad (9.2.21)$$

Σημειώνουμε μάλιστα ξανά ότι αφορούν σε απλές στηρίξεις: άρθρωση και κύλιση ή αντίστροφα, ακριβώς όπως συμβαίνει στην αμφιέρειστη δοκό μας.

Διαθέτουμε λοιπόν τη γενική λύση (9.2.18) με τις τέσσερις αυθαίρετες σταθερές  $A, B, C$  και  $D$  σ' αυτήν και ζητάμε να τις προσδιορίσουμε, έτσι ώστε να ικανοποιούνται ταυτόχρονα και οι τέσσερις συντομικές συνθήκες (9.2.21). Ξεκινάμε από τις δύο πρώτες συνθήκες:  $X(0) = 0$  και  $X''(0) = 0$  στο άκρο  $x = 0$ . Αυτές με βάση τους τύπους (9.2.18) και (9.2.19) αντίστοιχα παίρνουν τις μορφές

$$X(0) = A + C = 0 \quad (9.2.22)$$

και επίσης

$$X''(0) = \beta^2 (A - C) = 0 \implies A - C = 0, \quad (9.2.23)$$

αφού προφανώς  $\beta > 0$  σε ιδιοταλαντώσεις (όπου  $\omega > 0$ ) λόγω του τύπου (9.2.2) ορισμού της βοηθητικής σταθεράς  $\beta$ , της παραμέτρου της διαφορικής εξίσωσης. Λύνουμε το τόσο απλό αυτό

σύστημα των δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων  $A + C = 0$  και  $A - C = 0$  προσθαφαιρώντας τις. Τίποτε δεν είναι ευκολότερο! Έτσι προκύπτει ότι πρόκειται για μηδενικές σταθερές, δηλαδή

$$A = C = 0. \quad (9.2.24)$$

Επομένως η γενική λύση  $X_h(x)$  της σχέσεως (9.2.18) παίρνει τώρα της μορφή της μερικής λύσεως

$$X_p(x) = B \sinh \beta x + D \sin \beta x \quad (9.2.25)$$

με δεύτερη παράγωγο την

$$X_p''(x) = \beta^2(B \sinh \beta x - D \sin \beta x). \quad (9.2.26)$$

Φυσικά για τη δεύτερη αυτή παράγωγο  $X_p''(x)$  το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα προκύπτει και από τη σχέση (9.2.19) απλά θέτοντας εκεί  $A = C = 0$ , όπως ήδη βρήκαμε στις σχέσεις (9.2.24). Ωραία!

Απέμειναν τώρα δύο αυθαίρετες σταθερές, οι  $B$  και  $D$ , στη μερική αυτή λύση  $X_p(x)$ , η οποία προφανώς βέβαια επαληθεύει και τις δύο πρώτες συνοριακές συνθήκες (9.2.21): τις συνοριακές συνθήκες  $X(0) = 0$  και  $X''(0) = 0$  στο αριστερό άκρο  $x = 0$  της καμπτικά ιδιοταλαντούμενης αμφιέριστης δοκού μας. Απομένουν έτσι οι δύο τελευταίες συνοριακές συνθήκες: οι  $X(L) = 0$  και  $X''(L) = 0$  στο δεξιό άκρο  $x = L$  της ίδιας δοκού. Ας τις λάβουμε και αυτές υπόψη. Με τις σκέψεις αυτές για  $x = L$  έχουμε

$$X_p(L) = B \sinh \beta L + D \sin \beta L = 0 \quad (9.2.27)$$

και επίσης

$$X_p''(L) = \beta^2(B \sinh \beta L - D \sin \beta L) = 0 \implies B \sinh \beta L - D \sin \beta L = 0, \quad (9.2.28)$$

αφού  $\beta > 0$  σε ιδιοταλαντώσεις, όπως ήδη αναφέραμε λίγο πιο πάνω.

Στο στόχο μας τώρα: στον προσδιορισμό των δύο αυθαίρετων σταθερών  $B$  και  $D$  που απέμειναν με τη λύση του συστήματος των δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (9.2.27) και (9.2.28) με αγνώστους τις δύο αυτές σταθερές  $B$  και  $D$ . Πρώτα τις προσθέτουμε βρίσκοντας ότι

$$B \sinh \beta L = 0, \quad \text{οπότε} \quad B = 0. \quad (9.2.29)$$

Τούτο ισχύει αναγκαστικά, επειδή  $\sinh x = 0$ , μόνο για  $x = 0$ . Το υπερβολικό ημίτονο  $\sinh x$  δε μηδενίζεται πουθενά αλλού. Άρα με  $L > 0$  (αλλιώς δε θα υπήρχε δοκός!) και με  $\beta > 0$  (αλλιώς δε θα υπήρχαν καμπτικές ιδιοταλαντώσεις!) θα ισχύει  $\sinh \beta L \neq 0$ , για την ακρίβεια  $\sinh \beta L > 0$ .

Και η τρίτη λοιπόν σταθερά  $B$  προέκυψε υποχρεωτικά μηδενική:  $A = C = B = 0$  μέχρι στιγμής. Αν θέλουμε μάλιστα, τονίζουμε το γεγονός αυτό γράφοντας την ήδη μερική λύση  $X_p(x)$  και τη δεύτερη παράγωγό της  $X_p''(x)$  στις σχέσεις (9.2.25) και (9.2.26) αντίστοιχα στην ακόμη μερικότερη μορφή τους (με  $B = 0$ )

$$X_p(x) = D \sin \beta x \quad \text{και επίσης} \quad X_p''(x) = -\beta^2 D \sin \beta x. \quad (9.2.30)$$

Τώρα θέτοντας  $x = L$  στη δεύτερη αυτή παράγωγο  $X_p''(x)$  (τέταρτη συνοριακή συνθήκη (9.2.21)), διαπιστώνουμε ότι

$$X''(L) = 0 \implies -\beta^2 D \sin \beta L = 0 \implies D \sin \beta L = 0, \quad (9.2.31)$$

αφού  $\beta > 0$  σε ιδιοταλαντώσεις (με  $\omega > 0$ ). Εννοείται ότι η ίδια ακριβώς απαίτηση,  $D \sin \beta L = 0$ , προκύπτει και με αφαίρεση των δύο συνοριακών συνθηκών (9.2.27) και (9.2.28) που ισχύουν στο δεξιό άκρο  $x = L$  της αμφιέριστης δοκού που εξετάζουμε.

Και τώρα; Τώρα πια δύο μόνο δυνατότητες υπάρχουν:

1. Η  $D = 0$ , οπότε και η τελευταία αυθαίρετη σταθερά  $D$  είναι μηδενική, δεν παρουσιάζεται καθόλου ιδιοταλάντωση της δοκού. Άρα ισχύει η τετριμμένη (η μηδενική) λύση  $X_i(x) \equiv 0$  του παρόντος προβλήματος συνοριακών τιμών σε ιδιοταλαντώσεις αμφιέριστης δοκού.

2. Ή αντίθετα  $D \neq 0$ , οπότε υπάρχουν ιδιοταλαντώσεις, εάν η σταθερά  $\beta$  (η παράμετρος της διαφορικής εξίσωσης (9.2.1) ή (9.2.9)) έχει τέτοια ακριβώς τιμή  $\beta_n$ , ώστε να μηδενίζεται ο ημιτονικός παράγοντας  $\sin \beta L$  στην πιο πάνω σχέση (9.2.31), δηλαδή στο γινόμενο (με δύο παράγοντες)  $D \sin \beta L$  της συνθήκης  $D \sin \beta L = 0$ . Από φυσικής απόψεως η συνθήκη αυτή εκφράζει μηδενική καμπτική ροπή  $M$  στο δεξιό άκρο  $x = L$  της αμφιέριστης δοκού.

Και πότε ακριβώς θα μπορούσε να συμβεί αυτός ο μηδενισμός του ημιτονικού όρου  $\sin \beta L$ ; Όπως γνωρίζουμε πάρα πολύ καλά από την Τριγωνομετρία, απλά όταν

$$\beta_n L = n\pi, \text{ οπότε } \beta_n = \frac{n\pi}{L} \text{ με } n = 1, 2, \dots \quad (9.2.32)$$

Αυτές οι άπειρες αλλά διακριτές τιμές  $\beta_n$  της σταθεράς  $\beta$  (της παραμέτρου της διαφορικής εξίσωσης (9.2.1) ή (9.2.9)) είναι αυτές που επιτρέπουν την καμπτική ιδιοταλάντωση της δοκού, δηλαδή την ύπαρξη και μη τετριμμένης (μη μηδενικής) λύσεως  $X_p(x) \neq 0$ . Οι τιμές αυτές  $\beta_n$  είναι οι ιδιοτιμές (ή χαρακτηριστικές τιμές) στο παρόν πρόβλημα συνοριακών τιμών και ιδιοτιμών. Οι αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες, που τόσο πολύ ενδιαφέρουν τον Πολιτικό Μηχανικό στις κατασκευές του, προσδιορίζονται φυσικά από τις σχέσεις (9.2.3), στην περίπτωση της αμφιέριστης δοκού:

$$\omega_n = \beta_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \text{ με } n = 1, 2, \dots \quad (9.2.33)$$

Μια τέτοια μη τετριμμένη λύση τη δηλώνουμε απλά σαν  $X_n(x)$  υπονοώντας ότι αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\beta_n$  (με τον ίδιο δείκτη  $n$ ). Προφανώς έχει τη μορφή (9.2.30), όμως με  $\beta = \beta_n$  σ' αυτή, δηλαδή

$$X_n(x) = D_n \sin \beta_n x \text{ ή καλύτερα } X_n(x) = D_n \sin \frac{n\pi x}{L} \text{ με } n = 1, 2, \dots \quad (9.2.34)$$

Οι συναρτήσεις αυτές  $X_n(x)$  είναι οι ιδιοσυναρτήσεις (ή χαρακτηριστικές συναρτήσεις) για το παρόν πρόβλημα συνοριακών τιμών και ιδιοτιμών για αμφιέριστη δοκό. Είναι άπειρες στον αριθμό ( $n = 1, 2, \dots$ ) και φυσικά οι σταθερές  $D_n$  σ' αυτές είναι απόλυτα αυθαίρετες στις παρούσες ιδιοταλαντώσεις. Είναι επίσης σκόπιμο να σημειώσουμε ότι είναι πολύ εύκολη η επαλήθευση τόσο (α) της διαφορικής εξίσωσης (9.2.1) ή (9.2.9) όσο και (β) των τεσσάρων συνοριακών συνθηκών (9.2.7) ή (9.2.21). Πρόκειται για τετριμμένο καθήκον και το παραλείπουμε. Έχουμε λοιπόν τις άπειρες ιδιοτιμές  $\beta_n$  και τις αντίστοιχες άπειρες ιδιοσυναρτήσεις (ή χαρακτηριστικές συναρτήσεις)  $X_n(x)$ . Αυτές τις ιδιοσυναρτήσεις  $X_n(x)$  σε προβλήματα δοκών (και κατασκευών γενικότερα) ο Πολιτικός Μηχανικός τις αποκαλεί **ιδιομορφές ταλαντώσεων** ή απλούστερα **ιδιομορφές**. Άρα στις καμπτικές ταλαντώσεις μιας αμφιέριστης δοκού οι ιδιομορφές της είναι οι συναρτήσεις  $X_n(x) = D_n \sin (n\pi x/L)$ , που μόλις βρήκαμε στις σχέσεις (9.2.34) έχοντας επιλύσει ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών και ιδιοτιμών ιδιαίτερου μάλιστα ενδιαφέροντος για τον Πολιτικό Μηχανικό στις κατασκευές του.

Τονίζουμε και πάλι ότι οι σταθερές  $D_n$  στις ιδιοσυναρτήσεις (ή καλύτερα στις ιδιομορφές για περιπτώσεις δοκών, όπως είναι η παρούσα αμφιέριστη δοκός)  $X_n(x)$  στις σχέσεις (9.2.34) είναι αυθαίρετες πραγματικές σταθερές. Επομένως δεν είναι δυνατός ο προσδιορισμός τους σε ιδιοταλαντώσεις δοκών. Οι ιδιοσυναρτήσεις (εδώ ιδιομορφές)  $X_n(x)$  σε ομογενή προβλήματα συνοριακών τιμών και ιδιοτιμών δεν προσδιορίζονται πλήρως (δεν είναι δυνατόν αυτό), αλλά κατά προσέγγιση σταθεράς. Αντίθετα βέβαια σε ελεύθερες ταλαντώσεις δοκών (που αποτελούν υπέρθεση, επαλληλία ιδιοταλαντώσεων) και παραπέρα και σε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις δοκών ο πλήρης προσδιορισμός όλων αυτών των σταθερών  $D_n$  είναι και δυνατός και αναγκαίος με βάση τις διαθέσιμες αρχικές συνθήκες. Δε θα προχωρήσουμε όμως εδώ στα δυσκολότερα αυτά προβλήματα αναβάλλοντάς τα για το επόμενο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III του 3ου Εξαμήνου Σπουδών. Στο ίδιο μάθημα θα αναφερθούμε πολύ εκτενέστερα και στον προσδιορισμό ιδιοσυχνοτήτων  $\omega_n$  και ιδιομορφών  $X_n(x)$  σε υπολογιστικά δυσκολότερα (αλλ' εξίσου ενδιαφέροντα) προβλήματα συνοριακών τιμών και ιδιοτιμών για καμπτικά ταλαντούμενες δοκούς. Επίσης και για αξονικά ή στρεπτικά ταλαντούμενες ράβδους. Για όλα αυτά απαιτείται προς το παρόν η υπομονή σας!

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ *A10*

## Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ LAPLACE: ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο Κεφάλαιο A5 αναφερθήκαμε στην επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές με την κλασική μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως για ομογενείς εξισώσεις. Για μη ομογενείς εξισώσεις αναφερθήκαμε στις μεθόδους των προσδιοριστέων συντελεστών και της μεταβολής των παραμέτρων. Στο παρόν Κεφάλαιο A10 θα περιγράψουμε μια εντελώς διαφορετική μέθοδο επίλυσεως γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές είτε ομογενών (όπως συμβαίνει π.χ. στις ελεύθερες ταλαντώσεις) είτε μη ομογενών (όπως συμβαίνει π.χ. στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις). Αυτή είναι η τόσο γνωστή μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace.

Η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace για γραμμικές διαφορικές εξισώσεις περιλαμβάνει τρία βήματα: (α) Στο πρώτο βήμα η διαφορική εξίσωση μετατρέπεται σε πρωτοβάθμια αλγεβρική εξίσωση, όπου η άγνωστη συνάρτηση, π.χ. η  $u(t)$  ή  $u(x)$ , έχει αντικατασταθεί από το μετασχηματισμό Laplace της: το  $U(s)$ . (β) Στο δεύτερο βήμα επιλύεται η πρωτοβάθμια αυτή αλγεβρική εξίσωση (πανεύκολη εργασία!). (γ) Τελικά όμως στο τρίτο βήμα πρέπει να επιστρέψουμε στην αρχική άγνωστη συνάρτηση εκτελώντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace. Αυτό δεν είναι πάντα τόσο εύκολο.

Τα πλεονεκτήματα της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace είναι τα εξής πέντε: (α) Μετατρέπεται η διαφορική εξίσωση που έχουμε να επιλύσουμε σε πρωτοβάθμια αλγεβρική εξίσωση. (β) Σε περιπτώσεις προβλημάτων αρχικών τιμών επιτρέπει την ενσωμάτωση των αρχικών συνθηκών στη λύση χωρίς να απαιτείται πρώτα η εύρεση της γενικής λύσεως. (γ) Επιτρέπει επίσης την εύρεση λύσεων τόσο ομογενών όσο και μη ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων χωρίς διαφοροποίηση της μεθοδολογίας (που ήδη αναφέρθηκε συνοπτικά στην προηγούμενη παράγραφο) αντίθετα με τις μεθόδους του Κεφαλαίου A5. (δ) Σε προβλήματα αρχικών τιμών με αυθαίρετη συνάρτηση  $\rho(t)$  ή  $\rho(x)$  στο δεξιό μέλος είναι σαφώς απλούστερη από τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων. (ε) Τέλος είναι πάρα πολύ σημαντικό το ότι η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace σε μη ομογενείς εξισώσεις είναι αποτελεσματική και σε προβλήματα με ασυνέχειες στα δεξιά μέλη  $\rho$ . Αυτές μπορεί να είναι είτε (i) απλές πεπερασμένες ασυνέχειες (ασυνέχειες άλματος) είτε (ii) ασυνέχειες με γενικευμένες συναρτήσεις, που οφείλονται στη συνάρτηση δέλτα του Dirac.

Για τους λόγους αυτούς η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace προτιμάται σε πολλές περιπτώσεις για την επίλυση ομογενών και μη ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές. Θα την περιγράψουμε αρκετά αναλυτικά στο παρόν Κεφάλαιο A10: ορισμός και ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace, αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace, συνέλιξη, γενικευμένες συναρτήσεις, φυσικά αρκετά παραδείγματα και εφαρμογές σε διαφορικές εξισώσεις και τέλος δύο πίνακες. Περισσότερες όμως και πολύ πιο εξειδικευμένες εφαρμογές σε διαφορικές εξισώσεις της Επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού θα ακολουθήσουν στο επόμενο Κεφάλαιο A11.

### Α10.1. ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Ο μετασχηματισμός Laplace, που θα τον ορίσουμε στην αμέσως επόμενη Ενότητα Α10.2, ανήκει στην κατηγορία των ολοκληρωτικών μετασχηματισμών. Γενικά μιλώντας, για μια κατάλληλη συνάρτηση  $u(t)$  ένας **ολοκληρωτικός μετασχηματισμός (integral transform)** της μορφής

$$U(s) := \int_a^b K(s, t) u(t) dt \quad (10.1.1)$$

ορίζει μέσω της ολοκλήρωσεως αυτής μια νέα συνάρτηση  $U(s)$ . Λέμε ότι η αρχική συνάρτηση  $u(t)$  μετασχηματίστηκε στη συνάρτηση  $U(s)$ , η οποία είναι ο μετασχηματισμός της συναρτήσεως  $u(t)$ .

Δηλώνοντας μάλιστα ένα συγκεκριμένο ολοκληρωτικό μετασχηματισμό (integral transform) της μορφής (10.1.1) με το καλλιγραφικό σύμβολο  $\mathcal{T}$ , μπορούμε να γράψουμε

$$U(s) = \mathcal{T}\{u(t)\} \quad \text{και αντίστροφα} \quad u(t) = \mathcal{T}^{-1}\{U(s)\}. \quad (10.1.2)$$

Η πρώτη σχέση  $U(s) = \mathcal{T}\{u(t)\}$  σημαίνει απλά ότι η αρχική συνάρτηση  $u(t)$  (της μεταβλητής  $t$ ) με τον ολοκληρωτικό μετασχηματισμό  $\mathcal{T}$ , δηλαδή με την ολοκλήρωση (10.1.1), μετασχηματίστηκε στη νέα συνάρτηση  $U(s)$  (της μεταβλητής  $s$ ). Αντίστροφα τώρα, η δεύτερη σχέση  $u(t) = \mathcal{T}^{-1}\{U(s)\}$  δηλώνει ότι η συνάρτηση  $u(t)$  είναι εκείνη η συνάρτηση η οποία έχει μετασχηματισμό  $\mathcal{T}$  τη συνάρτηση  $U(s)$  (υποθέτοντας ότι είναι μόνο μία!). Πιο συγκεκριμένα το σύμβολο  $\mathcal{T}^{-1}$  δηλώνει τον αντίστροφο μετασχηματισμό του ολοκληρωτικού μετασχηματισμού  $\mathcal{T}$ , αυτόν με τον οποίο επιστρέφουμε από τη συνάρτηση  $U(s)$  στην αρχική συνάρτηση  $u(t)$ . Αντί για τις σχέσεις (10.1.2) μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε και τον ακόλουθο εναλλακτικό (αλλ' ουσιαστικά ισοδύναμο) συμβολισμό:

$$u(t) \xrightarrow{\mathcal{T}} U(s) \quad \text{και αντίστροφα} \quad U(s) \xrightarrow{\mathcal{T}^{-1}} u(t). \quad (10.1.3)$$

Επαναλαμβάνουμε ότι ο συμβολισμός  $\mathcal{T}^{-1}$  δε δηλώνει κάποια διαίρεση 1 δια  $\mathcal{T}$  (πιο απλά  $1/\mathcal{T}$ ). Δηλώνει απλά τον αντίστροφο μετασχηματισμό του ολοκληρωτικού μετασχηματισμού  $\mathcal{T}$ . Ακριβώς το ίδιο συμβαίνει π.χ. με τη συνάρτηση  $\tan^{-1}$ , που δηλώνει την αντίστροφη συνάρτηση της τριγωνομετρικής συναρτήσεως  $\tan$  (εφαπτομένη). Δηλαδή, όπως ήδη γνωρίζουμε,  $\tan^{-1}$  σημαίνει τόξο εφαπτομένης (συγκεκριμένα  $\tan^{-1} t \equiv \arctan t$ ) και ασφαλώς όχι  $1/\tan$ , όχι διαίρεση!

Πρέπει βέβαια στο σημείο αυτό να προσθέσουμε ότι είναι καταρχήν εύκολο να προσδιορίσουμε τον ευθύ μετασχηματισμό  $U(s) = \mathcal{T}\{u(t)\}$  μέσω του τύπου ορισμού του (10.1.1), εφόσον υπάρχει το σχετικό ολοκλήρωμα. Αντίθετα όμως για τον αντίστροφο μετασχηματισμό  $u(t) = \mathcal{T}^{-1}\{U(s)\}$  δε διαθέτουμε άμεσα σχετικό τύπο. Αυτό (δηλαδή η πρακτική εύρεση του αντίστροφου μετασχηματισμού  $\mathcal{T}^{-1}$ ) είναι ασφαλώς ένα μειονέκτημα στη χρήση των ολοκληρωτικών μετασχηματισμών και θα το παρατηρήσουμε παρακάτω στην περίπτωση του μετασχηματισμού Laplace. Ο μετασχηματισμός Laplace να μεν διαθέτει γενικό ολοκληρωτικό τύπο για την εύρεση του αντιστρόφου του, αλλ' ο τύπος αυτός είναι μιγαδικός και αρκετά δύσχρηστος από υπολογιστικής απόψεως.

Προφανώς, αφού η συνάρτηση  $U(s)$  ορίστηκε μέσω του ολοκληρώματος (10.1.1), πρόκειται για έναν ολοκληρωτικό μετασχηματισμό. Υποθέτουμε βέβαια ότι το σχετικό ολοκλήρωμα (10.1.1) υπάρχει και γενικά αυτό συμβαίνει υπό ορισμένες συνθήκες. Το διάστημα ολοκλήρωσεως  $[a, b]$  θεωρείται φυσικά γνωστό όπως και η συνάρτηση  $K(s, t)$ , η οποία υπεισέρχεται στο πιο πάνω ολοκλήρωμα (10.1.1). Η συνάρτηση αυτή καλείται **πυρήνας (kernel)** του ολοκληρωτικού μετασχηματισμού (10.1.1) και είναι συνάρτηση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών: των  $s$  και  $t$ . Πιο απλά με την ολοκλήρωση (10.1.1) από  $a$  έως  $b$  η αρχική μεταβλητή  $t$  της συναρτήσεως  $u(t)$ , που μετασχηματίζεται στη  $U(s)$ , εξαλείφεται. Εμφανίζεται όμως στη  $U(s)$  η νέα μεταβλητή  $s$ , που οφείλεται στον πυρήνα  $K(s, t)$  του ολοκληρωτικού μετασχηματισμού (10.1.1). (Χωρίς την παρουσία της νέας μεταβλητής  $s$  στον πυρήνα αυτό  $K(s, t)$  η ολοκλήρωση από  $a$  μέχρι  $b$  θα έδινε σαν αποτέλεσμα μια σταθερά και όχι συνάρτηση!)



Είναι προφανές ότι αλλάζοντας είτε το διάστημα ολοκλήρωσεως  $[a, b]$  στη γενική μορφή (10.1.1) του ολοκληρωτικού μετασχηματισμού μας (εδώ γραμμικού ολοκληρωτικού μετασχηματισμού) είτε τον πυρήνα  $K(s, t)$ , μπορούμε να δημιουργήσουμε άπειρους ολοκληρωτικούς μετασχηματισμούς. Αν μάλιστα έχουμε χρόνο, διάθεση και υπομονή, μπορούμε να κατασκευάσουμε και τις σχετικές μαθηματικές θεωρίες με ποικίλα θεωρήματα και ιδιότητες. Για ποιο σκοπό όμως; Όχι, δεν είναι δουλειά του Πολιτικού Μηχανικού να ασχολείται με τους ολοκληρωτικούς μετασχηματισμούς παρά μόνο σε όσο βαθμό του είναι πραγματικά χρήσιμοι ή/και αναγκαίοι στην εργασία του, ώστε να μπορεί να λύνει σωστά, εύκολα και αποτελεσματικά προβλήματα της επιστήμης του.

Έτσι στο παρόν μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II θα αναφερθούμε μόνο σε δύο ολοκληρωτικούς μετασχηματισμούς της μορφής (10.1.1): **(α) Στο μετασχηματισμό Laplace**, που τον εξετάζουμε στο παρόν Κεφάλαιο A10 με εφαρμογές του στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού στο αμέσως επόμενο Κεφάλαιο A11, και **(β) Στο μετασχηματισμό Fourier**, που θα τον εξετάσουμε στο Κεφάλαιο A18 με εφαρμογές και πάλι στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού στο Κεφάλαιο A19. Άλλοι ενδιαφέροντες και χρήσιμοι (όμως λιγότερο χρήσιμοι!) στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί της μορφής (10.1.1) είναι: **(γ) ο μετασχηματισμός Mellin**, **(δ) ο μετασχηματισμός Hankel** και **(ε) ο μετασχηματισμός Hilbert**. Δε θα αναφερθούμε όμως καθόλου σ' αυτούς τους ολοκληρωτικούς μετασχηματισμούς.

Στο κάτω-κάτω της γραφής ο Πολιτικός Μηχανικός που έχει ικανοποιητική γνώση του μετασχηματισμού Laplace και του μετασχηματισμού Fourier μπορεί και μόνος του να ασχοληθεί, όταν αυτό απαιτηθεί, και με άλλους ολοκληρωτικούς μετασχηματισμούς. Παραδείγματος χάρη, θα συναντήσει το μετασχηματισμό Mellin σε στατικά προβλήματα της Ελαστικότητας που έχουν σχέση με γωνίες σε επίπεδα ελαστικά μέσα. Ανάλογα θα συναντήσει το μετασχηματισμό Hankel σε τριδιάστατα στατικά προβλήματα της Ελαστικότητας υπό αξονική συμμετρία τόσο στη γεωμετρία όσο και στη φόρτιση. Τέλος δεν αποκλείεται να συναντήσει και το μετασχηματισμό Hilbert σε στατικά προβλήματα επίπεδων ελαστικών μέσων με ρωγμές στη Θραυστομηχανική (ή Μηχανική της Θραύσεως) ή/κι άλλους ολοκληρωτικούς μετασχηματισμούς κατάλληλους για ειδικά προβλήματα.

Δεν είναι όμως εφικτό να αναφερθούμε εδώ σε κάθε μαθηματική δυνατότητα (εδώ ολοκληρωτικό μετασχηματισμό), ακόμη και όταν είναι χρήσιμος στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Αντίθετα επιλέγουμε τις βασικότερες και χρησιμότερες δυνατότητες, προσπαθούμε να δώσουμε τις βασικές έννοιες (χωρίς ιδιαίτερη, με μέτρια μαθηματική αυστηρότητα) και να προχωρήσουμε σε εφαρμογές. Ας μη χρονοτριβούμε όμως προχωρώντας άμεσα στον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace σαν μιας ειδικής περιπτώσεως του γενικού ολοκληρωτικού μετασχηματισμού (10.1.1).

## A10.2. Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

### A10.2.1. Ορισμός, παρατηρήσεις και συμβολισμοί

Ο **μετασχηματισμός Laplace**, στον οποίο θα αφιερώσουμε το παρόν Κεφάλαιο A10 και το επόμενο Κεφάλαιο A11, αποτελεί το πιο σημαντικό παράδειγμα ολοκληρωτικού μετασχηματισμού της μορφής (10.1.1). Σαν διάστημα ολοκλήρωσεως έχει το ημίπειρο διάστημα  $[0, \infty)$ , δηλαδή το διάστημα με  $a = 0$  και  $b = \infty$  στον τύπο (10.1.1), ενώ σαν πυρήνα έχει την απλή εκθετική συνάρτηση  $K(s, t) = e^{-st}$ . Επομένως ο τύπος ορισμού του μετασχηματισμού Laplace είναι ο εξής:

$$U(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} u(t) dt. \quad (10.2.1)$$

Με τον ολοκληρωτικό αυτό τύπο μια κατάλληλη συνάρτηση  $u(t)$  της μεταβλητής  $t$ , η **αρχική συνάρτηση**, μετασχηματίζεται σε μια νέα συνάρτηση  $U(s)$  της μεταβλητής  $s$  του μετασχηματισμού Laplace. Η νέα αυτή συνάρτηση  $U(s)$  είναι ο **μετασχηματισμός Laplace**  $\mathcal{L}\{u(t)\}$  της αρχικής συναρτήσεως  $u(t)$ . Στην ίδια συνάρτηση  $U(s)$  θεωρούμε εδώ τη μεταβλητή  $s$  του μετασχηματισμού Laplace

σαν πραγματική μεταβλητή. Εντούτοις η ίδια μεταβλητή  $s$  γενικά θεωρείται ότι μπορεί να πάρει και μιγαδικές τιμές  $s = \sigma + it$ . Η δυνατότητα αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στο μιγαδικό ολοκληρωτικό τύπο αντιστροφής του μετασχηματισμού Laplace που θα το χρησιμοποιήσουμε στο Μέρος Δ των διδακτικών αυτών βιβλίων για τις Μιγαδικές Συναρτήσεις, Κεφάλαιο Δ6. Εδώ όμως δε μας ενδιαφέρει και πολύ ο τύπος αυτός και δε θα το χρησιμοποιήσουμε καθόλου σ' αυτό το κεφάλαιο.

Φυσικά το σύμβολο  $t$  για την ανεξάρτητη μεταβλητή της αρχικής συναρτήσεως  $u$  δεν είναι υποχρεωτικό. Παραδείγματος χάρη, δηλώνοντας την ανεξάρτητη μεταβλητή με το σύμβολο  $x$ , ο τύπος (10.2.1) ορισμού του μετασχηματισμού Laplace παίρνει την ελάχιστα διαφορετική μορφή του (τώρα απλά με  $x$  αντί με  $t$ )

$$U(s) := \int_0^{\infty} e^{-sx} u(x) dx. \quad (10.2.2)$$

Βέβαια μετά την ολοκλήρωση, που απαλείφει τη μεταβλητή  $t$  ή  $x$  της αρχικής συναρτήσεως  $u$ , ο μετασχηματισμός Laplace  $U(s)$  της  $u$  είναι ακριβώς ο ίδιος. Όταν η αρχική συνάρτηση  $u$  που μετασχηματίζουμε κατά Laplace είναι συνάρτηση του χρόνου  $t$ , εύλογο είναι να χρησιμοποιούμε τη μεταβλητή  $t$  σ' αυτήν τη συνάρτηση, δηλαδή να γράφουμε  $u = u(t)$ . Αυτό συμβαίνει, π.χ., για τη μετατόπιση  $u = u(t)$  του υλικού σημείου (της μάζας) σε ένα μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου. Αντίθετα, όταν η μεταβλητή της αρχικής συναρτήσεως  $u$  αφορά στη θέση, τότε χρησιμοποιούμε συνήθως το σύμβολο  $x$  για τη μεταβλητή αυτή, δηλαδή γράφουμε  $u = u(x)$ . Αυτό συμβαίνει, π.χ., στην αξονική (ή διαμήκη) μετατόπιση  $u = u(x)$  των σημείων μιας ράβδου.

Παραπέρα δεν είναι με κανέναν τρόπο υποχρεωτικό η συνάρτηση που μετασχηματίζουμε να δηλώνεται με το σύμβολο  $u$ . Μπορεί να είναι οποιαδήποτε συνάρτηση, π.χ. η συνάρτηση  $f = f(t)$ . Τότε ο τύπος (10.2.1) ορισμού του μετασχηματισμού Laplace παίρνει τη μορφή

$$F(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (10.2.3)$$

Βέβαια συνήθως προτιμάμε να δηλώνουμε το μετασχηματισμό Laplace μιας συναρτήσεως που συμβολίζεται με μικρό γράμμα (π.χ. το  $u$ ) με το αντίστοιχο κεφαλαίο γράμμα (π.χ. το  $U$ ). Χρησιμοποιούμε επίσης το καλλιγραφικό σύμβολο  $\mathcal{L}$ , για να δηλώνουμε το μετασχηματισμό Laplace, ακριβώς όπως είχαμε χρησιμοποιήσει το καλλιγραφικό σύμβολο  $\mathcal{T}$  στην προηγούμενη Ενότητα Α10.1, εκεί για το γενικότερο ολοκληρωτικό μετασχηματισμό (integral transform) (10.1.1). Έτσι μπορούμε να γράψουμε τους τύπους (10.2.1) και (10.2.3) στις αντίστοιχες συνεπτυγμένες μορφές τους

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} \quad \text{και} \quad F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}. \quad (10.2.4)$$

► **Παρατήρηση Α10.1:** Παρανεθτικά πρέπει να κάνουμε στο σημείο αυτό μια σημαντική παρατήρηση. Συχνά καλούμε τη συνάρτηση  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ , δηλαδή τη **μετασχηματισμένη κατά Laplace** της συναρτήσεως  $u(t)$ , απλά **μετασχηματισμό Laplace** της συναρτήσεως  $u(t)$ . Όμως με τον τρόπο αυτό ουσιαστικά χρησιμοποιούμε τη φράση «μετασχηματισμός Laplace» τόσο για τη διαδικασία προσδιορισμού της συναρτήσεως  $U(s)$  από τη  $u(t)$ , π.χ. μέσω της ολοκλήρωσεως (10.2.1) ή μέσω πινάκων, όσο και για το ίδιο το αποτέλεσμα της διαδικασίας αυτής, δηλαδή για την ίδια τη συνάρτηση  $U(s)$ . Αυτό δεν είναι απόλυτα σωστό, είναι όμως συνηθισμένο στην πράξη. Συνήθως μάλιστα δεν προκαλείται κάποια σύγχυση. Αυτήν τη διπλή χρήση του όρου «μετασχηματισμός Laplace» έχουμε υιοθετήσει και εδώ.

▼ **Παράδειγμα Α10.1:** Να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συναρτήσεως

$$u_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{για } t < 0, \\ c & \text{για } 0 \leq t \leq t_0, \\ 0 & \text{για } t > t_0. \end{cases} \quad (10.2.5)$$

Πρόκειται για μια συνάρτηση ορθογωνικού παλμού με σταθερή τιμή  $c$  σε όλο το πεπερασμένο διάστημα  $[0, t_0]$  (με  $t_0 > 0$ ) και με μηδενική τιμή για  $t < 0$  καθώς και για  $t > t_0$ .

**Λύση:** Σύμφωνα με τον πιο πάνω ορισμό (10.2.1) του μετασχηματισμού Laplace έχουμε

$$\begin{aligned} U_1(s) = \mathcal{L}\{u_1(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} u_1(t) dt = \int_0^{t_0} e^{-st} \cdot c dt + \int_{t_0}^\infty e^{-st} \cdot 0 dt \\ &= c \int_0^{t_0} e^{-st} dt + 0 = c \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^{t_0} = c \frac{e^{-st_0} - 1}{-s} = \frac{c(1 - e^{-st_0})}{s}. \end{aligned} \quad (10.2.6)$$

Άρα τελικά ο μετασχηματισμός Laplace της πιο πάνω συναρτήσεως ορθογωνικού παλμού  $u_1(t)$  είναι ίσος με  $U_1(s) = \mathcal{L}\{u_1(t)\} = c(1 - e^{-st_0})/s$ .

Παρατηρούμε επίσης ότι με  $s > 0$  και για μεγάλες θετικές τιμές της σταθεράς  $t_0$  ο όρος  $e^{-st_0}$  όλο και μικραίνει τείνοντας στο μηδέν για  $t_0 \rightarrow \infty$ , δηλαδή ισχύει ότι  $\lim_{t_0 \rightarrow \infty} e^{-st_0} = 0$  για  $s > 0$ . Βέβαια στην οριακή αυτή περίπτωση δεν έχουμε πια παλμό. Έχουμε μια σταθερή συνάρτηση  $u_1^*(t) = c$  από τη χρονική στιγμή μηδέν και μετά με μετασχηματισμό Laplace  $U_1^*(s) = \mathcal{L}\{u_1^*(t)\} = \mathcal{L}\{c\} = c/s$ . Αυτός ο μετασχηματισμός Laplace ισχύει μόνο για θετικές τιμές της μεταβλητής  $s$  ( $s > 0$ ). Αντίθετα ο γενικός μετασχηματισμός Laplace (10.2.6) της συναρτήσεως παλμού  $u_1(t)$  ισχύει για κάθε τιμή της μεταβλητής  $s$ : (α) αρνητική ( $s < 0$ ), (β) μηδενική ( $s = 0$ ) και (γ) θετική ( $s > 0$ ). ▲

▼ **Παράδειγμα A10.2:** Μια συνήθης δοκός μήκους  $L$  κατά μήκος του άξονα  $Ox$  (με  $0 \leq x \leq L$ ) καταπονείται σε κάμψη με σταθερή φόρτιση  $p(x) = p_0$  στο τμήμα της  $[a, b]$  με  $0 \leq a < b \leq L$ . Ζητείται ο μετασχηματισμός Laplace  $P(s) = \mathcal{L}\{p(x)\}$  της φορτίσεως  $p(x)$  της δοκού με την υπόθεση ότι  $p(x) = 0$  και για  $x > L$ .

**Λύση:** Αντίθετα με το προηγούμενο παράδειγμα, εδώ έχουμε αρχική μεταβλητή στη συνάρτησή μας  $p(x)$  τη θέση  $x$  κατά μήκος της δοκού με  $0 \leq x \leq L$  (και όχι το χρόνο  $t$  αντίθετα με ό,τι συμβαίνει συνήθως, π.χ. στη Δυναμική και τις Ταλαντώσεις). Για  $x > L$  υποθέσαμε ήδη ότι  $p(x) = 0$ , παρόλο που ουσιαστικά δε μας νοιάζει καθόλου τί γίνεται εκεί πέρα (για  $x > L$ ), αφού δεν έχουμε πλέον δοκό. Επίσης στην ίδια τη δοκό  $0 \leq x \leq L$  όλη η φόρτισή της  $p(x) = p_0$  εφαρμόζεται στο τμήμα της  $a \leq x \leq b$ .

Είναι εύκολος ο υπολογισμός του μετασχηματισμού Laplace  $P(s) = \mathcal{L}\{p(x)\}$  της φορτίσεως  $p(x)$ . Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο ορισμού του (10.2.1) και ισοδύναμα (10.2.2), μια που εδώ έχουμε αρχική μεταβλητή τη θέση  $x$ . Επίσης, επειδή η φόρτιση  $p(x) = p_0$  εφαρμόζεται μόνο στο τμήμα  $a \leq x \leq b$  της δοκού, αρκεί να ολοκληρώσουμε μόνο στο διάστημα  $[a, b]$  και όχι στο ημιάπειρο διάστημα  $[0, \infty)$ . Με τις απλές αυτές σκέψεις από τον τύπο (10.2.2) βρίσκουμε εύκολα ότι

$$P(s) = \int_a^b e^{-sx} p_0 dx = p_0 \int_a^b e^{-sx} dx = p_0 \left. \frac{e^{-sx}}{-s} \right|_a^b = p_0 \frac{e^{-sb} - e^{-sa}}{-s} = \frac{(e^{-as} - e^{-bs})p_0}{s}. \quad (10.2.7)$$

Σαν ειδική περίπτωση εξετάζουμε εκείνη που  $a = 0$ , δηλαδή η φόρτιση  $p(x)$  αρχίζει να ασκείται από το αριστερό άκρο  $x = 0$  της δοκού. Στην περίπτωση αυτή ο πιο πάνω γενικός τύπος (10.2.7) για το μετασχηματισμό Laplace  $P(s) = \mathcal{L}\{p(x)\}$  της φορτίσεως  $p(x)$  παίρνει την απλούστερη μορφή του  $P(s) = (1 - e^{-bs})p_0/s$ . Και παραπέρα για  $a = 0$  και  $b = L$ , δηλαδή για φόρτιση  $p(x) = p_0$  που ασκείται σε όλο το μήκος της δοκού  $0 \leq x \leq L$  την εξίσου απλή μορφή του  $P(s) = (1 - e^{-Ls})p_0/s$ .

Έτσι κι αλλιώς στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II ο Πολιτικός Μηχανικός δε νοιάζεται καθόλου για το τί γίνεται ή δε γίνεται για  $x > L$ , απλά γιατί δεν υπάρχει καμία δοκός εκεί. Με τη λογική αυτή του «δε νοιάζομαι για  $x > L$ » (και σωστά δε νοιάζομαι σε περίπτωση πεπερασμένης δοκού μήκους  $L$  με  $0 \leq x \leq L$ ) ο Πολιτικός Μηχανικός για  $b = L$ , δηλαδή για φόρτιση μέχρι και το δεξιό άκρο  $x = L$  της δοκού, μπορεί να υποθέσει απλά ότι  $p(x) = p_0$  για κάθε  $x \geq a$  ακόμη και για  $x > L$ . (Τούτο αποτελεί μια δεύτερη δυνατότητα υποθετικής, όχι πραγματικής, φορτίσεως  $p(x)$  για  $x > L$ . Η πρώτη δυνατότητα ήταν να υποθεθεί ότι  $p(x) = 0$  για  $x > L$ .) Έτσι για  $b = L$  ο μετασχηματισμός Laplace  $P(s) = \mathcal{L}\{p(x)\}$  της φορτίσεως  $p(x)$  μπορεί να γραφεί και στη μορφή  $P(s) = p_0 e^{-as}/s$ .

Εάν μάλιστα  $a = 0$  και  $b = L$ , δηλαδή εφαρμόζεται σταθερή κάθετη φόρτιση  $p(x) = p_0$  σε όλο το μήκος της δοκού ( $0 \leq x \leq L$ ), τότε ο μετασχηματισμός Laplace  $P(s) = \mathcal{L}\{p(x)\}$  παίρνει

την απλούστατη μορφή  $P(s) = \mathcal{L}\{p(x)\} = p_0/s$ . Φυσικά η μορφή αυτή ισχύει υπό την προϋπόθεση (επαναλαμβάνουμε) ότι  $p(x) = p_0$  και πέρα από την αληθινή (τη φυσική, την πραγματική) δοκό (δηλαδή για  $x > L$ ), κάτι όμως που δεν επηρεάζει καθόλου μα καθόλου την ίδια τη δοκό μας. ▲

Παρουσιάσαμε δύο λυμένα παραδείγματα (ένα με μεταβλητή το χρόνο  $t$  και ένα με μεταβλητή τη θέση  $x$ ) και αρκετά σχόλια. Ας προχωρήσουμε τώρα λίγο παραπέρα! Για το μετασχηματισμό Laplace  $V(s)$  του βέλους κάμψεως  $v(x)$  σε μια δοκό μπορούμε να γράψουμε

$$V(s) = \mathcal{L}\{v(x)\}. \quad (10.2.8)$$

Αυτό το κάνουμε ίσως με κάποια μικρή δυσφορία, επειδή ο Πολιτικός Μηχανικός δηλώνει συχνά με  $V(x)$  την τέμνουσα δύναμη (ή διατμητική δύναμη) στη δοκό. Συχνά τη δηλώνει όμως και με  $Q(x)$ .

Ασφαλώς υπάρχει και η περίπτωση να θέλουμε να μετασχηματίσουμε κατά Laplace μια συνάρτηση που δηλώνεται με κεφαλαίο γράμμα, π.χ. την καμπτική ροπή (ή ροπή κάμψεως)  $M(x)$  ή την τέμνουσα δύναμη  $Q(x)$  ή  $V(x)$  σε μια δοκό υπό καμπτική καταπόνηση. Σ' αυτήν την περίπτωση αντί να χρησιμοποιήσουμε ένα εντελώς διαφορετικό σύμβολο έχουμε τη δυνατότητα να συμβολίσουμε το μετασχηματισμό Laplace της αρχικής συναρτήσεως με μια παραλλαγή του συμβόλου της αρχικής συναρτήσεως. Έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$\hat{M}(s) = \mathcal{L}\{M(x)\} \quad \text{ή} \quad M_L(s) = \mathcal{L}\{M(x)\} \quad (10.2.9)$$

με το δείκτη  $L$  να αναφέρεται φυσικά στο μετασχηματισμό Laplace. Στον πρώτο μας συμβολισμό, τον  $\hat{M}(s) = \mathcal{L}\{M(x)\}$ , προτιμήσαμε τη Γαλλική περισπωμένη από την παύλα,  $\bar{M}(s)$ , γιατί η παύλα χρησιμοποιείται συνήθως για τη δήλωση συζυγών μιγαδικών αριθμών και συναρτήσεων. Επίσης αποφυγάμε την Ελληνική περισπωμένη,  $\tilde{M}(s)$ , επειδή αυτή χρησιμοποιείται συνήθως για τη δήλωση προσεγγίσεων συναρτήσεων, π.χ.  $\tilde{M}(x) \approx M(x)$ . Βέβαια όλα αυτά δεν υπόκεινται σε αυστηρούς κανόνες: απλά συνιστώνται.

Αυτό όμως που συνιστάται έντονα είναι η χρήση του συμβόλου  $s$  για τη μεταβλητή του μετασχηματισμού Laplace, εκτός κι αν υπάρχει κίνδυνος συγχύσεως. Δηλαδή χρησιμοποιούμε σχεδόν πάντα το σύμβολο  $s$ . Υπάρχει όμως και η περίπτωση σε μια εφαρμογή να έχουμε την ταυτόχρονη παρουσία και του χρόνου  $t$  και της θέσεως  $x$ , δηλαδή δύο ανεξάρτητων μεταβλητών. Τότε καλό θα είναι να δηλώνουμε με  $s$  τη μεταβλητή του μετασχηματισμού Laplace που αντιστοιχεί στο χρόνο  $t$  και με  $\sigma$  την αντίστοιχη μεταβλητή που αντιστοιχεί στη θέση  $x$ .

Σημειώνουμε επίσης ότι για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace χρησιμοποιούμε το σύμβολο  $\mathcal{L}^{-1}$ . Έτσι από τους μετασχηματισμούς Laplace (10.2.4), (10.2.8) και (10.2.9) συνάγουμε ότι

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}, \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}, \quad v(x) = \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\}, \quad M(x) = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{M}(s)\}. \quad (10.2.10)$$

Αρκετά όμως με το συμβολισμό. Ας προχωρήσουμε τώρα σε μαθηματικά ουσιαστικότερα θέματα!

### **A10.2.2. Ύπαρξη του μετασχηματισμού Laplace**

Καταρχήν επαναλαμβάνουμε τον ορισμό (10.2.1) του μετασχηματισμού Laplace:

$$U(s) := \mathcal{L}\{u(t)\} := \int_0^{\infty} e^{-st} u(t) dt. \quad (10.2.11)$$

Δηλώνουμε και πάλι σαφώς (συγκεκριμένα με τη χρήση του συμβόλου  $:=$ ) ότι πρόκειται για ορισμό και όχι για εξίσωση. Ο ορισμός αυτός (10.2.11) απαιτεί πρώτα-πρώτα η συνάρτηση  $u(t)$  να είναι ορισμένη σε ολόκληρο το ημιάπειρο διάστημα  $[0, \infty)$ , δηλαδή για κάθε  $t \geq 0$ . Φυσικά απαιτεί επίσης και την ύπαρξη του σχετικού ολοκληρώματος (10.2.11). Επομένως πρέπει η συνάρτησή μας  $u(t)$  να είναι και ορισμένη (κάτι που θεωρείται βέβαια προφανές!) και ολοκληρώσιμη. Είναι κάπως ασαφής η δήλωση αυτή όσον αφορά στην ολοκληρωσιμότητα της συναρτήσεως  $u(t)$ .

Πιο συγκεκριμένα στον ορισμό (10.2.11) του μετασχηματισμού Laplace  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  δεν έχουμε απλά ένα συνηθισμένο, κοινό ολοκλήρωμα: αντίθετα έχουμε ένα **γενικευμένο (ή καταχρηστικό) ολοκλήρωμα** πρώτου είδους. Αυτό δεν υπάρχει με τη συνήθη έννοια του ολοκληρώματος.

Τούτο συμβαίνει, επειδή το άνω όριο ολοκληρώσεως είναι το άπειρο. Υπ' αυτές τις συνθήκες το γενικευμένο ολοκλήρωμα στον ορισμό (10.2.11) του μετασχηματισμού Laplace ορίζεται ως εξής:

$$\int_0^\infty e^{-st} u(t) dt := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} u(t) dt. \tag{10.2.12}$$

Δηλαδή ορίζεται σαν το όριο του αντίστοιχου ολοκληρώματος στο πεπερασμένο διάστημα  $[0, b]$  (με  $b > 0$ ), όταν το άνω όριο ολοκληρώσεως  $b$  τείνει στο άπειρο:  $b \rightarrow \infty$ . Αυτός είναι ο ορισμός του γενικευμένου (ή καταχρηστικού) ολοκληρώματος πρώτου είδους, όπως ήδη γνωρίζουμε από τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά I.

Γενικά μιλώντας, θα πρέπει η συνάρτησή μας  $u(t)$ , της οποίας το μετασχηματισμό Laplace  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  επιδιώκουμε να βρούμε, όχι μόνο να είναι καταρχήν ολοκληρώσιμη στο πεπερασμένο διάστημα  $[0, b]$  (για κάθε  $b > 0$ ). Θα πρέπει να υπάρχει επιπλέον και το γενικευμένο ολοκλήρωμα πρώτου είδους (10.2.11) με βάση τον ορισμό του (10.2.12). Εντούτοις δε θα προχωρήσουμε σε σχετικές λεπτομέρειες που γειτνιάζουν με τα καθαρά μαθηματικά και ξεφεύγουν κάπως από τα εφαρμοσμένα μαθηματικά. Θα περιορισθούμε σε έναν απλό τύπο (μια απλή κατηγορία) συναρτήσεων που εξασφαλίζει την ύπαρξη του μετασχηματισμού Laplace  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  στον ορισμό του (10.2.11).

Συγκεκριμένα θεωρούμε εκείνες τις συναρτήσεις  $u(t)$  που έχουν τις εξής δύο καλές ιδιότητες:

1. Να είναι **τμηματικά συνεχείς (ή κατά τμήματα συνεχείς ή συνεχείς κατά τμήματα)** σε κάθε πεπερασμένο διάστημα  $[0, b]$  οσοδήποτε μεγάλος και αν είναι ο θετικός αριθμός  $b$ , αρκεί βέβαια να είναι πεπερασμένος. Αυτή η φράση, τμηματικά συνεχής, σημαίνει ότι μπορεί να υπάρχει στο πεπερασμένο διάστημα  $[0, b]$  ένα πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών άλματος (δηλαδή πεπερασμένων ασυνεχειών, χωρίς απειρισμούς) της συναρτήσεως  $u(t)$ .
2. Να είναι και **εκθετικής τάξεως  $\gamma$  στο άπειρο (ή απλούστερα εκθετικής τάξεως)**. Αυτό σημαίνει ότι για τη συνάρτησή μας  $u(t)$  υπάρχουν τρεις πραγματικοί αριθμοί: οι αριθμοί  $M$  (θετικός),  $T_0$  (θετικός ή μηδέν) και  $\gamma$  (θετικός, μηδέν ή αρνητικός), ώστε να ισχύει η ανισότητα

$$|u(t)| \leq Me^{\gamma t} \quad \text{για κάθε } t \geq T_0. \tag{10.2.13}$$

Για παράδειγμα, οι σταθερές καθώς και οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις  $\cos t$  και  $\sin t$  είναι εκθετικής τάξεως με  $\gamma = 0$ . Η συνάρτηση  $e^{at}$  είναι εκθετικής τάξεως με  $\gamma = a$ . (Στη συνάρτηση αυτή  $e^{at}$  το  $a$  μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.) Αντίθετα η συνάρτηση  $e^{t^2}$  δεν είναι εκθετικής τάξεως. Όλα αυτά μπορούν σχετικά εύκολα να αποδειχθούν με βάση την πιο πάνω ανισότητα (10.2.13) ορισμού της συναρτήσεως εκθετικής τάξεως  $\gamma$  στο άπειρο.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι όλες οι συναρτήσεις  $u(t)$  που είναι ορισμένες στο διάστημα  $[0, \infty)$  (για  $t \geq 0$ ) και έχουν ταυτόχρονα και τις δύο πιο πάνω ιδιότητες διαθέτουν σίγουρα μετασχηματισμό Laplace  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ . Δηλαδή υπάρχει, συγκλίνει το γενικευμένο ολοκλήρωμα πρώτου είδους (10.2.11) ορισμού του μετασχηματισμού Laplace, όταν  $s > \gamma$ . Σημειώνεται ότι πρόκειται για δύο **επαρκείς και όχι αναγκαίες** συνθήκες υπάρξεως του μετασχηματισμού Laplace  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ . Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν και πολλές συναρτήσεις που διαθέτουν μετασχηματισμό Laplace χωρίς όμως να ισχύουν ταυτόχρονα και οι δύο αυτές συνθήκες. Παραδείγματος χάρη, η κλασική συνάρτηση  $u(t) = t^{-\alpha}$  με  $0 < \alpha < 1$  (όχι με  $\alpha \geq 1$ ) έχει μετασχηματισμό Laplace, παρόλο που δεν είναι τμηματικά συνεχής σε κανένα πεπερασμένο διάστημα  $[0, b]$ , αφού προφανώς απειρίζεται για  $t = 0$ , δηλαδή ισχύει ότι  $\lim_{t \rightarrow 0} u(t) = \infty$  (με  $t > 0$ ). Αυτό βέβαια συμβαίνει, επειδή  $\alpha > 0$ .

Πρακτικά για μια συνάρτηση  $u(t)$  η πρώτη πιο πάνω ιδιότητα (τμηματικά συνεχής συνάρτηση) εξασφαλίζει την ύπαρξη του ολοκληρώματος (10.2.11) σε κάθε πεπερασμένο διάστημα  $[0, b]$ . Στη συνέχεια η δεύτερη ιδιότητα (συνάρτηση εκθετικής τάξεως) εξασφαλίζει την ύπαρξη (τη σύγκλιση) του ίδιου ολοκληρώματος με την έννοια του γενικευμένου ολοκληρώματος πρώτου είδους στην περιοχή του απείρου.

Στο εξής θα θεωρούμε (με εξαίρεση τη συνάρτηση δέλτα του Dirac, Ενότητα Α10.6 παρακάτω, η οποία είναι μια γενικευμένη συνάρτηση) ότι όλες οι συναρτήσεις μας έχουν και τις δύο πιο πάνω καλές ιδιότητες. Άρα θα έχουν μετασχηματισμούς Laplace βέβαια για  $s > \gamma$ , έτσι ώστε ο εκθετικός όρος  $e^{-st}$  να εξασφαλίζει την ύπαρξη του γενικευμένου ολοκληρώματος πρώτου είδους (10.2.11) στην περιοχή του απείρου. Όλες αυτές τις συναρτήσεις  $u(t)$  θα τις αποκαλούμε από 'δώ και πέρα συναρτήσεις τύπου  $\mathcal{A}_L$  με το δείκτη  $L$  να μας θυμίζει το μετασχηματισμό Laplace.

▼ **Παράδειγμα Α10.3:** Να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Laplace  $U(s)$  της εκθετικής συναρτήσεως  $u(t) = e^{at}$  με το  $a$  γνωστή σταθερά: πραγματική ή μιγαδική. (Εδώ τη θεωρούμε καταρχήν πραγματική.)

**Λύση:** Πρέπει απλά να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα (10.2.11) ορισμού του μετασχηματισμού Laplace  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  με τον ορισμό του (10.2.12) σαν γενικευμένου (ή καταχρηστικού) ολοκληρώματος πρώτου είδους. Από τους δύο αυτούς τύπους με  $u(t) = e^{at}$  παίρνουμε

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} e^{at} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{(a-s)t} dt, \quad (10.2.14)$$

αφού  $e^{\alpha} e^{\beta} = e^{\alpha+\beta}$ . Προκύπτει επίσης εύκολα ότι

$$\int_0^b e^{(a-s)t} dt = \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \Big|_0^b = \frac{e^{(a-s)b} - e^{(a-s)0}}{a-s} = \frac{e^{-(s-a)b} - 1}{a-s} = \frac{1 - e^{-(s-a)b}}{s-a}. \quad (10.2.15)$$

Τώρα (με  $b > 0$ ) για  $s > a$ , οπότε  $s - a > 0$ , ισχύει προφανώς το όριο

$$\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-(s-a)b} = 0, \quad \text{αφού } s - a > 0 \text{ και } b > 0, \text{ οπότε } (s-a)b > 0. \quad (10.2.16)$$

Άρα για  $s > a$  ο μετασχηματισμός Laplace (10.2.14) λόγω των σχέσεων (10.2.15) και (10.2.16) παίρνει την τελική του μορφή

$$U(s) = \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \quad \text{εφόσον } s > a. \quad (10.2.17)$$

Στην αντίθετη περίπτωση ( $s \leq a$ ) διαπιστώνεται εύκολα ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα (10.2.14) δε συγκλίνει και κατά συνέπεια ο μετασχηματισμός Laplace  $U(s) = \mathcal{L}\{e^{at}\}$  δεν υπάρχει.

Παρατηρούμε βέβαια ότι η εκθετική αυτή συνάρτηση  $u(t) = e^{at}$  είναι συνεχής στο ημίπειρο διάστημα  $[0, \infty)$  (ή σε κάθε πεπερασμένο διάστημα  $[0, b]$  με  $b > 0$ ). Είναι επίσης και εκθετικής τάξεως (ισχύει η ανισότητα (10.2.13)) με  $M = 1$  (ή γενικότερα με  $M \geq 1$ ), με  $\gamma = a$  (ή γενικότερα με  $\gamma \geq a$ ) και με  $T_0 = 0$  (ή γενικότερα με  $T_0 \geq 0$ ). Συνεπώς η συνάρτηση  $u(t) = e^{at}$  είναι συνάρτηση τύπου  $\mathcal{A}_L$  και επομένως διαθέτει μετασχηματισμό Laplace  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\{e^{at}\} = 1/(s-a)$ , όπως ήδη βρήκαμε στην αμέσως πιο πάνω σχέση (10.2.17), εφόσον  $s > a$ . Σε περιπτώσεις μιγαδικών τιμών του  $a$  θα πρέπει απλά να θέσουμε  $\text{Re } a$  (πραγματικό μέρος, real part του  $a$ ) αντί για  $a$  στις πιο πάνω ανισότητες, π.χ.  $s > \text{Re } a$ . ▲

▼ **Παράδειγμα Α10.4:** Ζητούνται: (α) Να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Laplace  $U(s)$  της σταθερής συναρτήσεως  $u(t) = 1$  για κάθε τιμή της μεταβλητής  $t$ . (β) Να αποδειχθεί η ισχύς του τύπου

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{για } s > 0 \text{ και για } n = 0, 1, 2, \dots, \quad (10.2.18)$$

δηλαδή για κάθε μη αρνητική ακέραια τιμή του εκθέτη  $n$ .

**Λύση:** (α) Μπορούμε ασφαλώς να εργασθούμε με τρόπο ανάλογο εκείνου τον οποίο χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα υπολογίζοντας το γενικευμένο ολοκλήρωμα ορισμού του μετασχηματισμού Laplace (10.2.11) και για την παρούσα συνάρτηση  $u(t) = 1$ . Μια απλούστερη όμως δυνατότητα είναι απλά να στηριχθούμε στο ίδιο το αποτέλεσμα του προηγούμενου παραδείγματος θέτοντας  $a = 0$  στην εκθετική συνάρτηση  $e^{at}$  εκεί. Τότε, αφού  $e^{0t} = 1$ , αυτή μεταπίπτει στην παρούσα συνάρτηση  $u(t) = 1$ . Επομένως ο ζητούμενος στο παρόν παράδειγμα μετασχηματισμός Laplace προκύπτει από το μετασχηματισμό Laplace  $\mathcal{L}\{e^{at}\} = 1/(s - a)$ , που βρέθηκε στην τελευταία σχέση (10.2.17) του προηγούμενου παραδείγματος, απλά θέτοντας εκεί  $a = 0$ . Άρα

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \quad \text{υπό την προϋπόθεση ότι } s > 0, \quad (10.2.19)$$

τώρα που  $a = 0$  στην εκθετική συνάρτηση  $e^{at}$ , οπότε η σχετική απαίτηση  $s > a$  γίνεται απλά  $s > 0$ .

(β) Θα ακολουθήσουμε την κλασική επαγωγική μέθοδο. Ο τύπος (10.2.18) που θέλουμε να αποδείξουμε ισχύει προφανώς για  $n = 0$ , οπότε  $t^0 = 1$  και  $\mathcal{L}\{t^0\} = \mathcal{L}\{1\} = 0!/s^{0+1} = 1/s$  (με  $s > 0$ ). Αυτό το αποδείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα: τύπος (10.2.19). Τώρα για το κύριο μέρος της επαγωγικής αποδείξεως αρκεί να υποθέσουμε ότι εάν ισχύει ο προς απόδειξη τύπος (10.2.18) για μια τιμή του  $n$ , τότε θα ισχύει και για την επόμενη τιμή  $n + 1$  του  $n$ . Δηλαδή ζητάμε να αποδείξουμε ότι εάν ισχύει ο τύπος (10.2.18) για  $n$ , τότε θα ισχύει οπωσδήποτε ο ίδιος τύπος και για  $n + 1$ .

Ας το ελέγξουμε αυτό. Σύμφωνα με τον ορισμό (10.2.11) του μετασχηματισμού Laplace έχουμε

$$\mathcal{L}\{t^{n+1}\} = \int_0^\infty e^{-st} t^{n+1} dt. \quad (10.2.20)$$

Προχωράμε τώρα σε παραγοντική ολοκλήρωση λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\int e^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{-s} + C \quad (\text{με το } C \text{ σταθερά}), \quad \frac{d}{dt}(t^{n+1}) = (n+1)t^{(n+1)-1} = (n+1)t^n. \quad (10.2.21)$$

Έτσι βρίσκουμε εύκολα ότι

$$\mathcal{L}\{t^{n+1}\} = t^{n+1} \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{-s} [(n+1)t^n] dt = \frac{t^{n+1} e^{-st}}{-s} \Big|_0^\infty + \frac{n+1}{s} \int_0^\infty e^{-st} t^n dt. \quad (10.2.22)$$

Όμως για  $n + 1$  θετικό ακέραιο αριθμό και  $t = 0$  προφανώς έχουμε  $t^{n+1} = 0^{n+1} = 0$ , ενώ  $e^0 = 1$ . Επίσης, επειδή  $s > 0$ , σχέση (10.2.19), θα έχουμε  $\lim_{t \rightarrow \infty} (t^{n+1} e^{-st}) = \lim_{t \rightarrow \infty} (t^{n+1}/e^{st}) = 0$  με τη χρήση του κανόνα του L'Hôpital. Επομένως απομένει μόνο ο ολοκληρωτικός όρος στο δεξιό μέλος της προηγούμενης σχέσεως (10.2.22). Συνεπώς τελικά προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}\{t^{n+1}\} = \frac{n+1}{s} \int_0^\infty e^{-st} t^n dt. \quad (10.2.23)$$

Παρατηρούμε όμως ότι το ολοκλήρωμα στον τύπο αυτό είναι απλά ο μετασχηματισμός Laplace της συναρτήσεως  $t^n$ , δηλαδή

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st} t^n dt = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (10.2.24)$$

παίρνοντας στο τέλος υπόψη μας και τον τύπο (10.2.18), που τον υποθέσαμε ότι ισχύει για την τιμή  $n$ . Άρα ο τύπος (10.2.23), στον οποίο καταλήξαμε, παίρνει την τελική του μορφή

$$\mathcal{L}\{t^{n+1}\} = \frac{n+1}{s} \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n+1}{s} \frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{n!(n+1)}{s^{n+1}s} = \frac{(n+1)!}{s^{n+2}}. \quad (10.2.25)$$

Αποδείξαμε πρώτα στο ερώτημα (α) ότι ο τύπος (10.2.18) του ερωτήματος (β) ισχύει για  $n = 0$ . Στη συνέχεια στο παρόν ερώτημα (β) αποδείξαμε επίσης (και μάλιστα με γενικό τρόπο) ότι εάν ο ίδιος τύπος ισχύει για κάποια μη αρνητική ακέραια τιμή του  $n$ , τότε θα ισχύει και για την επόμενη της τιμή: την  $n + 1$ . Αφού όμως ο τύπος (10.2.18) ισχύει για  $n = 0$ , θα ισχύει και για  $n = 1$ , μετά

για  $n = 2$ , έπειτα για  $n = 3$ , κλπ., κλπ. Έτσι έχει ολοκληρωθεί η παρούσα επαγωγική απόδειξη της ισχύος του τύπου (10.2.18) για κάθε μη αρνητική ακέραια τιμή του εκθέτη  $n$  και για  $s > 0$ : προϋπόθεση στη σχέση (10.2.19). Προφανώς είναι δυνατές και άλλες αποδείξεις του ίδιου τύπου.

Είναι σκόπιμο στο σημείο αυτό να αναφερθούν οι ειδικές μορφές του γενικού τύπου (10.2.18) για τους πέντε πρώτους μη αρνητικούς ακέραιους αριθμούς: τους αριθμούς  $n = 0, 1, 2, 3$  και 4:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \implies \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}, \quad \mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}, \quad \mathcal{L}\{t^3\} = \frac{6}{s^4}, \quad \mathcal{L}\{t^4\} = \frac{24}{s^5}, \quad (10.2.26)$$

αφού  $0! = 1! = 1, 2! = 2, 3! = 6$  και  $4! = 24$ . Οι ειδικές αυτές μορφές είναι συχνά χρήσιμες. ▲

Σημειώνουμε τέλος ότι πολύ συχνά θα απαιτούμε από τις συναρτήσεις μας να έχουν και πιο αυστηρές ιδιότητες συνεχείας από το να είναι απλά τύπου  $\mathcal{A}_L$ . Πιο συγκεκριμένα για την άγνωστη συνάρτηση  $u(t)$  σε μια γραμμική διαφορική εξίσωση  $n$ -τάξεως (εννοείται με σταθερούς συντελεστές) θα απαιτούμε να διαθέτει  $n$  παραγώγους  $u'(t), u''(t), \dots, u^{(n-1)}(t)$  και  $u^{(n)}(t)$ . Επίσης να είναι και η ίδια αλλά και οι  $n - 1$  πρώτες παράγωγοί της  $u'(t), u''(t), \dots, u^{(n-1)}(t)$  συνεχείς συναρτήσεις (όχι απλά τμηματικά συνεχείς!) σε κάθε πεπερασμένο διάστημα  $[0, b]$  (με  $b > 0$ ), αλλά ταυτόχρονα και εκθετικής τάξεως. Ειδικά όμως για την  $n$ -τάξεως παράγωγο της  $u^{(n)}(t)$  θα απαιτούμε απλά να είναι τμηματικά συνεχής (όχι αναγκαστικά συνεχής!) σε κάθε πεπερασμένο διάστημα  $[0, b]$  (με  $b > 0$ ) χωρίς την επιπλέον απαίτηση να είναι και εκθετικής τάξεως. Μια τέτοια συνάρτηση  $u(t)$  θα την αποκαλούμε από 'δώ και πέρα τύπου  $\mathcal{D}_{L,n}$ , ώστε να θυμόμαστε έτσι και τις διαφορικές εξισώσεις (με τον τελεστή της παραγωγίσεως  $D$ ) και το μετασχηματισμό Laplace (με το δείκτη  $L$ ), αλλά και την τάξη  $n$  της διαφορικής εξισώσεως (με το δείκτη  $n$ ).

◆ **Συμπέρασμα:** Γενικά στο μετασχηματισμό Laplace θα υποθέτουμε συνεχώς (χωρίς ιδιαίτερη μνεία) ότι όλες οι συναρτήσεις μας  $u(t)$  είναι τύπου  $\mathcal{A}_L$  (με εξαίρεση τη συνάρτηση δέλτα του Dirac, Ενότητα Α10.6, η οποία είναι μια γενικευμένη συνάρτηση). Τούτο εξασφαλίζει την ύπαρξη του μετασχηματισμού Laplace  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  (ικανή αλλ' όχι και αναγκαία συνθήκη). Ειδικά όμως για την επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων  $n$ -τάξεως (εννοείται με σταθερούς συντελεστές) με τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace θα υποθέτουμε επιπλέον ότι η άγνωστη συνάρτηση  $u(t)$  είναι τύπου  $\mathcal{D}_{L,n}$  (και όχι απλά  $\mathcal{A}_L$ !). Θα δούμε παρακάτω (στην Παράγραφο Α10.3.5: Ιδιότητα 5) ότι αυτό εξασφαλίζει την ισχύ των τύπων για τους μετασχηματισμούς Laplace και της ίδιας της άγνωστης συναρτήσεως  $u(t)$ , αλλά και των παραγώγων της  $u^{(k)}(t)$  μέχρι και  $n$ -τάξεως. Επομένως θα επιτρέψει την «αλγεβρικοποίηση» της γραμμικής διαφορικής εξισώσεως με τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace. Εννοείται ότι σε μια μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση  $n$ -τάξεως (με σταθερούς συντελεστές  $a_k$ ) της γενικής μορφής

$$a_n u^{(n)}(t) + a_{n-1} u^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 u'(t) + a_0 u(t) = p(t) \quad (10.2.27)$$

μόνο η άγνωστη συνάρτηση  $u(t)$  θα υποτίθεται πως είναι τύπου  $\mathcal{D}_{L,n}$ . Αντίθετα η γνωστή μας συνάρτηση  $p(t)$  στο δεξιό μέλος, η οποία καλείται μερικές φορές και **συνάρτηση εξαναγκασμού (forcing function)**, θα υποτίθεται ότι είναι απλά τύπου  $\mathcal{A}_L$ .

### Α10.3. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ LAPLACE

Για την αποτελεσματική χρήση του μετασχηματισμού Laplace (10.2.1), τον επαναλαμβάνουμε

$$U(s) := \mathcal{L}\{u(t)\} := \int_0^\infty e^{-st} u(t) dt, \quad (10.3.1)$$

εδώ σε προβλήματα επίλυσεως συνήθων διαφορικών εξισώσεων, χρειάζεται να γνωρίζουμε και να χρησιμοποιούμε ορισμένες βασικές ιδιότητές του. Αυτές θα μας επιτρέψουν να μετατρέπουμε σχετικά εύκολα μια γραμμική διαφορική εξίσωση (π.χ. με άγνωστη συνάρτηση τη  $u(t)$ ) σε μια επίσης



γραμμική ισοδύναμη αλγεβρική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση τη  $U(s)$ . Επίσης μετά την επίλυση της γραμμικής (πρωτοβάθμιας) αλγεβρικής εξίσωσης θα μας βοηθούν ώστε να επιστρέψουμε από τη συνάρτηση  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  στη ζητούμενη λύση  $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}$  της διαφορικής εξίσωσης.

Συνήθως βέβαια δεν έχουμε προς επίλυση απλά μια διαφορική εξίσωση, αλλά ένα πρόβλημα αρχικών τιμών, δηλαδή τη διαφορική εξίσωση συνοδευόμενη από τις αρχικές συνθήκες της. Σαν παράδειγμα μπορούμε να ξανααναφέρουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών στις εξαναγκασμένες με απόσβεση ταλαντώσεις του μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος υλικού σημείου-ελατηρίου-αποσβεστήρα σταθερών  $m$  (μάζας του υλικού σημείου),  $k$  (σταθεράς του ελατηρίου) και  $c$  (σταθεράς αποσβέσεως) αντίστοιχα. Το πρόβλημα αυτό αποτελείται πρώτα-πρώτα από τη σχετική διαφορική εξίσωση (6.1.3) της Ενότητας A6.1 του Κεφαλαίου A6. Την επαναλαμβάνουμε

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t), \quad t \geq 0. \tag{10.3.2}$$

Στη διαφορική αυτή εξίσωση  $p(t)$  είναι η γνωστή συνάρτηση εξαναγκασμού, εδώ στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις η εξωτερική φόρτιση, δηλαδή η δύναμη η οποία ασκείται πάνω στο υλικό σημείο (στη μάζα  $m$ ). Οι σχετικές αρχικές συνθήκες είναι απλά

$$u(0) = u_0 \quad \text{και} \quad \dot{u}(0) = v_0, \tag{10.3.3}$$

δηλαδή η αρχική θέση  $u_0$  και η αρχική ταχύτητα  $v_0$  του υλικού σημείου (της μάζας  $m$ ) αντίστοιχα.

Σε όλες τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace που θα αναφέρουμε αμέσως παρακάτω υποθέτουμε συνεχώς πως η συνάρτηση ή οι συναρτήσεις που υπεισέρχονται σ' αυτές είναι τύπου  $\mathcal{A}_L$ . Ειδικά όμως στην Ιδιότητα 5, που αφορά στις παραγώγους  $u^{(k)}(t)$  της συναρτήσεως  $u(t)$ , υποθέτουμε ότι η συνάρτηση  $u(t)$  είναι τύπου  $\mathcal{D}_{L,n}$ , όταν ζητούνται οι μετασχηματισμοί Laplace των παραγώγων της μέχρι και την  $n$ -τάξεως παράγωγο της  $u^{(n)}(t)$ . Αυτό συμβαίνει σε κάθε διαφορική εξίσωση τάξεως  $n$ . Η ίδια υπόθεση είναι μια ισχυρότερη απαίτηση, αλλά χρήσιμη σ' αυτήν την Ιδιότητα 5: απαραίτητη για συναρτήσεις τύπου  $\mathcal{A}_L$ , ανάλογα και για γενικότερες συναρτήσεις.

Επίσης συνεχώς θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό με κεφαλαία γράμματα

$$U(s) := \mathcal{L}\{u(t)\}, \quad U_1(s) := \mathcal{L}\{u_1(t)\}, \quad U_2(s) := \mathcal{L}\{u_2(t)\} \tag{10.3.4}$$

για τους μετασχηματισμούς Laplace των συναρτήσεων  $u(t)$ ,  $u_1(t)$  και  $u_2(t)$  αντίστοιχα.

Ξεκινάμε λοιπόν αναφέροντας μόνο τις πάρα πολύ βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace  $U(s) := \mathcal{L}\{u(t)\}$ , σε αρκετές περιπτώσεις τις αποδείξεις τους και μερικά απλά παραδείγματα για την κατανόησή τους. Υποθέτουμε συνεχώς ότι όλες αυτές οι ιδιότητες ισχύουν για επαρκώς μεγάλες τιμές  $s > s_0$  της μεταβλητής  $s$  του μετασχηματισμού Laplace με το  $s_0$  σταθερά: θετική, μηδέν ή αρνητική. Η γνώση της ακριβούς τιμής  $s_0$  της σταθεράς αυτής συνήθως δε μας είναι αναγκαία, δε μας ενδιαφέρει κατά την επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (ομογενών ή μη ομογενών) με σταθερούς συντελεστές με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace.

**A10.3.1. Ιδιότητα 1: Γραμμική ιδιότητα**

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ:** Για το γραμμικό συνδυασμό  $c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$  δύο συναρτήσεων  $u_1(t)$  και  $u_2(t)$  τύπου  $\mathcal{A}_L$  (με τα  $c_1$  και  $c_2$  αυθαίρετες σταθερές) ισχύει η γραμμική ιδιότητα

$$\mathcal{L}\{c_1u_1(t) + c_2u_2(t)\} = c_1U_1(s) + c_2U_2(s) \tag{10.3.5}$$

για τον αντίστοιχο μετασχηματισμό Laplace.

► **Παρατήρηση A10.2:** Παρενθετικά ας σημειώσουμε και ένα λίγο-πολύ προφανές γεγονός. Αν στην πιο πάνω γραμμική ιδιότητα (10.3.5) ο μετασχηματισμός Laplace  $U_1(s) = \mathcal{L}\{u_1(t)\}$  υπάρχει

για  $s > \gamma_1$  και ο μετασχηματισμός Laplace  $U_2(s) = \mathcal{L}\{u_2(t)\}$  υπάρχει για  $s > \gamma_2$ , τότε ο μετασχηματισμός Laplace  $c_1 U_1(s) + c_2 U_2(s)$  θα υπάρχει σίγουρα κι αυτός για  $s > s_0$  με  $s_0 = \max(\gamma_1, \gamma_2)$ . Αυτό ισχύει, γιατί τότε θα πληρούνται ταυτόχρονα και οι δύο παραπάνω ανισότητες  $s > \gamma_1$  και  $s > \gamma_2$ .

**Απόδειξη:** Σύμφωνα με τον ορισμό (10.3.1) του μετασχηματισμού Laplace θα έχουμε

$$\mathcal{L}\{c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} [c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)] dt. \quad (10.3.6)$$

Μας χρειάζεται επίσης ο ορισμός (10.2.12) ενός γενικευμένου (ή καταχρηστικού) ολοκληρώματος πρώτου είδους, ακριβώς όπως είναι το πιο πάνω ολοκλήρωμα (10.3.6). Ας επαναλάβουμε τον ορισμό αυτό, εδώ μάλιστα στη γενική του περίπτωση:

$$\int_a^{\infty} f(t) dt := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dt, \quad (10.3.7)$$

εφόσον βέβαια η συνάρτηση  $f(t)$  είναι ολοκληρώσιμη και το πιο πάνω όριο (για  $b \rightarrow \infty$ ) υπάρχει. Τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα υπάρχει κι αυτό, ισοδύναμα συγκλίνει.

Γνωρίζουμε επίσης πάρα πολύ καλά από τον Ολοκληρωτικό Λογισμό ότι για ένα συνηθισμένο, κοινό ολοκλήρωμα ισχύει η γραμμική ιδιότητα:

$$\int_a^b [c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] dt = c_1 \int_a^b f_1(t) dt + c_2 \int_a^b f_2(t) dt \quad (10.3.8)$$

για δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις  $f_1(t)$  και  $f_2(t)$ . Επομένως στην περίπτωση μας (10.3.6) με

$$f_1(t) = e^{-st} u_1(t) \quad \text{και} \quad f_2(t) = e^{-st} u_2(t) \quad (10.3.9)$$

και με διάστημα ολοκληρώσεως το πεπερασμένο διάστημα  $[0, b]$  (φυσικά με  $b > 0$ ) θα ισχύει ότι

$$\int_0^b e^{-st} [c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)] dt = c_1 \int_0^b e^{-st} u_1(t) dt + c_2 \int_0^b e^{-st} u_2(t) dt. \quad (10.3.10)$$

Στη σχέση αυτή παίρνουμε τώρα το όριο για  $b \rightarrow \infty$ . Έτσι προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} [c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)] dt &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ c_1 \int_0^b e^{-st} u_1(t) dt + c_2 \int_0^b e^{-st} u_2(t) dt \right] \\ &= c_1 \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} u_1(t) dt + c_2 \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} u_2(t) dt. \end{aligned} \quad (10.3.11)$$

Στην τελευταία γραμμή θυμηθήκαμε βέβαια ότι η γραμμική ιδιότητα ισχύει επίσης και για τα όρια συναρτήσεων, φυσικά εφόσον τα όρια αυτά υπάρχουν.

Τώρα σύμφωνα με τον ορισμό του γενικευμένου ολοκληρώματος πρώτου είδους (10.3.7), ειδικά εδώ με  $a = 0$ , ξαναγράφουμε την αμέσως προηγούμενη σχέση (10.3.11) στην τελική της μορφή

$$\int_0^{\infty} e^{-st} [c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)] dt = c_1 \int_0^{\infty} e^{-st} u_1(t) dt + c_2 \int_0^{\infty} e^{-st} u_2(t) dt. \quad (10.3.12)$$

Δε μας απομένει τώρα παρά να ξαναθυμηθούμε τον ορισμό (10.3.1) του μετασχηματισμού Laplace μιας συναρτήσεως  $u(t)$ . Ας τον επαναλάβουμε

$$U(s) := \mathcal{L}\{u(t)\} := \int_0^{\infty} e^{-st} u(t) dt. \quad (10.3.13)$$

Έτσι η παραπάνω σχέση (10.3.11) και στη συνέχεια (10.3.12) παίρνει την τελική της μορφή

$$\mathcal{L}\{c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{u_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{u_2(t)\}, \quad (10.3.14)$$

δηλαδή τη μορφή (10.3.5) που επιδιώκαμε να αποδείξουμε (και να, αποδείξαμε!), αφού εξ ορισμού

$$U_1(s) := \mathcal{L}\{u_1(t)\} \quad \text{και} \quad U_2(s) := \mathcal{L}\{u_2(t)\}, \quad (10.3.15)$$

όπως ήδη κατ' επανάληψη σημειώσαμε.

Άρα αποδείχθηκε πλήρως η γραμμική ιδιότητα (10.3.5) για το μετασχηματισμό Laplace με βάση βέβαια την ίδια ιδιότητα (α) για συνηθισμένα ολοκληρώματα καθώς και (β) για όρια συναρτήσεων. Η απόδειξη θα γινόταν αρκετά πιο εύκολη, εάν θεωρούσαμε ότι ισχύει η γνωστή γραμμική ιδιότητα για γενικευμένα ολοκληρώματα αντί ουσιαστικά να την αποδείξουμε πιο πάνω στην παρούσα περίπτωση με οριακή διαδικασία (για  $b \rightarrow \infty$ ). Είναι τέλος προφανές ότι η ίδια απόδειξη γενικεύεται και στο γραμμικό συνδυασμό περισσότερων από δύο συναρτήσεων: των  $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$ , κλπ. με όλες τους να υποτίθενται εδώ τύπου  $\mathcal{A}_L$ .  $\square$

▼ **Παράδειγμα A10.5:** Να υπολογισθούν οι μετασχηματισμοί Laplace των υπερβολικών συναρτήσεων υπερβολικό συνημίτονο (cosh) και υπερβολικό ημίτονο (sinh), δηλαδή των συναρτήσεων

$$u_1(t) = \cosh at \quad \text{και} \quad u_2(t) = \sinh at \quad (10.3.16)$$

με μεταβλητή το  $t$  και με το  $a$  σταθερά.

**Λύση:** Για τις δύο αυτές συναρτήσεις (υπερβολικό συνημίτονο,  $u_1(t) = \cosh at$ , και υπερβολικό ημίτονο,  $u_2(t) = \sinh at$ ) γνωρίζουμε ήδη από τους ορισμούς τους (1.5.5) της Παραγράφου A1.5.2 (εδώ όμως με  $x = at$ ) ότι

$$u_1(t) = \cosh at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2} \quad \text{και} \quad u_2(t) = \sinh at = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}. \quad (10.3.17)$$

Πρόκειται λοιπόν για απλούς γραμμικούς συνδυασμούς των δύο εκθετικών συναρτήσεων

$$f_1(t) = e^{at} \quad \text{και} \quad f_2(t) = e^{-at} \quad (10.3.18)$$

με συντελεστές  $c_1 = 1/2$  και  $c_2 = \pm 1/2$  για τους πρώτους και τους δεύτερους όρους αντίστοιχα.

Λαμβάνουμε επίσης υπόψη μας το μετασχηματισμό Laplace της εκθετικής συναρτήσεως  $e^{at}$ , τον οποίο έχουμε ήδη προσδιορίσει στη σχέση (10.2.17) του Παραδείγματος A10.3. Έτσι έχουμε

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \quad \text{οπότε προφανώς και} \quad \mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s-(-a)} = \frac{1}{s+a} \quad (10.3.19)$$

με τους ανισοτικούς περιορισμούς

$$s-a > 0 \iff s > a \quad \text{και επίσης} \quad s+a > 0 \iff s > -a \quad \text{αντίστοιχα.} \quad (10.3.20)$$

Άρα τώρα δικαιούμαστε και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη γραμμική ιδιότητα (10.3.5) για τους μετασχηματισμούς Laplace των συναρτήσεών μας (10.3.16). Έτσι προκύπτει άμεσα ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u_1(t)\} &= \mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{1}{2} \mathcal{L}\{e^{at}\} + \frac{1}{2} \mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{2} \frac{1}{s-a} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+a} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right) = \frac{1}{2} \frac{(s+a) + (s-a)}{(s-a)(s+a)} = \frac{1}{2} \frac{2s}{s^2 - a^2} = \frac{s}{s^2 - a^2}, \end{aligned} \quad (10.3.21)$$

αφού  $(s-a)(s+a) = s^2 - a^2$ , και απολύτως ανάλογα (τώρα όμως με μια αλλαγή στα πρόσημα)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u_2(t)\} &= \mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{1}{2} \mathcal{L}\{e^{at}\} - \frac{1}{2} \mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{2} \frac{1}{s-a} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+a} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a} \right) = \frac{1}{2} \frac{(s+a) - (s-a)}{(s-a)(s+a)} = \frac{1}{2} \frac{2a}{s^2 - a^2} = \frac{a}{s^2 - a^2}. \end{aligned} \quad (10.3.22)$$

Συνοψίζοντας, αποδείξαμε λοιπόν ότι

$$\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2 - a^2} \quad \text{και} \quad \mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2 - a^2}. \quad (10.3.23)$$

Πρόκειται για δύο πολύ εύκολους τύπους που μπορούμε είτε (α) να τους θυμόμαστε απέξω σαν γνωστούς μετασχηματισμούς Laplace είτε (β) να τους βρίσκουμε, ακριβώς όπως κάναμε πιο πάνω, απλά με τη χρήση της γραμμικής ιδιότητας (10.3.5) του μετασχηματισμού Laplace.

Πρέπει βέβαια στο τέλος να υπενθυμίσουμε τους δύο ανισοτικούς περιορισμούς (10.3.20) για τους μετασχηματισμούς Laplace των δύο εκθετικών συναρτήσεων (10.3.19): των συναρτήσεων  $e^{\pm at}$ . Επειδή χρησιμοποιήσαμε πιο πάνω και τις δύο αυτές εκθετικές συναρτήσεις  $e^{\pm at}$ , είμαστε υποχρεωμένοι να αποδεχθούμε σαν προϋποθέσεις μας και τους δύο ανισοτικούς περιορισμούς (10.3.20) ταυτόχρονα μάλιστα. Με τον τρόπο αυτό συνάγουμε ότι οι αμέσως πιο πάνω μετασχηματισμοί Laplace (10.3.23) για τις υπερβολικές συναρτήσεις  $\cosh at$  και  $\sinh at$  ισχύουν, μόνο εφόσον έχουμε

$$s > a \quad \text{και} \quad \text{ταυτόχρονα} \quad s > -a, \quad \text{οπότε} \quad \text{πρέπει να ισχύει ότι} \quad s > |a|, \quad (10.3.24)$$

αφού  $|a| = a > -a$  (για θετικά  $a$ ) και  $|a| = -a > a$  για αρνητικά  $a$ . Άρα και βέβαια ισχύουν οι μετασχηματισμοί Laplace (10.3.23), αλλά με την προϋπόθεση ότι  $s > |a|$ . Αλλιώς, αν  $s \leq |a|$ , δεν υπάρχουν οι μετασχηματισμοί αυτοί Laplace, τα ολοκληρώματα (10.3.1) ορισμού τους δεν υπάρχουν σαν γενικευμένα ολοκληρώματα πρώτου είδους, δε συγκλίνουν, αποκλίνουν. Αυτός βέβαια ο τελικός ανισοτικός περιορισμός  $s > |a|$  δηλώνει απλά στον τύπο (10.3.1) ορισμού του μετασχηματισμού Laplace ότι ο πυρήνας  $K(s, t) = e^{-st}$  στον τύπο αυτό πρέπει να τείνει επαρκώς γρήγορα στο μηδέν για  $t \rightarrow \infty$ . Και πραγματικά τείνει για  $s > |a|$ , ώστε να καλύπτεται η γρήγορη (ουσιαστικά εκθετική) αύξηση και των δύο συναρτήσεων  $\cosh at$  και  $\sinh at$  επίσης για  $t \rightarrow \infty$ .

Υποτίθεται ότι όλα αυτά έγιναν λίγο-πολύ κατανοητά. Ας μην προχωρήσουμε σε περισσότερες λεπτομέρειες. Ας αλλάξουμε τώρα λίγο περιβάλλον και ας αναφερθούμε στις αντίστοιχες τριγωνομετρικές συναρτήσεις  $\cos \omega t$  και  $\sin \omega t$  στο αμέσως επόμενο παράδειγμα. ▲

▼ **Παράδειγμα Α10.6:** Να υπολογισθούν οι μετασχηματισμοί Laplace των τριγωνομετρικών συναρτήσεων συνημίτονο ( $\cos$ ) και ημίτονο ( $\sin$ ), συγκεκριμένα των συναρτήσεων

$$u_3(t) = \cos \omega t \quad \text{και} \quad u_4(t) = \sin \omega t \quad (10.3.25)$$

με μεταβλητή το  $t$  και με το  $\omega$  σταθερά. Σημειώνουμε ότι συχνά στις Ταλαντώσεις το σύμβολο  $\omega$  παριστάνει την κυκλική τους συχνότητα. Γι' αυτό και το προτιμήσαμε στο παρόν παράδειγμα από το γενικότερο σύμβολο  $a$  (του προηγούμενου παραδείγματος) σαν σταθερά (παράμετρο).

**Λύση:** Και για τις δύο αυτές τριγωνομετρικές συναρτήσεις  $\cos \omega t$  και  $\sin \omega t$  μπορούμε ασφαλώς να εργασθούμε με την άμεση χρήση του ορισμού (10.3.1) του μετασχηματισμού Laplace. Πρέπει όμως τότε να εκτελέσουμε τις σχετικές ολοκληρώσεις κατά παράγοντες (ή κατά μέρη). Εδώ προτιμάμε να ακολουθήσουμε μια αρκετά ευκολότερη υπολογιστική διαδικασία χρησιμοποιώντας τους τύπους του Euler (1.5.3) και (1.5.4) της Παραγράφου Α1.5.1. Αυτοί συνδέουν τη μιγαδική εκθετική συνάρτηση  $e^{\pm ix}$  με τις δύο τριγωνομετρικές συναρτήσεις  $\cos x$  και  $\sin x$ . Τους υπενθυμίζουμε

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x \quad \text{και} \quad \text{στην περίπτωση} \quad \text{μας} \quad e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t \quad (10.3.26)$$

έχοντας θέσει  $x = \omega t$ . (Δε λησμονούμε επίσης τον ορισμό της φανταστικής μονάδας:  $i = \sqrt{-1}$ .)

Προσθαφαιρώντας τους δύο αυτούς τύπους του Euler:  $e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t$ , προκύπτει αμέσως ότι

$$\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}, \quad \sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}, \quad (10.3.27)$$

όπως ήδη γνωρίζουμε.

Η παραπέρα εργασία μας για τον υπολογισμό των δύο μετασχηματισμών Laplace  $\mathcal{L}\{\cos \omega t\}$  και  $\mathcal{L}\{\sin \omega t\}$  συνίσταται στη χρήση της θεμελιώδους γραμμικής ιδιότητας (10.3.5) του μετασχηματισμού Laplace. Είναι μάλιστα μια αρκετά απλή εργασία. Πρόκειται για μια εργασία απόλυτα ανάλογη με εκείνη που ήδη έγινε στο προηγούμενο παράδειγμα για τις αντίστοιχες υπερβολικές συναρτήσεις  $\cosh at$  και  $\sinh at$ . Και πάλι βασιζόμαστε στον τόσο γνωστό μας πια μετασχηματισμό Laplace (10.2.17):  $\mathcal{L}\{e^{at}\} = 1/(s - a)$  για την εκθετική συνάρτηση  $e^{at}$ , εδώ όμως για τις φανταστικές τιμές  $a = \pm i\omega$  της σταθεράς (παραμέτρου)  $a$ , οπότε

$$\mathcal{L}\{e^{i\omega t}\} = \frac{1}{s - i\omega}, \quad \mathcal{L}\{e^{-i\omega t}\} = \frac{1}{s + i\omega}. \quad (10.3.28)$$

Για λόγους πληρότητας ακολουθούν και όλες οι σχετικές λεπτομέρειες, ακριβώς όπως συνέβη και στο προηγούμενο παράδειγμα, εδώ όμως για τις παρούσες δύο τριγωνομετρικές συναρτήσεις  $\cos \omega t$  και  $\sin \omega t$  με βάση τους τύπους (10.3.27). Πρώτα για τη συνάρτηση  $u_3(t) = \cos \omega t$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u_3(t)\} &= \mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \frac{1}{2} \mathcal{L}\{e^{i\omega t}\} + \frac{1}{2} \mathcal{L}\{e^{-i\omega t}\} = \frac{1}{2} \frac{1}{s - i\omega} + \frac{1}{2} \frac{1}{s + i\omega} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s - i\omega} + \frac{1}{s + i\omega} \right) = \frac{1}{2} \frac{(s + i\omega) + (s - i\omega)}{(s - i\omega)(s + i\omega)} = \frac{1}{2} \frac{2s}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \end{aligned} \quad (10.3.29)$$

αφού  $(s - i\omega)(s + i\omega) = s^2 - (i\omega)^2 = s^2 + \omega^2$ . Απολύτως ανάλογα και για τη συνάρτηση  $u_4(t) = \sin \omega t$  (όμως με κάποιες αναγκαίες μικροαλλαγές στις πράξεις):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u_4(t)\} &= \mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{1}{2i} \mathcal{L}\{e^{i\omega t}\} - \frac{1}{2i} \mathcal{L}\{e^{-i\omega t}\} = \frac{1}{2i} \frac{1}{s - i\omega} - \frac{1}{2i} \frac{1}{s + i\omega} \\ &= \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{s - i\omega} - \frac{1}{s + i\omega} \right) = \frac{1}{2i} \frac{(s + i\omega) - (s - i\omega)}{(s - i\omega)(s + i\omega)} = \frac{1}{2i} \frac{2i\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \end{aligned} \quad (10.3.30)$$

Συναγάγαμε λοιπόν (και αρκετά εύκολα μάλιστα!) ότι

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad \text{και} \quad \mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (10.3.31)$$

έχοντας επιπλέον αποφύγει εντελώς τις ολοκληρώσεις κατά παράγοντες (ή κατά μέρη). Πρόκειται και πάλι για πολύ εύκολους τύπους που μπορούμε (επαναλαμβάνουμε και στο παράδειγμα αυτό) είτε (α) να τους θυμόμαστε απέξω είτε (β) να τους βρούμε, ακριβώς όπως κάναμε πιο πάνω.

Τελειώνοντας και το παράδειγμα αυτό, ας παρατηρήσουμε τις ομοιότητες και τις διαφορές μεταξύ των μετασχηματισμών Laplace των υπερβολικών και των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Προς το σκοπό αυτό γράφουμε και τους τέσσερις μαζί στις επόμενες δύο σειρές με σταθερά (παραμέτρο) μόνο το  $\omega$  (αντί για το  $a$ ) ακόμη και στις υπερβολικές συναρτήσεις:

$$\mathcal{L}\{\cosh \omega t\} = \frac{s}{s^2 - \omega^2} \quad \text{και ανάλογα} \quad \mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad (10.3.32)$$

$$\mathcal{L}\{\sinh \omega t\} = \frac{\omega}{s^2 - \omega^2} \quad \text{και ανάλογα} \quad \mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (10.3.33)$$

Σημειώνουμε ότι οι διαφορές συνίστανται απλά στο ότι στις υπερβολικές συναρτήσεις συνημίτονο και ημίτονο έχουμε πλην ( $-$ ) στους παρονομαστές  $s^2 - \omega^2$  των μετασχηματισμών Laplace τους. Αντίθετα στις αντίστοιχες τριγωνομετρικές συναρτήσεις έχουμε συν ( $+$ ) αντί για πλην ( $-$ ) στους παρονομαστές αυτών.

Με απλά λόγια σε ελεύθερες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση, αν παρ' ελπίδα ο Πολιτικός Μηχανικός καταλήξει σε μετασχηματισμούς Laplace με παρονομαστές της μορφής  $s^2 - \omega^2$ , ας μην προχωρήσει (οδηγούμενος αναγκαστικά σε υπερβολικές συναρτήσεις). Έχει σίγουρα κάνει λάθος και οι υπολογισμοί του προφανώς παραβιάζουν την αρχή διατηρήσεως της ενέργειας! Αν όμως οι παρονομαστές του είναι της μορφής  $s^2 + \omega^2$ , τότε μπορεί να συνεχίσει άφοβα τις πράξεις του,

οι οποίες θα οδηγήσουν σε τριγωνομετρικές συναρτήσεις, και φυσικά να τις επαληθεύσει όλες στο τέλος! Ανάλογα ισχύουν (με κάποιες διαφορές όμως) και σε ελεύθερες ταλαντώσεις με απόσβεση, όπως θα έχουμε την ευκαιρία να εξηγήσουμε πιο κάτω στην παρούσα ενότητα: τύποι (10.3.46). ▲

▼ **Παράδειγμα Α10.7:** Να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συναρτήσεως

$$u_5(t) = 1 - 2t^2 + 3e^{-10t} - 4 \cosh 11t + 5 \sinh 12t + 6 \cos 13t - 7 \sin 14t. \quad (10.3.34)$$

**Λύση:** Θα χρησιμοποιήσουμε τους γνωστούς μας μετασχηματισμούς Laplace της μονάδας:  $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$  (σχέση (10.2.19)), της συναρτήσεως  $t^2$ :  $\mathcal{L}\{t^2\} = 2/s^3$  (σχέσεις (10.2.26)), της εκθετικής συναρτήσεως  $\mathcal{L}\{e^{at}\} = 1/(s-a)$  (σχέση (10.2.17)) καθώς και τους αμέσως πιο πάνω μετασχηματισμούς Laplace (10.3.32) και (10.3.33) για τις υπερβολικές και τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Με τον τρόπο αυτό και με βάση τη σημαντικότερη γραμμική ιδιότητα (10.3.5) του μετασχηματισμού Laplace (εδώ για πολλές συναρτήσεις!) βρίσκουμε εύκολα το ζητούμενο μετασχηματισμό Laplace

$$\mathcal{L}\{u_5(t)\} = \frac{1}{s} - 2 \frac{2}{s^3} + 3 \frac{1}{s - (-10)} - 4 \frac{s}{s^2 - 11^2} + 5 \frac{12}{s^2 - 12^2} + 6 \frac{s}{s^2 + 13^2} - 7 \frac{14}{s^2 + 14^2}. \quad (10.3.35)$$

Με λίγες αριθμητικές και αλγεβρικές απλοποιήσεις φέρνουμε αυτόν το μετασχηματισμό Laplace και στην ακόλουθη τελική του μορφή:

$$\mathcal{L}\{u_5(t)\} = \frac{s^2 - 4}{s^3} + \frac{3}{s + 10} - \frac{4s}{s^2 - 121} + \frac{60}{s^2 - 144} + \frac{6s}{s^2 + 169} - \frac{98}{s^2 + 196}. \quad (10.3.36)$$

Τονίζουμε ότι είναι αναγκαίο ο Πολιτικός Μηχανικός να απλοποιεί πάντοτε κατά το δυνατόν τα αποτελέσματα των υπολογισμών του! ▲

### Α10.3.2. Ιδιότητα 2: Αλλαγή κλίμακας

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ:** Για μια συνάρτηση  $u(t)$  τύπου  $\mathcal{A}_L$  στο μετασχηματισμό Laplace της ισχύει η ιδιότητα

$$\mathcal{L}\{u(at)\} = \frac{1}{a} U\left(\frac{s}{a}\right) \quad (10.3.37)$$

με  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  και το  $a$  θετική σταθερά ( $a > 0$ ).

**Απόδειξη:** Η απόδειξη είναι πολύ εύκολη. Στηρίζεται απλά στην αλλαγή μεταβλητής

$$\tau = at \implies t = \frac{\tau}{a} = \frac{1}{a} \tau \implies dt = \frac{1}{a} d\tau \quad (10.3.38)$$

καθώς και στον ορισμό (10.3.1) του μετασχηματισμού Laplace και ακολουθεί:

$$\mathcal{L}\{u(at)\} = \int_0^\infty e^{-st} u(at) dt = \int_0^\infty e^{-s\tau/a} u(\tau) \frac{1}{a} d\tau = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-(s/a)\tau} u(\tau) d\tau = \frac{1}{a} U\left(\frac{s}{a}\right). \quad (10.3.39)$$

Μπορούμε βέβαια να προσθέσουμε ότι με τη συνάρτηση  $u(t)$  εκθετικής τάξεως  $\gamma$ , ο μετασχηματισμός Laplace της  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  υπάρχει για  $s > \gamma$ . Όμως με βάση την αλλαγή μεταβλητής  $\tau = at$  και την πιο πάνω απόδειξη (10.3.39) ο μετασχηματισμός Laplace  $\mathcal{L}\{u(at)\} = (1/a)U(s/a)$  της συναρτήσεως  $u(at)$  (με  $a > 0$ ) θα υπάρχει για  $s/a > \gamma$ , δηλαδή για  $s > a\gamma$ . □

▼ **Παράδειγμα Α10.8:** Ο μετασχηματισμός Laplace της συναρτήσεως Bessel πρώτου είδους και μηδενικής τάξεως  $J_0(t)$

$$\hat{J}_0(s) := \mathcal{L}\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}} \quad (10.3.40)$$

θεωρείται γνωστός από πίνακες μετασχηματισμών Laplace. Εδώ ζητείται απλά ο μετασχηματισμός Laplace της αντίστοιχης συναρτήσεως  $J_0(at)$  με  $a > 0$ . (Σημειώνουμε ότι στις συναρτήσεις Bessel θα αφιερώσουμε την Ενότητα Α15.2 στο Κεφάλαιο Α15 παρακάτω.)

**Λύση:** Με βάση (α) την προηγούμενη ιδιότητα (10.3.37) της αλλαγής κλίμακας στο μετασχηματισμό Laplace και (β) τον αμέσως πιο πάνω μετασχηματισμό Laplace (10.3.40) της συναρτήσεως Bessel  $J_0(t)$ , ο οποίος δίνεται στο παράδειγμα αυτό, προκύπτει ευθύς ότι

$$\mathcal{L}\{J_0(at)\} = \frac{1}{a} \hat{J}_0\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{(s/a)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}}. \quad (10.3.41)$$

Ανάλογα μπορούμε να εργασθούμε και για συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους και  $n$ -τάξεως  $J_n(t)$  καθώς και για πολλές άλλες συναρτήσεις. Παρά ταύτα η ιδιότητα της αλλαγής κλίμακας (10.3.37) δε μπορεί να χαρακτηριστεί από τις χρησιμότερες ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace. ▲

**A10.3.3. Ιδιότητα 3: Πολλαπλασιασμός επί εκθετική συνάρτηση**

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ:** Για μια συνάρτηση  $u(t)$  τύπου  $\mathcal{A}_L$  στο μετασχηματισμό Laplace της ισχύει η ιδιότητα

$$\mathcal{L}\{e^{-at} u(t)\} = U(s + a) \quad (10.3.42)$$

με το  $a$  σταθερά (είτε θετική είτε αρνητική είτε ακόμη και μιγαδική:  $a = \alpha + i\beta$ ).

**Απόδειξη:** Πρόκειται για μια αρκετά χρήσιμη ιδιότητα στο μετασχηματισμό Laplace. Ακολουθεί η πάρα πολύ απλή απόδειξή της, που βασίζεται και αυτή στον ορισμό (10.3.1) του μετασχηματισμού Laplace  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ :

$$\mathcal{L}\{e^{-at} u(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} [e^{-at} u(t)] dt = \int_0^\infty (e^{-st} e^{-at}) u(t) dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)t} u(t) dt = U(s + a), \quad (10.3.43)$$

αφού  $e^\alpha e^\beta = e^{\alpha+\beta}$  και επίσης  $U(s) := \mathcal{L}\{u(t)\}$ . Ήταν πραγματικά πολύ εύκολη η απόδειξη αυτή! □

▼ **Παράδειγμα A10.9:** Να υπολογισθούν οι μετασχηματισμοί Laplace των δύο συναρτήσεων

$$u_1(t) = e^{-at} \cos \omega t \quad \text{και} \quad u_2(t) = e^{-at} \sin \omega t. \quad (10.3.44)$$

**Λύση:** Υπενθυμίζουμε καταρχήν τους μετασχηματισμούς Laplace των δύο τριγωνομετρικών συναρτήσεων  $\cos \omega t$  και  $\sin \omega t$ , που τους γνωρίζουμε ήδη από τις σχέσεις (10.3.31):

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad \text{και} \quad \mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (10.3.45)$$

Σύμφωνα με την πιο πάνω ιδιότητα (10.3.42) το μόνο που οφείλουμε να κάνουμε εδώ είναι να θέσουμε  $s + a$  στη θέση του  $s$  σ' αυτούς τους δύο μετασχηματισμούς Laplace (10.3.45). Με τον τόσο απλό αυτό τρόπο βρίσκουμε αμέσως ότι

$$\mathcal{L}\{e^{-at} \cos \omega t\} = \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2} \quad \text{και} \quad \mathcal{L}\{e^{-at} \sin \omega t\} = \frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}. \quad (10.3.46)$$

Πρόκειται για δύο εξαιρετικά χρήσιμους τύπους για τον Πολιτικό Μηχανικό στις ταλαντώσεις με απόσβεση, όπου παρουσιάζονται όροι αποσβέσεως της μορφής  $e^{-at}$  με  $a = \xi\omega_0$ . (Τούτο το γνωρίζουμε από την Παράγραφο A6.1.2 του Κεφαλαίου A6: σχέσεις (6.1.18), (6.1.22) και (6.1.30).) Για το λόγο αυτό εκ προθέσεως επιλέξαμε να γράψουμε την παρούσα ιδιότητα με  $-a$  στον εκθετικό όρο  $e^{-at}$  αντί με  $a$ , δηλαδή  $e^{at}$ . (Το αντίθετο,  $e^{at}$  αντί  $e^{-at}$ , συμβαίνει σε αρκετά μαθηματικά βιβλία.)

Ας σημειώσουμε τέλος ότι λόγω του δεξιού μέλους  $U(s + a)$  στην παρούσα ιδιότητα (10.3.42) συχνά αυτή χαρακτηρίζεται και σαν μετατόπιση στον άξονα  $s$  της μεταβλητής  $s$  του μετασχηματισμού Laplace. Κάπως ανάλογη είναι και η μετατόπιση στον άξονα  $t$  της αρχικής μεταβλητής. Τη σχετική ιδιότητα θα την εξετάσουμε στην αμέσως επόμενη παράγραφο της παρούσας ενότητας. ▲

**Α10.3.4. Ιδιότητα 4: Μετατόπιση στον άξονα της αρχικής μεταβλητής**

Για την ιδιότητα αυτή πρέπει καταρχήν να αναφέρουμε τον ορισμό της **βηματικής συναρτήσεως (step function) του Heaviside** ή **μοναδιαίας βηματικής συναρτήσεως** ή **συναρτήσεως μοναδιαίου βήματος (unit step function)**

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{για } t < 0, \\ 1 & \text{για } t \geq 0. \end{cases} \quad (10.3.47)$$

Πρόκειται για μια πάρα πολύ χρήσιμη ασυνεχής συνάρτηση, ιδιαίτερα στο μετασχηματισμό Laplace.

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ:** Για μια συνάρτηση  $u(t)$  τύπου  $\mathcal{A}_L$  στο μετασχηματισμό Laplace ισχύει η ιδιότητα

$$\mathcal{L}\{u(t-t_0)H(t-t_0)\} = e^{-st_0} U(s) \quad (10.3.48)$$

για τη μετατοπισμένη συνάρτηση  $u(t-t_0)$  με το  $t_0 > 0$ , θετική σταθερά: μετατόπιση προς τα δεξιά.

**Απόδειξη:** Αρχικά πρέπει να σημειώσουμε ότι η πιο πάνω συνάρτηση  $u(t-t_0)H(t-t_0)$  είναι αναλυτικότερα η ακόλουθη συνάρτηση:

$$u(t-t_0)H(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{για } t < t_0, \\ u(t-t_0) & \text{για } t \geq t_0. \end{cases} \quad (10.3.49)$$

Αυτό ισχύει εξαιτίας του παραπάνω ορισμού (10.3.47) της βηματικής συναρτήσεως του Heaviside  $H(t)$ , που παίρνει την τιμή μηδέν για  $t < 0$  και την τιμή ένα για  $t \geq 0$ .

Δεν έχουμε τώρα παρά να εφαρμόσουμε το γνωστό μας ορισμό (10.3.1) του μετασχηματισμού Laplace στη συνάρτηση  $u(t-t_0)H(t-t_0)$ , την οποία θέλουμε να μετασχηματίσουμε κατά Laplace. Λόγω και της σχέσεως (10.3.49) είναι σαφές ότι

$$\mathcal{L}\{u(t-t_0)H(t-t_0)\} = \int_0^\infty e^{-st} [u(t-t_0)H(t-t_0)] dt = \int_{t_0}^\infty e^{-st} u(t-t_0) dt \quad (10.3.50)$$

τώρα με κάτω όριο ολοκληρώσεως το σημείο  $t = t_0$ . Στο σημείο αυτό  $t = t_0$  μπορούν στ' αλήθεια να αρχίσουν οι μη μηδενικές τιμές της συναρτήσεώς μας  $u(t-t_0)H(t-t_0)$  εξαιτίας της παρουσίας της βηματικής συναρτήσεως του Heaviside  $H(t-t_0)$ , που μηδενίζεται για  $t-t_0 < 0$ , δηλαδή για  $t < t_0$ , όπως ήδη αναφέραμε. Προφανώς ο μηδενισμός αυτός της συναρτήσεως  $H(t-t_0)$  (για  $t < t_0$ ) έχει σαν συνέπεια το μηδενισμό και όλης της συναρτήσεώς μας  $u(t-t_0)H(t-t_0)$  μέχρι το σημείο  $t = t_0$ , φυσικά με  $t_0 > 0$ . Έτσι έχει έννοια το δεξιό μέλος του μετασχηματισμού Laplace (10.3.50).

Το επόμενο βήμα μας είναι η απλή αλλαγή μεταβλητής

$$\tau = t - t_0 \implies t = \tau + t_0 \implies dt = d\tau \quad (\text{αφού το } t_0 \text{ είναι σταθερά!}) \quad (10.3.51)$$

στη συνάρτηση  $u(t-t_0)$  και σε ολόκληρο το δεξιό μέλος της σχέσεως (10.3.50). Έτσι η σχέση αυτή τροποποιείται ως εξής:

$$\mathcal{L}\{u(t-t_0)H(t-t_0)\} = \int_0^\infty e^{-s(\tau+t_0)} u(\tau) d\tau, \quad (10.3.52)$$

όπως πολύ εύκολα παρατηρούμε. (Επειδή  $\tau = t-t_0$ , το κάτω όριο ολοκληρώσεως έγινε  $t_0-t_0 = 0$ .)

Σημειώνουμε επίσης ότι  $e^{\alpha+\beta} = e^\alpha e^\beta$ . Ξαναγράφουμε έτσι την προηγούμενη σχέση (10.3.52) στην τελική της μορφή

$$\mathcal{L}\{u(t-t_0)H(t-t_0)\} = \int_0^\infty e^{-s\tau} e^{-st_0} u(\tau) d\tau = e^{-st_0} \int_0^\infty e^{-s\tau} u(\tau) d\tau = e^{-st_0} U(s), \quad (10.3.53)$$

μια και ο παράγοντας  $e^{-st_0}$  είναι ανεξάρτητος από τη μεταβλητή ολοκληρώσεως  $\tau$ . Επομένως μπορεί να τεθεί έξω από το ολοκλήρωμα. Φυσικά είναι προφανές ότι δεν έχει καμία απολύτως σημασία αν η μεταβλητή ολοκληρώσεως στο τελευταίο ολοκλήρωμα είναι η  $\tau$  ή η  $t$ : το ολοκλήρωμα αυτό είναι σίγουρα ο μετασχηματισμός Laplace  $U(s) := \mathcal{L}\{u(t)\}$  της συναρτήσεως  $u(t)$ . □



Ας προχωρήσουμε τώρα σε τρία σχετικά παραδείγματα. Δύο με αρχική μεταβλητή το  $t$  (στην οποία δεν έχουμε αποδώσει εδώ φυσική σημασία, αν και συχνά δηλώνει το χρόνο) και ένα (σε φόρτιση δοκού μήκους  $L$ ) με αρχική μεταβλητή το  $x$ : τη θέση κατά μήκος της δοκού (με  $0 \leq x \leq L$ ).

▼ **Παράδειγμα A10.10:** Να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Laplace της μετατοπισμένης βηματικής συναρτήσεως του Heaviside  $H(t - t_0)$  με  $t_0 > 0$ .

**Λύση:** Με βάση τον ορισμό (10.3.47) της βηματικής συναρτήσεως του Heaviside  $H(t)$  πρόκειται φυσικά για τη συνάρτηση

$$H(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{για } t - t_0 < 0 \iff t < t_0, \\ 1 & \text{για } t - t_0 \geq 0 \iff t \geq t_0 \end{cases} \quad (10.3.54)$$

με τιμή το μηδέν μέχρι το σημείο  $t = t_0$  του άξονα  $t$  και στη συνέχεια τιμή τη μονάδα. Δηλαδή έχουμε τη μετατοπισμένη (κατά  $t_0$  και προς τα δεξιά στον άξονα  $t$ ) συνάρτηση  $H(t - t_0)$ .

Για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Laplace  $\mathcal{L}\{H(t - t_0)\}$  της συναρτήσεως αυτής μπορούμε να εφαρμόσουμε κατευθείαν τον ορισμό (10.3.1) του μετασχηματισμού Laplace. Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πιο πάνω ιδιότητα (10.3.48) στην ειδική περίπτωση που

$$u(t) = 1 \implies U(s) = \frac{1}{s}, \quad (10.3.55)$$

όπως ήδη πολύ καλά γνωρίζουμε. Έτσι η ιδιότητα αυτή (10.3.48) μας δίνει αμέσως (με  $u(t) = 1$ )

$$\mathcal{L}\{H(t - t_0)\} = e^{-st_0} \frac{1}{s} = \frac{e^{-st_0}}{s}. \quad (10.3.56)$$

Άρα προσδιορίστηκε ο ζητούμενος (και πρακτικά πολύ χρήσιμος!) μετασχηματισμός Laplace. ▲

▼ **Παράδειγμα A10.11:** Να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Laplace της «τριγωνικής» συναρτήσεως ή συναρτήσεως «αναρριχήσεως» ή «κεκλιμένου επιπέδου» ή «ράμπας» («ramp»)

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{για } t < t_0, \\ t & \text{για } t \geq t_0. \end{cases} \quad (10.3.57)$$

**Λύση:** Και πάλι στο λίγο πιο δύσκολο αυτό παράδειγμα έχουμε τις εξής δύο δυνατότητες: είτε (α) να χρησιμοποιήσουμε κατευθείαν τον ορισμό (10.3.1) του μετασχηματισμού Laplace για τη συνάρτηση αυτή  $u(t)$  μαζί με την αναγκαία παραγοντική ολοκλήρωση είτε (β) να ξαναπροσφύγουμε στην πιο πάνω ιδιότητα (10.3.48). Εδώ θα ακολουθήσουμε τη δεύτερη δυνατότητα.

Ξεκινώντας πρέπει βέβαια να γράψουμε τη συνάρτηση  $u(t)$  που μας δόθηκε στη σχέση (10.3.57) σε ισοδύναμη μορφή με τη χρήση της βηματικής συναρτήσεως  $H(t - t_0)$  του Heaviside. Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη ότι  $t = t - t_0 + t_0 = (t - t_0) + t_0$ , έχουμε

$$u(t) = tH(t - t_0) = (t - t_0 + t_0)H(t - t_0) = (t - t_0)H(t - t_0) + t_0H(t - t_0). \quad (10.3.58)$$

Είναι προφανές ότι ο λόγος που αναγκασθήκαμε να γράψουμε  $t = (t - t_0) + t_0$  (με την προσθαφαίρεση της σταθεράς  $t_0$ ) ήταν ότι η ιδιότητα (10.3.48) έχει πραγματικά στο αριστερό μέλος της τη συνάρτηση  $u(t - t_0)$  της διαφοράς  $t - t_0$ , όχι απλά τη συνάρτηση  $u(t)$ ! Χρησιμοποιούμε τώρα την ίδια ιδιότητα (10.3.48) για τις δύο σχετικές συναρτήσεις

$$u_a(t) = t \quad \text{με} \quad U_a(s) = \mathcal{L}\{u_a(t)\} = \frac{1}{s^2} \quad (10.3.59)$$

και

$$u_b(t) = t_0 \quad \text{με} \quad U_b(s) = \mathcal{L}\{u_b(t)\} = \frac{t_0}{s}. \quad (10.3.60)$$

Το διαχωρισμό αυτό

$$u(t) = u_a(t - t_0)H(t - t_0) + u_b(t - t_0)H(t - t_0) = (t - t_0)H(t - t_0) + t_0H(t - t_0) \quad (10.3.61)$$

τον κάναμε απλά για εκπαιδευτικούς λόγους καλύτερης κατανοήσεως του παραδείγματος αυτού και όχι γιατί είναι απόλυτα αναγκαίος.

Τελικά με τη χρήση των δύο παραπάνω σχέσεων (10.3.59) και (10.3.60) σε συνδυασμό με τη βασική σχέση (10.3.58) και την ιδιότητα (10.3.48) ασφαλώς προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\{u_a(t-t_0)H(t-t_0)\} + \mathcal{L}\{u_b(t-t_0)H(t-t_0)\} = \frac{1}{s^2} e^{-st_0} + \frac{t_0}{s} e^{-st_0} = \frac{1+st_0}{s^2} e^{-st_0}. \quad (10.3.62)$$

Ασφαλώς στο ίδιο τελικό αποτέλεσμα θα καταλήγαμε χρησιμοποιώντας στην ιδιότητα (10.3.48) μόνο τη συνάρτηση  $u_c(t) = t + t_0$  με μετασχηματισμό Laplace  $\mathcal{L}\{u_c(t)\} = (1/s^2) + (t_0/s) = (1+st_0)/s^2$ . Βέβαια στην περίπτωση αυτή είναι προφανές ότι  $u_c(t-t_0) = (t-t_0) + t_0 = t - t_0 + t_0 = t$ . ▲

▼ **Εφαρμογή Α10.1 (Δοκοί):** Η κάθετη κατανεμημένη φόρτιση  $p(x)$  (σε kN/m) πάνω σε συνήθη δοκό μήκους  $L$  (με  $0 \leq x \leq L$ ) είναι μια τμηματικά σταθερή συνάρτηση, που ορίζεται από τη σχέση

$$p(x) = \begin{cases} p_1 & \text{για } 0 < x < c, \\ p_2 & \text{για } c < x < d, \\ p_3 & \text{για } d < x < L \end{cases} \quad (10.3.63)$$

με τα  $c$  και  $d$  εσωτερικά σημεία της δοκού προφανώς με  $0 < c < d < L$  και τις φορτίσεις  $p_1$ ,  $p_2$  και  $p_3$  γνωστές σταθερές. (Σημειώνουμε ότι στα μεμονωμένα σημεία  $x = 0$ ,  $x = c$ ,  $x = d$  και  $x = L$  δε μας ενδιαφέρουν οι τιμές της φορτίσεως  $p(x)$ . Το ίδιο συμβαίνει και εκτός της δοκού, δηλαδή όταν είτε  $x < 0$  είτε  $x > L$ , όπου φυσικά δεν υπάρχει δοκός.) Εδώ ζητείται η ίδια φόρτιση  $p(x)$ , που ορίστηκε πιο πάνω, γραμμένη όμως με ενιαίο τρόπο (δηλαδή χωρίς τη διάκριση περιπτώσεων) κάνοντας χρήση της βηματικής συναρτήσεως του Heaviside  $H(x)$ .

**Λύση:** Υπενθυμίζουμε τον ορισμό (10.3.47) της βηματικής συναρτήσεως του Heaviside  $H(x)$ ,

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{για } x < 0, \\ 1 & \text{για } x \geq 0, \end{cases} \quad (10.3.64)$$

εδώ όμως γραμμένο με μεταβλητή τη θέση  $x$  κατά μήκος της δοκού (αντί για τη μεταβλητή  $t$ ).

Είναι προφανές από τον παραπάνω ορισμό ότι η συνάρτηση  $q_1(x) = p_1[H(x) - H(x-c)]$  παίρνει τιμή μηδέν για  $x < 0$ , όπου  $H(x) = 0$ , αλλά ταυτόχρονα και  $H(x-c) = 0$ , αφού  $c > 0$ . Το ίδιο συμβαίνει και για  $x > c$ , όπου  $H(x) = 1$  και επίσης  $H(x-c) = 1$ . Αντίθετα στο διάστημα  $0 < x < c$  (καλύτερα  $0 \leq x < c$ ) η συνάρτηση αυτή παίρνει τιμή  $p_1 \cdot (1 - 0) = p_1$ , επειδή στο διάστημα αυτό  $H(x) = 1$  (αφού  $x \geq 0$ ), ενώ  $H(x-c) = 0$  (αφού  $x < c$ , οπότε  $x-c < 0$ ). Άρα πρόκειται για την κατάλληλη συνάρτηση που μας δίνει ακριβώς τη σταθερή φόρτιση  $p_1$  στο διάστημα  $0 < x < c$ . Με ανάλογες παρατηρήσεις προκύπτει ότι η συνάρτηση  $q_2(x) = p_2[H(x-c) - H(x-d)]$  μας δίνει τη σταθερή φόρτιση  $p_2$  στο διάστημα  $c < x < d$ . Τέλος η συνάρτηση  $q_3(x) = p_3[H(x-d) - H(x-L)]$  μας δίνει τη σταθερή φόρτιση  $p_3$  στο διάστημα  $d < x < L$ , δηλαδή στο τελευταίο τμήμα της δοκού.

Κατά συνέπεια το άθροισμα  $p(x) = q_1(x) + q_2(x) + q_3(x)$  των τριών αυτών συναρτήσεων, δηλαδή

$$p(x) = p_1[H(x) - H(x-c)] + p_2[H(x-c) - H(x-d)] + p_3[H(x-d) - H(x-L)] \quad (10.3.65)$$

παίρνει τιμή  $p_1$  στο πρώτο διάστημα (πρώτο τμήμα της δοκού)  $0 < x < c$ , τιμή  $p_2$  στο δεύτερο διάστημα (μεσαίο τμήμα της δοκού)  $c < x < d$  και τιμή  $p_3$  στο τρίτο διάστημα (τελευταίο τμήμα της δοκού)  $d < x < L$ . Έξω από τη δοκό, δηλαδή στα ημιάπειρα διαστήματα  $x < 0$  και  $x > L$ , όπου δεν υπάρχει δοκός, παίρνει μηδενική τιμή. Άρα αυτή είναι κατάλληλη αναπαράσταση με ενιαίο τρόπο της φορτίσεως  $p(x)$  που μας δόθηκε στην εκφώνηση της εφαρμογής. Αλλάζοντας μάλιστα τη σειρά των προσθετέων του δεξιού μέλους στη συνάρτηση αυτή (10.3.65), μπορούμε να τη γράψουμε και στην ακόλουθη απόλυτα ισοδύναμη (και προτιμότερη λόγω συντομίας!) μορφή της:

$$p(x) = p_1 H(x) + (p_2 - p_1) H(x-c) + (p_3 - p_2) H(x-d) - p_3 H(x-L). \quad (10.3.66)$$

Υπάρχει όμως και μια εναλλακτική και αρκετά πιο πρακτική δυνατότητα γραφής της ίδιας φορτίσεως  $p(x)$  πάνω στη δοκό που εξετάζουμε, δηλαδή με  $0 < x < L$ . Η δυνατότητα αυτή συνίσταται στο να μη δώσουμε καθόλου μα καθόλου προσοχή στο τί συμβαίνει έξω από την αληθινή δοκό μας ως προς τη «φόρτισή» της. (Ποια φόρτιση, αφού δεν υπάρχει καν δοκός;) Έτσι μπορούμε να θέσουμε το 1 στη θέση του  $H(x)$  στον πρώτο όρο  $p_1 H(x)$  της πιο πάνω φορτίσεως  $p(x)$ , αφού ενδιαφερόμαστε μόνο για  $x > 0$ . (Τί μας νοιάζει για  $x < 0$ ;) Με ανάλογο σκεπτικό μπορούμε να παραλείψουμε εντελώς τον τελευταίο όρο  $-p_3 H(x-L)$  της ίδιας φορτίσεως  $p(x)$ , αφού  $H(x-L) = 0$  για  $x < L$ . (Τί μας ενδιαφέρει το τί γίνεται για  $x > L$ ;) Με τις σκέψεις αυτές η φόρτιση  $p(x)$  στη σχέση (10.3.66) μπορεί να γραφεί και στην απλούστερη μορφή

$$p^*(x) = p_1 + (p_2 - p_1)H(x - c) + (p_3 - p_2)H(x - d) \quad (10.3.67)$$

με την έννοια βέβαια ότι ισχύει μόνο κατά μήκος της ίδιας της πραγματικής δοκού:  $0 \leq x \leq L$ . Έτσι κι αλλιώς δεν έχει κανένα απολύτως φυσικό νόημα να μιλάμε για φόρτιση  $p(x)$  της δοκού έξω από αυτήν, δηλαδή για  $x < 0$  καθώς και για  $x > L$ . Σωστά; ▲

### A10.3.5. Ιδιότητα 5: Μετασχηματισμοί Laplace παραγώγων

Πρόκειται ίσως για την πιο βασική ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace, όσον αφορά στην επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, όπου παρουσιάζεται όχι μόνο η ίδια η άγνωστη συνάρτηση  $u(t)$ , αλλά και μία ή/και περισσότερες παράγωγοι αυτής. Γενικά έχουμε μέχρι και την παράγωγο  $n$ -τάξεως, εάν πρόκειται για γραμμική διαφορική εξίσωση  $n$ -τάξεως με σταθερούς συντελεστές. Για τους μετασχηματισμούς Laplace των παραγώγων  $\mathcal{L}\{u^{(k)}(t)\}$  (με  $k = 1, 2, \dots, n$  για μια γραμμική διαφορική εξίσωση  $n$ -τάξεως) ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ:** Θεωρούμε μια συνάρτηση  $u(t)$  τύπου  $\mathcal{D}_{L,n}$ , δηλαδή τόσο η ίδια η συνάρτηση όσο και οι  $n - 1$  πρώτες παράγωγοί της  $u^{(k)}(t)$  (με  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ ) είναι συνεχείς σε κάθε πεπερασμένο διάστημα  $[0, b]$  (φυσικά με  $b > 0$ ), αλλά και εκθετικής τάξεως  $\gamma$ . Επίσης ειδικά η  $n$ -τάξεως παράγωγος  $u^{(n)}(t)$  της ίδιας συναρτήσεως  $u(t)$  αρκεί να είναι τμηματικά συνεχής (όχι αναγκαστικά συνεχής) σε κάθε διάστημα  $[0, b]$  με τον προηγούμενο ορισμό του (όχι όμως αναγκαστικά και εκθετικής τάξεως). Τότε υπάρχουν όχι μόνο ο μετασχηματισμός Laplace  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  της συναρτήσεως  $u(t)$ , αλλ' επίσης και οι αντίστοιχοι μετασχηματισμοί Laplace των  $n$  πρώτων παραγώγων της συναρτήσεως αυτής  $u(t)$  και ισχύει ο τύπος

$$\mathcal{L}\{u'(t)\} = sU(s) - u(0), \quad \text{εάν } n = 1. \quad (10.3.68)$$

Επίσης ισχύει ο ίδιος τύπος καθώς και ο δεύτερος τύπος

$$\mathcal{L}\{u''(t)\} = s^2 U(s) - su(0) - u'(0), \quad \text{εάν } n = 2. \quad (10.3.69)$$

Παραπέρα ισχύουν και οι δύο προηγούμενοι τύποι καθώς και ο τρίτος τύπος

$$\mathcal{L}\{u'''(t)\} = s^3 U(s) - s^2 u(0) - su'(0) - u''(0), \quad \text{εάν } n = 3. \quad (10.3.70)$$

Στη συνέχεια ισχύουν και οι τρεις προηγούμενοι τύποι καθώς και ο τέταρτος τύπος

$$\mathcal{L}\{u^{(4)}(t)\} = s^4 U(s) - s^3 u(0) - s^2 u'(0) - su''(0) - u'''(0), \quad \text{εάν } n = 4. \quad (10.3.71)$$

Ανάλογα ισχύουν και οι αντίστοιχοι τύποι για  $n > 4$  φθάνοντας για παράδειγμα μέχρι τον τύπο

$$\mathcal{L}\{u^{(n)}(t)\} = s^n U(s) - s^{n-1} u(0) - s^{n-2} u'(0) - \dots - su^{(n-2)}(0) - u^{(n-1)}(0) \quad (10.3.72)$$

για μια συνάρτηση  $u(t)$  τύπου  $\mathcal{D}_{L,n}$  με αυθαίρετο φυσικό αριθμό το  $n$ .

**Απόδειξη:** Ξεκινάμε φυσικά την απόδειξη με τον πρώτο τύπο (10.3.68), ο οποίος αφορά στο μετασχηματισμό Laplace της πρώτης παραγώγου  $u'(t)$  υποθέτοντας ότι  $n = 1$ . Για τη σχετική απόδειξη λαμβάνουμε πρώτα υπόψη μας τον ορισμό (10.2.1) ή (10.3.1) του μετασχηματισμού Laplace και το χρησιμοποιούμε για την πρώτη παράγωγο  $u'(t)$  της συναρτήσεως  $u(t)$ . Τότε προκύπτει αμέσως ότι

$$\mathcal{L}\{u'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} u'(t) dt \quad (10.3.73)$$

για το μετασχηματισμό Laplace της πρώτης παραγώγου  $u'(t)$  που θεωρούμε εδώ (με  $n = 1$ ), εφόσον βέβαια υπάρχει. Στο σημείο αυτό κάνουμε και την επιπλέον υπόθεση ότι η παράγωγος  $u'(t)$  είναι συνεχής και όχι απλά τμηματικά συνεχής σε κάθε διάστημα  $[0, b]$  (με  $b > 0$ ). Μπορούμε έτσι να εφαρμόσουμε τη μέθοδο της παραγοντικής ολοκλήρωσεως (ή ολοκλήρωσεως κατά παράγοντες ή ολοκλήρωσεως κατά μέρη) στο ολοκλήρωμα (10.3.73) ορισμού του παρόντος μετασχηματισμού Laplace  $\mathcal{L}\{u'(t)\}$ . Με τον τρόπο αυτό διαπιστώνουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u'(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} u'(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} du(t) = e^{-st} u(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-s) e^{-st} u(t) dt \\ &= [0 - u(0)] + s \int_0^{\infty} e^{-st} u(t) dt = s \int_0^{\infty} e^{-st} u(t) dt - u(0) = sU(s) - u(0), \end{aligned} \quad (10.3.74)$$

αφού εξ ορισμού  $U(s) := \mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} u(t) dt$ .

Λοιπόν σχεδόν αποδείξαμε τον τύπο (10.3.68) για το μετασχηματισμό Laplace  $\mathcal{L}\{u'(t)\}$  της πρώτης παραγώγου  $u'(t)$ . Τον επαναλαμβάνουμε και εδώ:

$$\mathcal{L}\{u'(t)\} = sU(s) - u(0), \quad \text{εάν } n = 1. \quad (10.3.75)$$

Τρία σχόλια για τη λέξη «σχεδόν» τώρα:

(α) Το γενικευμένο (ή καταχρηστικό) ολοκλήρωμα στον τύπο (10.3.73) ορίζεται σαν το όριο του αντίστοιχου συνήθους (κοινού) ολοκληρώματος με άνω όριο ολοκλήρωσεως  $b \rightarrow \infty$ . Εμείς δεχθήκαμε στην πιο πάνω απόδειξη (αλλά δεν το αποδείξαμε με τη χρήση ορίων) ότι η παραγοντική ολοκλήρωση ισχύει και στα γενικευμένα ολοκληρώματα, εφόσον υπάρχουν. Από μαθηματικής απόψεως θα ήταν καλύτερα (αλλ' όχι συντομότερα) κατά την ώρα της πιο πάνω παραγοντικής ολοκλήρωσεως στους υπολογισμούς (10.3.74) να παίρναμε συνήθη ολοκληρώματα με άνω όριο ολοκλήρωσεως το  $b$  και στη συνέχεια να δεχόμασταν ότι  $b \rightarrow \infty$  με οριακή διαδικασία.

(β) Κατά τη διάρκεια της αποδείξεως κάναμε την πρόσθετη υπόθεση (που δεν περιλαμβάνεται στην εκφώνηση του θεωρήματος για  $n = 1$ ) ότι η παράγωγος  $u'(t)$  (εδώ για  $n = 1$ ) είναι συνεχής συνάρτηση. Στο θεώρημα έχουμε υποθέσει (εδώ για  $n = 1$ ) ότι η παράγωγος αυτή μπορεί να είναι τμηματικά συνεχής συνάρτηση. Άρα και στο σημείο αυτό η πιο πάνω απόδειξη δεν είναι πλήρης αποκλείοντας στην παράγωγο  $u'(t)$  να είναι τμηματικά συνεχής συνάρτηση. Χρειάζεται γενίκευση της αποδείξεως, για να συμπεριληφθεί και η περίπτωση τμηματικά συνεχούς παραγώγου  $u'(t)$ . Δεν είναι και τόσο δύσκολη η γενίκευση αυτή, αλλ' εντούτοις για οικονομία χώρου θα την παραλείψουμε.

(γ) Δεν είπαμε λέξη μέχρι στιγμής σχετικά με το για ποιες τιμές της μεταβλητής  $s$  του μετασχηματισμού Laplace ισχύει ο τύπος (10.3.75). Η πραγματικότητα είναι ότι, εφόσον επίσημα υποθέσαμε τη συνάρτηση  $u(t)$  να είναι εκθετικής τάξεως  $\gamma$ , θα υπάρχει κατάλληλος αριθμός  $\gamma$ , για τον οποίο να υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace  $U(s)$ . Επίσης να υπάρχει και το όριο  $\lim_{t \rightarrow \infty} [e^{-st} u(t)]$ , το οποίο να είναι ίσο με το μηδέν, υπό την προϋπόθεση ότι  $s > \gamma$ . Τούτο ήδη το υποθέσαμε έμμεσα στους υπολογισμούς (10.3.74).

Με τα σχόλια αυτά η παραπάνω απόδειξη θεωρείται ουσιαστικά πλήρης για συνεχείς παραγώγους  $u'(t)$  και για  $s > \gamma$ . Εντούτοις ο τύπος (10.3.75) ισχύει και για τμηματικά συνεχείς παραγώγους  $u'(t)$ . Επίσης η τιμή της σταθεράς  $\gamma$  στην πρακτική χρήση του μετασχηματισμού

Laplace για την επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές δε μας ενδιαφέρει και ιδιαίτερα. Έτσι γενικά θα κάνουμε άμεση χρήση του τύπου (10.3.75) χωρίς ιδιαίτερες μαθηματικές διερευνήσεις ως προς τις συνθήκες ισχύος του.

Παραλείποντας τις λεπτομέρειες, προχωράμε τώρα στο μετασχηματισμό Laplace της δευτέρας παραγώγου  $u''(t)$  (με  $n = 2$ ). Δηλώνοντας την πρώτη παράγωγο  $u'(t)$  με νέο σύμβολο:  $v(t) := u'(t)$ , από τον τύπο (10.3.75) (που ήδη τον αποδείξαμε) θα έχουμε

$$\mathcal{L}\{v(t)\} = sU(s) - u(0). \quad (10.3.76)$$

Ξαναεφαρμόζουμε τον ίδιο τύπο (10.3.75), αλλά τώρα για τη νέα συνάρτησή μας  $v(t) = u'(t)$ . Έτσι θα έχουμε για την πρώτη παράγωγο της  $v'(t) = u''(t)$

$$\mathcal{L}\{v'(t)\} = s\mathcal{L}\{v(t)\} - v(0). \quad (10.3.77)$$

Λαμβάνοντας και πάλι υπόψη τον τύπο (10.3.76) καθώς και ότι  $v(t) = u'(t)$ , οπότε  $v(0) = u'(0)$  και επίσης  $v'(t) = u''(t)$ , γράφουμε τον πιο πάνω τύπο (10.3.77) στην τελική του μορφή

$$\mathcal{L}\{u''(t)\} = s[sU(s) - u(0)] - u'(0) = s^2U(s) - su(0) - u'(0). \quad (10.3.78)$$

Επομένως αποδείξαμε και τον τύπο (10.3.69) για το μετασχηματισμό Laplace της δευτέρας παραγώγου  $u''(t)$  υποθέτοντας βέβαια ότι οι υποθέσεις (ικανές συνθήκες) του θεωρήματος πληρούνται για  $n = 2$ . (Βέβαια ο ίδιος τύπος ισχύει και για κάθε  $n \geq 2$ .)

Για την τρίτη παράγωγο  $u'''(t)$  τώρα (για  $n = 3$ ) παρατηρούμε βέβαια ότι είναι η πρώτη παράγωγος της δευτέρας παραγώγου  $u''(t)$  της συναρτήσεως  $u(t)$ . Άρα ο τύπος (10.3.75) για το μετασχηματισμό Laplace της πρώτης παραγώγου  $u'(t)$  θα μας δώσει

$$\mathcal{L}\{u'''(t)\} = \mathcal{L}\{[u''(t)]'\} = s\mathcal{L}\{u''(t)\} - u''(0) = s[s^2U(s) - su(0) - u'(0)] - u''(0) \quad (10.3.79)$$

έχοντας λάβει υπόψη και τον τύπο (10.3.78). Επομένως τελικά ισχύει ο τύπος

$$\mathcal{L}\{u'''(t)\} = s^3U(s) - s^2u(0) - su'(0) - u''(0). \quad (10.3.80)$$

Αποδείξαμε λοιπόν και τον τύπο (10.3.70), ο οποίος αφορά στο μετασχηματισμό Laplace της τρίτης παραγώγου  $u'''(t)$ . Μπορούμε τώρα είτε να συνεχίσουμε με ανώτερες παραγώγους είτε να αποδείξουμε επαγωγικά το γενικό τύπο (10.3.72) για το μετασχηματισμό Laplace της  $n$ -τάξεως παραγώγου  $u^{(n)}(t)$  της συναρτήσεως  $u(t)$  (με την υπόθεση βέβαια ότι αυτή είναι τύπου  $\mathcal{D}_{L,n}$ ). Πρόκειται για απλές γενικεύσεις των προηγούμενων αποδείξεων και θα τις παραλείψουμε. ▲

Θα προχωρήσουμε τώρα σε ένα παράδειγμα αποσκοπώντας στην κατανόηση της παρούσας και τόσο χρήσιμης στις διαφορικές εξισώσεις Ιδιότητας 5 του μετασχηματισμού Laplace.

▼ **Παράδειγμα A10.12:** Για τη συνάρτηση  $\cos \omega t$  θεωρείται γνωστός ο μετασχηματισμός Laplace

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}. \quad (10.3.81)$$

Με τη χρήση αυτού του τύπου ζητείται ο μετασχηματισμός Laplace της συναρτήσεως  $\mathcal{L}\{\sin \omega t\}$ .

**Λύση:** Λαμβάνουμε υπόψη το γνωστό μας τύπο παραγωγίσεως:

$$(\cos \omega t)' = -\omega \sin \omega t. \quad (10.3.82)$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον τύπο (10.3.68) ή (10.3.75)

$$\mathcal{L}\{u'(t)\} = sU(s) - u(0) \quad (10.3.83)$$

στη συνάρτηση  $\cos \omega t$ . Έτσι παίρνουμε

$$\mathcal{L}\{(\cos \omega t)'\} = s \frac{s}{s^2 + \omega^2} - \cos(\omega \cdot 0). \quad (10.3.84)$$

Παίρνουμε τώρα υπόψη και τον τύπο (10.3.82) καθώς και ότι  $\cos 0 = 1$ . Έτσι η σχέση (10.3.84) γράφεται στην τελική της μορφή

$$\mathcal{L}\{-\omega \sin \omega t\} = \frac{s^2}{s^2 + \omega^2} - 1 = \frac{s^2 - (s^2 + \omega^2)}{s^2 + \omega^2} = \frac{-\omega^2}{s^2 + \omega^2}, \quad (10.3.85)$$

οπότε λόγω και της γραμμικής ιδιότητας του μετασχηματισμού Laplace

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (10.3.86)$$

Αυτός είναι πραγματικά ο μετασχηματισμός Laplace της συναρτήσεως  $\sin \omega t$ , όπως ήδη το γνωρίζουμε (με διαφορετική, πιο άμεση μέθοδο) από τη σχέση (10.3.30) ή τη δεύτερη σχέση (10.3.31). ▲

### A10.3.6. Ιδιότητα 6: Παράγωγος μετασχηματισμού Laplace

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ:** Θεωρούμε συνάρτηση  $u(t)$  τύπου  $\mathcal{A}_L$  με μετασχηματισμό Laplace  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ . Ισχύει ότι

$$U'(s) = \mathcal{L}\{-tu(t)\} \quad \text{και γενικότερα} \quad U^{(n)}(s) = \mathcal{L}\{(-t)^n u(t)\} \quad (10.3.87)$$

για  $s > \gamma$ , όπου  $\gamma$  η εκθετική τάξη της συναρτήσεως  $u(t)$ .

**Απόδειξη:** Αφού  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ , από τον ορισμό (10.2.1) ή (10.3.1) του μετασχηματισμού Laplace προφανώς θα έχουμε

$$U(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} u(t) dt. \quad (10.3.88)$$

Παραγωγίζουμε τώρα αυτόν το μετασχηματισμό Laplace  $U(s)$  ως προς τη μεταβλητή  $s$  του μετασχηματισμού Laplace και διαπιστώνουμε ότι

$$U'(s) = \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} u(t) dt. \quad (10.3.89)$$

Για συναρτήσεις  $u(t)$  τύπου  $\mathcal{A}_L$ , όπως είναι εξ υποθέσεως η παρούσα συνάρτηση  $u(t)$ , μπορεί να αποδειχθεί ότι επιτρέπεται η αλλαγή της σειράς μεταξύ παραγωγίσεως και ολοκληρώσεως στον πιο πάνω τύπο (10.3.89). Δηλαδή η παράγωγος (ως προς τη μεταβλητή  $s$  του μετασχηματισμού Laplace) του ολοκληρώματος (με μεταβλητή ολοκληρώσεως το  $t$ ) είναι ίση με το ολοκλήρωμα (ως προς  $t$  πάλι) της παραγώγου της ολοκληρωτέας συναρτήσεως (με παραγωγή ως προς  $s$  πάλι).

Με τον τρόπο αυτό, αφού  $(d/ds)e^{-st} = -te^{-st}$ , βρίσκουμε άμεσα από τον τύπο (10.3.89):

$$U'(s) = \int_0^{\infty} (-te^{-st})u(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st}[-tu(t)] dt = \mathcal{L}\{-tu(t)\}. \quad (10.3.90)$$

Αποδείξαμε έτσι το πρώτο μέρος του τύπου (10.3.87) στο θεώρημά μας. Εκτελώντας άλλες  $n - 1$  παραγωγίσεις ως προς τη μεταβλητή  $s$  του μετασχηματισμού Laplace, αποδεικνύουμε με όμοιο τρόπο και το δεύτερο μέρος του ίδιου τύπου. Κατά συνέπεια κάθε παραγωγή του μετασχηματισμού Laplace  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  ως προς τη μεταβλητή του  $s$  αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό επί  $-t$  στο πεδίο της αρχικής μεταβλητής  $t$ . □

▼ **Παράδειγμα A10.13:** Να εφαρμοσθεί (μία φορά) η Ιδιότητα αυτή 6 του μετασχηματισμού Laplace στη συνάρτηση  $u(t) = \sin \omega t$ . Στη συνέχεια να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συναρτήσεως  $s/(s^2 + \omega^2)^2$ .

**Λύση:** Για τη συνάρτηση  $\sin \omega t$  γνωρίζουμε ήδη το μετασχηματισμό Laplace της: δεύτερος τύπος (10.3.31), τον επαναλαμβάνουμε

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \iff \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \mathcal{L}\{\sin \omega t\}. \quad (10.3.91)$$

Σύμφωνα με την παρούσα Ιδιότητα 6, παραγωγίζοντας μία φορά ως προς  $s$ , θα έχουμε

$$-\frac{\omega(2s)}{(s^2 + \omega^2)^2} = \frac{-2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2} = \mathcal{L}\{-t \sin \omega t\}, \text{ οπότε } \mathcal{L}\{t \sin \omega t\} = \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}. \quad (10.3.92)$$

Αντιστρέφοντας τώρα κατά Laplace τον τελευταίο αυτό τύπο, διαπιστώνουμε ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}\right\} = \frac{1}{2\omega} t \sin \omega t \quad (10.3.93)$$

έχοντας διαιρέσει και τα δύο μέλη με τη σταθερά  $2\omega$ . (Τούτο επιτρέπεται λόγω της γραμμικής Ιδιότητας 1, τύπος (10.3.5), του μετασχηματισμού Laplace.)

Σημειώνουμε ότι ο τύπος αυτός (10.3.93) μας αποκαλύπτει ότι ο όρος  $(s^2 + \omega^2)^2$  στον παρονομαστή του μετασχηματισμού Laplace οδηγεί στις Ταλαντώσεις σε γραμμικά αυξανόμενο με το χρόνο  $t$  εύρος ταλαντώσεων: εδώ  $t/(2\omega)$ . Έτσι ο τύπος αυτός (10.3.93) θα μας φανεί πολύ χρήσιμος στην Παράγραφο A11.9.2 της Ενότητας A11.9, η οποία αφορά στο συντονισμό. ▲

### A10.3.7. Ιδιότητα 7: Θεώρημα της συνελίξεως

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ: Θεώρημα της συνελίξεως:** Θεωρούμε δύο συναρτήσεις  $u_1(t)$  και  $u_2(t)$  τύπου  $\mathcal{A}_L$  (και εκθετικής τάξεως  $\gamma$ ). Τότε για  $s > \gamma$  ισχύει ο τύπος

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t u_1(\tau)u_2(t - \tau) d\tau\right\} = U_1(s)U_2(s) \quad (10.3.94)$$

φυσικά με  $U_1(s) = \mathcal{L}\{u_1(t)\}$  και  $U_2(s) = \mathcal{L}\{u_2(t)\}$ . Η συνάρτηση στο αριστερό μέλος του τύπου αυτού καλείται **συνέλιξη** των δύο συναρτήσεων  $u_1(t)$  και  $u_2(t)$  και συμβολίζεται με  $u_1(t) * u_2(t)$  ή, ισοδύναμα, με  $(u_1 * u_2)(t)$  ή, απλούστερα, με  $u_1 * u_2$ . Επομένως έχουμε

$$u_1 * u_2 = (u_1 * u_2)(t) := u_1(t) * u_2(t) := \int_0^t u_1(\tau)u_2(t - \tau) d\tau. \quad (10.3.95)$$

Με τον ορισμό αυτό της συνελίξεως  $u_1(t) * u_2(t)$  δύο συναρτήσεων  $u_1(t)$  και  $u_2(t)$  ο προπρηγούμενος τύπος (10.3.94) παίρνει τη μορφή

$$\mathcal{L}\{u_1(t) * u_2(t)\} = U_1(s)U_2(s) \quad (10.3.96)$$

ή αντίστροφα

$$\mathcal{L}^{-1}\{U_1(s)U_2(s)\} = u_1(t) * u_2(t). \quad (10.3.97)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η συνέλιξη  $u_1(t) * u_2(t)$  (με *αστεράκι!*) στο πεδίο της μεταβλητής  $t$  μετατρέπεται σε κοινό πολλαπλασιασμό  $U_1(s)U_2(s)$  στο πεδίο της μεταβλητής  $s$  του μετασχηματισμού Laplace.

Σημειώνεται επίσης ότι στη συνέλιξη ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα

$$u_1(t) * u_2(t) = u_2(t) * u_1(t). \quad (10.3.98)$$

Ισχύουν επίσης η προσεταιριστική ιδιότητα και η επιμεριστική ιδιότητα.

**Απόδειξη:** Η απόδειξη του θεωρήματος της συνελίξεως δεν είναι απλή και θα παραλειφθεί.

▼ **Παράδειγμα A10.14:** Να υπολογισθεί με δύο εντελώς διαφορετικούς τρόπους ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace  $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}$  της συναρτήσεως  $U(s) = 1/[(s - a)(s - b)]$  με  $a \neq b$ .

**Λύση:** Ο υπολογισμός αυτός μπορεί καταρχήν να γίνει με ανάλυση της συναρτήσεως  $U(s)$  σε απλά κλάσματα, αφού  $a \neq b$ . Θέτοντας

$$U(s) = \frac{1}{(s-a)(s-b)} = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s-b}, \quad (10.3.99)$$

απαλείφουμε τους παρονομαστές και προσδιορίζουμε τις δύο σταθερές  $A$  και  $B$ . Έτσι προκύπτει:

$$1 = A(s-b) + B(s-a) \quad \text{ή} \quad 1 = (A+B)s - (Ab+Ba), \quad \text{οπότε} \quad (A+B)s - (Ab+Ba+1) = 0. \quad (10.3.100)$$

Για να ισχύει αυτή η ταυτότητα για κάθε τιμή της μεταβλητής  $s$ , θα πρέπει να έχουμε ταυτόχρονα

$$A+B=0 \implies B=-A \quad \text{και επίσης} \quad Ab+Ba+1=0 \implies Ab+Ba=-1, \quad (10.3.101)$$

οπότε

$$A(b-a) = -1 \implies A = -B = \frac{1}{a-b}. \quad (10.3.102)$$

Επομένως η συνάρτηση  $U(s)$  αναλύεται σε απλά κλάσματα ως εξής:

$$U(s) = \frac{1}{(s-a)(s-b)} = \frac{1}{a-b} \left( \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b} \right). \quad (10.3.103)$$

Αφού μάλιστα γνωρίζουμε πως  $\mathcal{L}^{-1}\{e^{ct}\} = 1/(s-c)$ , τύπος (10.2.17), προκύπτει τελικά ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = \frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt}) \quad \text{επαναλαμβάνεται με } a \neq b. \quad (10.3.104)$$

Χρήσιμη εναλλακτική δυνατότητα αποτελεί η χρήση του θεωρήματος της συνελίξεως. Αφού

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at} \quad \text{και} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-b}\right\} = e^{bt}, \quad (10.3.105)$$

σύμφωνα με το θεώρημα της συνελίξεως στην αντίστροφή του μορφή (10.3.97) θα έχουμε με  $a \neq b$

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a} \frac{1}{s-b}\right\} = e^{at} * e^{bt} = \int_0^t e^{a\tau} e^{b(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{bt} \int_0^t e^{(a-b)\tau} d\tau = e^{bt} \left. \frac{e^{(a-b)\tau}}{a-b} \right|_0^t = e^{bt} \frac{e^{(a-b)t} - 1}{a-b} = \frac{1}{a-b} (e^{at} - e^{bt}). \end{aligned} \quad (10.3.106)$$

Προέκυψε λοιπόν με το θεώρημα της συνελίξεως το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα  $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}$  με εκείνο που είχε προκύψει στη σχέση (10.3.104) με τη μέθοδο της αναλύσεως σε απλά κλάσματα. ▲

### A10.3.8. Ιδιότητα 8: Μετασχηματισμός Laplace ολοκληρώματος

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ:** Στο μετασχηματισμό Laplace για συνάρτηση  $u(t)$  τύπου  $\mathcal{A}_L$  με  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  ισχύει ότι

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t u(\tau) d\tau\right\} = \frac{U(s)}{s}. \quad (10.3.107)$$

► **Παρατήρηση A10.3:** Είχαμε δει στην Ιδιότητα 5 ότι η παραγωγή μιας συναρτήσεως  $u(t)$  πολλαπλασιάζει το μετασχηματισμό Laplace της  $U(s)$  επί  $s$  (μείον τη σταθερά  $u(0)$ ). Εδώ συμβαίνει ακριβώς το αντίστροφο: η ολοκλήρωση της συναρτήσεως  $u(t)$  (από 0 έως  $t$ ) διαιρεί το μετασχηματισμό Laplace της  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  δια  $s$  (τώρα όμως χωρίς καμία σταθερά!).

**Απόδειξη:** Για την παρούσα απόδειξη μπορούμε να βασισθούμε στο θεώρημα της συνελίξεως για το μετασχηματισμό Laplace. Το θεώρημα αυτό, τύπος (10.3.94), το έχουμε ήδη αναφέρει στην προηγούμενη Ιδιότητα 7 και το επαναλαμβάνουμε

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t u_1(\tau)u_2(t-\tau) d\tau\right\} = U_1(s)U_2(s). \quad (10.3.108)$$



Εδώ θεωρούμε απλά την ειδική περίπτωση του θεωρήματος της συνελίξεως όπου: (α)  $u_1(t) = u(t)$ , άρα  $U_1(s) = U(s)$  και (β)  $u_2(t) = 1$ , άρα  $U_2(s) = 1/s$ . Στην ιδιαίτερα ειδική αυτή περίπτωση το θεώρημα της συνελίξεως (10.3.108) παίρνει ακριβώς τη μορφή (10.3.107), επειδή  $u_2(t) = 1$  (άρα και  $u_2(t - \tau) = 1$ ), ενώ στο δεξιό μέλος έχουμε το γινόμενο  $U_1(s)U_2(s) = U(s)(1/s) = U(s)/s$ .  $\square$ .

► **Παρατήρηση A10.4:** Υπάρχουν και άλλες ενδιαφέρουσες και λίγο-πολύ χρήσιμες ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace, τις οποίες όμως θα τις παραλείψουμε, περιορίζοντας την προσοχή μας στις κυριότερες για τις εφαρμογές του Πολιτικού Μηχανικού. Ανάμεσα σ' αυτές που παραλείψουμε είναι ο μετασχηματισμός Laplace περιοδικής συναρτήσεως, γιατί ο Πολιτικός Μηχανικός χρησιμοποιεί πολύ συχνά το μετασχηματισμό Fourier για περιοδικές συναρτήσεις και σπάνια έχει ανάγκη το μετασχηματισμό Laplace. Επίσης παραλείψουμε τα τόσο κομψά θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής για το μετασχηματισμό Laplace. Και αυτά δεν είναι πρώτης προτεραιότητας στις εφαρμογές του Πολιτικού Μηχανικού, ενώ είναι στις εφαρμογές του Ηλεκτρολόγου Μηχανικού.

### A10.4. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

Εκτός από τον ίδιο το μετασχηματισμό Laplace  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  κατάλληλης συναρτήσεως  $u(t)$  (εδώ κυρίως συναρτήσεων τύπου  $\mathcal{A}_L$  και σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις  $n$ -τάξεως τύπου  $\mathcal{D}_{L,n}$ ) πολλές φορές αντιμετωπίζουμε και το αντίστροφο πρόβλημα. Δηλαδή να γνωρίζουμε το μετασχηματισμό Laplace  $U(s)$  (σαν συνάρτηση της μεταβλητής  $s$  του μετασχηματισμού Laplace) και να ζητάμε να βρούμε την αρχική συνάρτηση

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} \tag{10.4.1}$$

(που είναι συνάρτηση της μεταβλητής  $t$ ), η οποία θέλουμε να έχει σαν μετασχηματισμό Laplace τον  $U(s)$ . Πρόκειται για το πρόβλημα της αντιστροφής του μετασχηματισμού Laplace.

Για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace  $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}$  αποδεικνύεται ότι στο ημίαπειρο διάστημα  $[0, \infty)$  αυτός είναι ορισμένος κατά μοναδικό τρόπο, αρκεί η συνάρτησή μας  $u(t)$  να είναι συνεχής. Το δεχόμαστε γενικά αυτό, οπότε από ένα μετασχηματισμό Laplace  $U(s)$  αντιστρέφοντας κατά Laplace παίρνουμε μία μόνο συνάρτηση  $u(t)$  που να έχει μετασχηματισμό Laplace  $U(s)$ .

Για το σκοπό της αντιστροφής ( $\mathcal{L}^{-1}$ ) του μετασχηματισμού Laplace συνήθως χρησιμοποιούμε: (α) τους τύπους απλών μετασχηματισμών Laplace που ήδη είτε γνωρίζουμε είτε είναι γνωστοί από πίνακες. (β) Τις πιο πάνω οκτώ βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace: Ιδιότητα 1 έως και Ιδιότητα 8, αλλά με αντεστραμμένους κατά Laplace τους σχετικούς τύπους και (γ) Σε δυσκολότερες περιπτώσεις τη μέθοδο της αναλύσεως σε απλά κλάσματα. (δ) Σε ακόμη δυσκολότερες περιπτώσεις μπορεί μερικές φορές να φανεί χρήσιμος και ο υπολογιστής με τα προγράμματα συμβολικών υπολογισμών που είναι διαθέσιμα, όπως είναι η *Mathematica*.

▼ **Παράδειγμα A10.15:** Να υπολογισθούν οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί Laplace των ακόλουθων πέντε απλών συναρτήσεων

$$U_1(s) = \frac{1}{s+a}, \quad U_2(s) = \frac{s}{s^2-a^2}, \quad U_3(s) = \frac{1}{s^2-a^2}, \quad U_4(s) = \frac{s}{s^2+\omega_0^2}, \quad U_5(s) = \frac{1}{s^2+\omega_0^2}. \tag{10.4.2}$$

**Λύση:** Γνωρίζουμε ήδη τους τύπους (10.2.17), (10.3.23) και (10.3.31) για τους (ευθείς) μετασχηματισμούς Laplace (α) της εκθετικής συναρτήσεως  $e^{at}$ , (β) των υπερβολικών συναρτήσεων  $\cosh at$  και  $\sinh at$  καθώς και (γ) των τριγωνομετρικών συναρτήσεων  $\cos \omega t$  και  $\sin \omega t$  αντίστοιχα. Τους επαναλαμβάνουμε και εδώ

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{at}\} &= \frac{1}{s-a}, & \mathcal{L}\{\cosh at\} &= \frac{s}{s^2-a^2}, & \mathcal{L}\{\sinh at\} &= \frac{a}{s^2-a^2}, \\ \mathcal{L}\{\cos \omega t\} &= \frac{s}{s^2+\omega^2}, & \mathcal{L}\{\sin \omega t\} &= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}. \end{aligned} \tag{10.4.3}$$

Θα κάνουμε προσεκτική χρήση των πέντε αυτών τύπων, αλλά για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, δηλαδή των τύπων

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} &= e^{at}, & \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-a^2}\right\} &= \cosh at, & \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-a^2}\right\} &= \frac{1}{a} \sinh at, \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\omega^2}\right\} &= \cos \omega t, & \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+\omega^2}\right\} &= \frac{1}{\omega} \sin \omega t.\end{aligned}\quad (10.4.4)$$

(Στον τρίτο και τον πέμπτο από αυτούς μεταφέραμε τις σταθερές  $a$  και  $\omega$  αντίστοιχα στα δεξιά μέλη σαν  $1/a$  και  $1/\omega$  αντίστοιχα.)

Από αυτούς τους πέντε αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace (10.4.4) προκύπτουν άμεσα και οι πέντε αντίστροφοι μετασχηματισμοί Laplace οι οποίοι ζητούνται στο παρόν παράδειγμα:  $u_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_1(s)\}$  έως και  $u_5(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_5(s)\}$ . Τα σχετικά αποτελέσματα είναι τα εξής:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} &= e^{-at}, & \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-a^2}\right\} &= \cosh at, & \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-a^2}\right\} &= \frac{1}{a} \sinh at, \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\omega_0^2}\right\} &= \cos \omega_0 t, & \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+\omega_0^2}\right\} &= \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t.\end{aligned}\quad (10.4.5)$$

Φυσικά στα αποτελέσματα αυτά προνοήσαμε να θέσουμε  $-a$  αντί για  $a$  στον πρώτο τύπο (10.4.4) και  $\omega_0$  αντί για  $\omega$  στους δύο τελευταίους τύπους (10.4.4) σύμφωνα πάντα με την εκφώνηση του παραδείγματος αυτού. ▲

Ακολουθεί άλλο ένα παράδειγμα ευρέσεως αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace, αυτό με τη μέθοδο της αναλύσεως σε απλά κλάσματα.

▼ **Παράδειγμα Α10.16:** Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace  $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}$  της συναρτήσεως

$$U(s) = \frac{1}{s(s^2 - a^2)} \quad \text{με } a \neq 0. \quad (10.4.6)$$

**Λύση:** Οι απλοί πίνακες που συνήθως έχει στη διάθεσή του ο Πολιτικός Μηχανικός δεν του επιτρέπουν την άμεση εύρεση (με τη χρήση ενός μόνο τύπου) του πιο πάνω αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace. (Απαιτούνται κάπως ισχυρότεροι πίνακες!) Στην παρούσα περίπτωση ο γνωστός μετασχηματισμός Laplace  $U(s)$  της σχέσεως (10.4.6) θα πρέπει να αναλυθεί σε απλά κλάσματα. Κάτι αντίστοιχο είχαμε κάνει και στις ολοκληρώσεις στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά Ι, όσες φορές είχαμε να ολοκληρώσουμε ρητές συναρτήσεις, δηλαδή πηλικά δύο πολυωνύμων: εκεί τις αναλύαμε σε απλά κλάσματα! Με ανάλογο τρόπο θα ενεργήσουμε και εδώ.

Καταρχήν σημειώνουμε ότι ο παρονομαστής στο κλάσμα ορισμού (10.4.6) της συναρτήσεώς μας  $U(s)$  είναι το τριτοβάθμιο πολυώνυμο

$$p_3(s) = s(s^2 - a^2) = s(s - a)(s + a) \quad (10.4.7)$$

με τρεις απλές ρίζες: τις  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = a$  και  $s_3 = -a$ . Άρα η παρούσα ανάλυση του κλάσματος της συναρτήσεως  $U(s)$  σε απλά κλάσματα θα είναι της μορφής

$$U(s) = \frac{1}{s(s^2 - a^2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - a} + \frac{C}{s + a} \quad (10.4.8)$$

με τις σταθερές  $A$ ,  $B$  και  $C$  προς προσδιορισμό.

Προς το σκοπό αυτό πολλαπλασιάζουμε τη σχέση (10.4.8) επί τον παρονομαστή  $s(s^2 - a^2)$  της συναρτήσεως  $U(s)$ . Έτσι βρίσκουμε ότι πρέπει να ισχύει εκ ταυτότητος η σχέση

$$1 = A(s^2 - a^2) + Bs(s + a) + Cs(s - a). \quad (10.4.9)$$

Αυτή γράφεται και στη σαφέστερη απόλυτα ισοδύναμη μορφή ενός δευτεροβάθμιου πολυωνύμου:

$$(A + B + C)s^2 + a(B - C)s + a^2(-A + B) - 1 = 0. \quad (10.4.10)$$

Οφείλει όμως να ισχύει εκ ταυτότητος η σχέση αυτή (10.4.10), όχι απλά σαν μια αλγεβρική εξίσωση ως προς  $s$ . Επομένως ο συντελεστής του  $s^2$ , ο συντελεστής του  $s$  και ο σταθερός όρος θα πρέπει και οι τρεις τους να είναι μηδενικοί.

Άρα θα έχουμε το σύστημα των τριών γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων

$$A + B + C = 0, \quad a(B - C) = 0, \quad a^2(-A + B) - 1 = 0. \quad (10.4.11)$$

Με  $a \neq 0$ , όπως έχει υποτεθεί από την ίδια την εκφώνηση, λύνουμε πολύ εύκολα το σύστημα αυτό και βρίσκουμε ότι

$$A = -\frac{1}{a^2}, \quad B = C = \frac{1}{2a^2}. \quad (10.4.12)$$

Τη λύση αυτή μπορούμε εύκολα να την επαληθεύσουμε αντικαθιστώντας την στην ανάλυση σε απλά κλάσματα (10.4.8) και διαπιστώνοντας (με την εκτέλεση πράξεων) την ισχύ της ταυτότητας

$$U(s) = \frac{1}{s(s^2 - a^2)} = -\frac{1}{a^2} \frac{1}{s} + \frac{1}{2a^2} \frac{1}{s - a} + \frac{1}{2a^2} \frac{1}{s + a}. \quad (10.4.13)$$

Τελειώνουμε με τη χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace  $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s - a)\} = e^{at}$ , τον οποίο ήδη αναφέραμε στον πρώτο τύπο (10.4.4), σε συνδυασμό βέβαια με τη γραμμική ιδιότητα 1 του μετασχηματισμού Laplace και του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace. Έτσι από την παραπάνω ανάλυση σε απλά κλάσματα (10.4.13) (που είναι, επαναλαμβάνουμε, μια ταυτότητα ως προς τη μεταβλητή  $s$ ) προκύπτει ότι

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = -\frac{1}{a^2} \cdot e^{0 \cdot t} + \frac{1}{2a^2} e^{at} + \frac{1}{2a^2} e^{-at} = -\frac{1}{a^2} \cdot e^{0 \cdot t} + \frac{1}{2a^2} (e^{at} + e^{-at}). \quad (10.4.14)$$

Από τον ορισμό του υπερβολικού συνημιτόνου  $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$  συνάγουμε τελικά ότι

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = -\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} \cosh at = \frac{1}{a^2} (\cosh at - 1) \quad (10.4.15)$$

με  $e^{0 \cdot t} = e^0 = 1$  και  $x = at$  στον ορισμό του υπερβολικού συνημιτόνου  $\cosh x$ , που μόλις αναφέραμε. Αυτός είναι ο ζητούμενος αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace  $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}$  στο παρόν απλό παράδειγμα. Προχωράμε τώρα και στην επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων ...! ▲

### A10.5. ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Η χρησιμότητα του μετασχηματισμού Laplace για τον Πολιτικό Μηχανικό (και γενικότερα βέβαια) έγκειται στη δυνατότητα που του παρέχει να επιλύει γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές οποιασδήποτε τάξεως  $n$  είτε ομογενείς είτε και μη ομογενείς. Αναφερθήκαμε στη σχετική διαδικασία από τρία κύρια βήματα ήδη από την Περίληψη του παρόντος Κεφαλαίου A10 (στην πρώτη σελίδα του). Τα υπενθυμίζουμε και στο σημείο αυτό:

- **Βήμα 1:** Στο πρώτο βήμα η γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές μετατρέπεται σε γραμμική (πρωτοβάθμια) αλγεβρική εξίσωση. Σ' αυτήν η άγνωστη συνάρτηση, π.χ. η  $u(t)$  ή  $u(x)$ , έχει αντικατασταθεί από το μετασχηματισμό Laplace της: το  $U(s)$ .
- **Βήμα 2:** Στο δεύτερο βήμα επιλύεται η γραμμική (πρωτοβάθμια) αυτή αλγεβρική εξίσωση. (Πρόκειται για μια πανεύκολη εργασία!).
- **Βήμα 3:** Τελικά όμως στο τρίτο βήμα πρέπει να επιστρέψουμε στην αρχική άγνωστη συνάρτηση εκτελώντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace. Αυτό δεν είναι πάντα τόσο εύκολο.

Τελικά βέβαια, σαν **Βήμα 4** πρέπει και να επαληθεύσουμε τη λύση που βρήκαμε. Πάντοτε είναι καλό να κάνουμε επαληθεύσεις ιδίως μάλιστα στο μετασχηματισμό Laplace. Αυτό συμβαίνει, επειδή στο μετασχηματισμό Laplace όχι μόνο χρησιμοποιείται η βοηθητική μεταβλητή  $s$  (αντί για την αρχική μεταβλητή), αλλά επίσης γίνονται έμμεσα και αρκετές υποθέσεις που αφορούν στο μετασχηματισμό Laplace κατά την επίλυση μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης.

Στην ίδια περιήληψη του κεφαλαίου μας αναφερθήκαμε και στα πέντε πλεονεκτήματα που παρουσιάζει η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace σε σύγκριση με τις αντίστοιχες πιο άμεσες μεθόδους. Αυτές οι άμεσες μέθοδοι είναι οι μέθοδοι της εκθετικής αντικαταστάσεως σε συνδυασμό (μόνο σε μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις) με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών ή τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων. Τα επαναλαμβάνουμε και αυτά:

- **Πλεονέκτημα 1:** Η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace μετατρέπει τη διαφορική εξίσωση που έχουμε να επιλύσουμε σε πρωτοβάθμια αλγεβρική εξίσωση.
- **Πλεονέκτημα 2:** Σε περιπτώσεις προβλημάτων αρχικών τιμών επιτρέπει την ενσωμάτωση των αρχικών συνθηκών στη λύση χωρίς να απαιτείται πρώτα η εύρεση της γενικής λύσεως.
- **Πλεονέκτημα 3:** Η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace επιτρέπει επίσης την εύρεση λύσεων τόσο ομογενών όσο και μη ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων χωρίς διαφοροποίηση της μεθοδολογίας (που ήδη αναφέρθηκε συνοπτικά στα προηγούμενα τρία βήματα). Το αντίθετο συμβαίνει με τις μεθόδους του Κεφαλαίου Α5.
- **Πλεονέκτημα 4:** Σε προβλήματα αρχικών τιμών με αυθαίρετη συνάρτηση  $p(t)$  ή  $p(x)$  στο δεξιό μέλος η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace είναι σαφώς απλούστερη από τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων.
- **Πλεονέκτημα 5:** Τέλος είναι πάρα πολύ σημαντικό το γεγονός ότι η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace σε μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις είναι αποτελεσματική και σε προβλήματα με ασυνέχειες στα δεξιά μέλη  $p$ . Αυτές μπορεί να είναι είτε (i) απλές πεπερασμένες ασυνέχειες (ασυνέχειες άλματος) είτε (ii) ασυνέχειες με γενικευμένες συναρτήσεις, που οφείλονται στη συνάρτηση δέλτα του Dirac.

Από την άλλη πλευρά τα τέσσερα μειονεκτήματα της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace είναι ότι: (α) Απαιτεί τη μελέτη της σχετικής μεθόδου (δηλαδή του μετασχηματισμού Laplace) και την εξοικείωση με αυτήν. (β) Μας μεταφέρει από την αρχική ανεξάρτητη μεταβλητή (π.χ. την  $t$  ή την  $x$ ) στη βοηθητική μεταβλητή  $s$  του μετασχηματισμού Laplace. (γ) Απαιτεί να μετατρέψουμε τη διαφορική εξίσωση σε αλγεβρική υπολογίζοντας όλους τους μετασχηματισμούς Laplace των όρων που υπεισέρχονται σ' αυτήν. (δ) Το δυσκολότερο όμως είναι ότι στο τέλος απαιτεί την αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace της άγνωστης συναρτήσεως που βρέθηκε, για να οδηγηθούμε τελικά στη λύση της διαφορικής εξίσωσης που ζητάμε να προσδιορίσουμε.

Παρά ταύτα η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace είναι μια ιδιαίτερα αξιόλογη και αποτελεσματική μέθοδος για την επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές. Τη χρήση της θα την επιδείξουμε στην ενότητα αυτή σε ένα απλό παράδειγμα. Ποικίλες εφαρμογές της στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού θα παρουσιασθούν αρκετά αναλυτικά στο επόμενο Κεφάλαιο Α11. Ξεκινάμε με το παράδειγμα λοιπόν!

▼ **Παράδειγμα Α10.17:** Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$u''(t) - a^2 u(t) = b \quad (10.5.1)$$

με τα  $a$  και  $b$  γνωστές σταθερές.

**Λύση:** Θα ακολουθήσουμε τα τρία βήματα που προαναφέραμε.

**Βήμα 1:** Καλούμε  $U(s)$  το μετασχηματισμό Laplace της άγνωστης συναρτήσεως  $u(t)$ , οπότε

$$\mathcal{L}\{u''(t)\} = s^2 U(s) - su(0) - u'(0) \quad (10.5.2)$$

σύμφωνα με τον τύπο (10.3.69) (για τη δεύτερη παράγωγο) στην Ιδιότητα 5 για τους μετασχηματισμού Laplace των παραγώγων. Σημειώνουμε επίσης ότι  $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$ . Παίρνουμε τώρα το μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης (10.5.1). Έτσι συνάγουμε ότι

$$[s^2U(s) - su(0) - u'(0)] - a^2U(s) = \frac{b}{s}, \quad \text{οπότε} \quad (s^2 - a^2)U(s) = su(0) + u'(0) + \frac{b}{s}. \quad (10.5.3)$$

**Βήμα 2:** Λύνουμε την πρωτοβάθμια αυτή αλγεβρική εξίσωση (10.5.3) ως προς τον άγνωστο μετασχηματισμό Laplace  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ . Προκύπτει αμέσως

$$U(s) = u(0) \frac{s}{s^2 - a^2} + u'(0) \frac{1}{s^2 - a^2} + b \frac{1}{s(s^2 - a^2)}. \quad (10.5.4)$$

**Βήμα 3:** Αντιστρέφουμε τώρα κατά Laplace το μετασχηματισμό Laplace  $U(s)$  που ήδη προσδιορίσαμε. Έτσι θα προσδιορίσουμε τη λύση  $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}$  της διαφορικής εξίσωσης (10.5.1) που ζητάμε. (Δε λησμονούμε στο σημείο αυτό και τη γραμμική ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace: εδώ στον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace.)

Για τους δύο πρώτους όρους λαμβάνουμε υπόψη το δεύτερο και τον τρίτο τύπο (10.4.4). Έτσι διαπιστώνουμε ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 - a^2}\right\} = \cosh at \quad \text{και} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - a^2}\right\} = \frac{1}{a} \sinh at. \quad (10.5.5)$$

Άρα σύμφωνα με τη γραμμική ιδιότητα

$$u_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{u(0) \frac{s}{s^2 - a^2} + u'(0) \frac{1}{s^2 - a^2}\right\} = u(0) \cosh at + \frac{u'(0)}{a} \sinh at. \quad (10.5.6)$$

Άλλος ένας όρος μας απέμεινε: ο τρίτος όρος στη λύση  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ . Είναι και ο πιο δύσκολος όρος! Έχουμε κάνει όμως (το προνοήσαμε ευτυχώς!) όλη τη σχετική προεργασία στο προηγούμενο παράδειγμα και έχουμε διαθέσιμο τον τύπο (10.4.15). Επομένως, με βάση αυτόν τον τύπο

$$u_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b}{s(s^2 - a^2)}\right\} = \frac{b}{a^2} (\cosh at - 1). \quad (10.5.7)$$

Τελικά η λύση  $u(t)$  που ζητάμε θα είναι προφανώς το άθροισμα των συναρτήσεων  $u_1(t)$ , που αφορά στους δύο πρώτους όρους του μετασχηματισμού Laplace  $U(s)$  στη σχέση (10.5.4), και  $u_2(t)$ , που αφορά στον αντίστοιχο τρίτο όρο. Άρα θα έχουμε τη λύση

$$u(t) = u(0) \cosh at + \frac{u'(0)}{a} \sinh at + \frac{b}{a^2} (\cosh at - 1). \quad (10.5.8)$$

Αυτή γράφεται εύκολα και στη λίγο απλούστερη μορφή της

$$u(t) = \left[u(0) + \frac{b}{a^2}\right] \cosh at + \frac{u'(0)}{a} \sinh at - \frac{b}{a^2}. \quad (10.5.9)$$

Είναι πάρα πολύ εύκολη η επαλήθευση της λύσεως αυτής  $u(t)$  και θα την παραλείψουμε.

Σημειώνουμε επίσης ότι αυτή είναι και η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών που αποτελείται από τη διαφορική εξίσωση (10.5.1) και τις δύο προφανείς αρχικές συνθήκες  $u(0)$  και  $u'(0)$ . Από την άλλη πλευρά, αν ερμηνεύσουμε τις δύο αυτές ποσότητες  $u(0)$  και  $u'(0)$  σαν αυθαίρετες σταθερές, η παραπάνω λύση (10.5.9) αποτελεί τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (10.5.1) (χωρίς βέβαια αρχικές συνθήκες). Στην ίδια περίπτωση (της γενικής λύσεως) είναι μερικές φορές σκόπιμο να χρησιμοποιούμε διαφορετικές σταθερές από τις ίδιες τις αρχικές συνθήκες σαν αυθαίρετες σταθερές. Παραδείγματος χάρη, θέτοντας εδώ  $A = u(0) + (b/a^2)$  και  $B = u'(0)/a$  γράφουμε (λίγο καλύτερα) τη γενική μας λύση (όπως την ερμηνεύουμε τώρα) (10.5.9) στη μορφή

$$u_g(t) = A \cosh at + B \sinh at - \frac{b}{a^2}. \quad (10.5.10)$$

Παρατηρούμε ότι προφανώς οι δύο πρώτοι όροι  $A \cosh at + B \sinh at$  αποτελούν τη γενική λύση  $u_h(t)$  της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης  $u''(t) - a^2 u(t) = 0$ . Αντίθετα ο τρίτος όρος  $-b/a^2$  αποτελεί μία (την απλούστερη) μερική (ή ειδική) λύση  $u_p(t)$  της αρχικής μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (10.5.1). Επομένως η γενική λύση (10.5.10) είναι ουσιαστικά της μορφής  $u_g(t) = u_h(t) + u_p(t)$ . Έτσι ο μετασχηματισμός Laplace είναι σε πλήρη συμφωνία με αυτά που ήδη γνωρίζουμε για τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις από το Κεφάλαιο Α5. ▲

## Α10.6. Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΔΕΛΤΑ ΤΟΥ DIRAC

Η **συνάρτηση δέλτα του Dirac**:  $\delta(t)$  ή  $\delta(x)$ , η οποία συχνά καλείται και **ωστική συνάρτηση** (ή **κρουστική συνάρτηση**) είναι στ' αλήθεια μια πολύ παράξενη συνάρτηση. Στα μαθηματικά εμπίπτει στις καλούμενες **γενικευμένες συναρτήσεις** (ή **κατανομές**). Στην ενότητα αυτή θα γίνει μια σύντομη εισαγωγή στη συνάρτηση δέλτα του Dirac, χωρίς όμως καμία μαθηματική αυστηρότητα.

Στην Παράγραφο Α10.2.1, Παράδειγμα Α10.1 αναφερθήκαμε σε μια συνάρτηση ορθογωνικού παλμού που παίρνει παντού μηδενικές τιμές εκτός από το διάστημα  $[0, t_0]$  (με  $t_0 > 0$ ), όπου παίρνει τη σταθερή (μη μηδενική) τιμή  $c$ . Εδώ θα εισαγάγουμε την παραπλήσια συνάρτηση  $u_{t_0}(t)$  με τη μόνη διαφορά ότι τώρα η σταθερή τιμή της συναρτήσεως αυτής δεν είναι πια  $c$ , αλλ' είναι  $1/t_0$ , δηλαδή έχουμε  $c = 1/t_0$ . Άρα ο ορισμός της παρούσας συναρτήσεως  $u_{t_0}(t)$  θα είναι ο ακόλουθος:

$$u_{t_0}(t) = \begin{cases} 0 & \text{για } t < 0, \\ 1/t_0 & \text{για } 0 \leq t \leq t_0, \\ 0 & \text{για } t > t_0. \end{cases} \quad (10.6.1)$$

Πρόκειται για τον ίδιο σχεδόν ορισμό (10.2.5) της συναρτήσεως ορθογωνικού παλμού στο Παράδειγμα Α10.1, μόνο που εδώ θέσαμε  $c = 1/t_0$ . Με τον τρόπο αυτό θα προκύψει μοναδιαίο εμβαδόν, αφού προφανώς  $t_0 \times (1/t_0) = 1$  στη γραφική παράσταση της συναρτήσεως  $u_{t_0}(t)$  που εξετάζουμε.

Η συνάρτηση  $\delta(t)$  του Dirac μπορεί απλά να θεωρηθεί ότι προέρχεται από τη συνάρτηση  $u_{t_0}(t)$  που ορίστηκε ευθύς παραπάνω απλά σαν το όριο της για  $t_0 \rightarrow 0$ . Δηλαδή έχουμε

$$\delta(t) = \lim_{t_0 \rightarrow 0} u_{t_0}(t). \quad (10.6.2)$$

Η σταθερή τιμή (το «ύψος») της συναρτήσεως  $u_{t_0}(t)$  είναι  $c = 1/t_0$  στο διάστημα  $[0, t_0]$ , έτσι ώστε το εμβαδόν του σχετικού ορθογωνίου να είναι  $t_0 \times (1/t_0) = 1$ . Κατά συνέπεια είναι σαφές ότι στη συνάρτηση  $\delta(t)$  του Dirac η τιμή αυτή  $c = 1/t_0$  θα απειρίζεται, δηλαδή  $\lim_{t_0 \rightarrow 0} (1/t_0) = \infty$ .

Άρα η συνάρτηση  $\delta(t)$  του Dirac έχει παντού μηδενική τιμή εκτός από το σημείο  $t = 0$ , στο οποίο έχει άπειρη τιμή. Όμως ο απειρισμός αυτός γίνεται, επαναλαμβάνουμε, με τέτοιον τρόπο, ώστε το σχετικό ολοκλήρωμα να είναι ίσο με τη μονάδα. Επομένως μπορούμε να δώσουμε τον ακόλουθο μη αυστηρό ορισμό της συναρτήσεως  $\delta(t)$  του Dirac, η οποία είναι μια γενικευμένη συνάρτηση:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{για } t \neq 0, \\ \infty & \text{για } t = 0, \end{cases} \quad \text{έτσι ώστε} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_0^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1 \quad \text{για κάθε } \varepsilon > 0. \quad (10.6.3)$$

Προφανώς με τον πιο πάνω τύπο (10.6.2) για τη συνάρτηση  $\delta(t)$  του Dirac είναι εύλογο να θεωρήσουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace της είναι το όριο του μετασχηματισμού Laplace της σχέσεως (10.2.6) του Παραδείγματος Α10.1 που προαναφέραμε, εδώ με  $c = 1/t_0$  και  $t_0 \rightarrow 0$ . Έτσι βασιζόμαστε στη σχέση αυτή και υπολογίζουμε (μη αυστηρά βέβαια!) το μετασχηματισμό Laplace

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{(1/t_0)(1 - e^{-st_0})}{s} = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-st_0}}{st_0} = 1, \quad s \neq 0, \quad (10.6.4)$$

όπως πολύ εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί, π.χ. με τη χρήση του γνωστού κανόνα του L'Hôpital.

Η συνάρτηση  $\delta(t)$  του Dirac εξαιτίας του ορισμού της (10.6.3) μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι η παράγωγος της βηματικής συναρτήσεως του Heaviside  $H(t)$ , που ορίσθηκε στη σχέση (10.3.47), δηλαδή  $\delta(t) = H'(t)$ . Και από την ίδια τη συνάρτηση  $\delta(t)$  μπορούν να ορισθούν οι παράγωγοί της  $\delta'(t)$ ,  $\delta''(t)$ ,  $\delta'''(t)$ , που είναι βέβαια και αυτές γενικευμένες και ιδιαίτερα ιδιόμορφες συναρτήσεις.

Με βάση το μετασχηματισμό Laplace (10.6.4) ( $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ ) και την Ιδιότητα 5 του μετασχηματισμού Laplace (Παράγραφος A10.3.5) για τις παραγωγούς θα ισχύουν οι μετασχηματισμοί Laplace

$$\mathcal{L}\{\delta'(t)\} = s \quad \text{και επίσης} \quad \mathcal{L}\{\delta''(t)\} = s^2. \quad (10.6.5)$$

Επίσης με βάση την Ιδιότητα 4 του μετασχηματισμού Laplace (Παράγραφος A10.3.4), που αφορά σε μετατόπιση στον άξονα της αρχικής μεταβλητής, θα ισχύουν και οι εξής μετασχηματισμοί Laplace:

$$\mathcal{L}\{\delta(t - a)\} = e^{-as}, \quad \mathcal{L}\{\delta'(t - a)\} = se^{-as}, \quad \mathcal{L}\{\delta''(t - a)\} = s^2e^{-as}. \quad (10.6.6)$$

Επαναλαμβάνεται: πρόκειται για γενικευμένες συναρτήσεις κι όλοι αυτοί οι ισχυρισμοί δε μπορούν εδώ να θεμελιωθούν αυστηρά, αν και είναι απόλυτα σωστοί με τις πρακτικές αυτές «αποδείξεις».

Θα ήταν τέλος ασυγχώρητη παράλειψη, αν δεν αναφερόταν και ο εξής πολύ σημαντικός τύπος για τη συνάρτηση  $\delta(t)$  του Dirac:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t)p(\tau) d\tau = p(t) \quad (10.6.7)$$

με  $p(t)$  μια αυθαίρετη συνεχή συνάρτηση. Με τη χρήση του τύπου αυτού μια φόρτιση  $p(t)$  σε ένα μηχανικό σύστημα (π.χ. σε ένα μονοβάθμιο σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα ή σε μια κατασκευή γενικότερα) αναλύεται σε υπέρθεση (επαλληλία) απειροστών φορτίσεων  $p(\tau) d\tau$ . Ανάλογα για τη φόρτιση  $p(x)$  μιας δοκού θα έχουμε τον αντίστοιχο τύπο με  $x$  (αντί  $t$ ) και  $\xi$  (αντί  $\tau$ ) και ανάλυση της φορτίσεως  $p(x)$  σε υπέρθεση (επαλληλία) απειροστών φορτίσεων  $p(\xi) d\xi$ .

Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση  $\delta(t)$  ή  $\delta(x)$  του Dirac μπορεί να χρησιμοποιηθεί άριστα σε συνδυασμό με το μετασχηματισμό Laplace, παρόλο που δεν είναι τύπου  $\mathcal{A}_L$ . Οι πιο πάνω τόσο απλοί μετασχηματισμοί Laplace την καθιστούν μάλιστα πολύ εύκολη στη χρήση της. Θα διαπιστώσουμε τη χρησιμότητά της (α) σε προβλήματα Ταλαντώσεων (σαν συναρτήσεως ωθήσεως, κρούσεως τη στιγμή  $t = t_0$ ) καθώς και (β) σε προβλήματα δοκών (σαν συναρτήσεως συγκεντρωμένου φορτίου σε ένα σημείο  $x = d$  της δοκού). Από τη χρήση της στις Ταλαντώσεις προήλθε και η εναλλακτική ονομασία της **ωστική συνάρτηση** ή **κρουστική συνάρτηση**. Ένα απλό παράδειγμα χρήσεως της συναρτήσεως  $\delta(t)$  του Dirac σαν **συναρτήσεως εξαναγκασμού** σε γραμμική διαφορική εξίσωση στις Ταλαντώσεις θα παρουσιασθεί στο επόμενο Κεφάλαιο A11: Ενότητα A11.10. Αυτή αφορά στην ωστική απόκριση μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου (χωρίς αποσβεστήρα).

Ειδικά στις φορτίσεις δοκών  $p(x)$  εύκολα συνάγεται από τον ορισμό (10.6.1) της βοηθητικής συναρτήσεως, από την οποία με οριακή διαδικασία προέκυψε η συνάρτηση  $\delta(x)$  του Dirac, ότι αυτή παριστάνει μοναδιαίο συγκεντρωμένο φορτίο στη θέση  $x = 0$ . Ανάλογα η συνάρτηση  $P\delta(x)$  παριστάνει συγκεντρωμένο φορτίο  $P$  στη θέση  $x = 0$ , ενώ η συνάρτηση  $P\delta(x - a)$  παριστάνει το ίδιο φορτίο  $P$  στη θέση  $x = a$ . Άρα είναι ιδανική η συνάρτηση  $\delta(x)$  του Dirac για την παράσταση συγκεντρωμένων φορτίων, ιδίως όταν αυτά συνυπάρχουν σε μια φόρτιση  $p(x)$  με κατανομημένα φορτία.

Παραπέρα μπορεί επίσης να αποδειχθεί ότι η παράγωγος  $\delta'(x)$  της συναρτήσεως  $\delta(x)$  παριστάνει μοναδιαία ροπή κάμψεως που εφαρμόζεται στο σημείο  $x = 0$  μιας δοκού. Γενικεύοντας, η συνάρτηση  $M_b\delta'(x - a)$  παριστάνει ροπή κάμψεως  $M_b$  στο σημείο  $x = a$ . Είναι στ' αλήθεια πολύ χρήσιμη η συνάρτηση  $\delta(x)$  του Dirac στον Πολιτικό Μηχανικό, όπως και τα ολοκληρώματα και οι πρώτες παράγωγοί της. Σχετικές εφαρμογές θα παρουσιασθούν στις Ενότητες A11.14 (συγκεντρωμένο φορτίο σε πρόβολο) και A11.15, Εφαρμογή A11.5 (ροπή σε πρόβολο). Στη δεύτερη αυτή εφαρμογή η συνάρτηση  $\delta'(x - a)$  του Dirac (για τη ροπή) θα παρασταθεί με τον εναλλακτικό συμβολισμό της σαν μια **συνάρτηση Macaulay** (ή **συνάρτηση ιδιομορφίας**):  $\delta'(x - a) \equiv \langle x - a \rangle^{-2}$ .

### Α10.7. ΠΙΝΑΚΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ LAPLACE

Συμπληρώνουμε το Κεφάλαιο αυτό Α10 παραθέτοντας δύο πίνακες: (α) τον **Πίνακα Α10.1: Πίνακα βασικών ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Laplace** (σ' αυτήν εδώ τη σελίδα) και (β) τον **Πίνακα Α10.2: Πίνακα χρήσιμων μετασχηματισμών Laplace** (σε δύο σελίδες: συγκεκριμένα στις δύο επόμενες σελίδες). Στους πίνακες αυτούς οι στήλες αφορούν: (α) Η πρώτη στήλη στον άξοντα αριθμό της ιδιότητας ή του μετασχηματισμού Laplace. (β) Η δεύτερη στήλη στις αρχικές συναρτήσεις  $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}$ . (γ) Η τρίτη στήλη στους μετασχηματισμούς Laplace  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  και (δ) Η τέταρτη στήλη στους αριθμούς των τύπων μέσα στο κείμενο που σχετίζονται με τις ιδιότητες ή/και τους μετασχηματισμούς Laplace. (ε) Τέλος η πέμπτη στήλη υπάρχει μόνο στον Πίνακα Α10.2 και αφορά σε παραδείγματα εφαρμογής.

**ΠΙΝΑΚΑΣ Α10.1: ΠΙΝΑΚΑΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ LAPLACE**

α/α	$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}$	$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$	τύπος
1	$c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$	$c_1 U_1(s) + c_2 U_2(s)$	(10.3.5)
2	$u(at), a > 0$	$\frac{1}{a} U\left(\frac{s}{a}\right)$	(10.3.37)
3	$e^{-at} u(t)$	$U(s + a)$	(10.3.42)
4	$u(t - a)H(t - a), a \geq 0$	$e^{-as} U(s)$	(10.3.48)
5.1	$u'(t)$	$sU(s) - u(0)$	(10.3.68)
5.2	$u''(t)$	$s^2 U(s) - su(0) - u'(0)$	(10.3.69)
5.3	$u'''(t)$	$s^3 U(s) - s^2 u(0) - su'(0) - u''(0)$	(10.3.70)
5.4	$u''''(t)$	$s^4 U(s) - s^3 u(0) - s^2 u'(0) - su''(0) - u'''(0)$	(10.3.71)
5.n	$u^{(n)}(t)$	$s^n U(s) - s^{n-1} u(0) - s^{n-2} u'(0) - \dots - su^{(n-2)}(0) - u^{(n-1)}(0)$	(10.3.72)
6.1	$-t u(t)$	$U'(s)$	(10.3.87α)
6.n	$(-t)^n u(t)$	$U^{(n)}(s)$	(10.3.87β)
7	$\int_0^t u_1(\tau) u_2(t - \tau) d\tau$	$U_1(s) U_2(s)$	(10.3.94)
8	$\int_0^t u(\tau) d\tau$	$\frac{U(s)}{s}$	(10.3.107)

► **Παρατήρηση Α10.5:** Ας σημειώσουμε ότι στην Ιδιότητα 5 για τους μετασχηματισμούς Laplace των παραγώγων  $u^{(n)}(t)$  εκτός από τη γενική περίπτωση 5.n παραθέσαμε και τις ειδικές περιπτώσεις  $n = 1, n = 2, n = 3$  και  $n = 4$ , παρόλο που αυτές προκύπτουν από τη γενική περίπτωση. Επίσης στην Ιδιότητα 6 για τις παραγώγους  $U^{(n)}(s)$  του μετασχηματισμού Laplace  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  εκτός από τη γενική περίπτωση 6.n δώσαμε και την ειδική περίπτωση  $n = 1$ . Αυτά τα κάναμε, επειδή οι ειδικές αυτές περιπτώσεις παρουσιάζονται συχνά στις εφαρμογές.

► **Παρατήρηση Α10.6:** Με βάση τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace στον πιο πάνω Πίνακα Α10.1 μπορούν να προσδιορισθούν πάρα πολλοί μετασχηματισμοί Laplace  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  από άλλους πιο στοιχειώδεις και ήδη γνωστούς μετασχηματισμούς Laplace.

► **Παρατήρηση Α10.7:** Σ' ένα πρόγραμμα συμβολικών υπολογισμών, όπως η *Mathematica*, είναι υπολογιστικά προτιμότερο ο προσδιορισμός μετασχηματισμών Laplace να γίνεται κυρίως με τη χρήση ορισμένων βασικών μετασχηματισμών Laplace και των πιο πάνω ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Laplace (ίσως και ορισμένων άλλων) παρά με το ολοκλήρωμα ορισμού του (10.2.1).



**ΠΙΝΑΚΑΣ A10.2: ΠΙΝΑΚΑΣ ΧΡΗΣΙΜΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ LAPLACE** (συνεχίζεται ...)

α/α	$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}$	$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$	τύπος	παραδείγματα εφαρμογής
1	$1 \quad \text{ή} \quad \langle t \rangle^0 \equiv H(t)$	$\frac{1}{s}$	(10.2.19)	σταθερές φορτίσεις
2	$\langle t \rangle^{-1} \equiv \delta(t)$	1	(10.6.4)	ωστικό/συγκεντρωμένο φορτίο
3	$\langle t \rangle^{-2} \equiv \delta'(t)$	s	(10.6.5α)	ροπή κάμψεως σε σημείο δοκού
4	$\langle t \rangle^{-3} \equiv \delta''(t)$	$s^2$	(10.6.5β)	εσωτερική άρθρωση σε δοκό
5	$\langle t - a \rangle^0 \equiv H(t - a), \quad a \geq 0$	$\frac{e^{-as}}{s}$	(11.15.1)	ασυνεχείς φορτίσεις
6	$\langle t - a \rangle^{-1} \equiv \delta(t - a), \quad a \geq 0$	$e^{-as}$	(11.15.2)	ωστικό/συγκεντρωμένο φορτίο
7	$\langle t - a \rangle^{-2} \equiv \delta'(t - a), \quad a \geq 0$	$se^{-as}$	(11.15.3)	ροπή κάμψεως σε σημείο δοκού
8	$\langle t - a \rangle^{-3} \equiv \delta''(t - a), \quad a \geq 0$	$s^2 e^{-as}$	(11.15.4)	εσωτερική άρθρωση σε δοκό
9	$t^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	(10.2.18)	πολυωνυμικές φορτίσεις, δοκοί
10	$\langle t - a \rangle^n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad a \geq 0$	$\frac{n!}{s^{n+1}} e^{-as}$	(11.15.5)	τμηματ. πολυων. φορτίσεις, δοκοί
11	$e^{at}$	$\frac{1}{s - a}$	(10.2.17)	εκθετ. φορτίσεις, καθαρισμός νερού
12	$\cosh bt$	$\frac{s}{s^2 - b^2}$	(10.3.23α)	κίνηση σε περιστρεφόμενο σωλήνα
13	$\sinh bt$	$\frac{b}{s^2 - b^2}$	(10.3.23β)	κίνηση σε περιστρεφόμενο σωλήνα
14	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	(10.3.31α)	ταλαντώσεις, λυγισμός στύλου
15	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	(10.3.31β)	ταλαντώσεις, λυγισμός στύλου
16	$e^{-at} \cosh bt$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 - b^2}$		ταλαντώσεις με ισχυρή απόσβεση
17	$e^{-at} \sinh bt$	$\frac{b}{(s + a)^2 - b^2}$		ταλαντώσεις με ισχυρή απόσβεση
18	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$	(10.3.46α)	ταλαντώσεις με ασθενή απόσβεση
19	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$	(10.3.46β)	ταλαντώσεις με ασθενή απόσβεση
20	$\frac{1}{2\omega^3} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$	$\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}$		ταλαντώσεις: συντονισμός
21	$\frac{1}{2\omega} t \sin \omega t$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$	(10.3.93)	ταλαντώσεις: συντονισμός
22	$\frac{1}{2\omega} (\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$	$\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$		ταλαντώσεις: συντονισμός
23	$\cos \omega t - \frac{1}{2} \omega t \sin \omega t$	$\frac{s^3}{(s^2 + \omega^2)^2}$		ταλαντώσεις: συντονισμός

ΠΙΝΑΚΑΣ Α10.2: ΠΙΝΑΚΑΣ ΧΡΗΣΙΜΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ LAPLACE (συνέχεια)

α/α	$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}$	$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$	τύπος	παραδείγματα εφαρμογής
24	$\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{1}{s} e^{-a\sqrt{s}}$	(B10.1.11γ)	διάχυση (Μέρος Β: Κεφάλαιο Β10)
25	$\frac{1}{2\beta^3} (\sinh \beta t - \sin \beta t)$	$\frac{1}{s^4 - \beta^4}$	(11.12.7)	καμπτικές ιδιοταλαντώσεις δοκού
26	$\frac{1}{2\beta^2} (\cosh \beta t - \cos \beta t)$	$\frac{s}{s^4 - \beta^4}$	(11.12.8)	καμπτικές ιδιοταλαντώσεις δοκού
27	$\frac{1}{2\beta} (\sinh \beta t + \sin \beta t)$	$\frac{s^2}{s^4 - \beta^4}$	(11.12.9)	καμπτικές ιδιοταλαντώσεις δοκού
28	$\frac{1}{2} (\cosh \beta t + \cos \beta t)$	$\frac{s^3}{s^4 - \beta^4}$	(11.12.10)	καμπτικές ιδιοταλαντώσεις δοκού
29	$\frac{1}{4\beta^3} (\cosh \beta t \sin \beta t - \sinh \beta t \cos \beta t)$	$\frac{1}{s^4 + 4\beta^4}$	(11.13.6)	δοκός επί ελαστικής βάσεως
30	$\frac{1}{2\beta^2} \sinh \beta t \sin \beta t$	$\frac{s}{s^4 + 4\beta^4}$	(11.13.7)	δοκός επί ελαστικής βάσεως
31	$\frac{1}{2\beta} (\cosh \beta t \sin \beta t + \sinh \beta t \cos \beta t)$	$\frac{s^2}{s^4 + 4\beta^4}$	(11.13.8)	δοκός επί ελαστικής βάσεως
32	$\cosh \beta t \cos \beta t$	$\frac{s^3}{s^4 + 4\beta^4}$	(11.13.9)	δοκός επί ελαστικής βάσεως

► **Παρατήρηση Α10.8:** Η χρήση προγραμμάτων συμβολικών υπολογισμών, όπως η *Mathematica*, έχει βέβαια υποβαθμίσει τη σπουδαιότητα των πινάκων μετασχηματισμών Laplace, όπως είναι ο πιο πάνω Πίνακας Α10.2. Ένα τέτοιο πρόγραμμα είναι συνήθως επαρκές για τις πρακτικές ανάγκες του Πολιτικού Μηχανικού και γενικά είναι υπολογιστικά πιο αποτελεσματικό από τον άνθρωπο.

► **Παρατήρηση Α10.9:** Πάρα πολλοί από τους πιο πάνω μετασχηματισμούς Laplace 1 έως 32 προκύπτουν εύκολα ο ένας από τον άλλο με βάση τις βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace στην Ενότητα Α10.3 και επίσης στον Πίνακα Α10.1. Συγκεκριμένα: (α) Με τη χρήση της Ιδιότητας 1 (γραμμική ιδιότητα) στο μετασχηματισμό Laplace προκύπτουν οι μετασχηματισμοί Laplace 12, 13, 14 και 15 από τον 11. (β) Με τη χρήση της Ιδιότητας 3 για τον πολλαπλασιασμό επί την εκθετική συνάρτηση  $e^{-at}$  προκύπτουν οι μετασχηματισμοί Laplace 16–19 από τους 12–15 αντίστοιχα. (γ) Με τη χρήση της Ιδιότητας 4 της μετατοπίσεως στον άξονα της αρχικής μεταβλητής προκύπτουν οι μετασχηματισμοί Laplace 5, 6, 7, 8 και 10 από τους 1, 2, 3, 4 και 9 αντίστοιχα. (δ) Τέλος, το πιο σημαντικό, με τη χρήση της Ιδιότητας 5 για τους μετασχηματισμούς Laplace παραγώγων προκύπτουν (με τρεις διαδοχικές παραγωγίσεις) οι μετασχηματισμοί Laplace 2, 3 και 4 από τον 1. Επίσης οι 6, 7 και 8 από τον 5. Όμοια οι 21, 22 και 23 από τον 20. Ακόμη οι 26, 27 και 28 από τον 25 και ανάλογα οι 30, 31 και 32 από τον 29. Τέλος ο μετασχηματισμός Laplace 1 είναι ειδική περίπτωση του 9 (για  $n = 0$ ), αλλά και του 11 (για  $a = 0$ ). Με βάση όλες τούτες τις παρατηρήσεις ουσιαστικά ελάχιστους μετασχηματισμούς Laplace είναι υποχρεωμένος να μάθει ο χρήστης της μεθόδου. Αντίθετα όμως πρέπει να ξέρει πάρα πολύ καλά τις βασικές ιδιότητες του Πίνακα Α10.1.

► **Παρατήρηση Α10.10:** Στους μετασχηματισμούς Laplace 1 έως 8 και 10 αναφέρονται αριστερά και οι συναρτήσεις Macaulay (σε γωνιακές αγκύλες). Αυτές θα τις εξετάσουμε στην Ενότητα Α11.15 του επόμενου Κεφαλαίου Α11, επειδή ενδιαφέρουν ιδιαίτερα τον Πολιτικό Μηχανικό. Επίσης στο μετασχηματισμό Laplace 24 το σύμβολο  $\operatorname{erfc}$  δηλώνει τη συμπληρωματική συνάρτηση σφάλματος.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ *A11*

## Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ LAPLACE: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε σε μερικές εφαρμογές της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace για την επίλυση συνήθων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές είτε ομογενών είτε μη ομογενών. Στην εισαγωγική ενότητα θα αναφέρουμε τα βήματα που απαιτούνται για το σκοπό αυτό. Οι εφαρμογές που θα παρουσιάσουμε στις επόμενες ενότητες αφορούν:

1. Στη **Μετάδοση Θερμότητας** για τη θερμοκρασία  $\theta(t)$  ενός υλικού σημείου που εισέρχεται σε περιβάλλον διαφορετικής θερμοκρασίας με τη χρήση του νόμου της ψύξεως του Νεύτωνα.
  2. Στην **Κλασική Μηχανική** στην κίνηση ενός υλικού σημείου με αντίσταση στην κίνηση ανάλογη της ταχύτητας. Στην κίνηση αυτή θα θεωρήσουμε επίσης ότι ασκείται και εξωτερική δύναμη.
  3. Στην **Ιξοελαστικότητα** σε μονοαξονικό εφελκυσμό ιξοελαστικού υλικού Kelvin (ή Voigt) υπό μεταβαλλόμενη τάση  $\sigma(t)$  καθώς και στο ενδιαφέρον φαινόμενο του ερπυσμού (με  $\sigma(t) = \sigma_0$ ).
  4. Στις **Ταλαντώσεις** στη μετατόπιση  $u(t)$  του υλικού σημείου (της μάζας) στο κλασικό μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου-ελατηρίου (χωρίς απόσβεση), αλλά και υλικού σημείου-ελατηρίου-αποσβεστήρα (με απόσβεση). Θα εξετάσουμε τόσο τις ελεύθερες ταλαντώσεις: χωρίς φόρτιση  $p(t)$ , όσο και τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις: με φόρτιση  $p(t)$ . Σε περίπτωση γενικής (αυθαίρετης) φορτίσεως, στην οποία θα δώσουμε ιδιαίτερη έμφαση, θα καταλήξουμε σε συνελκτικούς ολοκληρωτικούς τύπους για την απόκριση του μηχανικού συστήματος. Αυτοί καλούνται τύποι του Duhamel και είναι πολύ χρήσιμοι για τον Πολιτικό Μηχανικό. Θα αναφερθούμε επίσης σύντομα και στο απευκταίο φαινόμενο του συντονισμού.
  5. Στην **Κάμψη** συνήθων δοκών με άγνωστη συνάρτηση το βέλος κάμψεως  $v(x)$  υπό ποικίλες συνοριακές συνθήκες: πάκτωση, άρθρωση και ελεύθερο άκρο. Και στην περίπτωση αυτή θα αναφερθούμε και σε γενικούς τύπους για το βέλος κάμψεως της δοκού με τη χρήση συνελκτικών ολοκληρωμάτων που ισχύουν για κάθε κατανεμημένη κάθετη φόρτιση  $p(x)$  της δοκού.
  6. Πέρα από τις συνήθεις δοκούς θα κάνουμε σύντομη αναφορά και στα δυσκολότερα προβλήματα των **καμπτικών ιδιοταλαντώσεων δοκών** (ως προς τα προσημασμένα εύρη ταλαντώσεων  $X(x)$  των σημείων τους) καθώς και **δοκών επί ελαστικής βάσεως**, π.χ. πεδιλοδοκών.
  7. Θα έχουμε επίσης την ευκαιρία να αναφερθούμε σε **συγκεντρωμένα φορτία** καθώς και στις κλασικές **συναρτήσεις Macaulay** ή **συναρτήσεις ιδιομορφίας**. Αυτές είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στην επίλυση προβλημάτων κάμψεως δοκών ιδίως με συγκεντρωμένα φορτία και ροπές.
  8. Θα εξετάσουμε τέλος δύο ενδιαφέροντα προβλήματα σχετικά με το **Περιβάλλον**: (α) αποδομίσσεως ρύπου στη **Χημική Κινητική** και (β) μεταφοράς ρύπου στην **Περιβαλλοντική Μηχανική**.
- Ελπίζεται πως όλες τούτες οι εφαρμογές θα δείξουν τη χρησιμότητα του μετασχηματισμού Laplace.

## A11.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

### A11.1.1. Τα βήματα της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace

Τα τρία κύρια βήματα της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace για την επίλυση συνήθων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές (ομογενών ή μη ομογενών) αφορούν:

- **Βήμα 1:** Στη μετατροπή της γραμμικής διαφορικής εξισώσεως σε γραμμική (πρωτοβάθμια) αλγεβρική εξίσωση. Αυτό το κατορθώνουμε μετασχηματίζοντας κατά Laplace και τα δύο μέλη της γραμμικής διαφορικής εξισώσεως (με σταθερούς συντελεστές) με την ταυτόχρονη χρήση και της γραμμικής ιδιότητας του μετασχηματισμού Laplace. Κατά τη μετατροπή αυτή λαμβάνονται υπόψη και οι διαθέσιμες αρχικές συνθήκες. (Σε όσο βαθμό λείπουν εισάγονται σταθερές στις θέσεις τους.) Τώρα η άγνωστη συνάρτηση  $u(t)$  της διαφορικής εξισώσεως έχει πια αντικατασταθεί από το μετασχηματισμό Laplace της  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ .
- **Βήμα 2:** Στην επίλυση της γραμμικής (πρωτοβάθμιας) αλγεβρικής εξισώσεως που προέκυψε στο προηγούμενο Βήμα 1 ως προς τον άγνωστο μετασχηματισμό Laplace  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ . Πρόκειται για μια πολύ εύκολη αλγεβρική εργασία.
- **Βήμα 3:** Στην αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  προς επιστροφή στην αρχική άγνωστη συνάρτηση  $u(t)$  της διαφορικής εξισώσεως. Στο βήμα αυτό είναι συχνά αναγκαίο να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της αναλύσεως σε απλά κλάσματα και έτσι να επιβαρυνθούμε με τον αλγεβρικό κόπο που αυτή συνεπάγεται. Πρέπει επίσης να κάνουμε χρήση ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Laplace καθώς και πινάκων μετασχηματισμών Laplace. Αν έχουμε αυθαίρετη συνάρτηση εξαναγκασμού σε μια μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση, θα πρέπει επίσης να χρησιμοποιήσουμε και το θεώρημα της συνελίξεως. Έτσι θα καταλήξουμε στον επιθυμητό γενικό ολοκληρωτικό τύπο που είναι η λύση της διαφορικής εξισώσεως. Από υπολογιστικής απόψεως πρόκειται για το δυσκολότερο βήμα της μεθόδου.

Μετά από τα τρία αυτά βήματα συνιστάται έντονα σαν τέταρτο και τελικό **Βήμα 4** να γίνεται και η επαλήθευση της λύσεως που βρέθηκε και ως προς την ίδια τη γραμμική διαφορική εξίσωση, αλλά και ως προς τις αρχικές συνθήκες. Το τέταρτο αυτό βήμα θα επιτρέψει τη διαπίστωση της ορθότητας της λύσεως. Αυτό είναι μάλιστα πολύ σημαντικό, εάν αναλογισθούμε ότι κατά την εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace έχουν γίνει πολλές υποθέσεις όσον αφορά στην άγνωστη συνάρτηση και στις ιδιότητές της (π.χ. γενικά πρέπει να είναι τύπου  $\mathcal{D}_{L,n}$ ), παρόλο που είναι ακόμη άγνωστη. Επίσης έχουν γίνει υποθέσεις και ως προς διάστημα  $s > s_0$  (με το  $s_0$  σταθερά) ισχύος της μετασχηματισμένης κατά Laplace διαφορικής εξισώσεως. Ακόμη χειρότερη είναι η κατάσταση όσες φορές παρουσιάζεται στο δεξιό μέλος  $p(t)$  της διαφορικής εξισώσεως η ωστική (ή κρουστική) συνάρτηση δέλτα του Dirac. Αυτή είναι μια γενικευμένη συνάρτηση, δεν έχει τις καλές ιδιότητες των συνηθισμένων τμηματικά συνεχών συναρτήσεων και απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή, στην οποία συμπεριλαμβάνεται και η επαλήθευση (στο παρόν Βήμα 4) των αποτελεσμάτων που προκύπτουν.

Τέλος είναι σημαντικό να σημειωθεί το εξής σημείο. Ο Πολιτικός Μηχανικός γνωρίζει βέβαια ότι ο μετασχηματισμός Laplace παίρνει πληροφορίες στο ολοκλήρωμα ορισμού του (10.2.1) μόνο για μη αρνητικές τιμές  $t \geq 0$  (ή  $x \geq 0$ ) της αρχικής ανεξάρτητης μεταβλητής  $t$  (ή  $x$ ). Εντούτοις μερικές φορές επιθυμεί την ισχύ της λύσεως που βρίσκει με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace και για αρνητικές τιμές  $t < 0$  (ή  $x < 0$ ) της ίδιας ανεξάρτητης μεταβλητής. Είναι απόλυτα σαφές ότι η επαλήθευση της διαφορικής εξισώσεως θα κρίνει το βάσιμο (συνήθως) ή το αβάσιμο (σπάνια) μιας τέτοιας επεκτάσεως της λύσεως και στις αρνητικές τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής  $t$  (ή  $x$ ).

Ας μη λησμονούνται κατά το δυνατόν τα πιο πάνω βήματα (τρία κύρια και ένα επαληθεύσεως) στη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace για την επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων σε εφαρμογές του Πολιτικού Μηχανικού. Τη μέθοδο αυτή θα την επιδείξουμε στο παρόν Κεφάλαιο A11 στα πλαίσια του μαθήματος Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II. Σε παραπέρα ενδιαφέρουσες

εφαρμογές της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace, συγκεκριμένα: (α) Σε διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους και (β) Σε ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra θα προχωρήσουμε στο επόμενο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III.

## A11.2. ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ: ΨΥΞΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

### A11.2.1. Το πρόβλημα αρχικής τιμής

Ο Πολιτικός Μηχανικός στις κατασκευές του είναι επιφορτισμένος και με το πρόβλημα της θερμομονώσεως όσον αφορά στα μονωτικά υλικά μέσα στους τοίχους, στους υαλοπίνακες (μονωτικούς υαλοπίνακες: συνήθως διπλούς και από μονωτικό υλικό), κλπ. Ένα πολύ απλό πρόβλημα Μεταδόσεως Θερμότητας (για ένα υλικό σημείο) περιγράφεται και επιλύεται στην ενότητα αυτή.

Θεωρούμε ένα υλικό σημείο γνωστής αρχικής θερμοκρασίας  $\theta(0) = \theta_0$ . Το υλικό αυτό σημείο εισάγεται (τη χρονική στιγμή  $t = 0$ ) μέσα σε μέσον (περιβάλλον) διαφορετικής σταθερής θερμοκρασίας  $\theta_\pi$  (με το δείκτη  $\pi$  αναφερόμενο στο περιβάλλον) είτε μεγαλύτερης είτε μικρότερης της  $\theta_0$ .

Σύμφωνα με το γνωστό νόμο της ψύξεως του Νεύτωνα, ισχύει η γραμμική διαφορική εξίσωση

$$\dot{\theta}(t) = -k[\theta(t) - \theta_\pi] \quad \text{απόλυτα ισοδύναμα} \quad \dot{\theta}(t) + k\theta(t) = k\theta_\pi \quad (11.2.1)$$

με  $\dot{\theta}(t) := d\theta/dt$ , η οποία συνοδεύεται βέβαια από την αρχική συνθήκη

$$\theta(0) = \theta_0. \quad (11.2.2)$$

Πρόκειται λοιπόν για ένα πολύ απλό πρόβλημα αρχικής τιμής. Το πρόβλημα αυτό αποτελείται από (α) τη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (11.2.1) με σταθερούς συντελεστές και (β) την αρχική συνθήκη (11.2.2). Ο συντελεστής  $k$  είναι μια γνωστή θετική σταθερά ( $k > 0$ ). Φυσικά και οι θερμοκρασίες  $\theta_0$  (αρχική θερμοκρασία του υλικού σημείου) και  $\theta_\pi$  (θερμοκρασία περιβάλλοντος για  $t \geq 0$ ) είναι δύο γνωστές θερμοκρασίες. Σύμφωνα με το νόμο της ψύξεως του Νεύτωνα, που έχει γραφεί μαθηματικά με τη χρήση της διαφορικής εξισώσεως (11.2.1), η μεταβολή  $\dot{\theta}(t)$  της θερμοκρασίας του υλικού σημείου είναι ανάλογη της θερμοκρασιακής διαφοράς  $\theta(t) - \theta_\pi$  μεταξύ υλικού σημείου και περιβάλλοντος (με αρνητικό συντελεστή αναλογίας  $-k$ ). Μετά την πάροδο επαρκούς χρόνου (για  $t \rightarrow \infty$ ) η θερμοκρασία  $\theta(t)$  του υλικού σημείου πρέπει να τείνει να εξισωθεί με τη θερμοκρασία  $\theta_\pi$  του περιβάλλοντος. Αυτό είναι απαραίτητο από φυσικής απόψεως.

Η λύση  $\theta(t)$  του παρόντος προβλήματος αρχικής τιμής (11.2.1) και (11.2.2) που θα βρεθεί παρακάτω θα πρέπει οπωσδήποτε να πληροί την αρχική συνθήκη μας (11.2.2) και θα το απαιτήσουμε αυτό. Θα πρέπει όμως να σέβεται και τη φυσική δέσμευση ότι

$$\theta_\infty := \theta(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \theta_\pi \quad (11.2.3)$$

(με το σύμβολο  $:=$  να δηλώνει πάντοτε ορισμό). Θα διαπιστώσουμε πως αυτό επιτυγχάνεται αυτόματα με την επίλυση του προβλήματος αρχικής τιμής (11.2.1) και (11.2.2).

### A11.2.2. Βήμα 1: Μετατροπή της διαφορικής εξισώσεως σε αλγεβρική

Πρόκειται για αρκετά απλή διαδικασία. Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της διαφορικής εξισώσεως (11.2.1) στη δεύτερη μορφή της. Έτσι παίρνουμε

$$\mathcal{L}\{\dot{\theta}(t) + k\theta(t)\} = \mathcal{L}\{k\theta_\pi\}. \quad (11.2.4)$$

Με τη χρήση μάλιστα της γραμμικής ιδιότητας του μετασχηματισμού Laplace ο μετασχηματισμός Laplace του αριστερού μέλους γράφεται σαν το άθροισμα των μετασχηματισμών Laplace των δύο όρων του τελικά ως εξής:

$$\mathcal{L}\{\dot{\theta}(t)\} + k\mathcal{L}\{\theta(t)\} = k\mathcal{L}\{\theta_\pi\}. \quad (11.2.5)$$

Πήραμε μάλιστα την πρωτοβουλία να θέσουμε τη σταθερά  $k$  έξω από το μετασχηματισμό Laplace (και αριστερά και δεξιά). Και αυτό είναι δικαιολογημένο από τη γραμμική ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace, αν και (ας το ομολογήσουμε!) στο δεξιό μέλος δεν ήταν καθόλου απαραίτητο.

Δηλώνουμε τώρα με το σύμβολο  $\Theta(s)$  το μετασχηματισμό Laplace της άγνωστης συναρτήσεώς μας  $\theta(t)$  (της θερμοκρασίας του υλικού σημείου που εξετάζουμε):

$$\Theta(s) = \mathcal{L}\{\theta(t)\}. \quad (11.2.6)$$

Ο μετασχηματισμός αυτός Laplace  $\Theta(s)$  δηλώθηκε (δηλώνεται κατά προτίμηση) με το αντίστοιχο κεφαλαίο γράμμα (εδώ το  $\Theta$ ) του μικρού γράμματος (εδώ του  $\theta$ ) που δηλώνει την άγνωστη συνάρτηση (την εξαρτημένη μεταβλητή  $\theta = \theta(t)$ ). Σημειώνουμε επίσης ότι κάνουμε την υπόθεση ότι ο μετασχηματισμός Laplace  $\Theta(s) = \mathcal{L}\{\theta(t)\}$  υπάρχει για επαρκώς μεγάλες τιμές  $s > s_0$  της μεταβλητής  $s$  του μετασχηματισμού Laplace. Δε μας είναι όμως γνωστή ούτε και μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα η τιμή  $s_0$  στην ανισότητα  $s > s_0$  που αποδεχθήκαμε. Και είμαστε αναγκασμένοι να την αποδεχθούμε, ώστε να μπορέσουμε να προχωρήσουμε. Ας προχωρήσουμε στ' αλήθεια λοιπόν!

Αυτό που χρειαζόμαστε τώρα είναι ο μετασχηματισμός Laplace  $\mathcal{L}\{\dot{\theta}(t)\}$  της παραγώγου  $\dot{\theta}(t)$  της άγνωστης συναρτήσεώς μας  $\theta(t)$  (της θερμοκρασίας του υλικού σημείου). Προς το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τη σχετική Ιδιότητα 5 (Παράγραφος A10.3.5 του προηγούμενου Κεφαλαίου A10) του μετασχηματισμού Laplace (εδώ για την παράγωγο πρώτης τάξεως) λαμβάνοντας μάλιστα υπόψη και την αρχική συνθήκη (11.2.2), συγκεκριμένα τη συνθήκη  $\theta(0) = \theta_0$ . Με τον τρόπο αυτό διαπιστώνουμε ότι

$$\mathcal{L}\{\dot{\theta}(t)\} = s\Theta(s) - \theta(0) = s\Theta(s) - \theta_0 \quad (11.2.7)$$

φυσικά με  $\Theta(s) = \mathcal{L}\{\theta(t)\}$ , όπως ήδη ορίσαμε λίγο πιο πάνω στη σχέση (11.2.6). Σημειώνουμε επίσης πως για μια σταθερά  $c$  έχουμε  $\mathcal{L}\{c\} = c/s$  με βάση τον τύπο (10.2.19). Άρα

$$\mathcal{L}\{\theta_\pi\} = \frac{\theta_\pi}{s}. \quad (11.2.8)$$

Δε μένει τώρα παρά να αντικαταστήσουμε τους μετασχηματισμούς Laplace  $\mathcal{L}\{\theta(t)\}$ ,  $\mathcal{L}\{\dot{\theta}(t)\}$  και  $\mathcal{L}\{\theta_\pi\}$  από τις σχέσεις (11.2.6), (11.2.7) και (11.2.8) αντίστοιχα στη μετασχηματισμένη κατά Laplace διαφορική εξίσωση (11.2.5). Έτσι αυτή η εξίσωση παίρνει πραγματικά τη μορφή μιας γραμμικής (πρωτοβάθμιας) αλγεβρικής εξισώσεως:

$$[s\Theta(s) - \theta_0] + k\Theta(s) = k \frac{\theta_\pi}{s} \quad (11.2.9)$$

ως προς τον άγνωστο μετασχηματισμό Laplace  $\Theta(s) = \mathcal{L}\{\theta(t)\}$ . Πολύ εύκολα τη γράφουμε και στην απόλυτα ισοδύναμη μορφή της

$$(s + k)\Theta(s) = \theta_0 + k \frac{\theta_\pi}{s} \quad (11.2.10)$$

με την άγνωστη συνάρτηση  $\Theta(s)$  μόνο στο αριστερό μέλος και απόλυτα γνωστό το δεξιό μέλος.

### A11.2.3. Βήμα 2: Επίλυση της αλγεβρικής εξισώσεως

Είναι πάρα πολύ εύκολο να λύσουμε τη γραμμική (πρωτοβάθμια) αλγεβρική εξίσωση (11.2.10) ως προς την άγνωστη συνάρτηση  $\Theta(s)$ . Προκύπτει ότι

$$\Theta(s) = \frac{\theta_0}{s + k} + k \frac{\theta_\pi}{s(s + k)}. \quad (11.2.11)$$

Τουλάχιστον έμμεσα είμαστε υποχρεωμένοι να υποθέσουμε ότι  $s + k > 0$  (δηλαδή ότι  $s > -k$ ) και επίσης ότι  $s > 0$ . Επειδή μάλιστα στη Μετάδοση Θερμότητας ισχύει ότι  $k > 0$  για φυσικούς λόγους, αρκεί να δεχθούμε απλά ότι  $s > 0$ .

**A11.2.4. Βήμα 3: Αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace**

Το τελευταίο και ίσως το δυσκολότερο βήμα μας είναι να αντιστρέψουμε το γνωστό πια μετασχηματισμό Laplace  $\Theta(s) = \mathcal{L}\{\theta(t)\}$  στην πιο πάνω λύση (11.2.11) που βρήκαμε. Έτσι θα προσδιορίσουμε την άγνωστη συνάρτηση  $\theta(t)$  στο πρόβλημα αρχικής τιμής (11.2.1) και (11.2.2) που προσπαθούμε να λύσουμε. (Σημειώνουμε σε παρένθεση ότι αρχική τιμή (11.2.2),  $\theta(0) = \theta_0$ , έχει ήδη ληφθεί υπόψη στο μετασχηματισμό Laplace (11.2.7) της παραγώγου  $\mathcal{L}\{\dot{\theta}(t)\}$ . Γι' αυτό και είναι παρούσα και στη λύση (11.2.11), πιο συγκεκριμένα στο πρώτο κλάσμα  $\theta_0/(s+k)$  του δεξιού μέλους της λύσεως αυτής  $\Theta(s)$ .) Τώρα πρέπει στη λύση μας (11.2.11) να εφαρμόσουμε (και στα δύο μέλη) τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace. Έτσι, αφού  $\Theta(s) = \mathcal{L}\{\theta(t)\}$ , παίρνουμε

$$\theta(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Theta(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\theta_0}{s+k} + k \frac{\theta_\pi}{s(s+k)}\right\}. \tag{11.2.12}$$

Θεωρούμε (και συνεχώς θα θεωρούμε) τη λύση μιας διαφορικής εξίσωσης συνεχής συνάρτηση. Αυτό είναι σχεδόν αναγκαίο για φυσικές ποσότητες, όπως είναι εδώ η άγνωστη θερμοκρασία  $\theta(t)$  του υλικού σημείου. Είναι επίσης και μαθηματικά σχεδόν αναγκαίο, έτσι ώστε να υπάρχει η παράγωγος  $\dot{\theta}(t)$  στη διαφορική εξίσωση (11.2.1). Δε θα γράφαμε μάλιστα καν τη λέξη «σχεδόν» στη φράση «σχεδόν αναγκαίο», εάν δεν είχαμε στο νου μας τη συνάρτηση δέλτα του Dirac, που είναι μια γενικευμένη συνάρτηση και μας είναι χρήσιμη σε προβλήματα με ασυνέχειες. Εν πάση περιπτώσει, δεχόμαστε τη συνέχεια της άγνωστης συναρτήσεώς μας  $\theta(t)$ . Έχουμε επομένως τη δυνατότητα να εφαρμόσουμε τη γραμμική ιδιότητα και στον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, δηλαδή

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1 U_1(s) + c_2 U_2(s)\} = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t), \tag{11.2.13}$$

φυσικά με  $U_1(s) = \mathcal{L}\{u_1(t)\}$  και  $U_2(s) = \mathcal{L}\{u_2(t)\}$ . Τότε (για συνεχείς συναρτήσεις  $u_1(t)$  και  $u_2(t)$  και επίσης για  $t \geq 0$ ) θα ισχύει ότι

$$u_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_1(s)\} \quad \text{και} \quad u_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_2(s)\}. \tag{11.2.14}$$

Εφαρμόζοντας λοιπόν τη γραμμική ιδιότητα (11.2.13) του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace στο δεξιό μέλος του δικού μας αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace (11.2.12), διαπιστώνουμε εύκολα ότι

$$\theta(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Theta(s)\} = \theta_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+k}\right\} + k\theta_\pi \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+k)}\right\}. \tag{11.2.15}$$

Τώρα πια απομένει η εύρεση των δύο αντίστροφων μετασχηματισμών Laplace στο δεξιό μέλος της σχέσεως αυτής (11.2.15). Γνωρίζουμε όμως από τον τύπο (10.2.17) ότι

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \quad \text{οπότε} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}, \tag{11.2.16}$$

εφόσον περιορισθούμε σε συνεχείς συναρτήσεις (εδώ στη συνάρτηση  $e^{at}$ ) και μάλιστα για  $t \geq 0$ .

Θέτοντας απλά  $a = -k$  στον τύπο αυτό (11.2.16), διαπιστώνουμε ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+k}\right\} = e^{-kt}. \tag{11.2.17}$$

Δηλαδή έχουμε προσδιορίσει μέχρι στιγμής τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στον πρώτο όρο του δεξιού μέλους της σχέσεως (11.2.15), ουσιαστικά της λύσεως  $\theta(t)$  του παρόντος προβλήματος αρχικής τιμής (11.2.1) και (11.2.2).

Συνεχίζουμε τώρα με το δεύτερο όρο, ο οποίος είναι και λίγο πιο δύσκολος. Εδώ πρέπει να αντιστρέψουμε κατά Laplace το κλάσμα  $1/[s(s+k)]$ . Θα το κάνουμε αναλύοντάς το πρώτα σε απλά κλάσματα με βάση τη σχέση

$$\frac{1}{s(s+k)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+k}. \tag{11.2.18}$$

αφού το δευτεροβάθμιο πολυώνυμο  $s(s+k)$  στον παρονομαστή του κλάσματος  $1/[s(s+k)]$  έχει απλές μόνο ρίζες: τις δύο ρίζες  $s_1 = 0$  και  $s_2 = -k$ . Στη σχέση αυτή (11.2.18) είναι αναγκαίο να προσδιορισθούν οι δύο σταθερές  $A$  και  $B$ , που είναι προς το παρόν άγνωστες, ώστε η σχέση αυτή να ισχύει εκ ταυτότητας, δηλαδή για κάθε τιμή της μεταβλητής  $s$ . Ο πιο απλός τρόπος για τον προσδιορισμό των δύο συντελεστών  $A$  και  $B$  είναι να απαλείψουμε στην ίδια σχέση (11.2.18) τους παρονομαστές των κλασμάτων. Πολλαπλασιάζοντας επί  $s(s+k)$ , βρίσκουμε αμέσως ότι πρέπει να ισχύει (εννοούμε εκ ταυτότητας να ισχύει, όχι απλά σαν εξίσωση!) η σχέση

$$1 = A(s+k) + Bs, \quad \text{οπότε} \quad (A+B)s + (kA-1) = 0. \quad (11.2.19)$$

Πρόκειται για μια γραμμική σχέση που θέλουμε να ισχύει για κάθε τιμή της μεταβλητής  $s$ . Άρα είναι αναγκαίο να μηδενίζονται ταυτόχρονα και ο συντελεστής  $A+B$  του  $s$ , αλλά και ο σταθερός όρος  $kA-1$ . Επομένως

$$\begin{cases} A+B=0 \\ kA-1=0 \end{cases} \implies \begin{cases} A=\frac{1}{k}, \\ B=-\frac{1}{k}. \end{cases} \quad (11.2.20)$$

Άρα με τις τιμές αυτές,  $A=1/k$  και  $B=-1/k$ , η ανάλυση σε απλά κλάσματα (11.2.18) παίρνει την τελική της μορφή

$$\frac{1}{s(s+k)} = \frac{1}{ks} - \frac{1}{k(s+k)}. \quad (11.2.21)$$

Χρησιμοποιούμε επομένως και πάλι τη γραμμική ιδιότητα (11.2.13) του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace καθώς και τον τύπο (11.2.16), αυτόν δύο φορές: μία με  $a=0$  και μία με  $a=-k$  (τύπος (11.2.17)). Με τον τρόπο αυτό από την πιο πάνω ανάλυση σε απλά κλάσματα (11.2.18) ή, καλύτερα, (11.2.21), αντιστρέφοντας κατά Laplace συνάγουμε ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+k)}\right\} = \frac{1}{k}e^{0t} - \frac{1}{k}e^{-kt} = \frac{1}{k}(1 - e^{-kt}). \quad (11.2.22)$$

Πλησιάζουμε στο τέλος της λύσεως. Απλά αντικαθιστούμε τους αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace (11.2.17) και (11.2.22) στη σχέση (11.2.15) και παίρνουμε τη λύση μας  $\theta(t)$  στην τελική της μορφή

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-kt} + \theta_\pi (1 - e^{-kt}) \quad (11.2.23)$$

(μετά και μια απαραίτητη απλοποίηση  $k/k=1$  στο δεύτερο όρο του δεξιού μέλους). Με αναδιάταξη των όρων στο δεξιό μέλος μπορούμε προφανώς να γράψουμε την ίδια λύση  $\theta(t)$  και στην απόλυτα ισοδύναμη μορφή της

$$\theta(t) = \theta_\pi + (\theta_0 - \theta_\pi)e^{-kt}. \quad (11.2.24)$$

Αυτή είναι η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής (11.2.1) και (11.2.2), δηλαδή η ζητούμενη θερμοκρασία  $\theta(t)$  (εννοείται για  $t \geq 0$ ) του υλικού σημείου θερμοκρασίας  $\theta_0$  (για  $t < 0$ ), το οποίο μεταφέρθηκε τη χρονική στιγμή  $t=0$  σε περιβάλλον θερμοκρασίας  $\theta_\pi$ . Βέβαια η λύση αυτή  $\theta(t)$  ισχύει είτε για  $\theta_\pi < \theta_0$  (ψύξη του υλικού σημείου) είτε για  $\theta_\pi > \theta_0$  (θέρμανση του υλικού σημείου). Παρά ταύτα ο σχετικός φυσικός νόμος στη Μετάδοση Θερμότητας κατά παράδοση καλείται νόμος ψύξεως (και όχι θερμάνσεως) του Νεύτωνα, παρότι ισχύει χωρίς αλλαγή και για τη θέρμανση.

#### A11.2.5. Βήμα 4: Επαλήθευση της λύσεως

Το τελευταίο βήμα μας θα είναι η επαλήθευση της λύσεως (11.2.23) ή (11.2.24) του προβλήματος αρχικής τιμής (11.2.1) και (11.2.2), το οποίο μόλις λύσαμε. Καταρχήν θέτοντας  $t=0$  στη λύση (11.2.24) και λαμβάνοντας υπόψη ότι  $e^{0t}=1$ , διαπιστώνουμε αμέσως ότι  $\theta(0)=\theta_0$ . Επομένως προφανώς επαληθεύεται η αρχική συνθήκη (11.2.2):  $\theta(0)=\theta_0$  που μόλις προαναφέραμε.



Προχωράμε τώρα στην επαλήθευση και της ίδιας της διαφορικής εξίσωσης (11.2.1) στη δεύτερη (και προτιμότερη) μορφή της, ως την επαναλάβουμε:

$$\dot{\theta}(t) + k\theta(t) = k\theta_{\pi}. \quad (11.2.25)$$

Προς το σκοπό αυτό παραγωγίζουμε μία φορά τη λύση (11.2.24) βρίσκοντας

$$\dot{\theta}(t) = -k(\theta_0 - \theta_{\pi})e^{-kt}. \quad (11.2.26)$$

Αντικαθιστώντας τώρα την παράγωγο (11.2.26) και τη συνάρτηση (11.2.24) της λύσεως  $\theta(t)$  στη διαφορική μας εξίσωση (11.2.25), παρατηρούμε ότι οδηγούμαστε σε ταυτότητα, επειδή

$$-k(\theta_0 - \theta_{\pi})e^{-kt} + k[\theta_{\pi} + (\theta_0 - \theta_{\pi})e^{-kt}] = k\theta_{\pi} \implies k\theta_{\pi} = k\theta_{\pi} \implies 0 = 0. \quad (11.2.27)$$

Συμπληρώθηκε επομένως η επαλήθευση της λύσεως  $\theta(t)$  του προβλήματος αρχικής τιμής (11.2.1) και (11.2.2).

### A11.2.6. Φυσικές παρατηρήσεις και συμπέρασμα

Τελειώνουμε την ενότητα αυτή με δύο φυσικές παρατηρήσεις και ένα πρακτικό συμπέρασμα:

► **Παρατήρηση A11.1:** Ας παρατηρήσουμε καταρχήν ότι η θερμοκρασία  $\theta(t)$  του υλικού σημείου που εξετάζουμε και που αρχικά ήταν  $\theta_0$  δε μεταβλήθηκε απότομα τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , παρόλο που το υλικό σημείο τοποθετήθηκε μέσα σε περιβάλλον θερμοκρασίας  $\theta_{\pi}$ . Η μεταβολή της θερμοκρασίας  $\theta(t)$  του υλικού σημείου γίνεται συνεχώς για  $t > 0$ , στην αρχή με γρήγορο ρυθμό, όπως φαίνεται από την παράγωγο (11.2.26), και στη συνέχεια βαθμιαία με αρκετά βραδύτερο ρυθμό καθώς  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-kt} = 0$  στην παράγωγο αυτή. (Εννοείται ότι η σταθερά  $k$  είναι θετική.) Προφανώς για  $t \rightarrow \infty$  και με δεδομένο ότι  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-kt} = 0$  θα ισχύει ότι  $\theta_{\infty} = \theta_{\pi}$ . Δηλαδή θα ισχύει η αναμενόμενη οριακή σχέση (11.2.3), παρόλο που δεν αποτελεί συνθήκη του προβλήματός μας αρχικής τιμής. Εντούτοις είναι αναμενόμενη από φυσική σκοπιά: το υλικό σημείο πρέπει οπωσδήποτε να πάρει στο τέλος (για  $t \rightarrow \infty$ ) τη θερμοκρασία  $\theta_{\pi}$  του περιβάλλοντος. Άρα καλό είναι που κάναμε και αυτήν την επαλήθευση.

► **Παρατήρηση A11.2:** Ένας παρατηρητικός Πολιτικός Μηχανικός θα μπορούσε ίσως να προχωρήσει στον εξής εσφαλμένο ισχυρισμό. Αφού πληρούται η διαφορική εξίσωση (11.2.1) για κάθε τιμή της χρονικής μεταβλητής  $t$  από τη λύση (11.2.24) καθώς βέβαια και η αρχική συνθήκη (11.2.2), άρα τί ωραία!, ισχύει η λύση αυτή  $\theta(t)$  για κάθε πραγματική τιμή του  $t$  είτε θετική είτε αρνητική. Εμ δεν είναι ακριβώς έτσι! Όχι γιατί έγινε κάποιο υπολογιστικό λάθος στην επαλήθευση (11.2.27) της διαφορικής εξίσωσης (11.2.1) ή (11.2.25). Η επαλήθευση είναι σωστή! Το λάθος στον πιο πάνω ισχυρισμό έγκειται απλά στο γεγονός ότι η διαφορική μας εξίσωση (11.2.1) ισχύει μόνο από τη χρονική στιγμή  $t = 0$  και μετά (για  $t \geq 0$ ). Στην πραγματικότητα κανένας δεν ξέρει πού ακριβώς βρισκόταν το υλικό σημείο για  $t < 0$ : προτού τοποθετηθεί σε περιβάλλον θερμοκρασίας  $\theta_{\pi}$ . Κανένας δεν ξέρει την ιστορία του. Δεν περιλαμβάνεται η ιστορία αυτή στην παρούσα εφαρμογή. Άρα γενικά δεν ισχύει για  $t < 0$  η διαφορική εξίσωση (11.2.1) ούτε βέβαια και η λύση της (11.2.24) (κι ως επαλήθευει τη διαφορική αυτή εξίσωση!).

◆ **Συμπέρασμα:** Το συμπέρασμά μας είναι ότι ο Πολιτικός Μηχανικός πρέπει να προσέχει ιδιαίτερα τις επιλύσεις των φυσικών προβλημάτων του. Χρειάζεται προσοχή όχι μόνο ως προς την επαλήθευση των διαφορικών εξισώσεων και των συνθηκών που ισχύουν, αλλά και ως προς την ορθότητα από φυσικής απόψεως των εξισώσεων και των συνθηκών του. Αφετέρου ο μετασχηματισμός Laplace συλλέγοντας πληροφορίες για τις υπεισερχόμενες συναρτήσεις μόνο για  $t \geq 0$ , όπως είναι απόλυτα σαφές από τον ορισμό του (10.2.1), οδηγεί σε συμπεράσματα (εδώ σε λύσεις) που ισχύουν επίσης μόνο για  $t \geq 0$ . Προσοχή λοιπόν στα σημεία αυτά!

**A11.3. ΚΙΝΗΣΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΜΕ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ****A11.3.1. Το πρόβλημα αρχικής τιμής**

Στην ενότητα αυτή θεωρούμε την οριζόντια ευθύγραμμη κίνηση υλικού σημείου μάζας  $m$  με αντίσταση στην κίνηση της μορφής  $R = -cv(t)$  (το μείον δηλώνει ότι πρόκειται για αντίσταση) με  $t$  το χρόνο,  $v(t)$  την ταχύτητα του υλικού σημείου και το  $c$  γνωστή θετική σταθερά. Θεωρούμε επίσης ότι εφαρμόζεται και γνωστή φόρτιση (εξωτερική δύναμη)  $p(t)$  πάνω στο υλικό σημείο.

Τώρα με τη χρήση του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα προκύπτει η γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως

$$m\dot{v}(t) = p(t) + R(t) \implies m\dot{v}(t) = p(t) - cv(t) \quad (11.3.1)$$

ως προς την ταχύτητα  $v(t)$  του υλικού σημείου. Την ίδια διαφορική εξίσωση την ξαναγράφουμε και στη μορφή

$$m\dot{v}(t) + cv(t) = p(t). \quad (11.3.2)$$

Τελικά κρίνουμε σκόπιμο να διαιρέσουμε και με τη μάζα  $m$  όλη τη διαφορική εξίσωση, οπότε προκύπτει

$$\dot{v}(t) + \lambda v(t) = \frac{p(t)}{m} \quad \text{με} \quad \lambda = \frac{c}{m} \quad (11.3.3)$$

για γνωστή σταθερά:  $\lambda = c/m$ . Θα εξετάσουμε τώρα την κίνηση του υλικού σημείου για χρονικές στιγμές  $t \geq 0$  με αρχική ταχύτητα

$$v(0) = v_0. \quad (11.3.4)$$

Οι εξισώσεις (11.3.3) και (11.3.4) συνιστούν ένα πρόβλημα αρχικής τιμής. Αυτό αποτελείται από (α) τη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως με σταθερούς συντελεστές (τους συντελεστές 1 και  $\lambda$ ) (11.3.3) και (β) τη σχετική αρχική συνθήκη (11.3.4). Η φόρτιση (εξωτερική δύναμη)  $p(t)$  στο δεξιό μέλος της διαφορικής εξισώσεως (11.3.3) υποτίθεται γνωστή (αλλ' αυθαίρετη, όχι συγκεκριμένη, τυχαία) συνάρτηση. Άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) είναι η ταχύτητα  $v(t)$  του υλικού σημείου και ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος  $t$  με  $t \geq 0$ .

Θα λύσουμε πιο κάτω το πρόβλημα αυτό αρχικής τιμής με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace και θα προσδιορίσουμε την ταχύτητα  $v(t)$  του υλικού σημείου για  $t \geq 0$ . Μόλις γίνει αυτό, υπάρχει βέβαια η δυνατότητα να προσδιορισθεί και η θέση  $x(t)$  του ίδιου υλικού σημείου σαν το ολοκλήρωμα της ταχύτητάς του  $v(t)$  με βάση τον προφανή ολοκληρωτικό τύπο

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(\tau) d\tau \quad \text{με} \quad x_0 := x(0) \quad (11.3.5)$$

σαν μια δεύτερη αρχική συνθήκη για τη θέση  $x(t)$  μόνο:  $x(0) = x_0$ .

**A11.3.2. Βήμα 1: Μετατροπή της διαφορικής εξισώσεως σε αλγεβρική**

Ακριβώς όπως κάναμε και στην προηγούμενη Ενότητα A11.2, έτσι θα εργασθούμε και εδώ με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Δηλώνουμε με  $V(s)$  το μετασχηματισμό Laplace της άγνωστης συναρτήσεώς μας  $v(t)$  (της ταχύτητας του υλικού σημείου), δηλαδή  $V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\}$ . Τότε για το μετασχηματισμό Laplace της πρώτης παραγώγου  $\dot{v}(t)$  θα έχουμε κατά τα γνωστά

$$\mathcal{L}\{\dot{v}(t)\} = sV(s) - v(0) = sV(s) - v_0 \quad \text{με} \quad V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\} \quad (11.3.6)$$

λόγω και της αρχικής συνθήκης (11.3.4),  $v(0) = v_0$ , για την ταχύτητα  $v(t)$  του υλικού σημείου.

Επομένως το πρόβλημα αρχικής τιμής (11.3.3) και (11.3.4) παίρνει τη μορφή της πρωτοβάθμιας αλγεβρικής εξισώσεως

$$[sV(s) - v_0] + \lambda V(s) = \frac{P(s)}{m} \quad \text{με} \quad P(s) = \mathcal{L}\{p(t)\} \quad (11.3.7)$$

το μετασχηματισμό Laplace της γνωστής φορτίσεως (εξωτερικής δύναμης)  $p(t)$ . Την πρωτοβάθμια αλγεβρική αυτή εξίσωση (11.3.7) τη γράφουμε και στην ακόλουθη απλούστερη μορφή της:

$$(s + \lambda)V(s) = v_0 + \frac{P(s)}{m}. \quad (11.3.8)$$

Σ' αυτήν τη γραφή η άγνωστη συνάρτηση  $V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\}$  είναι αριστερά, ενώ η γνωστή αρχική συνθήκη  $v_0$  καθώς και η επίσης γνωστή συνάρτηση  $P(s) = \mathcal{L}\{p(t)\}$  βρίσκονται δεξιά.

### A11.3.3. Βήμα 2: Επίλυση της αλγεβρικής εξίσωσης

Τώρα που μετασχηματίσαμε τη διαφορική εξίσωση (11.3.3) στην αλγεβρική εξίσωση (11.3.8), έχοντας λάβει υπόψη μας και την αρχική συνθήκη (11.3.4),  $v(0) = v_0$ , τί το πιο εύκολο από το να τη λύσουμε ως προς τον άγνωστο μετασχηματισμό Laplace  $V(s)$ ; Έτσι βρίσκουμε αμέσως τη λύση της

$$V(s) = \frac{v_0}{s + \lambda} + \frac{1}{m} \frac{P(s)}{s + \lambda} = \frac{v_0}{s + \lambda} + \frac{1}{m} P(s) \frac{1}{s + \lambda}. \quad (11.3.9)$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο διαθέτουμε το μετασχηματισμό Laplace  $V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\}$  της άγνωστης συναρτήσεως  $v(t)$ : της ταχύτητας του υλικού σημείου του οποίου την κίνηση μελετάμε.

### A11.3.4. Βήμα 3: Αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace

Απομένει η αντιστροφή  $v(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\}$  του πιο πάνω μετασχηματισμού Laplace (11.3.9). Προς το σκοπό αυτό λαμβάνουμε πρώτα υπόψη μας τον τύπο (11.2.16) της προηγούμενης Ενότητας A11.2 για το μετασχηματισμό Laplace της εκθετικής συναρτήσεως και τον αντίστροφό του. Έτσι, εδώ με  $a = -\lambda$ , έχουμε ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + \lambda}\right\} = e^{-\lambda t}. \quad (11.3.10)$$

Πρόκειται για τον τύπο (11.2.17), εδώ όμως με  $\lambda$  αντί  $k$ . (Το σύμβολο  $k$  χρησιμοποιείται συχνά στη Μηχανική και στις Ταλαντώσεις για τη σταθερά ελατηρίου. Γι' αυτό προτιμήσαμε εδώ το σύμβολο  $\lambda$  για τη δήλωση του πηλίκου  $c/m$ .) Με βάση τον παραπάνω τύπο (11.3.10) ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace  $v_1(t)$  του πρώτου όρου  $v_0/(s + \lambda)$  της λύσεως (11.3.9) είναι απλά

$$v_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{v_0}{s + \lambda}\right\} = v_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + \lambda}\right\} = v_0 e^{-\lambda t} \quad (11.3.11)$$

λόγω και της γραμμικής ιδιότητας του μετασχηματισμού Laplace και του αντιστρόφου του.

Τώρα ως προς το δεύτερο όρο  $(1/m)P(s)/(s + \lambda)$  στην ίδια λύση (11.3.9) πέρα από τη σταθερά μάζα  $m$  παρατηρούμε ότι έχουμε το γινόμενο  $P(s)$  επί  $1/(s + \lambda)$ . Αλλ' αφού  $P(s) = \mathcal{L}\{p(t)\}$ , θα ισχύει

$$\mathcal{L}^{-1}\{P(s)\} = p(t) \quad \text{και επίσης, ανεξάρτητα,} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + \lambda}\right\} = e^{-\lambda t}, \quad (11.3.12)$$

όπως ήδη ξέρουμε από τον τύπο (11.3.10). Άρα με βάση την Ιδιότητα 7 του μετασχηματισμού Laplace (Παράγραφος A10.3.7), ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace  $v_2(t)$  του δεύτερου όρου  $(1/m)P(s)/(s + \lambda)$  της λύσεως (11.3.9) θα είναι απλά ίσος με  $1/m$  επί τη συνέλιξη  $p(t) * e^{-\lambda t}$ , δηλαδή

$$v_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{m} P(s) \frac{1}{s + \lambda}\right\} = \frac{1}{m} p(t) * e^{-\lambda t} = \frac{1}{m} \int_0^t p(\tau) e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{m} e^{-\lambda t} \int_0^t p(\tau) e^{\lambda \tau} d\tau. \quad (11.3.13)$$

Τώρα με βάση τη γραμμική ιδιότητα στον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace  $v(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\}$  της λύσεως  $V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\}$  στη σχέση (11.3.9) θα είναι

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) = v_0 e^{-\lambda t} + \frac{1}{m} e^{-\lambda t} \int_0^t p(\tau) e^{\lambda \tau} d\tau = e^{-\lambda t} \left[ v_0 + \frac{1}{m} \int_0^t p(\tau) e^{\lambda \tau} d\tau \right]. \quad (11.3.14)$$

Σημειώνουμε τέλος ότι η επαλήθευση της λύσεως αυτής (11.3.14) ως προς το πρόβλημα αρχικών τιμών (11.3.3) και (11.3.4) δεν παρουσιάζει καμία σοβαρή δυσκολία και γι' αυτό παραλείπεται.

### Α11.4. ΙΣΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

Στη σύντομη αυτή ενότητα θα εξετάσουμε το πρόβλημα του μονοαξονικού εφελκυσμού (ή/και θλίψεως) ενός **ισοελαστικού υλικού (viscoelastic material)** στην **ισοελαστικότητα (Viscoelasticity)** υπό τάση  $\sigma(t)$ . Πρόκειται για το φαινόμενο εκείνο όπου υπάρχει χρονική μεταβολή της παραμορφώσεως  $\varepsilon(t)$  ακόμη και για σταθερή τάση  $\sigma(t) = \sigma_0$ : **ερπυσμός (creep)**, και επίσης χρονική μεταβολή της τάσεως  $\sigma(t)$  ακόμη και για σταθερή παραμόρφωση  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$ : **χαλάρωση (relaxation)**. Αρκετά υλικά του Πολιτικού Μηχανικού παρουσιάζουν ισοελαστική συμπεριφορά, όπως: (α) πλαστικά υλικά, (β) μέταλλα σε υψηλές θερμοκρασίες και (γ) σε μικρό βαθμό και το σκυρόδεμα.

Στην ενότητα αυτή θα περιορισθούμε στο μονοαξονικό εφελκυσμό δοκιμίου κατασκευασμένου από ισοελαστικό **υλικό Kelvin** (ή **υλικό Voigt**). Πρόκειται για ένα από τα πιο απλά και γνωστά ισοελαστικά υλικά. Σημειώνεται ότι η τάση  $\sigma(t)$  εφαρμόζεται στο δοκίμιο από τη στιγμή  $t = 0$  και μετά ( $t \geq 0$ ) και θεωρείται γενικά μεταβλητή. Η σχετική διαφορική εξίσωση έχει την απλή μορφή

$$q_0 \varepsilon(t) + q_1 \dot{\varepsilon}(t) = \sigma(t) \quad \text{και αλλάζοντας τη σειρά των όρων} \quad q_1 \dot{\varepsilon}(t) + q_0 \varepsilon(t) = \sigma(t) \quad (11.4.1)$$

με  $t > 0$  και με αρχική συνθήκη (που προκύπτει για φυσικούς λόγους) τη συνθήκη  $\varepsilon(0) = 0$ .

Πρόκειται προφανώς για μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως με σταθερούς συντελεστές: τις δύο θετικές σταθερές  $q_0$  και  $q_1$  του υλικού Kelvin (ή Voigt). Ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος  $t$  και άγνωστη συνάρτηση η παραμόρφωση  $\varepsilon(t)$  του δοκιμίου (κατά μήκος του). Η τάση  $\sigma(t)$  στο δεξιό μέλος είναι γνωστή συνάρτηση (με  $t \geq 0$  μόνο). Μηδενίζεται για  $t < 0$ .

Παρατηρούμε επίσης ότι η πιο πάνω διαφορική εξίσωση από μαθηματικής απόψεως συμπίπτει απόλυτα με τη διαφορική εξίσωση (11.3.2) της προηγούμενης Ενότητας Α11.3. Συγκεκριμένα εδώ έχουμε απλά ένα διαφορετικό συμβολισμό (και ένα διαφορετικό φυσικό πρόβλημα!):  $q_1$  στη θέση του  $m$ ,  $q_0$  στη θέση του  $c$ ,  $\varepsilon(t)$  στη θέση του  $v(t)$  και  $\sigma(t)$  στη θέση του  $p(t)$ . Άρα εργαζόμαστε εντελώς ανάλογα με την προηγούμενη ενότητα με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace θέτοντας

$$\lambda = \frac{q_0}{q_1}, \quad E(s) = \mathcal{L}\{\varepsilon(t)\}, \quad \Sigma(s) = \mathcal{L}\{\sigma(t)\}. \quad (11.4.2)$$

Με τον τρόπο αυτό (ή απλούστερα αλλάζοντας τα σύμβολα στην τελική λύση (11.3.14) της προηγούμενης ενότητας) και μη λησμονώντας τη μηδενική αρχική συνθήκη:  $\varepsilon(0) = 0$  (εδώ που  $\sigma(t) = 0$  για  $t < 0$ ), καταλήγουμε στην εξής τελική λύση για την παραμόρφωση  $\varepsilon(t)$  του δοκιμίου μας:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{q_1} e^{-\lambda t} \int_0^t \sigma(\tau) e^{\lambda \tau} d\tau \quad \text{με} \quad \lambda = \frac{q_0}{q_1}, \quad (11.4.3)$$

όπως έχουμε ήδη αναφέρει. Πρόκειται για έναν αρκετά ενδιαφέροντα γενικό τύπο αποκρίσεως (εδώ συμπεριφοράς) σε εφελκυσμό (ή/και σε θλίψη) απλού δοκιμίου από υλικό Kelvin (ή Voigt).

▼ **Εφαρμογή Α11.1 (Ερπυσμός):** Να υπολογισθεί η παραμόρφωση  $\varepsilon_c(t)$  σε υλικό Kelvin στο φαινόμενο του **ερπυσμού**, όπου (από τον ορισμό του ερπυσμού!) η τάση είναι σταθερή:  $\sigma(t) = \sigma_0$ .

**Λύση:** Πρόκειται για μια πάρα πολύ απλή εφαρμογή, αλλά με ιδιαίτερα σημαντικό ενδιαφέρον για τον Πολιτικό Μηχανικό. Αρκεί να θέσουμε  $\sigma(\tau) = \sigma_0$  στον παραπάνω γενικό ολοκληρωτικό τύπο (11.4.3), που μόλις βρήκαμε. Έτσι προκύπτει για την παραμόρφωση  $\varepsilon_c(t)$  του υπό ερπυσμό (creep, γι' αυτό και ο δείκτης  $c$ ) δοκιμίου (επαναλαμβάνεται από υλικό Kelvin ισοδύναμα Voigt) ότι

$$\varepsilon_c(t) = \frac{1}{q_1} e^{-\lambda t} \int_0^t \sigma_0 e^{\lambda \tau} d\tau = \frac{\sigma_0}{q_1} e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda \tau} d\tau = \frac{\sigma_0}{q_1} e^{-\lambda t} \left. \frac{e^{\lambda \tau}}{\lambda} \right|_0^t = \frac{\sigma_0}{\lambda q_1} e^{-\lambda t} (e^{\lambda t} - 1) \quad (11.4.4)$$

και τελικά, αφού  $\lambda = q_0/q_1$ , οπότε  $\lambda q_1 = q_0$ , και έπειτα από μια μικρή απλοποίηση:  $e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = 1$ ,

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_0}{q_0} (1 - e^{-\lambda t}) \quad \text{με} \quad \lambda = \frac{q_0}{q_1} \quad \text{και} \quad t \geq 0. \quad (11.4.5)$$

Είναι προφανές από τη λύση αυτή (και αναμενόμενο!) ότι  $\varepsilon_c(0) = 0$  και  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_c(t) = \sigma_0/q_0$ . ▲

### A11.5. ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

#### A11.5.1. Το πρόβλημα αρχικών τιμών

Η ενότητα αυτή καθώς και οι επόμενες τέσσερις ενότητες αφορούν στις Ταλαντώσεις. Στην παρούσα ενότητα εξετάζουμε τις ελεύθερες ταλαντώσεις (που συμπεριλαμβάνουν σαν ειδική περίπτωση και τις ιδιοταλαντώσεις) σε απλό μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου μάζας  $m$  και ελατηρίου σταθεράς  $k$ . Η τόσο γνωστή μας σχετική διαφορική εξίσωση (6.1.3) ή (10.3.2)

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t), \quad t > 0, \quad (11.5.1)$$

χωρίς απόσβεση (με  $c = 0$  ισοδύναμα με  $\xi = 0$ ) ούτε και εξωτερική δύναμη (με  $p(t) = 0$ ) παίρνει τώρα την αρκετά απλή μορφή

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0 \quad \text{με} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (11.5.2)$$

Το σύμβολο  $\omega_0$  δηλώνει την **ιδιοσυχνότητα** ή **φυσική κυκλική συχνότητα** του μηχανικού μας συστήματος. Άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) είναι η μετατόπιση  $u(t)$  του υλικού σημείου από τη θέση ισορροπίας του και ανεξάρτητη μεταβλητή ο χρόνος  $t$ . Σαν αρχική χρονική στιγμή θεωρούμε τη στιγμή  $t = 0$  και υποθέτουμε γνωστές τις αρχικές συνθήκες

$$u(0) = u_0 \quad \text{και} \quad \dot{u}(0) = v_0, \quad (11.5.3)$$

δηλαδή την αρχική θέση  $u_0$  και την αρχική ταχύτητα  $v_0$  του υλικού σημείου.

Πρόκειται για ένα πρόβλημα αρχικών τιμών που αποτελείται (α) από την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως και με σταθερούς συντελεστές (11.5.2) και (β) τις δύο αρχικές συνθήκες (11.5.3). Στην ενότητα αυτή η επίλυση του προβλήματος αυτού θα γίνει με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Επειδή δεν έχουμε απόσβεση ( $c = 0$  ή  $\xi = 0$ ), περιμένουμε βέβαια οι ταλαντώσεις του υλικού σημείου να είναι σταθερού εύρους. Θα διαπιστώσουμε παρακάτω ότι έτσι πραγματικά συμβαίνει.

#### A11.5.2. Βήμα 1: Μετατροπή της διαφορικής εξίσωσης σε αλγεβρική

Θα κάνουμε χρήση του μετασχηματισμού Laplace  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  για την άγνωστη συνάρτησή μας  $u(t)$ : τη μετατόπιση του υλικού σημείου. Επίσης και του μετασχηματισμού Laplace

$$\mathcal{L}\{\ddot{u}(t)\} = s^2 U(s) - su(0) - \dot{u}(0), \quad \text{οπότε} \quad \mathcal{L}\{\ddot{u}(t)\} = s^2 U(s) - su_0 - v_0 \quad (11.5.4)$$

εξαιτίας των δύο αρχικών συνθηκών (11.5.3). Τώρα με εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace η διαφορική εξίσωση (11.5.2) μετατρέπεται στην ακόλουθη πρωτοβάθμια αλγεβρική εξίσωση:

$$[s^2 U(s) - su_0 - v_0] + \omega_0^2 U(s) = 0, \quad \text{λίγο απλούστερα} \quad (s^2 + \omega_0^2)U(s) = su_0 + v_0. \quad (11.5.5)$$

#### A11.5.3. Βήμα 2: Επίλυση της αλγεβρικής εξίσωσης

Πρέπει τώρα να επιλύσουμε την αμέσως πιο πάνω πρωτοβάθμια αλγεβρική εξίσωση (11.5.5) ως προς τον άγνωστο μετασχηματισμό Laplace  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ . Η επίλυση είναι πάρα πολύ εύκολη και η σχετική λύση  $U(s)$  πολύ απλή:

$$U(s) = \frac{su_0 + v_0}{s^2 + \omega_0^2}. \quad (11.5.6)$$

#### A11.5.4. Βήμα 3: Αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace

Ο παρονομαστής  $s^2 + \omega_0^2$  στην ευθύς πιο πάνω λύση  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  μας θυμίζει τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Ξαναγράφουμε την ίδια λύση  $U(s)$  στην πιο εύχρηστη μορφή

$$U(s) = u_0 \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} + v_0 \frac{1}{s^2 + \omega_0^2} \quad \text{και παραπέρα} \quad U(s) = u_0 \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{v_0}{\omega_0} \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}. \quad (11.5.7)$$

Έτσι γίνονται πιο προφανείς οι μετασχηματισμοί Laplace των δύο τριγωνομετρικών συναρτήσεων: συνημίτονο (πρώτο κλάσμα) και ημίτονο (δεύτερο κλάσμα).

Πραγματικά, γνωρίζουμε καλά από την Παράγραφο A10.3.1 του προηγούμενου Κεφαλαίου A10 τους σχετικούς τύπους (10.3.31). Τους επαναλαμβάνουμε, εδώ όμως με  $\omega_0$  αντί για  $\omega$ :

$$\mathcal{L}\{\cos \omega_0 t\} = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \quad \text{και} \quad \mathcal{L}\{\sin \omega_0 t\} = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}. \quad (11.5.8)$$

Υποθέτουμε μάλιστα ότι η άγνωστη συνάρτηση (συγκεκριμένα η μετατόπιση του υλικού σημείου)  $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}$  είναι συνεχής συνάρτηση. Και πραγματικά πρέπει να ισχύει αυτό στη διαφορική μας εξίσωση (11.5.2), αφού παρουσιάζεται δεύτερη παράγωγος  $\ddot{u}(t)$  (δηλαδή η επιτάχυνση  $a(t) = \ddot{u}(t)$  του υλικού σημείου) στη διαφορική αυτή εξίσωση. Υποθέτουμε επίσης έμμεσα (και δεν είναι ιδιαίτερης σημασίας αυτό) ότι η μεταβλητή  $s$  του μετασχηματισμού Laplace είναι θετική ( $s > 0$ ). Έτσι ισχύουν οι μετασχηματισμοί Laplace (11.5.8). Υπό τις προϋποθέσεις αυτές ισχύουν και οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί Laplace των μετασχηματισμών Laplace (11.5.8), δηλαδή:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}\right\} = \cos \omega_0 t \quad \text{και} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}\right\} = \sin \omega_0 t. \quad (11.5.9)$$

Με βάση τους τύπους αυτούς (11.5.9) είναι πια παιχνιδάκι η αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace (11.5.7) και η εύρεση της άγνωστης συναρτήσεως  $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}$ . Το πρώτο κλάσμα στο δεξιό μέλος δίνει συνημιτονικό όρο ( $\cos \omega_0 t$ ) και το δεύτερο ημιτονικό ( $\sin \omega_0 t$ ). Και τα δύο μαζί δίνουν τη ζητούμενη λύση

$$u(t) = u_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (11.5.10)$$

του παρόντος προβλήματος αρχικών τιμών (11.5.2) και (11.5.3). Πολύ ωραία! Απομένει όμως η επαλήθευση της λύσεως αυτής  $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}$ .

#### A11.5.5. Βήμα 4: Επαλήθευση της λύσεως

Πρώτα οι αρχικές συνθήκες (11.5.3), δηλαδή  $u(0) = u_0$  και  $\dot{u}(0) = v_0$ . Θέτοντας τώρα  $t = 0$  στη λύση  $u(t)$  της αμέσως πιο πάνω σχέσεως (11.5.10), διαπιστώνουμε αμέσως ότι

$$u(0) = u_0 \cdot 1 + \frac{v_0}{\omega_0} \cdot 0 = u_0 + 0 = u_0, \quad (11.5.11)$$

όπως ήταν πραγματικά επιθυμητό για την αρχική θέση  $u(0) = u_0$  του υλικού σημείου.

Συνεχίζουμε τώρα με την αρχική ταχύτητα  $\dot{u}(0) = v_0$ . Παραγωγίζουμε τη λύση μας  $u(t)$  στη σχέση (11.5.10) και βρίσκουμε

$$\dot{u}(t) = -\omega_0 u_0 \sin \omega_0 t + v_0 \cos \omega_0 t. \quad (11.5.12)$$

Επομένως για  $t = 0$

$$\dot{u}(0) = -\omega_0 u_0 \cdot 0 + v_0 \cdot 1 = 0 + v_0 = v_0, \quad (11.5.13)$$

ακριβώς όπως επιθυμούσαμε. Άρα επαληθεύθηκαν και οι δύο αρχικές συνθήκες (11.5.3):  $u(0) = u_0$  και  $\dot{u}(0) = v_0$ .

Δεν τελειώσαμε όμως! Απομένει και η επαλήθευση της ίδιας της διαφορικής εξίσωσης (11.5.2). Την ξαναγράφουμε:

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0. \quad (11.5.14)$$

Είναι διαφορική εξίσωση δεύτερας τάξεως. Άρα χρειαζόμαστε και τη δεύτερη παράγωγο  $\ddot{u}(t)$  της λύσεώς μας  $u(t)$ . Για να την προσδιορίσουμε, παραγωγίζουμε άλλη μια φορά, τώρα την πρώτη παράγωγο της  $\dot{u}(t)$  στη σχέση (11.5.12). Βρίσκουμε αμέσως ότι

$$\ddot{u}(t) = -\omega_0^2 u_0 \cos \omega_0 t - \omega_0 v_0 \sin \omega_0 t = -\omega_0^2 \left( u_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) = -\omega_0^2 u(t). \quad (11.5.15)$$

Επομένως έχουμε

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0 \tag{11.5.16}$$

και η διαφορική μας εξίσωση (11.5.14) στο παρόν μηχανικό σύστημα υλικού σημείου-ελατηρίου (ή μάζας-ελατηρίου) έχει επαληθευθεί και αυτή. Το ίδιο διαπιστώνεται και πιο άμεσα με κατευθείαν αντικατάσταση της λύσεως  $u(t)$ , σχέση (11.5.10), και της δεύτερης παραγώγου της, σχέση (11.5.15) αριστερά, στη διαφορική μας εξίσωση (11.5.2) ή (11.5.14). Είναι πλήρης λοιπόν η επαλήθευση της λύσεως  $u(t)$ . Ισχύει όμως μόνο για  $t \geq 0$ . Δεν ξέρουμε τί ακριβώς συνέβαινε πριν: για  $t < 0$ .

### A11.6. ΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

Συνεχίζουμε και στην ενότητα αυτή με τις ταλαντώσεις σε μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου μάζας  $m$  και ελατηρίου σταθεράς  $k$ . Με τις γνώσεις που αποκτήσαμε στην εφαρμογή της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace στην επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές στις προηγούμενες ενότητες αυτού του κεφαλαίου δεν κρίνεται πια σκόπιμο να χρησιμοποιούμε ιδιαίτερη παράγραφο για κάθε βήμα της μεθόδου. Θα υποθέτουμε επίσης συνεχώς ότι οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί Laplace  $\mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = u(t)$  ορίζονται πάντοτε μονοσήμαντα. Και πραγματικά συμβαίνει αυτό για συνεχείς συναρτήσεις, όπως είναι γενικά οι επαρκώς παραγωγίσιμες λύσεις  $u(t)$  των διαφορικών μας εξισώσεων. Άρα θα ισχύει και η γραμμική ιδιότητα στον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, ακριβώς όπως συμβαίνει έτσι κι αλλιώς στον ευθύ μετασχηματισμό Laplace. Γενικά θα είμαστε έτσι λίγο συντομότεροι στην επίλυση των προβλημάτων μας και σ' αυτήν την ενότητα και στις επόμενες ενότητες.

Στην παρούσα ενότητα υποθέτουμε ξανά ότι δεν υπάρχει αποσβεστήρας, δηλαδή ότι  $c = 0$  ή  $\xi = c/(2m\omega_0) = 0$ . Όμως αντίθετα με την προηγούμενη ενότητα δεχόμαστε την παρουσία φορτίσεως (εξωτερικής δύναμης)  $p(t)$  που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο (εξαναγκασμένες ταλαντώσεις). Στην περίπτωση αυτή (με  $c = 0$ ) η σχετική διαφορική εξίσωση (11.5.1) θα πάρει τη μορφή

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = p(t), \quad t > 0. \tag{11.6.1}$$

Διαιρούμε τώρα και τα δύο μέλη με τη μάζα  $m$  του υλικού σημείου και θέτουμε και πάλι  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  για την ιδιοσυχνότητα ταλαντώσεων του μηχανικού αυτού συστήματος. Ξαναγράφουμε έτσι τη διαφορική αυτή εξίσωση (11.6.1) στη λίγο απλούστερη μορφή της

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = \frac{p(t)}{m} \quad \text{με} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{11.6.2}$$

και με την ανηγμένη (στη μάζα  $m$ ) δύναμη  $p(t)/m$  στο δεξιό μέλος. (Η τάση στα συγγράμματα του Πολιτικού Μηχανικού είναι να μη χρησιμοποιείται ειδικό σύμβολο, π.χ.  $p^*(t)$ , για την ανηγμένη δύναμη: γράφουμε απλά  $p(t)/m$ .) Θεωρούμε επίσης ότι ισχύουν οι αρχικές συνθήκες (11.5.3), δηλαδή ότι  $u(0) = u_0$  (αρχική θέση) και  $\dot{u}(0) = v_0$  (αρχική ταχύτητα) για το υλικό σημείο.

Πρόκειται για τη γραμμική διαφορική εξίσωση (11.5.2) της προηγούμενης ενότητας, αλλά τώρα μη ομογενή: με δεξιό μέλος την ανηγμένη φόρτιση  $p(t)/m$ . Και πάλι θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace για την επίλυσή της θέτοντας ξανά  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  για το μετασχηματισμό Laplace της άγνωστης συναρτήσεως  $u(t)$ . Ανάλογα θέτουμε επίσης  $P(s) = \mathcal{L}\{p(t)\}$  για το μετασχηματισμό Laplace της γνωστής συναρτήσεως (της φορτίσεως)  $p(t)$ .

Υπ' αυτές τις συνθήκες με τη χρήση και του τύπου (11.5.4) για το μετασχηματισμό Laplace της δεύτερης παραγώγου  $\ddot{u}(t)$  (που ενσωματώνει και τις αρχικές συνθήκες  $u_0$  και  $v_0$ ), η διαφορική μας εξίσωση (11.6.2) παίρνει την ακόλουθη μετασχηματισμένη κατά Laplace μορφή:

$$[s^2 U(s) - su_0 - v_0] + \omega_0^2 U(s) = \frac{P(s)}{m}, \quad \text{λίγο απλούστερα} \quad (s^2 + \omega_0^2)U(s) = su_0 + v_0 + \frac{P(s)}{m}. \tag{11.6.3}$$

Καταλήξαμε λοιπόν σε μια γραμμική (πρωτοβάθμια) αλγεβρική εξίσωση. Παρατηρούμε ότι εύλογα η μόνη διαφορά από την αντίστοιχη γραμμική αλγεβρική εξίσωση (11.5.5) της προηγούμενης ενότητας (εκεί όμως χωρίς φόρτιση:  $p(t) = 0$ ) είναι η παρουσία του κλάσματος  $P(s)/m$  στο δεξιό μέλος της εξίσωσης (11.6.3). Τίποτε άλλο!

Λύνουμε ευθύς τη γραμμική (πρωτοβάθμια) αλγεβρική εξίσωση (11.6.3) και βρίσκουμε ότι

$$U(s) = \frac{su_0 + v_0}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{P(s)}{m(s^2 + \omega_0^2)} \quad (11.6.4)$$

στο πεδίο της μεταβλητής  $s$  του μετασχηματισμού Laplace (όχι βέβαια του χρόνου  $t$ !). Παρατηρούμε ξανά την παρουσία του γνωστού μετασχηματισμού Laplace  $P(s) = \mathcal{L}\{p(t)\}$  της φορτίσεως  $p(t)$  στο δεύτερο κλάσμα της λύσεως αυτής. Με κάπως καλύτερη διατύπωση το πρώτο κλάσμα στην ίδια λύση  $U_1(s) = (su_0 + v_0)/(s^2 + \omega_0^2)$  εκφράζει τις αρχικές συνθήκες. Δηλαδή εκφράζει συνοπτικά την «ιστορία» του μηχανικού μας συστήματος μέχρι και τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , που συνοψίζεται στις δύο αρχικές συνθήκες:  $u(0) = u_0$  (αρχική θέση  $u_0$ ) και  $\dot{u}(0) = v_0$  (αρχική ταχύτητα  $v_0$ ). Το ποια ακριβώς φόρτιση επέδρασε στην εμφάνιση των αρχικών αυτών συνθηκών δεν το γνωρίζουμε. Ξέρουμε όμως πάρα πολύ καλά ότι με μηδενικές αρχικές συνθήκες (συνθήκες ηρεμίας) το κλάσμα αυτό  $U_1(s) = (su_0 + v_0)/(s^2 + \omega_0^2)$  θα απουσίαζε από τη λύση  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ .

Από την άλλη πλευρά το δεύτερο κλάσμα  $U_2(s) = P(s)/[m(s^2 + \omega_0^2)]$  στην ίδια λύση (11.6.4) εκφράζει την επιρροή της φορτίσεως  $p(t) = \mathcal{L}^{-1}\{P(s)\}$  που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο τις χρονικές στιγμές  $t \geq 0$ . Προφανώς σε ελεύθερες ταλαντώσεις (ακριβώς όπως είχαμε υποθέσει στην προηγούμενη ενότητα) το κλάσμα αυτό  $U_2(s) = P(s)/[m(s^2 + \omega_0^2)]$  δε θα ήταν παρόν και πραγματικά δεν ήταν στην αντίστοιχη λύση (11.5.6) της προηγούμενης ενότητας.

Προχωράμε τώρα στην αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  της άγνωστης συναρτήσεως  $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}$  της μετατοπίσεως του υλικού σημείου. Παίρνουμε υπόψη μας τη γραμμική ιδιότητα για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace. Ας την επαναλάβουμε:

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1 U_1(s) + c_2 U_2(s)\} = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) \quad \text{με} \quad u_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_1(s)\}, \quad u_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_2(s)\}. \quad (11.6.5)$$

Έχουμε επίσης γνωστό από την προηγούμενη ενότητα, σχέση (11.5.10), τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace  $u_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_1(s)\}$  του πρώτου κλάσματος  $U_1(s) = (su_0 + v_0)/(s^2 + \omega_0^2)$  της πιο πάνω λύσεως (11.6.4)

$$u_1(t) = u_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (11.6.6)$$

(Ο δείκτης 1 στη συνάρτηση αυτή  $u_1(t)$  αφορά στο πρώτο κλάσμα  $U_1(s)$  της λύσεως (11.6.4).)

Απομένει η αντιστροφή του δεύτερου κλάσματος  $U_2(s) = P(s)/[m(s^2 + \omega_0^2)]$  της λύσεως (11.6.4), που αφορά στο μετασχηματισμό Laplace  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ . Το ξαναγράφουμε λίγο καλύτερα

$$U_2(s) = \frac{P(s)}{m(s^2 + \omega_0^2)} = \frac{1}{m\omega_0} P(s) \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}. \quad (11.6.7)$$

Μετά από τη σταθερά  $1/(m\omega_0) = 1/(m\sqrt{k/m}) = 1/\sqrt{km}$  έχουμε το γινόμενο των μετασχηματισμών Laplace

$$P(s) = \mathcal{L}\{p(t)\} \quad \text{και} \quad \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} = \mathcal{L}\{\sin \omega_0 t\} \quad (11.6.8)$$

της φορτίσεως (της εξωτερικής δυνάμεως)  $p(t)$  και της ημιτονικής συναρτήσεως  $\sin \omega_0 t$  αντίστοιχα. (Ο δεύτερος μετασχηματισμός Laplace μας είναι ήδη γνωστός από τη σχέση (11.5.9).)

Έχουμε επομένως το γινόμενο των μετασχηματισμών Laplace των συναρτήσεων  $p(t)$  και  $\sin \omega_0 t$ . Παίρνουμε επίσης υπόψη και το γνωστό μας θεώρημα της συνελιξεως στο μετασχηματισμό Laplace (Ιδιότητα 7, Παράγραφος Α10.3.7 του Κεφαλαίου Α10), το επαναλαμβάνουμε:

$$\mathcal{L}^{-1}\{U_a(s)U_b(s)\} = u_a(t) * u_b(t) = \int_0^t u_a(\tau)u_b(t-\tau) d\tau = \int_0^t u_a(t-\tau)u_b(\tau) d\tau \quad (11.6.9)$$



ασφαλώς με  $U_a(s) = \mathcal{L}\{u_a(t)\}$  και  $U_b(s) = \mathcal{L}\{u_b(t)\}$ . Σημειώνουμε και πάλι την ισχύ της αντιμεταθετικής ιδιότητας στη συνέλιξη:  $u_a(t) * u_b(t) = u_b(t) * u_a(t)$  υπενθυμίζοντας ότι το σύμβολο  $*$  δηλώνει συνέλιξη και όχι πολλαπλασιασμό!

Επομένως ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace  $u_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_2(s)\}$  θα είναι απλά το συνελκτικό ολοκλήρωμα

$$u_2(t) = \frac{1}{m\omega_0} p(t) * \sin \omega_0 t = \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t p(\tau) \sin \omega_0(t - \tau) d\tau \quad (11.6.10)$$

φυσικά εξ ορισμού με  $\sin \omega_0(t - \tau) := \sin[\omega_0(t - \tau)]$ . (Οι αγκύλες εννοούνται σε τέτοιες περιπτώσεις!) Η συνάρτηση αυτή  $u_2(t)$  είναι η λύση του παρόντος προβλήματος εξαναγκασμένων και χωρίς απόσβεση ταλαντώσεων υπό μηδενικές αρχικές συνθήκες:  $u_0 = 0$  και  $\dot{u}(0) = 0$ . Είναι δηλαδή το μέρος  $u_2(t)$  της λύσεως  $u(t)$  που οφείλεται αποκλειστικά στη φόρτιση (εξωτερική δύναμη)  $p(t)$ . Το άλλο μέρος  $u_1(t)$  της λύσεως  $u(t)$  δίνεται από τη σχέση (11.6.6) και αφορά στις αντίστοιχες ελεύθερες ταλαντώσεις φυσικά με αρχικές συνθήκες. (Αλλιώς δε θα υπήρχε κίνηση του υλικού σημείου σε ελεύθερες ταλαντώσεις! Δεν είναι έτσι;)

Άρα έχοντας και μη μηδενικές αρχικές συνθήκες:  $u(0) = u_0$  και  $\dot{u}(0) = v_0$ , αλλά και φόρτιση  $p(t)$  του μηχανικού συστήματος, η πλήρης λύση του προβλήματός μας θα είναι

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = u_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t p(\tau) \sin \omega_0(t - \tau) d\tau. \quad (11.6.11)$$

Προφανώς στη λύση αυτή  $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}$  οι δύο πρώτοι όροι αφορούν στις δύο αρχικές συνθήκες (τις  $u_0$  και  $v_0$  αντίστοιχα), ενώ ο τρίτος όρος (ο όρος με το συνελκτικό ολοκλήρωμα) αφορά στη φόρτιση (στην εξωτερική δύναμη)  $p(t)$ . Κατά συνέπεια με μηδενικές αρχικές συνθήκες απουσιάζουν οι δύο πρώτοι όροι και επανερχόμαστε στη λύση  $u_2(t)$  της σχέσεως (11.6.10). Αφετέρου με μηδενική φόρτιση (εξωτερική δύναμη)  $p(t) = 0$  (ελεύθερες ταλαντώσεις) επανερχόμαστε στη λύση  $u_1(t)$  της σχέσεως (11.6.6), αυτήν που βρήκαμε στην προηγούμενη Ενότητα A11.5.

► **Παρατήρηση A11.3:** Το συνελκτικό ολοκλήρωμα της λύσεως (11.6.10), το οποίο βλέπουμε ότι παρουσιάζεται και στην πλήρη λύση (11.6.11), ονομάζεται **ολοκληρώμα Duhamel**. Επίσης ο σχετικός τύπος (11.6.10) καλείται **ολοκληρωτικός τύπος του Duhamel**. Ο ολοκληρωτικός τύπος του Duhamel είναι πάρα πολύ μεγάλης σημασίας για τον Πολιτικό Μηχανικό στις Ταλαντώσεις και στη Δυναμική των Κατασκευών γενικότερα. Γιατί; Απλά, γιατί επιτρέπει την εύρεση της αποκρίσεως (της εξόδου)  $u(t)$  ενός μηχανικού συστήματος υπό αυθαίρετη (τυχαία) εξωτερική φόρτιση  $p(t)$ . (Αν οι αρχικές συνθήκες δεν είναι μηδενικές, πρέπει να προστεθούν και αυτές στη λύση  $u(t)$ , όπως πραγματικά έχει γίνει στην πλήρη λύση (11.6.11), που περιέχει και αυτή ολοκλήρωμα Duhamel στο δεξιό μέλος της.) Ακόμη και ο Πολιτικός Μηχανικός ο οποίος για κάποιο λόγο δεν έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά (και το μετασχηματισμό Laplace ειδικότερα) μπορεί θαυμάσια να χρησιμοποιεί τον τύπο (11.6.11) (με το ολοκλήρωμα Duhamel ενσωματωμένο σ' αυτόν). Με τον τρόπο αυτό θα μπορεί και αυτός να προσδιορίζει σχετικά εύκολα την απόκριση (έξοδο)  $u(t)$  του μηχανικού του συστήματος (εδώ σε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση) για οποιαδήποτε φόρτιση (εξωτερική δύναμη)  $p(t)$ . Πρέπει απλά να εκτελεί τη σχετική ολοκλήρωση είτε αναλυτικά, αν τούτο είναι εύκολο, είτε αριθμητικά για πολύπλοκες φορτίσεις  $p(t)$ , που συμπεριλαμβάνουν και τις φορτίσεις που προσδιορίζονται πειραματικά μέσω κάποιου κατάλληλου καταγραφικού μηχανήματος. Κατά συνέπεια ο τύπος (11.6.11) (και η ειδική περίπτωση του (11.6.10)) μπορούν να θεωρούνται δεδομένοι, έτοιμοι σαν πολύ χρήσιμοι τύποι για τον Πολιτικό Μηχανικό σε προβλήματα εξαναγκασμένων ταλαντώσεων χωρίς απόσβεση. (Και φυσικά η πρακτική χρήση τους δεν απαιτεί καμία απολύτως γνώση μετασχηματισμών Laplace, μόνο ολοκληρώσεως: (α) αναλυτικής ή (β) εν ανάγκη αριθμητικής.)

Προχωράμε τώρα (στις επόμενες δύο ενότητες) στο ακόμη πιο ενδιαφέρον πρόβλημα των ταλαντώσεων με απόσβεση: (α) ελεύθερες ταλαντώσεις και (β) εξαναγκασμένες ταλαντώσεις

υποθέτοντας όμως ασθενή απόσβεση ( $0 < \xi < 1$  για το λόγο αποσβέσεως  $\xi$ ), όπως πραγματικά συνήθως συμβαίνει στις κατασκευές. Ξανά με την ίδια και ελπίζεται ήδη οικεία μας μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace, που αποδεικνύεται τόσο χρήσιμη σε προβλήματα ταλαντώσεων και μάλλον η πιο αποτελεσματική σε προβλήματα εξαναγκασμένων ταλαντώσεων υπό αυθαίρετη (γενική, τυχαία) φόρτιση  $p(t)$ . Και πάλι θα οδηγηθούμε (στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με φόρτιση  $p(t) \neq 0$ ) σε συνελκτικό ολοκλήρωμα, σε ολοκλήρωμα Duhamel, αλλά τώρα λίγο πιο πολύπλοκο από το ολοκλήρωμα (11.6.10) εξαιτίας του όρου αποσβέσεως. Ας προχωρήσουμε λοιπόν και σ' αυτές τις δύο εφαρμογές του μετασχηματισμού Laplace.

### A11.7. ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΣΘΕΝΗ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

Στην περίπτωση που το μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα που εξετάζουμε έχει και απόσβεση: υλικό σημείο μάζας  $m$ , ελατήριο σταθεράς  $k$  και αποσβεστήρας σταθεράς  $c$ , ισχύει η γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές (11.5.1), δηλαδή η εξίσωση

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t), \quad t > 0. \quad (11.7.1)$$

Χρησιμοποιούμε βέβαια και τα δύο γνωστά μας βοηθητικά σύμβολα

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{και} \quad \xi = \frac{c}{2m\omega_0} = \frac{c}{2m\sqrt{k/m}} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (11.7.2)$$

για την ιδιοσυχνότητα  $\omega_0$  του αντίστοιχου χωρίς απόσβεση μηχανικού συστήματος και το λόγο αποσβέσεως  $\xi$ . Έτσι η διαφορική εξίσωση (11.7.1) μπορεί να γραφεί (μετά από διαίρεσή της δια της μάζας  $m$  του υλικού σημείου) και στην απόλυτα ισοδύναμη μορφή

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0\dot{u}(t) + \omega_0^2u(t) = \frac{p(t)}{m}. \quad (11.7.3)$$

Στην ενότητα αυτή θα περιορισθούμε στις ελεύθερες ταλαντώσεις (που περιλαμβάνουν σαν ειδική περίπτωση και τις ιδιοταλαντώσεις) του μηχανικού συστήματος που εξετάζουμε, θα θεωρήσουμε δηλαδή ότι  $p(t) = 0$ . Έτσι θα έχουμε την αντίστοιχη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0\dot{u}(t) + \omega_0^2u(t) = 0. \quad (11.7.4)$$

Σε σύγκριση με την αντίστοιχη ομογενή διαφορική εξίσωση (11.5.2) της Ενότητας A11.5 απλά υπάρχει τώρα και ο όρος αποσβέσεως  $2\xi\omega_0\dot{u}(t)$ . (Τη μη ομογενή διαφορική εξίσωση (11.7.3) θα τη μελετήσουμε στην επόμενη Ενότητα A11.8.) Περιορίζουμε επίσης την προσοχή μας στην περίπτωση **ασθενούς αποσβέσεως** (ή **υποκρίσιμης αποσβέσεως**) υποθέτοντας ότι  $0 < \xi < 1$ , όπως ήδη αναφέραμε. Θεωρούμε τέλος και τις δύο αρχικές συνθήκες (11.5.3), δηλαδή τις συνθήκες

$$u(0) = u_0 \quad \text{και} \quad \dot{u}(0) = v_0. \quad (11.7.5)$$

Για την επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών (11.7.4) (διαφορική εξίσωση) και (11.7.5) (αρχικές συνθήκες) θα δουλέψουμε ακριβώς όπως και στην Ενότητα A11.5. Έτσι θα χρησιμοποιήσουμε και εδώ τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Θέτοντας  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ , θα έχουμε επίσης

$$\mathcal{L}\{\dot{u}(t)\} = sU(s) - u_0, \quad (11.7.6)$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{u}(t)\} = s^2U(s) - su_0 - v_0 \quad (11.7.7)$$

λόγω και των αρχικών συνθηκών (11.7.5). (Η σχέση (11.7.7) συμπίπτει προφανώς με την αντίστοιχη σχέση (11.5.4) στην Ενότητα A11.5. Εκεί όμως δεν είχαμε απόσβεση:  $c = 0$ , άρα και  $\xi = 0$ .)

Με τη χρήση αυτών των μετασχηματισμών Laplace η διαφορική μας εξίσωση (11.7.4) παίρνει την ακόλουθη μετασχηματισμένη κατά Laplace μορφή:

$$[s^2 U(s) - su_0 - v_0] + 2\xi\omega_0[sU(s) - u_0] + \omega_0^2 U(s) = 0 \quad (11.7.8)$$

και απλούστερα

$$(s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2)U(s) = su_0 + v_0 + 2\xi\omega_0 u_0. \quad (11.7.9)$$

Προφανώς πρόκειται για μια γραμμική (πρωτοβάθμια) αλγεβρική εξίσωση ως προς τον άγνωστο μετασχηματισμό Laplace  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  με λύση

$$U(s) = \frac{su_0 + v_0 + 2\xi\omega_0 u_0}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}. \quad (11.7.10)$$

Πρέπει τώρα να προχωρήσουμε στην αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace  $U(s)$  της λύσεως  $u(t)$  της διαφορικής μας εξισώσεως (11.7.4). Προς το σκοπό αυτό ξαναγράφουμε τον ίδιο μετασχηματισμό Laplace  $U(s)$  στη μορφή

$$U(s) = \frac{su_0 + v_0 + 2\xi\omega_0 u_0}{(s + \xi\omega_0)^2 - \xi^2\omega_0^2 + \omega_0^2} = \frac{(s + \xi\omega_0)u_0 + (v_0 + \xi\omega_0 u_0)}{(s + \xi\omega_0)^2 + \omega_D^2(1 - \xi^2)}. \quad (11.7.11)$$

Στη συνέχεια είναι σκόπιμο να εισαγάγουμε και την **κυκλική συχνότητα ελεύθερων ταλαντώσεων με απόσβεση**

$$\omega_D = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}, \quad \text{οπότε} \quad \omega_D^2 = \omega_0^2(1 - \xi^2), \quad (11.7.12)$$

στο παρόν μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα με ασθενή (ή υποκρίσιμη) απόσβεση,  $0 < \xi < 1$ , που εξετάζουμε. Τελικά μπορούμε να διασπάσουμε το τελευταίο κλάσμα στη λύση μας αυτή  $U(s)$  σε δύο κλάσματα ως εξής:

$$U(s) = \frac{(s + \xi\omega_0)u_0 + (v_0 + \xi\omega_0 u_0)}{(s + \xi\omega_0)^2 + \omega_D^2} = u_0 \frac{s + \xi\omega_0}{(s + \xi\omega_0)^2 + \omega_D^2} + (v_0 + \xi\omega_0 u_0) \frac{1}{(s + \xi\omega_0)^2 + \omega_D^2}. \quad (11.7.13)$$

Δε μένει τώρα παρά να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους (10.3.46) της Παραγράφου A10.3.3. Τους υπενθυμίζουμε, εδώ μάλιστα με  $\omega_D$  αντί για  $\omega$ :

$$\mathcal{L}\{e^{-at} \cos \omega_D t\} = \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega_D^2}, \quad \mathcal{L}\{e^{-at} \sin \omega_D t\} = \frac{\omega_D}{(s + a)^2 + \omega_D^2}. \quad (11.7.14)$$

Τώρα θέτουμε  $a = \xi\omega_0$  στους τύπους αυτούς και τους αντιστρέφουμε, οπότε

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s + \xi\omega_0}{(s + \xi\omega_0)^2 + \omega_D^2}\right\} = e^{-\xi\omega_0 t} \cos \omega_D t, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + \xi\omega_0)^2 + \omega_D^2}\right\} = \frac{1}{\omega_D} e^{-\xi\omega_0 t} \sin \omega_D t. \quad (11.7.15)$$

Επομένως η πιο πάνω λύση μας  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  (στο πεδίο της μεταβλητής  $s$  του μετασχηματισμού Laplace) αντιστρέφεται εύκολα και αυτή κατά Laplace και μας δίνει

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = u_0 e^{-\xi\omega_0 t} \cos \omega_D t + \frac{v_0 + \xi\omega_0 u_0}{\omega_D} e^{-\xi\omega_0 t} \sin \omega_D t. \quad (11.7.16)$$

Πρόκειται για ταλαντώσεις με απόσβεση και με (κυκλική) συχνότητα  $\omega_D = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$  (όχι  $\omega_0!$ ).

Αυτή είναι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (11.7.4) και (11.7.5). (Η επαλήθευσή της είναι αρκετά απλή και θα την παραλείψουμε.) Ας σημειώσουμε πάντως ότι στην ειδική περίπτωση της ελλείψεως αποσβέσεως ( $\xi = 0$ , οπότε και  $\omega_D = \omega_0$ ) η λύση αυτή (11.7.16) μεταπίπτει στη λύση (11.5.10) της Ενότητας A11.5 για τις ελεύθερες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση (με  $\xi = 0$ ), δηλαδή στη λύση

$$u(t) = u_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (11.7.17)$$

Στην περίπτωση που δε διαθέτουμε τις δύο αρχικές συνθήκες (11.7.5) οι ποσότητες  $u_0$  και  $v_0$  στην παραπάνω λύση  $u(t)$ , σχέση (11.7.16), μπορούν να θεωρηθούν αυθαίρετες σταθερές. Με τον τρόπο αυτό παίρνουμε τη γενική λύση  $u_g(t)$  της διαφορικής εξίσωσης (11.7.4) (χωρίς αρχικές συνθήκες). Είναι όμως λίγο καλύτερο στην περίπτωση αυτή να θέσουμε

$$A = u_0 \quad \text{και} \quad B = \frac{v_0 + \xi\omega_0 u_0}{\omega_D} \quad (11.7.18)$$

και να γράψουμε την ίδια γενική λύση  $u_g(t)$  στην απλούστερη μορφή

$$u_g(t) = Ae^{-\xi\omega_0 t} \cos \omega_D t + Be^{-\xi\omega_0 t} \sin \omega_D t \quad \text{ή} \quad u_g(t) = e^{-\xi\omega_0 t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) \quad (11.7.19)$$

με τα  $A$  και  $B$  αυθαίρετες σταθερές.

Προχωράμε τώρα στις γενικότερες εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με ασθενή (ή υποκρίσιμη) απόσβεση ( $0 < \xi < 1$ ) γενικεύοντας τα αποτελέσματα της Ενότητας A11.6, εκεί όμως για το χωρίς απόσβεση (χωρίς αποσβεστήρα, με  $\xi = 0$ ) μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα.

### A11.8. ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΣΘΕΝΗ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

Στην ενότητα αυτή θα επιλύσουμε τη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (11.7.3), την επαναλαμβάνουμε

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0 \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = \frac{p(t)}{m} \quad (11.8.1)$$

υποθέτοντας πάλι ότι  $0 < \xi < 1$ : ασθενής (ή υποκρίσιμη) απόσβεση, όπως γενικά έχει ο Πολιτικός Μηχανικός στις κατασκευές του. Χάριν απλότητας, σαν αρχικές συνθήκες θα θεωρήσουμε εδώ τις μηδενικές αρχικές συνθήκες

$$u(0) = \dot{u}(0) = 0 \quad \text{και} \quad \dot{u}(0) = v_0 = 0, \quad (11.8.2)$$

δηλαδή μηδενική αρχική θέση και μηδενική αρχική ταχύτητα αντίστοιχα. Θα γενικεύσουμε έτσι τα αποτελέσματα της Ενότητας A11.6 από εξαναγκασμένες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση σε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με ασθενή απόσβεση, εδώ όμως με μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace με  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ : άγνωστος μετασχηματισμός Laplace, και  $P(s) = \mathcal{L}\{p(t)\}$ : γνωστός μετασχηματισμός Laplace, μια και η φόρτιση  $p(t)$  που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο είναι γνωστή. Θα λάβουμε επίσης υπόψη μας και τους σχετικούς τύπους (11.7.6) και (11.7.7) για τους μετασχηματισμούς Laplace των δύο πρώτων παραγώγων  $\dot{u}(t)$  και  $\ddot{u}(t)$  της άγνωστης συναρτήσεως  $u(t)$ , εδώ όμως με μηδενικές αρχικές συνθήκες. Έτσι θα έχουμε απλά

$$\mathcal{L}\{\dot{u}(t)\} = sU(s), \quad \mathcal{L}\{\ddot{u}(t)\} = s^2U(s). \quad (11.8.3)$$

Με τον τρόπο αυτό η γραμμική διαφορική μας εξίσωση (11.8.1) των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων με ασθενή απόσβεση ( $0 < \xi < 1$ ) μετασχηματίζεται κατά Laplace ως εξής:

$$s^2U(s) + 2\xi\omega_0 sU(s) + \omega_0^2 U(s) = \frac{P(s)}{m} \quad \text{και λίγο απλούστερα} \quad (s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2)U(s) = \frac{P(s)}{m}. \quad (11.8.4)$$

Η εξίσωση αυτή είναι μια πρωτοβάθμια αλγεβρική εξίσωση ως προς τον άγνωστο μετασχηματισμό Laplace  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ . Τη λύνουμε πολύ εύκολα και βρίσκουμε ότι

$$U(s) = \frac{P(s)}{m[s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2]} = \frac{P(s)}{m[(s + \xi\omega_0)^2 + \omega_D^2]} = P(s) \frac{1}{m[(s + \xi\omega_0)^2 + \omega_D^2]}, \quad (11.8.5)$$

αφού  $\omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$ , όπως ήδη ορίσαμε την κυκλική συχνότητα ελεύθερων ταλαντώσεων με απόσβεση  $\omega_D$  στη σχέση (11.7.12).

Είναι πια σαφές ότι έχουμε το γινόμενο των μετασχηματισμών Laplace  $P(s) = \mathcal{L}\{p(t)\}$  και

$$G(s) = \frac{1}{m[(s + \xi\omega_0)^2 + \omega_D^2]} \quad (11.8.6)$$

Η συνάρτηση αυτή  $G(s)$  που ορίστηκε αμέσως πιο πάνω είναι η καλούμενη **συνάρτηση μεταφοράς** του μονοβάθμιου μηχανικού μας συστήματος, δηλαδή

$$U(s) = P(s)G(s) = G(s)P(s) \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad G(s) = \frac{U(s)}{P(s)} \quad (11.8.7)$$

Είναι δηλαδή το πηλίκο των μετασχηματισμών Laplace της εξόδου (της αποκρίσεως, εδώ της μετατοπίσεως του υλικού σημείου)  $U(s)$  και της εισόδου (της διεγέρσεως, της φορτίσεως)  $P(s)$  στο μηχανικό μας σύστημα, εννοείται όμως στο πεδίο της βοηθητικής μεταβλητής  $s$  του μετασχηματισμού Laplace. Εδώ βέβαια η είσοδος οφείλεται στη φόρτιση (την εξωτερική δύναμη)  $p(t)$ , ενώ η έξοδος είναι απλά η μετατόπιση του υλικού σημείου (της μάζας  $m$ ) από τη θέση ισορροπίας του.

Αφού  $U(s) = P(s)G(s) = G(s)P(s)$ , είναι πια προφανές ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace  $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}$ , δηλαδή η άγνωστη μετατόπιση του υλικού σημείου (της μάζας  $m$ ), βρίσκεται εύκολα με τη χρήση του γνωστού μας θεωρήματος της συνελίξεως στο μετασχηματισμό Laplace (Ιδιότητα 7, Παράγραφος A10.3.7). Έτσι επιστρέφοντας στο πεδίο του χρόνου  $t$ , έχουμε

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = p(t) * g(t) = \int_0^t p(\tau)g(t - \tau) d\tau \quad (11.8.8)$$

(Υπενθυμίζεται ότι η συνελίξη δηλώνεται με το σύμβολο  $*$ .) Φυσικά στην πιο πάνω σχέση έχουμε

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{m[(s + \xi\omega_0)^2 + \omega_D^2]}\right\} = \frac{1}{m} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + \xi\omega_0)^2 + \omega_D^2}\right\} \quad (11.8.9)$$

Τώρα πια δεν απομένει παρά να πάρουμε υπόψη μας το δεύτερο τύπο (11.7.15) για το σχετικό αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace. Έτσι έχουμε τελικά

$$g(t) = \frac{1}{m\omega_D} e^{-\xi\omega_0 t} \sin \omega_D t \quad (11.8.10)$$

Η συνάρτηση αυτή  $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$  καλείται **ωστική απόκριση** (ή εναλλακτικά **κρουστική απόκριση**) του μηχανικού μας συστήματος. Αντικαθιστώντας την στη λύση που βρήκαμε, δηλαδή στο συνελικτικό ολοκλήρωμα (11.8.8), παίρνουμε το τελικό μας αποτέλεσμα

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin \omega_D(t - \tau) d\tau \quad (11.8.11)$$

για τη μετατόπιση  $u(t)$  του υλικού σημείου σε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με ασθενή απόσβεση υπό μηδενικές αρχικές συνθήκες:  $u(0) = u_0 = 0$  και  $\dot{u}(0) = v_0 = 0$ . Ο τόσο σημαντικός αυτός τύπος καλείται **ολοκληρωτικός τύπος του Duhamel** (ή απλούστερα **ολοκλήρωμα Duhamel**) στο παρόν πρόβλημα. Το πρακτικό ενδιαφέρον του οφείλεται κυρίως στο γεγονός ότι επιτρέπει τον προσδιορισμό της μετατοπίσεως  $u(t)$  για κάθε φόρτιση (εξωτερική δύναμη)  $p(t)$  που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο απλά με μια ολοκλήρωση: (α) αναλυτική (εφόσον είναι δυνατή!) ή (β) αριθμητική.

Φυσικά στην ειδική περίπτωση ελλείψεως αποσβέσεως στις παρούσες εξαναγκασμένες ταλαντώσεις ( $\xi = 0$ ) ο πιο πάνω ολοκληρωτικός τύπος του Duhamel μεταπίπτει στον αντίστοιχο ολοκληρωτικό τύπο (11.6.10) της Ενότητας A11.6, δηλαδή στο ολοκλήρωμα Duhamel

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t p(\tau) \sin \omega_0(t - \tau) d\tau \quad (11.8.12)$$

Προφανώς όλα αυτά τα αποτελέσματα γενικεύονται ανάλογα και στην περίπτωση της ισχυρής αποσβέσεως (με  $\xi > 1$ ), εκεί όμως με την εμφάνιση υπερβολικών συναρτήσεων ( $\cosh$  και  $\sinh$ ) αντί τριγωνομετρικών ( $\cos$  και  $\sin$ ). Θεωρείται βέβαια σχεδόν αυτονόητο ότι δεν παρουσιάζονται

ταλαντώσεις στην περίπτωση της ισχυρής αποσβέσεως (με  $\xi > 1$ ). Ούτε και στην περίπτωση της κρίσιμης αποσβέσεως (ακριβώς με  $\xi = 1$ ).

## A11.9. ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ

### A11.9.1. Το φυσικό πρόβλημα του συντονισμού σε μηχανικό σύστημα

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε σύντομα με το πρόβλημα του **συντονισμού** σε ένα κλασικό μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου (μάζας  $m$ ) και ελατηρίου (σταθεράς  $k$ ) χωρίς απόσβεση (με  $c = 0$ , άρα και με  $\xi = 0$ ). Το μηχανικό αυτό σύστημα έχει φυσικά την (κυκλική) ιδιοσυχνότητά του  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ . Σ' αυτήν έχουμε ήδη αναφερθεί στη σχέση (11.5.2) και μετά. Συντονισμός παρουσιάζεται στην περίπτωση εκείνη όπου έχουμε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις στο μηχανικό αυτό σύστημα που προκαλούνται από μια φόρτιση (εξωτερική δύναμη)  $p(t)$  που περιλαμβάνει και συνιστώσα με (κυκλική) συχνότητα ακριβώς  $\omega_0$ , δηλαδή εκείνη του μηχανικού συστήματος. Στην ενότητα αυτή θα περιορισθούμε στην απλή συνημιτονική εξωτερική φόρτιση

$$p(t) = p_0 \cos \omega_0 t, \quad \text{επαναλαμβάνουμε με } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (11.9.1)$$

και με το  $p_0$  γνωστή σταθερά. Ανάλογα θα μπορούσαμε να είχαμε και γενικότερες φορτίσεις, π.χ. τη φόρτιση  $p(t) = p_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$  (με το  $\alpha$  γνωστή σταθερά: γωνία φάσεως) και ακόμη πιο γενικές φορτίσεις που να περιλαμβάνουν όμως την ιδιοσυχνότητα  $\omega_0$  σε έναν τουλάχιστον όρο τους.

Υπενθυμίζουμε επίσης τη σχετική διαφορική εξίσωση (11.6.2), εδώ όμως για την παραπάνω φόρτιση  $p(t) = p_0 \cos \omega_0 t$ , και τις δύο σχετικές αρχικές συνθήκες (11.5.3):

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = \frac{p_0}{m} \cos \omega_0 t, \quad u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0. \quad (11.9.2)$$

Φυσικά άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) είναι η μετατόπιση  $u(t)$  του υλικού σημείου (της μάζας  $m$ ) και ανεξάρτητη μεταβλητή ο χρόνος  $t$ . Έχουμε έτσι θέσει ένα απλό πρόβλημα αρχικών τιμών: μία διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως και δύο αρχικές συνθήκες που τη συνοδεύουν.

Ο λόγος που αφιερώνουμε την ενότητα αυτή στο πρόβλημα αρχικών τιμών (11.9.2) είναι απλά ότι η συγκυρία της παρουσίας της ίδιας ακριβώς συχνότητας  $\omega_0$  τόσο στο μηχανικό σύστημα (με ιδιοσυχνότητα  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ) όσο και στη φόρτισή του  $p(t) = p_0 \cos \omega_0 t$  θα προκαλέει ταλαντώσεις ολοένα αυξανόμενου εύρους (γραμμικά όμως!) σμε το χρόνο  $t$ . (Αυτό θα το διαπιστώσουμε αναλυτικά πιο κάτω.) Οι ταλαντώσεις αυτές μπορεί να οδηγήσουν τελικά το μηχανικό μας σύστημα σε πολύ δυσάρεστα φαινόμενα αστοχίας και καταστροφής.

Ας μην ξεχνάμε επίσης ότι μπορεί να αναφερόμαστε όχι μόνο σε ένα κοινό σύστημα υλικού σημείου-ελατηρίου, αλλά και σε μια απλή κατασκευή ή/και σε μια πιο σύνθετη κατασκευή, όπως είναι ένα αληθινό κτίριο. (Εκεί βέβαια με γενίκευση των αποτελεσμάτων της ενότητας αυτής.) Για το λόγο αυτό ο συντονισμός είναι ένα γενικά δυσάρεστο και απευκταίο φαινόμενο στις κατασκευές. Για την αποφυγή του ο Πολιτικός Μηχανικός θα πρέπει να είναι πλήρως ενημερωμένος, έτσι ώστε να μπορεί κατά το δυνατόν να το αποτρέπει ήδη από την αρχική μελέτη της κατασκευής.

Στην ενότητα αυτή θα περιορισθούμε στο πιο πάνω απλό πρόβλημα αρχικών τιμών (11.9.2), που οδηγεί σε φαινόμενο συντονισμού. Το φαινόμενο αυτό οφείλεται από φυσικής απόψεως στην ενέργεια που παραχωρεί («εισάγει») συνεχώς η εξωτερική φόρτιση  $p(t) = p_0 \cos \omega_0 t$  στο μηχανικό σύστημα. Η φόρτιση αυτή είναι εδώ «συντονισμένη» με το μηχανικό σύστημα έχοντας την ίδια ακριβώς συχνότητα  $\omega_0$ : την ιδιοσυχνότητα του μηχανικού συστήματος. Το φαινόμενο αυτό του συντονισμού θα το εξετάσουμε εδώ μόνο μαθηματικά με δύο μεθόδους: (α) Πρώτα με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace με κατευθείαν χρήση της στο πρόβλημα αρχικών τιμών (11.9.2) και (β) Στη συνέχεια με την άμεση χρήση του ολοκληρωτικού τύπου του Duhamel (11.6.11), εδώ βέβαια με φόρτιση (εξωτερική δύναμη)  $p(t) = p_0 \cos \omega_0 t$ , η οποία ασκείται πάνω στο υλικό σημείο.

Τον ολοκληρωτικό τύπο του Duhamel το βασίσαμε σ' αυτό το κεφάλαιο στη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace τόσο (α) για εξαναγκασμένες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση ( $\xi = 0$ ): Ενότητα A11.6, όσο και (β) για εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με ασθενή απόσβεση ( $0 < \xi < 1$ ): προηγούμενη Ενότητα A11.8. Εντούτοις είναι διαθέσιμη και εναλλακτική δυνατότητα ευρέσεώς του με τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων. Υπάρχει ασφαλώς και η εύχρηστη δυνατότητα της φυσικής ευρέσεως και ερμηνείας του. Η δυνατότητα αυτή είναι πολύ συνηθισμένη σε βιβλία Δυναμικής των Κατασκευών και ουσιαστικά επαρκής σε τεχνικά προβλήματα. Εντούτοις είναι μάλλον ανεπαρκής για το μάθημα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών II. Το μάθημα αυτό προφανώς έχει διαφορετικούς στόχους και επιδιώκει να προσφέρει διαφορετικές, εναλλακτικές δυνατότητες (περισσότερο μαθηματικές και πολύ λιγότερο φυσικές!) στον Πολιτικό Μηχανικό.

**A11.9.2. Επίλυση με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace**

Καταρχήν πρέπει να μετασχηματίσουμε κατά Laplace τη γραμμική διαφορική εξίσωση (11.9.2). Με το γνωστό πια συμβολισμό  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  έχουμε για τη δεύτερη παράγωγο  $\ddot{u}(t)$

$$\mathcal{L}\{\ddot{u}(t)\} = s^2U(s) - su_0 - v_0 \tag{11.9.3}$$

έχοντας λάβει υπόψη και τις αρχικές συνθήκες  $u(0) = u_0$  και  $\dot{u}(0) = v_0$  στο πρόβλημα αρχικών τιμών (11.9.2). Πρόκειται για την ίδια ακριβώς σχέση (11.5.4) της Ενότητας A11.5. Γνωρίζουμε επίσης από τον πρώτο τύπο (10.3.31), εδώ όμως με  $\omega = \omega_0$ , ότι

$$\mathcal{L}\{\cos \omega_0 t\} = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \tag{11.9.4}$$

Με βάση τους δύο αυτούς τύπους μετασχηματισμού Laplace (11.9.3) και (11.9.4) η γραμμική διαφορική εξίσωση (11.9.2) μπορεί εύκολα να μετασχηματισθεί ολόκληρη (και στα δύο μέλη της) κατά Laplace. Επειδή μάλιστα ισχύει η γραμμική ιδιότητα στο μετασχηματισμό Laplace, προκύπτει ευθύς η πρωτοβάθμια αλγεβρική εξίσωση

$$[s^2U(s) - su_0 - v_0] + \omega_0^2 U(s) = \frac{p_0}{m} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \tag{11.9.5}$$

Αυτή γράφεται και στη λίγο απλούστερη μορφή

$$(s^2 + \omega_0^2)U(s) = su_0 + v_0 + \frac{p_0}{m} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \tag{11.9.6}$$

Τη λύνουμε αμέσως ως προς  $U(s)$  βρίσκοντας

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{su_0 + v_0}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{p_0}{m} \frac{s}{(s^2 + \omega_0^2)^2} \tag{11.9.7}$$

Μένει η αντιστροφή του μετασχηματισμού αυτού Laplace (11.9.7) προς εύρεση της ζητούμενης λύσεως  $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}$  του παρόντος πρόβληματος αρχικών τιμών (11.9.2). Για τον πρώτο όρο

$$U_1(s) = \frac{su_0 + v_0}{s^2 + \omega_0^2} \tag{11.9.8}$$

στη λύση αυτή  $U(s)$  ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace είναι γνωστός από τη σχέση (11.5.10) στις ελεύθερες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση. Επαναλαμβάνουμε τη σχέση αυτή, εδώ σαν  $u_1(t)$

$$u_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_1(s)\} = u_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \tag{11.9.9}$$

Αυτό που παρουσιάζει ιδιαιτερότητα στον παρόν πρόβλημα είναι ο δεύτερος όρος

$$U_2(s) = \frac{p_0}{m} \frac{s}{(s^2 + \omega_0^2)^2} \tag{11.9.10}$$

την πιο πάνω λύση (11.9.7):  $U(s) = U_1(s) + U_2(s)$ . Η ιδιαιτερότητα του όρου αυτού συνίσταται απλά στο γεγονός ότι η έκφραση  $s^2 + \omega_0^2$  στον παρονομαστή του δεύτερου κλάσματός του είναι υψωμένη στο τετράγωνο:  $(s^2 + \omega_0^2)^2$ . Αυτό το τετράγωνο σ' αυτόν τον παρονομαστή είναι που μας προκαλεί, δυστυχώς, το φαινόμενο του συντονισμού!

Πραγματικά, γνωρίζουμε με βάση την Ιδιότητα 6 (Παράγραφος Α10.3.6) στο μετασχηματισμό Laplace για την παράγωγο  $U'(s)$  ενός μετασχηματισμού Laplace  $U(s)$  ότι ισχύει ο τύπος (10.3.93)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}\right\} = \frac{1}{2\omega} t \sin \omega t. \quad (11.9.11)$$

Άρα ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace  $u_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_2(s)\}$  του πιο πάνω όρου  $U_2(s)$  θα είναι

$$u_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_2(s)\} = \frac{\rho_0}{m} \frac{1}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t, \quad (11.9.12)$$

εδώ βέβαια με  $\omega_0$  αντί για  $\omega$  για την κυκλική συχνότητα στον πιο πάνω τύπο (11.9.12).

Αθροίζουμε τώρα τους δύο αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace: (α)  $u_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_1(s)\}$  και (β)  $u_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_2(s)\}$ , που ήδη διαθέτουμε στις σχέσεις (11.9.9) και (11.9.12) αντίστοιχα. Έτσι έχουμε τον πλήρη αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της λύσεως  $U(s)$ : σχέση (11.9.7)

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = u_1(t) + u_2(t) = u_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{\rho_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t. \quad (11.9.13)$$

### Α11.9.3. Επαλήθευση της λύσεως

Στο σημείο αυτό είναι σκόπιμο να επαληθεύσουμε την πιο πάνω λύση (11.9.13) ως προς το πρόβλημα αρχικών τιμών (11.9.2) που επιλύσαμε. Πρώτα οι αρχικές συνθήκες, που είναι και πιο εύκολες. Θέτοντας απλά  $t = 0$  στη λύση αυτή  $u(t)$ , διαπιστώνουμε αμέσως ότι  $u(0) = u_0$ . Παραγωγίζουμε τώρα την ίδια λύση (11.9.13) και παίρνουμε

$$\dot{u}(t) = -\omega_0 u_0 \sin \omega_0 t + v_0 \cos \omega_0 t + \frac{\rho_0}{2m\omega_0} (\sin \omega_0 t + \omega_0 t \cos \omega_0 t). \quad (11.9.14)$$

Από την πρώτη αυτή παράγωγο  $\dot{u}(t)$ , που δεν είναι τίποτε άλλο παρά η ταχύτητα  $v(t) = \dot{u}(t)$  του υλικού σημείου, συνάγουμε εύκολα ότι

$$\dot{u}(0) = v(0) = v_0. \quad (11.9.15)$$

Πάνε λοιπόν, επαληθεύθηκαν και οι δύο αρχικές συνθήκες:  $u(0) = u_0$  και  $\dot{u}(0) = v_0$ . Παρακάτω!

Παρακάτω έχουμε βέβαια πρώτα το καθήκον άλλης μιας παραγωγίσεως, τώρα της πρώτης παραγωγού  $\dot{u}(t)$  στη σχέση (11.9.14). Αρκετά εύκολα (με παραγωγίσεις ρουτίνας!) υπολογίζουμε και την παράγωγο αυτή: τη δεύτερη παράγωγο  $\ddot{u}(t)$  της λύσεως  $u(t)$  στη σχέση (11.9.13):

$$\ddot{u}(t) = -\omega_0^2 u_0 \cos \omega_0 t - \omega_0 v_0 \sin \omega_0 t + \frac{\rho_0}{2m\omega_0} (2\omega_0 \cos \omega_0 t - \omega_0^2 t \sin \omega_0 t). \quad (11.9.16)$$

Τώρα κάνουμε μια απλή αντικατάσταση της λύσεως  $u(t)$ , σχέση (11.9.13), και της δεύτερης παραγωγού της  $\ddot{u}(t)$  (της επιταχύνσεως  $a(t) = \ddot{u}(t)$  του υλικού σημείου), σχέση (11.9.16), που μόλις βρήκαμε, στη διαφορική εξίσωσή μας (11.9.2) μαζί με άμεσες απλοποιήσεις στο αριστερό μέλος της. Με τον τρόπο αυτό καταλήγουμε στη σχέση

$$\frac{\rho_0}{m} \cos \omega_0 t = \frac{\rho_0}{m} \cos \omega_0 t \implies 0 = 0. \quad (11.9.17)$$

Πρόκειται για μια ταυτότητα (προφανώς ισχύει για κάθε τιμή του χρόνου  $t$ ), που μας εξασφαλίζει την πλήρωση της διαφορικής εξίσωσης (11.9.2) για κάθε τιμή του χρόνου  $t$ , αν και η διαφορική αυτή εξίσωση έχει φυσική έννοια μόνο για  $t > 0$ .



Έχουμε λοιπόν επαληθεύσει και τη διαφορική εξίσωση, αλλά και τις δύο αρχικές συνθήκες στο πρόβλημα αρχικών τιμών (11.9.2). Επομένως η λύση  $u(t)$  που βρέθηκε στη σχέση (11.9.13) είναι η λύση του προβλήματος αυτού, αφού ένα πρόβλημα αρχικών τιμών που αποτελείται από μία γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως και δύο αρχικές συνθήκες έχει μία και μόνο μία λύση. Αλίμονο μάλιστα, αν είχε περισσότερες λύσεις ή αντίθετα καμία λύση! Δε θα ανταποκρινόταν τότε σαν κατάλληλη μαθηματική μοντελοποίηση του φυσικού προβλήματος υλικού σημείου-ελατηρίου (απλούστερα μάζας-ελατηρίου) που εξετάζουμε.

Από την άλλη πλευρά, εάν είχαμε μόνο τη διαφορική εξίσωση (11.9.2) χωρίς καθόλου αρχικές συνθήκες, πάλι η λύση (11.9.13) ισχύει, ασφαλώς ισχύει, είναι απόλυτα σωστή, αλλά τώρα σαν γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως (11.9.2) με δύο αυθαίρετες σταθερές: τις  $u_0$  και  $v_0$ . Αν δεν μας αρέσουν αυτά τα σύμβολα για τις αυθαίρετες σταθερές, έχουμε βέβαια το δικαίωμα να τα αλλάξουμε, π.χ. σε  $C_1$  και  $C_2$  (ή καλύτερα σε  $C_1 = u_0$  και  $C_2 = v_0/\omega_0$ ). Γιατί να το κάνουμε όμως, όταν δεν υπάρχει κάποιος ιδιαίτερα σοβαρός λόγος; Μάλιστα τα σύμβολα  $u_0$  και  $v_0$  ακόμη και σαν αυθαίρετες σταθερές μας θυμίζουν ότι  $u(0) = u_0$  και  $\dot{u}(0) = v_0$  στη λύση μας (11.9.13). Μπορούμε λοιπόν να κρατήσουμε τα σύμβολα αυτά  $u_0$  και  $v_0$  και στη γενική λύση: στην ίδια λύση (11.9.13).

#### A11.9.4. Σχόλια για τη λύση και το φαινόμενο του συντονισμού

Οι δύο πρώτοι όροι  $u_0 \cos \omega_0 t$  και  $(v_0/\omega_0) \sin \omega_0 t$  στη λύση αυτή  $u(t)$  αντιστοιχούν στις δύο αρχικές συνθήκες  $u_0$  και  $v_0$  και εκφράζουν συνήθεις ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση στην ίδια λύση. Ο τρίτος όρος όμως  $[p_0/(2m\omega_0)]t \sin \omega_0 t$  προκαλεί το **συντονισμό**. Γιατί; Γιατί ο όρος αυτός ναι μεν είναι τριγωνομετρικός ( $\sin \omega_0 t$ ), αλλά έχει γραμμικά αυξανόμενο με το χρόνο εύρος  $p_0 t/(2m\omega_0)$ . Δηλαδή οι ταλαντώσεις του υλικού σημείου που οφείλονται στον όρο αυτό όλο και μεγαλώνουν ως προς το εύρος τους, καθώς περνάει ο χρόνος  $t$ . Και πού βρίσκεται η σχετική ενέργεια που απαιτείται για την αύξηση αυτή του εύρους; Μα φυσικά από τη φόρτισή μας (την εξωτερική δύναμη)  $p(t) = p_0 \cos \omega_0 t$ , την οποία υποθέσαμε στην πρώτη σχέση (11.9.1) αυτής της ενότητας.

Και μετά; Μετά με την αύξηση του εύρους  $p_0 t/(2m\omega_0)$  προς το άπειρο για  $t \rightarrow \infty$  μπορεί να βλαφθεί το μηχανικό μας σύστημα μάζας-ελατηρίου, π.χ. να περιέλθει σε κατάσταση πλαστικότητας, διαρροής ή και να σπάσει το ελατήριο. Ακόμη χειρότερα βέβαια, εάν είχαμε ένα αληθινό απλό κτίριο, όπου και εκεί μπορεί να παρουσιασθεί φαινόμενο συντονισμού, π.χ. από ένα σεισμικό φαινόμενο σαν φόρτισή του. Ή σε μια γέφυρα που διέρχονται οχήματα με ιδιοσυχνότητα (μεταξύ άλλων ιδιοσυχνοτήτων)  $\omega_0$  ίδια με την ιδιοσυχνότητα της γέφυρας. Ή σε έναν πύργο ελέγχου αεροδρομίου, όταν η ιδιοσυχνότητά του  $\omega_0$  συμπεριλαμβάνεται στις ιδιοσυχνότητες των αεροπλάνων που προσγειώνονται ή απογειώνονται. Για τους λόγους αυτούς το πιο πάνω φαινόμενο το συντονισμού είναι πολύ επικίνδυνο στις κατασκευές και πρέπει πάση θυσία να αποφεύγεται στη μελέτη της κατασκευής από το μελετητή Πολιτικό Μηχανικό.

Ας σημειώσουμε τέλος ότι η πιο πάνω λύση (11.9.13) υπό μηδενικές αρχικές συνθήκες (συνθήκες απόλυτης ηρεμίας), δηλαδή με  $u_0 = v_0 = 0$ , παίρνει την κατά πολύ απλούστερη μορφή

$$u_r(t) = \frac{p_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t. \tag{11.9.18}$$

Περιορίζεται δηλαδή στην απόκριση που αντιστοιχεί στο συντονισμό, στη μερική (ή ειδική) λύση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως (11.9.2), η οποία αντιστοιχεί στην εξωτερική φόρτιση  $p(t) = p_0 \cos \omega_0 t$  και σε μηδενικές αρχικές συνθήκες. Βέβαια στην πράξη ο Πολιτικός Μηχανικός, έχοντας να αντιμετωπίσει φαινόμενο συντονισμού σε ένα μηχανικό σύστημά του (και σε μια κατασκευή του γενικότερα), μπορεί έτσι κι αλλιώς να αγνοήσει τους δύο πρώτους όρους στη λύση του (11.9.13). Περιορίζει έτσι την προσοχή του στον τρίτο όρο (αυτόν που μεγαλώνει με το χρόνο  $t$ ), στον όρο  $u_r(t)$  της σχέσεως (11.9.18) συχνά αγνοώντας πλήρως και τους δύο πρώτους όρους  $u_0 \cos \omega_0 t$  και  $(v_0/\omega_0) \sin \omega_0 t$ , σαν αυτοί να αφορούσαν σε ένα μεταβατικό (ή παροδικό) φαινόμενο, ενώ δεν αφορούν σε μεταβατικό φαινόμενο! Θα αφορούσαν στ' αλήθεια σε μεταβατικό

φαινόμενο, εάν είχαμε και απόσβεση των ταλαντώσεων:  $\xi > 0$ , ενώ εδώ δεν έχουμε:  $\xi = 0$ .

Από την άλλη μεριά, όταν έχουμε απόσβεση των ταλαντώσεων (λόγος αποσβέσεως  $\xi > 0$ ), δε μπορεί έτσι κι αλλιώς να παρουσιασθεί καθαρά το φαινόμενο του συντονισμού. Δηλαδή δε μπορεί να παρουσιασθεί το τετράγωνο  $(s^2 + \omega_0^2)^2$  στον παρονομαστή του όρου του μετασχηματισμού Laplace  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  που αντιστοιχεί στη φόρτιση (στην εξωτερική δύναμη)  $p(t)$ . Σ' αυτήν την περίπτωση (όπου  $\xi > 0$ ) μπορούμε να έχουμε «σχεδόν συντονισμό», δηλαδή πολύ μεγάλα εύρη ταλαντώσεων, αλλ' όχι τον ίδιο το συντονισμό στην ιδεατή του μορφή.

Είναι λοιπόν ενδιαφέρον φαινόμενο ο συντονισμός από μαθηματικής απόψεως, αλλά συνήθως ανεπιθύμητο και βλαβερό για τις κατασκευές του Πολιτικού Μηχανικού. Σ' αυτές το ενδιαφέρον είναι η αποφυγή του ήδη από το στάδιο της μελέτης της κατασκευής. Δηλαδή πρέπει να αποφεύγεται η ιδιοσυχνότητα  $\omega_0$  ( $\omega_n$  γενικότερα) σε μια κατασκευή (η ιδιοσυχνότητα της ίδιας της κατασκευής!) που θα μπορούσε ίσως να συμπέσει (ή ακόμη να είναι κοντά) με τη συχνότητα  $\omega$  μιας φορτίσεως (εξωτερικής δυνάμεως)  $p(t)$  που ασκείται πάνω στην κατασκευή.

Αρκετά ως εδώ με τα σχόλια! Ας προχωρήσουμε τώρα!

#### A11.9.5. Επίλυση με τη μέθοδο του ολοκληρωτικού τύπου του Duhamel

Μια δεύτερη δυνατότητα για την εύρεση της αποκρίσεως του παρόντος μηχανικού συστήματος υλικού σημείου-ελατηρίου (ή μάζας-ελατηρίου) αποτελεί η χρήση του **ολοκληρωτικού τύπου του Duhamel**. Αυτός περιλαμβάνει ένα συνελκτικό ολοκλήρωμα: **το ολοκλήρωμα του Duhamel**. Η γενική μορφή του τύπου αυτού για λόγο αποσβέσεως  $\xi = 0$  (μαζί με τις αρχικές συνθήκες  $u_0$  και  $v_0$ ) είναι η μορφή (11.6.11), την επαναλαμβάνουμε

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = u_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t p(\tau) \sin \omega_0(t - \tau) d\tau. \quad (11.9.19)$$

Στην περίπτωση μηδενικών αρχικών συνθηκών (πλήρους ηρεμίας)  $u(0) = u_0 = 0$  και  $\dot{u}(0) = v_0 = 0$  αυτός ο τύπος του Duhamel παίρνει την απλούστερη μορφή του (11.6.10). Την ξαναπαράθετούμε και αυτή

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t p(\tau) \sin \omega_0(t - \tau) d\tau, \quad (11.9.20)$$

η οποία περιέχει μόνο το συνελκτικό ολοκλήρωμα Duhamel για τη φόρτιση (εξωτερική δύναμη)  $p(t)$ .

Τον ολοκληρωτικό τύπο του Duhamel (11.9.19), που συμπεριλαμβάνει φυσικά και την ειδική περίπτωση του (11.9.20) (για  $u(0) = u_0 = 0$  και  $\dot{u}(0) = v_0 = 0$ ), είχαμε την ευκαιρία να τον αποδείξουμε για εξαναγκασμένες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση (με λόγο αποσβέσεως  $\xi = 0$ ) στην Ενότητα A11.6. Εκεί εργασθήκαμε με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace, την οποία και θεωρούμε σαν την απλούστερη μέθοδο μαθηματικής αποδείξεως του τύπου του Duhamel. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τον ίδιο τύπο (έτοιμο τώρα!) στο πρόβλημα του συντονισμού. Πριν το κάνουμε όμως αυτό, ας επιδείξουμε τη χρήση του σε μια πάρα πολύ απλή εφαρμογή.

▼ **Εφαρμογή A11.2 (Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με σταθερή φόρτιση):** Θεωρούμε το μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου (μάζας  $m$ ) και ελατηρίου (σταθεράς  $k$ ) υπό μηδενικές αρχικές συνθήκες:  $u(0) = u_0 = 0$  και  $\dot{u}(0) = v_0 = 0$ . Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  αρχίζει ξαφνικά να εφαρμόζεται μια σταθερή φόρτιση  $p(t) = p_0$  (μόνο για  $t \geq 0$ ) πάνω στο υλικό σημείο. Εδώ ζητείται η απόκριση του μηχανικού αυτού συστήματος.

**Λύση:** Ασφαλώς οφείλουμε να εφαρμόσουμε τον ολοκληρωτικό τύπο του Duhamel (11.9.19) (με  $u(0) = u_0 = 0$  και  $\dot{u}(0) = v_0 = 0$ ), ισοδύναμα να υπολογίσουμε το συνελκτικό ολοκλήρωμα του Duhamel (11.9.20). Πρόκειται για μια πάρα πολύ εύκολη εργασία, τώρα που  $p(t) = p_0$  (για  $t \geq 0$ , όπως ήδη σημειώσαμε). Με την απλή αυτή ολοκλήρωση βρίσκουμε εύκολα ότι

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t p_0 \sin \omega_0(t - \tau) d\tau = \frac{p_0}{m\omega_0} \frac{\cos \omega_0(t - \tau)}{\omega_0} \Big|_0^t = \frac{p_0}{m\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t). \quad (11.9.21)$$

Προφανώς είναι ευκολότερη και η επαλήθευση της λύσεως αυτής  $u(t)$ , η οποία παριστάνει βέβαια ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση (με λόγο αποσβέσεως  $\xi = 0$ ) και υπό μηδενικές αρχικές συνθήκες. ▲

Συνεχίζουμε τώρα με το κύριο έργο μας, δηλαδή με το φαινόμενο του συντονισμού με φόρτιση (εξωτερική δύναμη που εφαρμόζεται πάνω στο υλικό σημείο)  $p(t)$  της μορφής (11.9.1), συγκεκριμένα  $p(t) = p_0 \cos \omega_0 t$ . Υπενθυμίζουμε στο σημείο αυτό ότι η συχνότητα  $\omega_0$  (ή γενικότερα μια συχνότητα  $\omega_0$ ) της φορτίσεως  $p(t)$  είναι απλά η ιδιοσυχνότητα  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  του μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος υλικού σημείου-ελατηρίου (ή μάζας-ελατηρίου) που εξετάζουμε.

Είναι τώρα (με  $p(t) = p_0 \cos \omega_0 t$ ) λίγο πιο δύσκολη η ολοκλήρωση στο συνελκτικό ολοκλήρωμα του Duhamel (11.9.20). Τί να κάνουμε; Αναγκαστικά θα προχωρήσουμε ...! Με μηδενικές αρχικές συνθήκες θα έχουμε από τον τύπο (11.9.20) για τη μετατόπιση του υλικού σημείου  $u(t)$  (την απόκριση, την έξοδο του μηχανικού συστήματος) ότι

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t (p_0 \cos \omega_0 \tau) \sin \omega_0(t - \tau) d\tau = \frac{p_0}{m\omega_0} \int_0^t \cos \omega_0 \tau \sin \omega_0(t - \tau) d\tau. \quad (11.9.22)$$

(Ας ξαναυπενθυμίσουμε ότι εξ ορισμού  $\sin \omega_0(t - \tau) := \sin[\omega_0(t - \tau)]$ , δηλαδή εννοούνται αγκύλες!)

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τον τόσο γνωστό μας από την Τριγωνομετρία τύπο

$$\sin \alpha \cos \beta = \cos \beta \sin \alpha = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2} \quad (11.9.23)$$

εδώ με  $\alpha = \omega_0(t - \tau)$  και  $\beta = \omega_0 \tau$ , οπότε στην περίπτωση μας

$$\alpha + \beta = \omega_0(t - \tau) + \omega_0 \tau = \omega_0 t \quad \text{και} \quad \alpha - \beta = \omega_0(t - \tau) - \omega_0 \tau = \omega_0 t - 2\omega_0 \tau = \omega_0(t - 2\tau). \quad (11.9.24)$$

Με τον τρόπο αυτό το παραπάνω συνελκτικό ολοκλήρωμα του Duhamel (11.9.22) (με την ολοκλήρωση να γίνεται ως προς  $\tau$ , όχι ως προς  $t$ : το  $t$  είναι απλά το άνω όριο ολοκληρώσεως, όχι η μεταβλητή ολοκληρώσεως  $\tau$ ) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{p_0}{2m\omega_0} \int_0^t [\sin \omega_0 t + \sin \omega_0(t - 2\tau)] d\tau \\ &= \frac{p_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t + \frac{p_0}{2m\omega_0} \int_0^t \sin \omega_0(t - 2\tau) d\tau \\ &= \frac{p_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t + \frac{p_0}{2m\omega_0} \left. \frac{\cos \omega_0(t - 2\tau)}{2\omega_0} \right|_0^t \\ &= \frac{p_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t + \frac{p_0}{2m\omega_0} \frac{\cos \omega_0(t - 2t) - \cos \omega_0(t - 0)}{2\omega_0} \\ &= \frac{p_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t + \frac{p_0}{2m\omega_0} \frac{\cos \omega_0 t - \cos \omega_0 t}{2\omega_0} \\ &= \frac{p_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t + 0 = \frac{p_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (11.9.25)$$

Τελικά δεν ήταν δα και τόσο δύσκολη η ολοκλήρωση αυτή, αφού προσέξαμε ότι μεταβλητή ολοκληρώσεως ήταν το  $\tau$  και όχι το  $t$ . (Για την ολοκλήρωση το  $t$  είναι απλά μια σταθερά!) Φυσικά το τελικό μας αποτέλεσμα

$$u(t) = \frac{p_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t \quad (11.9.26)$$

συμφωνεί με το σχετικό αποτέλεσμα (11.9.13), εδώ για μηδενικές αρχικές συνθήκες:  $u(0) = u_0 = 0$  και  $\dot{u}(0) = v_0 = 0$ . Τώρα για μη μηδενικές αρχικές συνθήκες θα πρέπει φυσικά να προσθέσουμε και τους δύο όρους  $u_0 \cos \omega_0 t$  και  $(v_0/\omega_0) \sin \omega_0 t$ , ακριβώς όπως συμβαίνει στο γενικότερο ολοκληρωτικό τύπο του Duhamel (11.9.19). Έτσι θα έχουμε τελικά

$$u(t) = u_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{p_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t \quad (11.9.27)$$

παίρνοντας ακριβώς την τελική μας λύση (11.9.13) στο παρόν ενδιαφέρον φαινόμενο συντονισμού. Είναι όμως πιο σύντομη η παρούσα διαδικασία, εφόσον έχουμε διαθέσιμο τον ολοκληρωτικό τύπο του Duhamel για εξαναγκασμένες ( $p(t) \neq 0$ ) ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση ( $\xi = 0$ ). Και εδώ τον είχαμε διαθέσιμο. Δε χρειάστηκε επομένως να αναφερθούμε καθόλου στο μετασχηματισμό Laplace στην Παράγραφο αυτή A11.9.5 της Ενότητας A11.9 του παρόντος Κεφαλαίου εφαρμογών A11.

### A11.10. ΩΣΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Θεωρούμε ξανά το μηχανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου (με  $\xi = 0$ ) και υπό μηδενικές αρχικές συνθήκες:  $u(0) = u_0 = 0$  και  $\dot{u}(0) = v_0 = 0$ . Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  υποθέτουμε ότι εφαρμόζεται πάνω στο υλικό σημείο **ωστική (ή κρουστική) φόρτιση**  $p(t) = \delta(t)$ , όπου  $\delta(t)$  είναι η γνωστή από την Ενότητα A10.6 συνάρτηση δέλτα του Dirac. Πρόκειται για μια γενικευμένη συνάρτηση που απειρίζεται για  $t = 0$  (παντού άλλου μηδενίζεται) και έχει μετασχηματισμό Laplace  $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ . Η **ώθηση**  $\Omega$  της ωστικής φορτίσεως  $\delta(t)$  είναι βέβαια  $\Omega = 1$ , γιατί, όπως ξέρουμε,  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ .

Πρόκειται λοιπόν για στιγμιαία (ακριβώς τη στιγμή  $t = 0$ ) φόρτιση  $p(t) = \delta(t)$  του υλικού σημείου. Με μηδενικές αρχικές συνθήκες θα υπολογίσουμε την απόκριση του μηχανικού συστήματος στην ωστική (ή κρουστική) αυτή φόρτιση  $\delta(t)$ , η οποία καλείται **ωστική (ή κρουστική) απόκριση**.

Για τον υπολογισμό της θα χρησιμοποιήσουμε φυσικά τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace για την παρούσα μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως. Αυτή είναι απλά η ίδια διαφορική εξίσωση (11.6.2) των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων χωρίς απόσβεση, εδώ όμως με φόρτιση (**συνάρτηση εξαναγκασμού**)  $p(t) = \delta(t)$ . Ισχύει επομένως η διαφορική εξίσωση

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = \frac{\delta(t)}{m} \quad \text{με} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (11.10.1)$$

Με  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  και με μηδενικές αρχικές συνθήκες:  $u(0) = u_0 = 0$  και  $\dot{u}(0) = v_0 = 0$  (αρχική μετατόπιση και αρχική ταχύτητα), ο μετασχηματισμός Laplace της δευτέρας παραγωγής  $\ddot{u}(t)$  της άγνωστης συναρτήσεως  $u(t)$  είναι φυσικά  $\mathcal{L}\{\ddot{u}(t)\} = s^2 U(s)$ . Σημειώσαμε επίσης ήδη ότι  $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ .

Επομένως με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace η γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως (11.10.1) μετατρέπεται στην αντίστοιχη γραμμική (πρωτοβάθμια) αλγεβρική εξίσωση

$$s^2 U(s) + \omega_0^2 U(s) = \frac{1}{m} \quad \text{και} \quad \text{ισοδύναμα} \quad (s^2 + \omega_0^2) U(s) = \frac{1}{m}. \quad (11.10.2)$$

Η λύση  $U(s) = \mathcal{L}^{-1}\{u(t)\}$  της πολύ απλής αυτής αλγεβρικής εξισώσεως είναι

$$U(s) = \frac{1}{m} \frac{1}{s^2 + \omega_0^2} \quad \text{και} \quad \text{ισοδύναμα} \quad U(s) = \frac{1}{m\omega_0} \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}. \quad (11.10.3)$$

Γνωρίζουμε όμως από τη δεύτερη σχέση (11.5.9) ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}\right\} = \sin \omega_0 t, \quad \text{οπότε} \quad u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = \frac{1}{m\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (11.10.4)$$

Η συνάρτηση  $u(t)$  καλείται **ωστική (ή κρουστική) απόκριση** του μηχανικού μας συστήματος. Ο μετασχηματισμός Laplace  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  στη σχέση (11.10.3) καλείται **συνάρτηση μεταφοράς**. Για τις συναρτήσεις αυτές χρησιμοποιούμε εδώ τα σύμβολα  $g(t)$  και  $G(s)$  αντίστοιχα. Έτσι έχουμε

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{m(s^2 + \omega_0^2)} \quad \text{και} \quad \text{αντίστροφα} \quad g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \frac{1}{m\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (11.10.5)$$

Σημειώνουμε τέλος ότι για μια αυθαίρετη φόρτιση  $p(t)$  αναλύοντάς την σε απειροστές στιγμιαίες φορτίσεις  $p(\tau) d\tau$  (τη στιγμή  $\tau$ ) και υπερθέτοντας τις σχετικές αποκρίσεις  $du = [p(\tau) d\tau]g(t - \tau)$  ή  $du = p(\tau)g(t - \tau) d\tau$  τη στιγμή  $t$ , οδηγούμαστε στον ολοκληρωτικό τύπο του Duhamel (11.8.8).

Αρκετά με τις ταλαντώσεις και το χρόνο  $t$  σαν ανεξάρτητη μεταβλητή! Είναι ώρα να αναφερθούμε και σε δοκούς. Σ' αυτές η ανεξάρτητη μεταβλητή θα είναι φυσικά η θέση  $x$ . Ξεκινάμε λοιπόν!

### A11.11. ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ ΔΟΚΟΥ ΣΕ ΚΑΜΨΗ

#### A11.11.1. Ελαστική γραμμή δοκού υπό αυθαίρετη φόρτιση

Ασφαλώς το ενδιαφέρον και η χρησιμότητα του μετασχηματισμού Laplace δεν περιορίζονται σε προβλήματα που έχουν ανεξάρτητη μεταβλητή το χρόνο  $t$ . Ο μετασχηματισμός Laplace είναι χρήσιμος και σε προβλήματα που έχουν ανεξάρτητη μεταβλητή τη θέση  $x$ , όπως θα δούμε στην παρούσα ενότητα και στην επόμενη ενότητα σε προβλήματα δοκών σε κάμψη.

Στην ενότητα αυτή θεωρούμε το πρόβλημα μιας συνήθους δοκού σε κάμψη, συγκεκριμένα μιας δοκού μήκους  $L$  ( $0 \leq x \leq L$ ). Η κατανεμημένη κάθετη φόρτιση της δοκού δηλώνεται με  $p(x)$  (π.χ. σε kN/m). Την υποθέτουμε αυθαίρετη (αν και γνωστή) συνάρτηση. Η σχετική διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως ως προς το **βέλος κάμψεως**  $v(x)$  της δοκού, που δημιουργεί την **ελαστική γραμμή** της (το σχήμα της), είναι γνωστή: εξίσωση (2.1.34) της Παραγράφου A2.1.5. Την υπενθυμίζουμε

$$EIv''''(x) = p(x) \quad \text{και ισοδύναμα} \quad v''''(x) = \frac{p(x)}{EI} \quad (11.11.1)$$

με  $EI$  τη δυσκαμψία της δοκού: μέτρο ελαστικότητας  $E$  του ισότροπου και γραμμικά ελαστικού υλικού της επί ροπή αδρανείας  $I$  της διατομής της ως προς τον ουδέτερο άξονά της. (Σε συνήθεις δοκούς, όπως εδώ, η δυσκαμψία  $EI$  θεωρείται σταθερή κατά μήκος τους.)

Φυσικά στο Κεφάλαιο αυτό A11 εφαρμόζουμε αποκλειστικά τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Δηλώνουμε με  $V(s)$  το μετασχηματισμό Laplace του άγνωστου βέλους κάμψεως  $v(x)$ , δηλαδή  $V(s) = \mathcal{L}\{v(x)\}$ , και χρησιμοποιούμε το γνωστό (από την Παράγραφο A10.3.5 του Κεφαλαίου A10) τύπο (10.3.71) για το μετασχηματισμό Laplace της τετάρτης παραγώγου  $v''''(x)$ :

$$\mathcal{L}\{v''''(x)\} = s^4V(s) - s^3v(0) - s^2v'(0) - sv''(0) - v'''(0) \quad \text{με} \quad V(s) = \mathcal{L}\{v(x)\}, \quad (11.11.2)$$

εδώ βέβαια με  $v(x)$  αντί για  $u(t)$  και με  $V(s)$  αντί για  $U(s)$ . Δηλώνουμε τέλος με  $P(s)$  το μετασχηματισμό Laplace της γνωστής κατανεμημένης φορτίσεως  $p(x)$  της δοκού, δηλαδή  $P(s) = \mathcal{L}\{p(x)\}$ .

Μετασχηματίζουμε έτσι πολύ εύκολα τη γραμμική διαφορική εξίσωση της δοκού (11.11.1) σε γραμμική (πρωτοβάθμια) αλγεβρική εξίσωση, συγκεκριμένα την εξίσωση

$$s^4V(s) - s^3v(0) - s^2v'(0) - sv''(0) - v'''(0) = \frac{P(s)}{EI}. \quad (11.11.3)$$

Στο σημείο αυτό καλό είναι να υποθέσουμε ότι είναι γνωστές οι ακόλουθες τέσσερις ποσότητες: (α)  $v_0$  (**βέλος κάμψεως**), (β)  $\theta_0$  (**γωνία κλίσεως ή στροφής**), (γ)  $M_0$  (**ροπή κάμψεως ή καμπτική ροπή**) και (δ)  $Q_0$  (**τέμνουσα δύναμη ή διατμητική δύναμη**) στο αριστερό άκρο  $x = 0$  της δοκού. Αν ξαναθυμηθούμε τους τύπους (2.1.19), (2.1.32) και (2.1.33) της Ενότητας A2.1 του Κεφαλαίου A2, που συνδέουν αυτές τις ποσότητες με το βέλος κάμψεως  $v(x)$  της δοκού και τις τρεις πρώτες παραγώγους του στο αριστερό αυτό άκρο  $x = 0$  της δοκού, θα έχουμε

$$v(0) = v_0, \quad v'(0) = \theta_0, \quad v''(0) = \frac{M_0}{EI}, \quad v'''(0) = \frac{Q_0}{EI}. \quad (11.11.4)$$

Με τη χρήση των τεσσάρων αυτών ποσοτήτων (εδώ αρχικών συνθηκών)  $v_0$ ,  $\theta_0$ ,  $M_0$  και  $Q_0$  η πιο πάνω γραμμική (πρωτοβάθμια) αλγεβρική εξίσωση (11.11.3), που προέκυψε με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace, παίρνει την ακόλουθη πιο οικεία στον Πολιτικό Μηχανικό μορφή:

$$s^4V(s) - s^3v_0 - s^2\theta_0 - s\frac{M_0}{EI} - \frac{Q_0}{EI} = \frac{P(s)}{EI}, \quad \text{οπότε} \quad s^4V(s) = s^3v_0 + s^2\theta_0 + s\frac{M_0}{EI} + \frac{Q_0}{EI} + \frac{P(s)}{EI}. \quad (11.11.5)$$

Η λύση της πρωτοβάθμιας αυτής αλγεβρικής εξισώσεως ως προς τον άγνωστο μετασχηματισμό Laplace  $V(s) = \mathcal{L}\{v(x)\}$  του βέλους κάμψεως  $v(x)$  της δοκού είναι πανεύκολη. Προκύπτει

$$V(s) = \frac{v_0}{s} + \frac{\theta_0}{s^2} + \frac{M_0}{EIs^3} + \frac{Q_0}{EIs^4} + \frac{P(s)}{EIs^4}. \quad (11.11.6)$$

Δεν απομένει παρά η αντιστροφή του μετασχηματισμού αυτού Laplace  $V(s) = \mathcal{L}^{-1}\{v(x)\}$ . Προς το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τους γνωστούς μας από την Παράγραφο Α10.2.2 του Κεφαλαίου Α10 τύπους (10.2.26), εδώ όμως γραμμένους με το  $x$  (τη θέση κατά μήκος της δοκού) σαν ανεξάρτητη μεταβλητή (αντί για το  $t$ )

$$\mathcal{L}\{x^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \implies \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad \mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{s^2}, \quad \mathcal{L}\{x^2\} = \frac{2}{s^3}, \quad \mathcal{L}\{x^3\} = \frac{6}{s^4}, \quad \mathcal{L}\{x^4\} = \frac{24}{s^5}. \quad (11.11.7)$$

Ας γράψουμε τώρα τους ίδιους τύπους και σαν αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \frac{x^n}{n!} \implies \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = x, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = \frac{x^2}{2}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\} = \frac{x^3}{6}. \quad (11.11.8)$$

(Μας χρειάζονται εδώ οι τέσσερις πρώτοι τύποι, για  $n = 0, 1, 2$  και  $3$ , από τους τύπους (11.11.7). Παραλείψαμε έτσι τον τελευταίο τύπο, εκείνο για  $n = 4$ , ο οποίος δε μας χρειάζεται.)

Σημειώνουμε εδώ ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace του τελευταίου όρου  $P(s)/(EI s^4)$  στο δεξιό μέλος της λύσεως (11.11.6) οδηγεί σε συνελκτικό ολοκλήρωμα. Τούτο ισχύει λόγω του θεωρήματος της συνελίξεως (Παράγραφος Α10.3.7: Ιδιότητα 7). Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^x f(\xi)g(x-\xi) d\xi = \int_0^x f(x-\xi)g(\xi) d\xi \quad (11.11.9)$$

προφανώς με  $f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$  και  $g(x) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$ . Εδώ έχουμε το γινόμενο των συναρτήσεων

$$P(s) = \mathcal{L}\{p(x)\} \quad \text{και} \quad \frac{1}{EI s^4} = \mathcal{L}\left\{\frac{x^3}{6EI}\right\}, \quad (11.11.10)$$

οπότε προκύπτει ο εξής αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{EI s^4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{P(s) \frac{1}{EI s^4}\right\} = p(x) * \frac{x^3}{6EI} = \frac{1}{6EI} \int_0^x p(\xi)(x-\xi)^3 d\xi = \frac{1}{6EI} \int_0^x (x-\xi)^3 p(\xi) d\xi \quad (11.11.11)$$

σε μορφή συνελκτικού ολοκληρώματος λόγω του γνωστού θεωρήματος της συνελίξεως.

Με τη χρήση αυτών των τύπων αντίστροφων μετασχηματισμών Laplace (11.11.8) (τέσσερις τύποι) και (11.11.11) (ένας τύπος) από το μετασχηματισμό Laplace  $V(s) = \mathcal{L}\{v(x)\}$ , σχέση (11.11.6), προκύπτει τελικά ο ακόλουθος αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace  $\mathcal{L}^{-1}\{V(s)\} = v(x)$  για το βέλος κάμψεως (ουσιαστικά την ελαστική γραμμή)  $v(x)$  της δοκού:

$$v(x) = \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\} = v_0 + \theta_0 x + \frac{M_0}{2EI} x^2 + \frac{Q_0}{6EI} x^3 + \frac{1}{6EI} \int_0^x (x-\xi)^3 p(\xi) d\xi. \quad (11.11.12)$$

Το πιο πάνω συνελκτικό ολοκλήρωμα (11.11.11) εμφανίζεται σαν ο τελευταίος όρος στη λύση αυτή  $v(x)$ . Οι τέσσερις αρχικές συνθήκες  $v_0$ ,  $\theta_0$ ,  $M_0$  και  $Q_0$ , που ισχύουν στο αριστερό άκρο  $x = 0$  της δοκού, υπεισέρχονται στους τέσσερις πρώτους όρους της ίδιας λύσεως  $v(x)$ .

### A11.11.2. Ελαστική γραμμή προβόλου υπό αυθαίρετη φόρτιση

Θα αναφέρουμε εδώ στην ειδική περίπτωση προβόλου με το αριστερό άκρο του  $x = 0$  πακτωμένο και το δεξιό άκρο του  $x = L$  ελεύθερο. Θα πρέπει να ισχύουν οι δύο συνθήκες

$$v(0) = v_0 = 0 \quad \text{και} \quad v'(0) = \theta_0 = 0 \quad (11.11.13)$$

λόγω της πακτώσεως στο αριστερό άκρο  $x = 0$  του προβόλου. Άρα στην ειδική περίπτωση του προβόλου με την πάκτωση στο αριστερό άκρο του  $x = 0$  ο προηγούμενος γενικός τύπος (11.11.12) για το βέλος κάμψεως (την ελαστική γραμμή)  $v(x)$  παίρνει την κάπως απλούστερη μορφή

$$v(x) = \frac{M_0}{2EI} x^2 + \frac{Q_0}{6EI} x^3 + \frac{1}{6EI} \int_0^x (x-\xi)^3 p(\xi) d\xi. \quad (11.11.14)$$

Και στην περίπτωση αυτή πρέπει όμως να είναι γνωστές οι ποσότητες  $M_0$  (ροπή κάμψεως ή καμπτική ροπή) και  $Q_0$  (τέμνουσα δύναμη ή διατμητική δύναμη) στο πακτωμένο άκρο  $x = 0$  του προβόλου. Δύο σχετικές δυνατότητες υπάρχουν:

(α) Να θεωρήσουμε τις δύο αυτές ποσότητες άγνωστες σταθερές και να τις προσδιορίσουμε με βάση τις συνθήκες ελεύθερου άκρου στο δεξιό άκρο  $x = L$  του προβόλου, δηλαδή τις δύο συνθήκες

$$v''(L) = \frac{M(L)}{EI} = 0 \quad \text{και} \quad v'''(L) = \frac{Q(L)}{EI} = 0. \quad (11.11.15)$$

Η λύση (11.11.14) για το βέλος κάμψεως  $v(x)$  του προβόλου υπό γενική κάθετη κατανεμημένη φόρτιση  $p(x)$  με την εισαγωγή της στις δύο αυτές συνθήκες για  $x = L$  επιτρέπει τον προσδιορισμό των δύο σταθερών  $M_0$  και  $Q_0$  στην πάκτωση: στο αριστερό άκρο  $x = 0$  του προβόλου.

(β) Να υπολογίσουμε και τις δύο ποσότητες  $M_0$  (ροπή κάμψεως) και  $Q_0$  (τέμνουσα δύναμη) στο σημείο  $x = 0$  της πακτώσεως με τη βοήθεια των εξισώσεων της στατικής ισορροπίας: το  $M_0$  με ισορροπία ροπών και το  $Q_0$  με ισορροπία δυνάμεων ως προς τον άξονα  $Oy$  κάθετα στη δοκό.

Πρόκειται προφανώς για δύο ισοδύναμες δυνατότητες, η δεύτερη όμως ταιριάζει καλύτερα στον έμπειρο στη Στατική Πολιτικό Μηχανικό. Είναι όμως πολύ πιο πιθανό να οδηγήσει σε λάθος προσήμου τον άπειρο Πολιτικό Μηχανικό. Η πρώτη δυνατότητα, η οποία βασίζεται στην κατευθείαν χρήση των συνοριακών συνθηκών (11.11.15) στο δεξιό άκρο του προβόλου  $x = L$ , είναι έτσι πιο ασφαλής ως προς την αποφυγή λαθών, αλλ' απαιτεί παραγωγίσεις της λύσεως (11.11.14).

### A11.11.3. Ελαστική γραμμή προβόλου υπό σταθερή φόρτιση

Θεωρούμε τώρα τον πρόβολο της προηγούμενης παραγράφου (μήκους  $L$  και δυσκαμψίας  $EI$  με πάκτωση στο αριστερό άκρο  $x = 0$  και ελεύθερο το δεξιό  $x = L$ ) υπό σταθερή κάθετη κατανεμημένη φόρτιση  $p(x) = p_0$ . Από τις εξισώσεις ισορροπίας (δεύτερη δυνατότητα) εύκολα συνάγουμε ότι

$$Q_0 = -p_0L \quad \text{και} \quad M_0 = \frac{L}{2} (p_0L) = \frac{p_0L^2}{2}. \quad (11.11.16)$$

Εισάγουμε τώρα τη φόρτιση  $p(x) = p_0$  και τις δύο αυτές σταθερές  $Q_0 = -p_0L$  και  $M_0 = p_0L^2/2$  στο σχετικό γενικό τύπο (11.11.14) για το βέλος κάμψεως του προβόλου μας. Έτσι προκύπτει ότι

$$v(x) = \frac{p_0L^2}{4EI} x^2 - \frac{p_0L}{6EI} x^3 + \frac{1}{6EI} \int_0^x (x - \xi)^3 p_0 d\xi. \quad (11.11.17)$$

Με βάση την αντιμεταθετική ιδιότητα (10.3.98) στη συνέλιξη:  $f(x) * g(x) = g(x) * f(x)$ , θα έχουμε

$$\int_0^x (x - \xi)^3 p_0 d\xi = \int_0^x \xi^3 p_0 d\xi = p_0 \int_0^x \xi^3 d\xi = p_0 \frac{x^4}{4}. \quad (11.11.18)$$

Επομένως το βέλος κάμψεως  $v(x)$  κατά μήκος του προβόλου στη σχέση (11.11.17) παίρνει την τελική του μορφή

$$v(x) = \frac{p_0L^2}{4EI} x^2 - \frac{p_0L}{6EI} x^3 + \frac{p_0}{6EI} \frac{x^4}{4} = \frac{p_0}{24EI} (6L^2x^2 - 4Lx^3 + x^4) \quad (11.11.19)$$

και με απλοποίηση: κοινός παράγοντας το  $x^2$

$$v(x) = \frac{p_0x^2}{24EI} (6L^2 - 4Lx + x^2) \quad \text{με μέγιστο (για } x = L) \text{ την τιμή} \quad v_{\max} = v(L) = \frac{p_0L^4}{8EI}. \quad (11.11.20)$$

Αυτή είναι η έκφραση του βέλους κάμψεως  $v(x)$  κατά μήκος του προβόλου. Με απλές παραγωγίσεις ως προς τη θέση  $x$  διαπιστώνουμε εύκολα ότι

$$v'(x) = \theta(x) = \frac{p_0}{6EI} (3L^2x - 3Lx^2 + x^3) = \frac{p_0x}{6EI} (3L^2 - 3Lx + x^2), \quad (11.11.21)$$

$$v''(x) = \frac{M(x)}{EI} = \frac{p_0}{2EI} (L^2 - 2Lx + x^2) = \frac{p_0(L - x)^2}{2EI}, \quad (11.11.22)$$

$$v'''(x) = \frac{Q(x)}{EI} = -\frac{p_0}{EI}(L-x) = -\frac{p_0(L-x)}{EI}, \quad (11.11.23)$$

$$v''''(x) = \frac{p(x)}{EI} = \frac{p_0}{EI}. \quad (11.11.24)$$

Ας επαναλάβουμε τους τρεις τελευταίους τύπους και στη λίγο απλούστερη (και πιο χρήσιμη) γραφή τους

$$M(x) = \frac{p_0(L-x)^2}{2} \quad \text{για τη ροπή κάμψεως } M(x), \quad (11.11.25)$$

$$Q(x) = -p_0(L-x) \quad \text{για την τέμνουσα δύναμη } Q(x), \quad (11.11.26)$$

$$p(x) = p_0 \quad \text{για την κατανεμημένη κάθετη φόρτιση } p(x). \quad (11.11.27)$$

Ας επαληθεύσουμε τώρα τη λύση (11.11.19) ή (11.11.20), την οποία βρήκαμε για το βέλος κάμψεως  $v(x)$  του προβόλου (την ελαστική γραμμή του, το σχήμα του σε κάμψη) υπό σταθερή φόρτιση  $p(x) = p_0$  (σε kN/m ή ισοδύναμη μονάδα) σε όλο το μήκος του. Εκτελέσαμε ήδη τις σχετικές παραγωγίσεις και υπολογίσαμε τις παραγώγους (11.11.21) έως (11.11.24) και τις σχετικές συναρτήσεις  $M(x)$ ,  $Q(x)$  και  $p(x)$  στις σχέσεις (11.11.25), (11.11.26) και (11.11.27) αντίστοιχα. Αρχίζουμε:

Από τη σχέση (11.11.24) διαπιστώνουμε αμέσως την ισχύ της διαφορικής εξίσωσης (11.11.1) της κάμψεως δοκού (εδώ βέβαια προβόλου με  $p(x) = p_0$ ). Επίσης από τη σχέση (11.11.20) διαπιστώνουμε ότι  $v(0) = 0$  και από τη σχέση (11.11.21) ότι  $v'(0) = \theta_0 = 0$ . Ισχύουν λοιπόν οι δύο συνθήκες πακτώσεως στο αριστερό (το πακτωμένο) άκρο  $x = 0$  του προβόλου. Πάμε τώρα στο δεξιό άκρο, το ελεύθερο άκρο  $x = L$ . Από τη σχέση (11.11.25) διαπιστώνουμε ότι  $M(L) = 0$  και από την επόμενη σχέση (11.11.26) ότι  $Q(L) = 0$ . Είναι λοιπόν μηδενικές τόσο η ροπή κάμψεως  $M(x)$  όσο και η τέμνουσα δύναμη  $Q(x)$  στο δεξιό άκρο  $x = L$  του προβόλου. Άρα ισχύουν οι δύο αυτές συνθήκες, που δηλώνουν ελεύθερο άκρο δοκού. Τέλος η τελευταία σχέση (11.11.27), η σχέση  $p(x) = p_0$  για την κατανεμημένη κάθετη φόρτιση κατά μήκος του προβόλου, είναι ενδιαφέρουσα απλά σαν επαλήθευση (και αυτή) της λύσεως  $v(x)$  που βρέθηκε κατά μήκος του προβόλου ως προς τη φόρτισή του. (Ουσιαστικά είναι ισοδύναμη με την επαλήθευση της διαφορικής εξίσωσης (11.11.1). Δεν αναφέρεται σε αρχικές ή συνοριακές συνθήκες στα δύο άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  του προβόλου.

◆ **Συμπέρασμα:** Το συμπέρασμά μας είναι ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γενικό ολοκληρωτικό τύπο (11.11.14), ας τον επαναλάβουμε

$$v(x) = \frac{M_0}{2EI}x^2 + \frac{Q_0}{6EI}x^3 + \frac{1}{6EI} \int_0^x (x-\xi)^3 p(\xi) d\xi, \quad (11.11.28)$$

μαζί με τις συνθήκες (11.11.15),  $v''(L) = 0$  και  $v'''(L) = 0$ , για την εύρεση του βέλους κάμψεως  $v(x)$  προβόλου (της ελαστικής γραμμής, του σχήματος που παίρνει ο πρόβλος μετά την κάμψη του). Εναλλακτικά, αντί για τις δύο πιο πάνω συνθήκες  $v''(L) = 0$  και  $v'''(L) = 0$  μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις ισορροπίας για τον προσδιορισμό της ροπής κάμψεως  $M_0$  και της τέμνουσας δύναμης  $Q_0$  στο σημείο πακτώσεως  $x = 0$ . Με τον τρόπο αυτό έχουμε έτοιμη τη γενική λύση  $v(x)$  για το βέλος κάμψεως (την ελαστική γραμμή) σε κάθε πρόβλημα προβόλου, δηλαδή για οποιαδήποτε αυθαίρετη κάθετη κατανεμημένη φόρτιση  $p(x)$  που εφαρμόζεται κατά μήκος του. Και μάλιστα ο γενικός τύπος (11.11.28) μπορεί θαυμάσια να χρησιμοποιείται ως έχει, έτοιμος από τον Πολιτικό Μηχανικό, ακόμη και από αυτόν που μάλλον τον απωθεί η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace. Ο πιο πάνω τύπος (11.11.28) έχει και το πλεονέκτημα ότι περιέχει ένα μόνο απλό ολοκλήρωμα και όχι τέσσερα διαδοχικά ολοκληρώματα, ουσιαστικά ένα τετραπλό ολοκλήρωμα.

► **Ερώτημα:** Φυσικά ο γενικός αυτός τύπος (11.11.28) για πρόβλολο μπορεί να βρεθεί και με άλλους τρόπους εκτός από το μετασχηματισμό Laplace. Εδώ ζητείται η εύρεσή του: (α) Με τέσσερις διαδοχικές ολοκληρώσεις της διαφορικής εξίσωσης (11.11.1):  $v''''(x) = p(x)/(EI)$ , στο τέλος όμως με απλό ολοκλήρωμα, και (β) Με φυσικό τρόπο θεωρώντας τη συνεχή φόρτιση  $p(x)$



κατά μήκος του προβόλου σαν άπειρο άθροισμα στοιχειωδών φορτίσεων  $p(\xi)d\xi$  (με  $0 \leq \xi \leq L$ ) και αθροίζοντας τα βέλη κάμψης που η κάθε μια τους προκαλεί (με βάση την αρχή της υπερθέσεως σε γραμμικά συστήματα). Έτσι πρέπει να προκύψει τελικά το συνολικό βέλος κάμψης (11.11.28) σε πρόβολο. Άραγε ποια μέθοδος είναι η απλούστερη για την εύρεση του βέλους κάμψης (11.11.28) σε πρόβολο υπό γενική (αυθαίρετη) φόρτιση  $p(x)$ ; Κατά την προσωπική γνώμη του γράφοντα απλούστερη είναι η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace.

► **Παρατήρηση A11.4:** Πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε το γενικό ολοκληρωτικό τύπο (11.11.14) ή (11.11.28) με  $p(x) = p_0$ , για να προσδιορίσουμε το βέλος κάμψης (την ελαστική γραμμή)  $v(x)$  σε πρόβολο με κάθετη κατανεμημένη φόρτιση  $p(x)$ . Έτσι εκμεταλλευθήκαμε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης (11.11.1):  $v''''(x) = p(x)/(EI)$ , την οποία είχαμε ήδη βρει στην Παράγραφο A11.11.1 με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Μια εναλλακτική δυνατότητα αποτελεί βέβαια να επιλύσουμε από την αρχή τη διαφορική εξίσωση  $v''''(x) = p_0/(EI)$  στην παρούσα περίπτωση σταθερής φορτίσεως  $p(x) = p_0$  αντί να θεωρήσουμε τη λύση της σαν ειδική περίπτωση της γενικής λύσεως. Δε θα το κάνουμε, γιατί δεν παρουσιάζει κανένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Θα σημειώσουμε όμως ότι στην περίπτωση αυτή ο μετασχηματισμός Laplace της σταθερής φορτίσεως  $p_0$  είναι απλά  $p_0/s$ . Έτσι δεν πρόκειται να παρουσιασθεί κανένα συνελικτικό ολοκλήρωμα στη λύση μας. Γενικά μιλώντας, τα συνελικτικά ολοκληρώματα είναι αναγκαία όσες φορές επιδιώκουμε να βρούμε γενικές λύσεις, δηλαδή λύσεις υπό αυθαίρετες συναρτήσεις εξαναγκασμού στο δεξιό μέλος μιας διαφορικής εξίσωσης, εδώ υπό αυθαίρετη φόρτιση  $p(x)$ . Μπορούν όμως να αποφεύγονται σε πάρα πολλές ειδικές περιπτώσεις φορτίσεως, όπως είναι π.χ. η σταθερή φόρτιση  $p(x) = p_0$  με μετασχηματισμό Laplace (τον επαναλαμβάνουμε)  $\mathcal{L}\{p_0\} = p_0/s$ .

► **Παρατήρηση A11.5:** Είναι μάλλον αυτονόητο ότι ο γενικός ολοκληρωτικός τύπος (11.11.28) για το βέλος κάμψης (ουσιαστικά την ελαστική γραμμή) προβόλου πακτωμένου στο αριστερό άκρο του  $x = 0$  είναι απόλυτα ανάλογος με τον ολοκληρωτικό τύπο του Duhamel, που είχαμε συναντήσει στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις. Στις ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση ο τύπος του Duhamel είναι ο τύπος (11.6.10) με μηδενικές αρχικές συνθήκες και ο τύπος (11.6.11) με μη μηδενικές αρχικές συνθήκες. Στις ταλαντώσεις με απόσβεση είναι ο τύπος (11.8.11) χωρίς αρχικές συνθήκες και ένας λίγο γενικότερος τύπος με αρχικές συνθήκες. Παρά ταύτα ο τύπος του Duhamel αναφέρεται σε προβλήματα ταλαντώσεων με ανεξάρτητη μεταβλητή το χρόνο  $t$  και όχι σε προβλήματα δοκών με ανεξάρτητη μεταβλητή τη θέση  $x$  (και φυσικά μια εντελώς διαφορετική διαφορική εξίσωση!).

### A11.12. ΚΑΜΠΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΔΟΚΟΥ

Στις καμπτικές ιδιοταλαντώσεις (και ελεύθερες ταλαντώσεις γενικότερα) μιας συνήθους δοκού μήκους  $L$  ( $0 \leq x \leq L$ ) παρουσιάζεται η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως και με σταθερούς συντελεστές

$$X''''(x) - \beta^4 X(x) = 0. \tag{11.12.1}$$

Στην εξίσωση αυτή το  $\beta$  είναι μια θετική σταθερά, που καλώς ή κακώς την υποθέτουμε εδώ γνωστή. (Περισσότερες λεπτομέρειες γι' αυτήν στην Ενότητα A9.2 του Κεφαλαίου A9 με τον ορισμό της στη σχέση (9.2.2).) Στην παρούσα Ενότητα A11.12 θα επιλύσουμε τη διαφορική εξίσωση (11.12.1) υπό αυθαίρετες (μη γνωστές) αρχικές συνθήκες στο αριστερό άκρο  $x = 0$  της δοκού

$$X(0) = E, \quad X'(0) = F, \quad X''(0) = G, \quad X'''(0) = H. \tag{11.12.2}$$

Θα προκύψει έτσι η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης (11.12.1).

Προς το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε ξανά τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace θέτοντας

$$\hat{X}(s) := \mathcal{L}\{X(x)\}, \quad \text{οπότε} \quad \mathcal{L}\{X''''(x)\} = s^4 \hat{X}(s) - Es^3 - Fs^2 - Gs - H. \tag{11.12.3}$$

Ο μετασχηματισμός αυτός Laplace  $\mathcal{L}\{X''''(x)\}$  της παραγώγου  $X''''(x)$  προέκυψε σύμφωνα με τα γνωστά από την Παράγραφο Α10.3.5, τύπος (10.3.71) εκεί, για τους μετασχηματισμούς Laplace παραγώγων, εδώ της τετάρτης παραγώγου  $X''''(x)$ , αλλά και τις αρχικές συνθήκες (11.12.2).

Μετασχηματίζοντας τώρα κατά Laplace τη διαφορική εξίσωση (11.12.1) των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων της δοκού μας, προκύπτει αμέσως η αντίστοιχη αλγεβρική εξίσωση

$$[s^4\hat{X}(s) - Es^3 - Fs^2 - Gs - H] - \beta^4\hat{X}(s) = 0, \quad (11.12.4)$$

η οποία γράφεται ευθύς και στην ισοδύναμη μορφή

$$(s^4 - \beta^4)\hat{X}(s) = Es^3 + Fs^2 + Gs + H. \quad (11.12.5)$$

Λύνοντας την πρωτοβάθμια αυτή αλγεβρική εξίσωση φυσικά ως προς τον άγνωστο μετασχηματισμό Laplace  $\hat{X}(s) = \mathcal{L}\{X(x)\}$ , βρίσκουμε πολύ εύκολα ότι

$$\hat{X}(s) = \frac{Es^3 + Fs^2 + Gs + H}{s^4 - \beta^4} = E \frac{s^3}{s^4 - \beta^4} + F \frac{s^2}{s^4 - \beta^4} + G \frac{s}{s^4 - \beta^4} + H \frac{1}{s^4 - \beta^4}. \quad (11.12.6)$$

Δεν υπάρχει ιδιαίτερος λόγος, ώστε να επιχειρήσουμε αναλύσεις σε απλά κλάσματα. Από μέτρια εκτενείς πίνακες μπορούμε να έχουμε διαθέσιμους τους αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace που χρειαζόμαστε. Πρόκειται για τους εξής αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4 - \beta^4}\right\} = \frac{1}{2\beta^3} (\sinh \beta x - \sin \beta x), \quad (11.12.7)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^4 - \beta^4}\right\} = \frac{1}{2\beta^2} (\cosh \beta x - \cos \beta x), \quad (11.12.8)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{s^4 - \beta^4}\right\} = \frac{1}{2\beta} (\sinh \beta x + \sin \beta x), \quad (11.12.9)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^3}{s^4 - \beta^4}\right\} = \frac{1}{2} (\cosh \beta x + \cos \beta x). \quad (11.12.10)$$

Είμαστε έτοιμοι τώρα! Αντιστρέφοντας κατά Laplace τη σχέση (11.12.6), καταλήγουμε αμέσως στη ζητούμενη λύση

$$\begin{aligned} X(x) &= \frac{E}{2} (\cosh \beta x + \cos \beta x) + \frac{F}{2\beta} (\sinh \beta x + \sin \beta x) \\ &+ \frac{G}{2\beta^2} (\cosh \beta x - \cos \beta x) + \frac{H}{2\beta^3} (\sinh \beta x - \sin \beta x). \end{aligned} \quad (11.12.11)$$

Από τις τέσσερις αυθαίρετες σταθερές  $E$ ,  $F$ ,  $G$  και  $H$  οι δύο υπολογίζονται άμεσα από τις δύο συνοριακές συνθήκες στο αριστερό άκρο  $x = 0$  της ιδιοταλαντούμενης δοκού. Παραδείγματος χάρη,  $E = X(0) = 0$  και  $F = X'(0) = 0$  για πάκτωση στο αριστερό άκρο  $x = 0$ . Επίσης για τις δύο σταθερές που απομένουν πρέπει να ληφθούν υπόψη και οι δύο συνθήκες στο δεξιό άκρο  $x = L$  της ίδιας ιδιοταλαντούμενης δοκού, π.χ.  $X''(L) = 0$  και  $X'''(L) = 0$  για ελεύθερο το δεξιό άκρο. Με τον τρόπο αυτό από τη γενική λύση (11.12.11) που βρήκαμε οδηγούμαστε σε ένα **πρόβλημα ιδιοτιμών** ή **χαρακτηριστικών τιμών**. Το πρόβλημα αυτό το εξετάσαμε ήδη λεπτομερώς στην Ενότητα Α9.2 με έμφαση στην αμφιέριστη δοκό. Παραπέμπουμε λοιπόν σ' εκείνη την Ενότητα Α9.2. Η διαφορά στην παρούσα Ενότητα Α11.12 ήταν ότι για την επίλυση της διαφορικής εξισώσεως χρησιμοποιήσαμε τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Επίσης με τον παρόντα τρόπο εργασίας έχουμε κατευθείαν διαθέσιμες στη λύση (11.12.11) και τις τέσσερις αρχικές συνθήκες:  $X(0) = E$ ,  $X'(0) = F$ ,  $X''(0) = G$  και  $X'''(0) = H$ . Αυτό μας διευκολύνει κάπως στον προσδιορισμό των σχετικών **ιδιομορφών (ιδιοσυναρτήσεων)** και **ιδιοσυχνοτήτων (ιδιοτιμών)** στις καμπτικές ιδιοταλαντώσεις δοκού.

Τελειώνοντας την ενότητα αυτή, ας αναφερθούμε σύντομα στους τέσσερις αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace (11.12.7) έως (11.12.10), τους οποίους χρησιμοποιήσαμε. Παίρνουμε υπόψη μας τις σχέσεις (10.3.33) (εδώ με  $\beta$  αντί  $\omega$  και με  $x$  αντί  $t$ )

$$\mathcal{L}\{\sinh \beta x\} = \frac{\beta}{s^2 - \beta^2} \quad \text{και ανάλογα} \quad \mathcal{L}\{\sin \beta x\} = \frac{\beta}{s^2 + \beta^2} \quad (11.12.12)$$

καθώς και τη γραμμική ιδιότητα (Ιδιότητα 1) του μετασχηματισμού Laplace. Έτσι βρίσκουμε ότι

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2\beta^3}(\sinh \beta x - \sin \beta x)\right\} = \frac{1}{2\beta^3}\left(\frac{\beta}{s^2 - \beta^2} - \frac{\beta}{s^2 + \beta^2}\right) = \frac{1}{2\beta^2} \frac{s^2 + \beta^2 - s^2 + \beta^2}{(s^2 - \beta^2)(s^2 + \beta^2)} = \frac{1}{s^4 - \beta^4}. \quad (11.12.13)$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace (11.12.7). Οι τρεις επόμενοι αντίστροφοι μετασχηματισμοί Laplace (11.12.8), (11.12.9) και (11.12.10) προκύπτουν ανάλογα.

Ευκολότερη όμως είναι η απόδειξη τους με βάση τον πρώτο αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace (11.12.7) με τη χρήση της Ιδιότητας 5 του μετασχηματισμού Laplace για το μετασχηματισμό Laplace παραγώγων. Έτσι τρεις παραγωγίσεις στο δεξιό μέλος της σχέσεως (11.12.7) οδηγούν διαδοχικά στα δεξιά μέλη των τριών σχέσεων (11.12.8), (11.12.9) και (11.12.10). Στα αντίστοιχα αριστερά μέλη των ίδιων τριών σχέσεων πρέπει να γίνουν διαδοχικοί πολλαπλασιασμοί επί  $s$ , κάτι που είναι φανερό στις σχέσεις αυτές. Επίσης, για να ισχύουν οι ίδιες σχέσεις (11.12.8), (11.12.9) και (11.12.10), θα πρέπει οι τιμές των τριών συναρτήσεων στα δεξιά μέλη των τριών πρώτων σχέσεων (11.12.7), (11.12.8) και (11.12.9) να είναι ίσες με το μηδέν για  $x = 0$ . Τούτο πολύ εύκολα διαπιστώνεται ότι πραγματικά ισχύει. (Αντίθετα το δεξιό μέλος της τελευταίας σχέσεως (11.12.10) είναι ίσο με το ένα για  $x = 0$ :  $\frac{1}{2}(1 + 1) = 1$ . Αυτό όμως καθόλου μας καθόλου δε μας νοιάζει εδώ!)

Αποδείξαμε λοιπόν και τους τέσσερις τύπους (11.12.7) έως και (11.12.10) αντίστροφων μετασχηματισμών Laplace, τους οποίους χρησιμοποιήσαμε στην ενότητα αυτή. Προχωράμε τώρα!

### A11.13. ΔΟΚΟΣ ΕΠΙ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΒΑΣΕΩΣ

Στην προπροηγούμενη Ενότητα A11.11, ειδικότερα στην Παράγραφο A11.11.1, αναφερθήκαμε στην ελαστική γραμμή  $v(x)$  συνήθους δοκού. Αυτήν την προσδιορίσαμε στον τόσο σημαντικό στις δοκούς τελικό τύπο (11.11.12) με βάση: (α) τις αρχικές τιμές (11.11.4), τις επαναλαμβάνουμε:

$$v(0) = v_0, \quad v'(0) = \theta_0, \quad v''(0) = \frac{M_0}{EI}, \quad v'''(0) = \frac{Q_0}{EI}, \quad (11.13.1)$$

στο αριστερό άκρο  $x = 0$  της δοκού και (β) την κατανεμημένη κάθετη φόρτιση  $p(x)$  κατά μήκος της δοκού. Στην παρούσα ενότητα θα γενικεύσουμε τον τύπο (11.11.12) στην πιο δύσκολη περίπτωση της δοκού επί ελαστικής βάσεως (Τέτοιες δοκοί είναι οι πεδιλοδοκοί στις Θεμελιώσεις και οι σιδηροτροχιές στη Σιδηροδρομική.) Η σχετική διαφορική εξίσωση είναι η (2.1.42). Την επαναλαμβάνουμε

$$EIv''''(x) + kv(x) = p(x), \quad \text{ισοδύναμα} \quad v''''(x) + 4\beta^4 v(x) = \frac{p(x)}{EI} \quad \text{με} \quad \beta^4 = \frac{k}{4EI}, \quad (11.13.2)$$

με  $EI$  τη δυσκαμψία της δοκού και  $k$  τη συνολική σταθερά εδάφους-δοκού σύμφωνα με τη θεωρία του Winkler, που έχουμε αναφέρει στην Παράγραφο A2.1.7. Η θεωρία αυτή δέχεται το έδαφος σαν ένα σύνολο (ή σύστημα) άπειρων ασύζευκτων ελατηρίων που αντιδρούν με κατανεμημένη «φόρτιση»  $-kv(x)$  (προς τα επάνω) στη βύθιση  $v(x)$  της δοκού (που υποτίθεται προς τα κάτω).

Εδώ θα λύσουμε τη διαφορική αυτή εξίσωση (11.13.2) με βάση τις αρχικές συνθήκες (11.13.1). Πραγματικά, δηλώνουμε πρώτα με  $V(s)$  και  $P(s)$  τους μετασχηματισμούς Laplace του βέλους κάμψης  $v(x)$  (που σχηματίζει την ελαστική γραμμή της δοκού) και της φορτίσεως  $p(x)$  αντίστοιχα. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Laplace στην παραπάνω διαφορική εξίσωση (11.13.2). Με τον τρόπο αυτό βρίσκουμε την πρωτοβάθμια (γραμμική) αλγεβρική εξίσωση ως προς  $V(s)$

$$s^4 V(s) - s^3 v_0 - s^2 \theta_0 - s \frac{M_0}{EI} - \frac{Q_0}{EI} + 4\beta^4 V(s) = \frac{P(s)}{EI}, \quad (11.13.3)$$

όπου ενσωματώσαμε ήδη τις αρχικές συνθήκες (11.13.1). Σημειώνουμε πως η αλγεβρική αυτή εξίσωση (11.13.3) διαφέρει μόνο στον επιπλέον όρο της  $4\beta^4 V(s)$  από την αντίστοιχη εξίσωση (11.11.5) για δοκό που δε στηρίζεται σε ελαστική βάση. Την ξαναγράφουμε στη λίγο απλούστερη μορφή

$$(s^4 + 4\beta^4)V(s) = s^3 v_0 + s^2 \theta_0 + s \frac{M_0}{EI} + \frac{Q_0}{EI} + \frac{P(s)}{EI} \quad (11.13.4)$$

και τη λύνουμε ως προς τον άγνωστο μετασχηματισμό Laplace  $V(s)$ . Προκύπτει αμέσως η λύση

$$V(s) = \frac{s^3}{s^4 + 4\beta^4} v_0 + \frac{s^2}{s^4 + 4\beta^4} \theta_0 + \frac{s}{s^4 + 4\beta^4} \frac{M_0}{EI} + \frac{1}{s^4 + 4\beta^4} \frac{Q_0}{EI} + \frac{1}{s^4 + 4\beta^4} \frac{P(s)}{EI} \quad (11.13.5)$$

με ενσωματωμένες, επαναλαμβάνουμε, τις αρχικές συνθήκες: στις τιμές  $v_0, \theta_0, M_0$  και  $Q_0$ . Απομένει λοιπόν η αντιστροφή του γνωστού μας πλέον μετασχηματισμού Laplace  $V(s) = \mathcal{L}^{-1}\{v(x)\}$ .

Για την αντιστροφή αυτή θα χρησιμοποιήσουμε έτοιμους τους τέσσερις τελευταίους μετασχηματισμούς Laplace του Πίνακα Α10.2 χρήσιμων μετασχηματισμών Laplace στο τέλος του προηγούμενου Κεφαλαίου Α10. (Εκεί είναι μάλιστα δηλωμένο ρητά ότι οι τέσσερις αυτοί μετασχηματισμοί Laplace εφαρμόζονται σε δοκό επί ελαστικής βάσεως: στην παρούσα δοκό.) Αντιστροφή λοιπόν!

Για λόγους ομοιομορφίας είχαμε χρησιμοποιήσει στη δεύτερη στήλη του Πίνακα Α10.2 σαν μεταβλητή της αρχικής συναρτήσεως  $u(t)$  το  $t$ . Εδώ φυσικά θα χρησιμοποιήσουμε το  $x$ . Έτσι οι τέσσερις τελευταίοι μετασχηματισμοί Laplace του Πίνακα Α10.2 γράφονται αμέσως στις μορφές

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^4 + 4\beta^4} \right\} = F_4(x) := \frac{1}{4\beta^3} (\cosh \beta x \sin \beta x - \sinh \beta x \cos \beta x), \quad (11.13.6)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^4 + 4\beta^4} \right\} = F_3(x) := \frac{1}{2\beta^2} \sinh \beta x \sin \beta x, \quad (11.13.7)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^2}{s^4 + 4\beta^4} \right\} = F_2(x) := \frac{1}{2\beta} (\cosh \beta x \sin \beta x + \sinh \beta x \cos \beta x), \quad (11.13.8)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^3}{s^4 + 4\beta^4} \right\} = F_1(x) := \cosh \beta x \cos \beta x. \quad (11.13.9)$$

Πήραμε το θάρρος να δηλώσουμε τις τέσσερις συναρτήσεις στη δεύτερη στήλη του Πίνακα Α10.2 με τα απλά σύμβολα  $F_4(x), F_3(x), F_2(x)$  και  $F_1(x)$  για την απλότητα του τελικού μας τύπου αμέσως πιο κάτω για το βέλος κάμψεως  $v(x)$  της δοκού μας (που σχηματίζει την ελαστική γραμμή της).

Τώρα απλά αντιστρέφουμε το γνωστό μετασχηματισμό Laplace  $V(s) = \mathcal{L}\{v(x)\}$  στην πιο πάνω σχέση (11.13.5). Με τον τρόπο αυτό βρίσκουμε αμέσως ότι

$$v(x) = \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\} = v_0 F_1(x) + \theta_0 F_2(x) + \frac{M_0}{EI} F_3(x) + \frac{Q_0}{EI} F_4(x) + \frac{1}{EI} \int_0^x F_4(x - \xi) p(\xi) d\xi. \quad (11.13.10)$$

(Σημειώνουμε ότι στον τελευταίο όρο, στον όρο με το ολοκλήρωμα, χρησιμοποιήσαμε βέβαια και το θεώρημα της συνελίξεως: Ιδιότητα 7 του μετασχηματισμού Laplace.) Ο τύπος αυτός (11.13.10) είναι ο ανάλογος τύπος του τύπου (11.11.12) για δοκό χωρίς στήριξη σε ελαστική βάση: με  $\beta = 0$ .

Ο τύπος (11.13.10) ισχύει για οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες  $v_0, \theta_0, M_0$  και  $Q_0$  στο αριστερό άκρο  $x = 0$  της δοκού επί ελαστικής βάσεως. Επίσης και για αυθαίρετη φόρτιση  $p(x)$  της ίδιας δοκού (αρκεί βέβαια να υπάρχει το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος). Είναι ένας θαυμάσιος τύπος εξαιρετικής γενικότητας, που βρέθηκε εδώ με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace, η οποία είναι μάλλον και η απλούστερη δυνατή. (Είναι απλούστερη από την «ανταγωνιστική» της μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων και ίσως κι από οποιαδήποτε πρακτική δυνατότητα του Πολιτικού Μηχανικού.)

Συνήθως βέβαια ξέρουμε δύο μόνο από τις ποσότητες  $v_0, \theta_0, M_0$  και  $Q_0$  στο αριστερό άκρο  $x = 0$  της δοκού, εδώ επί ελαστικής βάσεως. Τότε βέβαια οι δύο άγνωστες ποσότητες στον πιο πάνω γενικό τύπο (11.13.10) προσδιορίζονται απλά από τις άλλες δύο συνθήκες που διαθέτουμε: στο δεξιό άκρο  $x = L$  της ίδιας δοκού όποιες και να 'ναι αυτές: τέσσερις συνολικά συνοριακές συνθήκες.

### A11.14. ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΜΕΝΟ ΦΟΡΤΙΟ ΣΕ ΠΡΟΒΟΛΟ

Θεωρούμε τώρα ένα συνήθη πρόβολο μήκους  $L$  (με  $0 \leq x \leq L$ ) και δυσκαμψίας  $EI$  με πάκτωση στο αριστερό άκρο του  $x = 0$  και με ελεύθερο το δεξιό άκρο του  $x = L$ . Η φόρτιση του προβόλου συνίσταται σε ένα συγκεντρωμένο φορτίο  $P$ , το οποίο εφαρμόζεται στο σημείο  $x = a$  του προβόλου (φυσικά με  $0 < a \leq L$ ). Μια τέτοια φόρτιση (ένα συγκεντρωμένο φορτίο  $P$ ) μπορεί να παρασταθεί με τη χρήση της συναρτήσεως δέλτα του Dirac σαν δήτην κατανεμημένη φόρτιση  $p(x)$  ως εξής:

$$p(x) = P\delta(x - a) \quad \text{με} \quad 0 < a \leq L \quad \text{και} \quad 0 \leq x \leq L \quad (11.14.1)$$

με μηδενική τιμή παντού εκτός από το σημείο  $x = a$ , όπου  $|p(a)| = \infty$ . Η σχετική διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως (11.11.1) ως προς το άγνωστο βέλος κάμψεως  $v(x)$  του προβόλου είναι η εξής:

$$v''''(x) = \frac{p(x)}{EI} \quad \text{κι εδώ} \quad v''''(x) = \frac{P}{EI} \delta(x - a) \quad \text{με} \quad 0 < x < L. \quad (11.14.2)$$

Επίσης οι συνοριακές συνθήκες (πακτωμένο άκρο  $x = 0$  και ελεύθερο άκρο  $x = L$ ) είναι οι ακόλουθες:

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v''(L) = 0, \quad v'''(L) = 0. \quad (11.14.3)$$

Θα λύσουμε το πρόβλημα αυτό συνοριακών τιμών με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Θέτοντας κατά τα γνωστά  $V(s) = \mathcal{L}\{v(x)\}$  για το μετασχηματισμό Laplace της άγνωστης συναρτήσεως  $v(x)$  και λαμβάνοντας υπόψη ότι  $\mathcal{L}\{\delta(x)\} = 1$ , οπότε  $\mathcal{L}\{\delta(x - a)\} = e^{-as}$ , από τη διαφορική εξίσωση (11.14.2) με μετασχηματισμό Laplace παίρνουμε την πρωτοβάθμια αλγεβρική εξίσωση

$$s^4V(s) - s^3v(0) - s^2v'(0) - sv''(0) - v'''(0) = \frac{P}{EI} e^{-as}. \quad (11.14.4)$$

Σημειώνουμε ότι στην αλγεβρική αυτή εξίσωση χρησιμοποιήσαμε το γνωστό μας τύπο (11.11.2) για το μετασχηματισμό Laplace της τετάρτης παραγώγου  $v''''(x)$ . Αλλ' οι δύο ποσότητες  $v(0)$  (αρχικό βέλος κάμψεως) και  $v'(0)$  (αρχική στροφή) είναι μηδενικές στο πακτωμένο άκρο του προβόλου: δύο πρώτες συνοριακές συνθήκες (11.14.3):  $v(0) = 0$  και  $v'(0) = 0$ . Δυστυχώς οι άλλες δύο ποσότητες

$$v''(0) = \frac{M_0}{EI} \quad \text{και} \quad v'''(0) = \frac{Q_0}{EI} \quad (11.14.5)$$

στο ίδιο άκρο  $x = 0$  (στην πάκτωση) είναι άγνωστες. Στις σχέσεις αυτές δηλώσαμε με  $M_0$  και  $Q_0$  την καμπτική ροπή και την τέμνουσα δύναμη αντίστοιχα στο ίδιο άκρο  $x = 0$  (στην πάκτωση) του προβόλου. Έτσι η πρωτοβάθμια αλγεβρική εξίσωση (11.14.4) παίρνει την τελική της μορφή

$$s^4V(s) - \frac{M_0}{EI} s - \frac{Q_0}{EI} = \frac{P}{EI} e^{-as} \quad (11.14.6)$$

με λύση τη συνάρτηση

$$V(s) = \frac{M_0}{EI s^3} + \frac{Q_0}{EI s^4} + \frac{P}{EI s^4} e^{-as}. \quad (11.14.7)$$

Λαμβάνουμε τώρα υπόψη μας τους γνωστούς τύπους (11.11.8) καθώς και τον τύπο (10.3.48). Τον επαναλαμβάνουμε αλλάζοντας λίγο τα σύμβολα (από χρόνο  $t$  σε θέση  $x$  κι από  $t_0$  σε  $a$ )

$$\mathcal{L}\{u(x - a)H(x - a)\} = e^{-as}U(s). \quad (11.14.8)$$

Τώρα μπορούμε πια να αντιστρέψουμε το μετασχηματισμό Laplace (11.14.7). Με τον τρόπο αυτό προσδιορίζουμε το άγνωστο βέλος κάμψεως  $v(x) = \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\}$  του προβόλου μας στη μορφή

$$v(x) = \frac{M_0}{2EI} x^2 + \frac{Q_0}{6EI} x^3 + \frac{P}{6EI} (x - a)^3 H(x - a) = \frac{1}{6EI} [3M_0 x^2 + Q_0 x^3 + P(x - a)^3 H(x - a)] \quad (11.14.9)$$

φυσικά με  $H(x)$  την τόσο γνωστή μας πια βηματική συνάρτηση του Heaviside (Παράγραφος A10.3.4).

Μας απομένει τώρα η πλήρωση και των δύο τελευταίων συνοριακών συνθηκών (11.14.3):  $v''(L) = 0$  και  $v'''(L) = 0$  στο ελεύθερο άκρο  $x = L$  του προβόλου. Για την πλήρωση των δύο αυτών συνθηκών παραγωγίζουμε πρώτα τρεις φορές την προηγούμενη σχέση (11.14.9). Έτσι παίρνουμε

$$\theta(x) = v'(x) = \frac{1}{2EI} [2M_0x + Q_0x^2 + P(x-a)^2H(x-a)], \quad (11.14.10)$$

$$M(x) = EIv''(x) = EI\theta'(x) = M_0 + Q_0x + P(x-a)H(x-a), \quad (11.14.11)$$

$$Q(x) = EIv'''(x) = M'(x) = Q_0 + PH(x-a) \quad (11.14.12)$$

έχοντας προτιμήσει να δώσουμε προτεραιότητα στα μεγέθη  $\theta(x)$  (στροφή),  $M(x)$  (καμπτική ροπή) και  $Q(x)$  (τέμνουσα δύναμη) κατά μήκος του προβόλου. Τέλος  $p(x) = EIv''''(x) = Q'(x) = P\delta(x-a)$ .

Λοιπόν η τελευταία συνοριακή συνθήκη  $v'''(L) = 0$ , ισοδύναμα  $Q(L) = 0$ : μηδενική τέμνουσα δύναμη στο ελεύθερο άκρο  $x = L$  του προβόλου, και η τελευταία σχέση (11.14.12) μας δίνουν

$$Q_0 + P \cdot 1 = 0, \quad \text{οπότε} \quad Q_0 = -P, \quad (11.14.13)$$

αφού  $L \geq a$  στο ελεύθερο αυτό άκρο. Με ανάλογο τρόπο, επειδή τώρα  $Q_0 = -P$ , η τρίτη συνοριακή συνθήκη  $v''(L) = 0$ , ισοδύναμα  $M(L) = 0$ : μηδενική καμπτική ροπή πάλι στο ελεύθερο άκρο  $x = L$  του προβόλου, και η σχέση (11.14.11) μας δίνουν με  $Q_0 = -P$

$$M_0 + (-P)L + P(L-a) \cdot 1 = 0, \quad \text{οπότε} \quad M_0 - PL + PL - Pa = 0 \quad \text{και τελικά} \quad M_0 = Pa. \quad (11.14.14)$$

► **Παρατήρηση Α11.6:** Είναι απόλυτα προφανές για τον Πολιτικό Μηχανικό πως οι ίδιες ακριβώς τιμές  $M_0 = Pa$  και  $Q_0 = -P$  προκύπτουν εναλλακτικά από τις **εξισώσεις στατικής ισορροπίας** του προβόλου: ισορροπία δυνάμεων κατά τον άξονα  $y$  κάθετα στον πρόβολο και ισορροπία ροπών.

Τώρα πλέον με  $M_0 = Pa$  και  $Q_0 = -P$  γράφουμε τους τέσσερις τύπους (11.14.9) έως (11.14.12) για τα μεγέθη  $v(x)$ ,  $\theta(x)$ ,  $M(x)$  και  $Q(x)$  κατά μήκος του προβόλου μας στις τελικές τους μορφές

$$v(x) = \frac{P}{6EI} [3ax^2 - x^3 + (x-a)^3H(x-a)], \quad (11.14.15)$$

$$\theta(x) = \frac{P}{2EI} [2ax - x^2 + (x-a)^2H(x-a)], \quad (11.14.16)$$

$$M(x) = -P(x-a)[1 - H(x-a)], \quad (11.14.17)$$

$$Q(x) = -P[1 - H(x-a)]. \quad (11.14.18)$$

Ας μη λησμονούμε βέβαια ότι  $H(x-a) = 0$  για  $x < a$ , ενώ  $H(x-a) = 1$  για  $x \geq a$ : σχέση (10.3.54).

Μπορούμε να συναγάγουμε πάρα πολλά συμπεράσματα από τους τύπους αυτούς. Ας περιορισθούμε όμως στα εξής τρία: (α) Η στροφή  $\theta(x)$  του προβόλου (και η κλίση του εννοείται) είναι σταθερή και ίση με  $Pa^2/(2EI)$  για  $a \leq x \leq L$ . Αυτό είναι εύλογο, γιατί ο πρόβολος είναι αφόρτιστος στο μήκος του αυτό. (β) Η καμπτική ροπή  $M(x)$  και η τέμνουσα δύναμη  $Q(x)$  είναι μηδενικές στο ίδιο διάστημα  $[a, L]$ . (Με την ίδια αιτιολογία!) (γ) Σ' αυτό το διάστημα  $[a, L]$  το βέλος κάμψεως  $v(x)$  μεταβάλλεται γραμμικά με τη θέση  $x$ , αφού  $H(x-a) = 1$  για  $x \geq a$ . Συγκεκριμένα το βέλος κάμψεως παίρνει τις αναλυτικές μορφές

$$v(x) = \begin{cases} \frac{Px^2}{6EI} (3a-x), & \text{εάν } 0 \leq x \leq a, \\ \frac{Pa^2}{6EI} (3x-a), & \text{εάν } a \leq x \leq L \end{cases} \quad (11.14.19)$$

με  $v(a) = Pa^3/(3EI)$ . Την απόλυτα μέγιστη τιμή του την παίρνει προφανώς στο άκρο  $x = L$ , όπου

$$v(L) = \frac{Pa^2}{6EI} (3L-a) \quad \text{και στην ειδική περίπτωση που } a = L: \quad v(L) = \frac{PL^3}{3EI}. \quad (11.14.20)$$

### A11.15. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ MACAULAY

Στα Μαθηματικά, στη Φυσική, στις Επιστήμες του Μηχανικού, παντού όπου χρησιμοποιούνται οι συναρτήσεις  $H(x)$  (βηματική συνάρτηση του Heaviside) και  $\delta(x)$  (συνάρτηση δέλτα του Dirac) τα πιο πάνω σύμβολα (ή παραπλήσια σύμβολα για τη συνάρτηση  $H(x)$ ) είναι τα καθιερωμένα.

Ο Πολιτικός Μηχανικός όμως χρησιμοποιεί ειδικά σύμβολα για τις συναρτήσεις αυτές, τις παραγώγους τους και τα ολοκληρώματά τους. Τότε ορίζονται οι καλούμενες **συναρτήσεις Macaulay**,<sup>1</sup> Για τις συναρτήσεις Macaulay χρησιμοποιούνται ειδικά σύμβολα: οι αγκύλες του Macaulay (αν και είναι γωνιακές αγκύλες, όχι οι συνηθισμένες αγκύλες). Οι συναρτήσεις Macaulay ορίζονται ως εξής:

$$(x - a)^0 := H(x - a) \quad \text{με μετασχηματισμό Laplace για } a \geq 0: \quad \mathcal{L}\{(x - a)^0\} = \frac{e^{-as}}{s}, \quad (11.15.1)$$

$$(x - a)^{-1} := \delta(x - a) \quad \text{με μετασχηματισμό Laplace για } a \geq 0: \quad \mathcal{L}\{(x - a)^{-1}\} = e^{-as}, \quad (11.15.2)$$

$$(x - a)^{-2} := \delta'(x - a) \quad \text{με μετασχηματισμό Laplace για } a \geq 0: \quad \mathcal{L}\{(x - a)^{-2}\} = se^{-as}, \quad (11.15.3)$$

$$(x - a)^{-3} := \delta''(x - a) \quad \text{με μετασχηματισμό Laplace για } a \geq 0: \quad \mathcal{L}\{(x - a)^{-3}\} = s^2e^{-as} \quad (11.15.4)$$

για τη βηματική συνάρτηση  $H(x - a)$ , τη συνάρτηση  $\delta(x - a)$  του Dirac (με  $\delta(x - a) = H'(x - a)$ ) και τις διαδοχικές παραγώγους της. Ανάλογοι είναι και οι ορισμοί των συναρτήσεων Macaulay για θετικές ακέραιες τιμές του  $n$  (με  $n = 1, 2, \dots$ ), δηλαδή για τα διαδοχικά ολοκληρώματα της βηματικής συναρτήσεως του Heaviside  $H(x - a)$ . Τότε έχουμε τους ορισμούς

$$(x - a)^n := (x - a)^n H(x - a) \quad \text{με μετασχηματισμό Laplace για } a \geq 0: \quad \mathcal{L}\{(x - a)^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} e^{-as}. \quad (11.15.5)$$

Πρόκειται λοιπόν για έναν ομοιόμορφο και ιδιαίτερα χρήσιμο συμβολισμό για όλες αυτές τις συναρτήσεις του Πολιτικού Μηχανικού, που, όπως ήδη γνωρίζουμε, συχνά χρησιμοποιούνται σε προβλήματα δοκών. Τις συναρτήσεις αυτές (και το σχετικό συμβολισμό) τις εισήγαγε ο Άγγλος μαθηματικός Macaulay το 1919 σε πολύ σύντομη εργασία του στο αγγλικό περιοδικό *The Messenger of Mathematics*. Ήταν χρήσιμες συναρτήσεις, έμειναν και εξυπηρετούν και σήμερα τον Πολιτικό Μηχανικό. (Επί της ουσίας όμως οι συναρτήσεις Macaulay είχαν χρησιμοποιηθεί και παλαιότερα σε προβλήματα δοκών στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού για πρώτη φορά από τον Clebsch το 1862 κι έπειτα από το Förppl το 1897.) Ας κοιτάξουμε ειδικά τις σχέσεις (11.15.5). Δεν είναι πιο ωραίος ο συμβολισμός των συναρτήσεων αυτών με τα αριστερά μέλη τους παρά με τα δεξιά; *Είναι!*

Οι ίδιες συναρτήσεις Macaulay (11.15.1) έως (11.15.5) καλούνται πολύ συχνά και **συναρτήσεις ιδιομορφίας** από τον Πολιτικό Μηχανικό. Αυτές που έχουν αρνητικό εκθέτη  $n$ , δηλαδή οι συναρτήσεις Macaulay  $(x - a)^n$  με  $n = -1, -2, -3$ , πραγματικά είναι ιδιαίτερα ιδιόμορφες συναρτήσεις. Αντίθετα η συνάρτηση Macaulay  $(x - a)^0$ , δηλαδή η βηματική συνάρτηση του Heaviside  $H(x - a)$ , παρουσιάζει απλά μοναδιαία ασυνέχεια στο σημείο  $x = a$ . Τέλος οι συναρτήσεις Macaulay  $(x - a)^n$  με θετικό εκθέτη  $n = 1, 2, 3, \dots$  είναι συνεχείς στο σημείο  $x = a$ , αν και οι παράγωγοί τους (από μία τάξη και μετά) είναι στ' αλήθεια ιδιόμορφες συναρτήσεις στο σημείο  $x = a$ .

▼ **Εφαρμογή A11.3 (Φόρτιση δοκού):** Θεωρούμε τη φόρτιση  $p(x)$  μιας δοκού μήκους  $L = 5a$ . Η φόρτιση αυτή συνίσταται από δύο συγκεντρωμένα φορτία: το φορτίο  $2P$  στη θέση  $x = a$  και το φορτίο  $-3P$  στη θέση  $x = 3a$ , από μία ροπή κάμψεως  $-M_b$  στο σημείο  $x = 2a$ , από μία σταθερή κάθετη κατανεμημένη φόρτιση  $p_0$  στο τμήμα  $[0, a]$  της δοκού και από μία γραμμικά μεταβαλλόμενη κάθετη κατανεμημένη φόρτιση (από μηδέν μέχρι  $p_1$ ) στο τελευταίο τμήμα  $[4a, 5a]$  της ίδιας δοκού. Ζητείται η παράσταση της φορτίσεως αυτής  $p(x)$  με δύο διαφορετικούς τρόπους: (α) Με τον κλασικό συμβολισμό και (β) Με τη χρήση κατάλληλων συναρτήσεων Macaulay.

<sup>1</sup> Για τις συναρτήσεις Macaulay ο Πολιτικός Μηχανικός μπορεί να βρει πολλά στοιχεία και εφαρμογές στο ενδιαφέρον σύγγραμμα: Μαστρογιάννης, Ε. Ν. (1999), *Μηχανική των Υλικών*, Τόμος Δεύτερος. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα καθώς και σε άλλα βιβλία Μηχανικής των Υλικών. Πρόκειται για κλασικό θέμα του Πολιτικού Μηχανικού.

**Λύση:** (α) Ξεκινάμε με τον κλασικό συμβολισμό. Πρόκειται για τη φόρτιση

$$p_k(x) = p_0[H(x) - H(x-a)] + 2P\delta(x-a) - M_b\delta'(x-2a) - 3P\delta(x-3a) + \frac{P_1}{a}(x-4a)H(x-4a) \quad (11.15.6)$$

μόνο για  $0 \leq x \leq 5a$ , όπου είναι η δοκός μας  $[0, 5a]$ . Τί μας νοιάζει (δε μας νοιάζει!) πιο αριστερά (για  $x < 0$ ) και πιο δεξιά (για  $x > 5a$ ), όπου δεν υπάρχει δοκός, άρα ούτε και φόρτισή της  $p(x)$ .

(β) Συνεχίζουμε τώρα με τη χρήση συναρτήσεων Macaulay. Με τον ίδιο τρόπο συνάγουμε ότι

$$p_M(x) = p_0[\langle x \rangle^0 - \langle x-a \rangle^0] + 2P\langle x-a \rangle^{-1} - M_b\langle x-2a \rangle^{-2} - 3P\langle x-3a \rangle^{-1} + \frac{P_1}{a}\langle x-4a \rangle \quad (11.15.7)$$

φυσικά με  $\langle x-4a \rangle := \langle x-4a \rangle^1$ . Σημειώνουμε επίσης πως η αγκύλη  $[\langle x \rangle^0 - \langle x-a \rangle^0]$  παίρνει τις τιμές 1 για  $0 \leq x < a$  και 0 για  $x \geq a$ . Άρα παριστάνει σωστά τη σταθερή κατανεμημένη φόρτιση  $p_0$  στο τμήμα  $[0, a]$  της δοκού με την εξαίρεση του σημείου  $x = a$ . Αλλ' αυτό δεν έχει καμία απολύτως πρακτική σημασία. Είναι τέλος προφανές ότι  $p_k(x) \equiv p_M(x)$  καθ' όλο το μήκος  $[0, 5a]$  της δοκού. ▲

▼ **Εφαρμογή A11.4 (Συγκεντρωμένο φορτίο σε πρόβολο):** Πρόκειται για το ίδιο πρόβλημα δοκού που ήδη λύθηκε στην προηγούμενη Ενότητα A11.14. Ζητείται να ξαναγραφούν (α) η φόρτιση  $p(x)$  και (β) το βέλος κάμψεως  $v(x)$  με τη χρήση συναρτήσεων Macaulay.

**Λύση:** (α) Η φόρτιση  $p(x)$  (στην πραγματικότητα το συγκεντρωμένο φορτίο  $P$  στο σημείο  $x = a$  του προβόλου) προσδιορίζεται από τη σχέση (11.14.1). Εδώ δίνουμε και το διπλό συμβολισμό

$$p(x) = P\delta(x-a) \equiv P\langle x-a \rangle^{-1} \quad \text{με} \quad 0 < a \leq L \quad \text{και} \quad 0 \leq x \leq L \quad (11.15.8)$$

στο δεξιό μέλος με τη χρήση της συναρτήσεως Macaulay  $\langle x-a \rangle^{-1} := \delta(x-a)$ .

(β) Το βέλος κάμψεως  $v(x)$  του προβόλου (η ελαστική γραμμή του προβόλου) υπολογίζεται από τη σχέση (11.14.15). Ανάλογα με το προηγούμενο ερώτημα έχουμε και πάλι το διπλό συμβολισμό

$$v(x) = \frac{P}{6EI} [3ax^2 - x^3 + (x-a)^3 H(x-a)] = \frac{P}{6EI} [3ax^2 - x^3 + \langle x-a \rangle^3] \quad \text{με} \quad 0 \leq x \leq L. \quad (11.15.9)$$

Ο δεύτερος συμβολισμός (με χρήση της συναρτήσεως Macaulay  $\langle x-a \rangle^3$ ) είναι ο συντομότερος. ▲

▼ **Εφαρμογή A11.5 (Ροπή σε πρόβολο):** Σε πρόβολο μήκους  $L$  (με  $0 \leq x \leq L$ ) και δυσκαμψίας  $EI$  με φόρτιση μόνο ροπή  $M_a$  στη θέση  $x = a$  (με  $0 < a \leq L$ ) ζητείται η ελαστική γραμμή του. Πακτωμένο είναι το αριστερό άκρο  $x = 0$  του προβόλου και ελεύθερο το δεξιό άκρο του  $x = L$ .

**Λύση:** Πρόκειται για μια λίγο διαφορετική περίπτωση από εκείνη της Ενότητας A11.14 και της προηγούμενης εφαρμογής. Συγκεκριμένα εδώ ο πρόβολος έχει τη δήθεν «κατανεμημένη» φόρτιση

$$p(x) = M_a\langle x-a \rangle^{-2} \quad \text{με} \quad 0 < a \leq L \quad \text{και} \quad 0 \leq x \leq L. \quad (11.15.10)$$

Φυσικά η φόρτιση αυτή είναι ιδιόμορφη στο σημείο  $x = a$  εφαρμογής της ροπής  $M_a$  και επίσης  $\langle x-a \rangle^{-2} := \delta'(x-a)$ . Στην τόσο γνωστή μας πια διαφορική εξίσωση  $EIv''''(x) = p(x)$  εφαρμόζουμε ξανά τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Έτσι βρίσκουμε αντίστοιχα με τη σχέση (11.14.6)

$$v''''(x) = \frac{M_a}{EI} \langle x-a \rangle^{-2} \implies s^4 V(s) - \frac{M_0}{EI} s - \frac{Q_0}{EI} = \frac{M_a s}{EI} e^{-as} \quad (11.15.11)$$

με  $M_0$  και  $Q_0$  την καμπτική ροπή και την τέμνουσα δύναμη αντίστοιχα στο σημείο  $x = 0$  της πακτώσεως του προβόλου. Λύνουμε τώρα ως προς  $V(s) = \mathcal{L}\{v(x)\}$  και προσδιορίζουμε τη λύση

$$V(s) = \mathcal{L}\{v(x)\} = \frac{M_0}{EIs^3} + \frac{Q_0}{EIs^4} + \frac{M_a}{EIs^3} e^{-as}. \quad (11.15.12)$$

Τελικά αντιστρέφουμε κατά Laplace και παίρνουμε το βέλος κάμψεως (την ελαστική γραμμή)

$$v(x) = \frac{M_0}{2EI} \langle x \rangle^2 + \frac{Q_0}{6EI} \langle x \rangle^3 + \frac{M_a}{2EI} \langle x-a \rangle^2 \quad \text{με} \quad 0 \leq x \leq L. \quad (11.15.13)$$



Τώρα όμως από τις δύο εξισώσεις ισοροπίας (α) δυνάμεων (κατά τον άξονα  $Oy$  κάθετα στον πρόβολο) και (β) ροπών προκύπτει αμέσως ότι (α)  $Q_0 = 0$  και (β)  $M_0 = -M_a$ . Με τις δύο αυτές τιμές ο προηγούμενος τύπος (11.15.13) παίρνει την τελική του μορφή

$$v(x) = -\frac{M_a}{2EI} [(x)^2 - (x-a)^2] \quad \text{με} \quad 0 \leq x \leq L. \quad (11.15.14)$$

(Θα μπορούσαμε βέβαια να είχαμε θέσει  $x^2$  αντί για  $\langle x \rangle^2$ , αφού έχουμε  $0 \leq x \leq L$  στον πρόβολο.) ▲

► **Παρατήρηση A11.7:** Φυσικά είναι απόλυτα δυνατό να εργασθούμε με τις συναρτήσεις Macaulay χωρίς τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace (απλά με ολοκληρώσεις) στην ειδική περίπτωση της συνήθους δοκού με διαφορική εξίσωση  $EIv''''(x) = p(x)$  κι αυτό κάνει συνήθως ο Πολιτικός Μηχανικός. Εννοείται ότι απλές ολοκληρώσεις δε μπορούν να γίνουν σε δοκό επί ελαστικής βάσεως εξαιτίας του πρόσθετου όρου  $kv(x)$ : του όρου των «ελατηρίων» στην υπόθεση του Winkler.

► **Παρατήρηση A11.8:** Οι συναρτήσεις Macaulay, οι οποίες καλούνται συχνά και συναρτήσεις ιδιομορφίας, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, είναι ιδιαίτερα χρήσιμες για ασυνέχειες στη φόρτιση  $p(x)$ , στην τέμνουσα δύναμη  $Q(x)$  και στη ροπή κάμψεως  $M(x)$ . Αντίθετα σε μια συνήθη δοκό η στροφή της (η κλίση της)  $\theta(x)$  και το βέλος κάμψεως της  $v(x)$  δε μπορούν να παρουσιάσουν ασυνέχεια. (Πάει η δοκός! Στράβωσε, έσπασε αντίστοιχα.) Εντούτοις σε θέσεις αρθρώσεων κατά μήκος της δοκού (σαν δύο δοκοί αρθρωμένες σε ένα κοινό άκρο τους  $x = a$ ) μπορούμε να δεχθούμε ασυνέχεια στη στροφή  $\theta(x)$ . Τότε είναι χρήσιμη και η πιο ιδιόμορφη συνάρτηση Macaulay  $\langle x-a \rangle^{-3} := \delta''(x-a)$  στη σχέση (11.15.4), που δε μας δόθηκε η ευκαιρία να χρησιμοποιήσουμε πιο πάνω. (Το κάναμε όμως και για οικονομία χώρου. Τί να κάνουμε; Πάντα υπάρχει κάποιος περιορισμός χώρου!)

## A11.16. ΧΗΜΙΚΗ ΚΙΝΗΤΙΚΗ: ΑΠΟΔΟΜΗΣΗ ΡΥΠΟΥ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ

### A11.16.1. Το πρόβλημα αρχικής τιμής

Παραπλήσιο πρόβλημα από μαθηματικής απόψεως με το πρόβλημα της ψύξεως υλικού σημείου στη Μετάδοση Θερμότητας (Ενότητα A11.2) είναι και το πρόβλημα αρχικής τιμής που αφορά στην αποδόμηση ρύπου πρώτης τάξεως συναρτήσει του χρόνου  $t$  στη Χημική Κινητική, π.χ. στον Καθαρισμό Νερού. Συγκεκριμένα θεωρούμε ακίνητο ρύπο σε ένα δοχείο με νερό με ομοιόμορφη συγκέντρωση του ρύπου  $c(t)$  μέσα στο νερό. Η συγκέντρωση αυτή  $c(t)$  μεταβάλλεται με το χρόνο  $t$  λόγω αποδόμησης του ρύπου σε παράγωγά του. Η αποδόμηση αυτή υποτίθεται ότι γίνεται με χημική αντίδραση πρώτης τάξεως  $A \rightarrow B$  (**απλή μονόδρομη αντίδραση πρώτης τάξεως**) και με **κινητική σταθερά του ρυθμού αντιδράσεως** (ή στην περίπτωση μας **σταθερά του ρυθμού αποδόμησης ή διασπάσεως του ρύπου**) ίση με  $k$  ( $k > 0$ ). Η αρχική συγκέντρωση  $c(0)$  του ρύπου (για  $t = 0$ ) είναι γνωστή και ίση με  $c_0$ . Άρα έχουμε ξανά ένα πρόβλημα αρχικής τιμής. Τούτο αποτελείται από τη σχετική διαφορική εξίσωση της Χημικής Κινητικής

$$-\frac{dc(t)}{dt} = kc(t) \quad \text{απόλυτα ισοδύναμα} \quad \dot{c}(t) = -kc(t) \quad (11.16.1)$$

(με την τελεία να δηλώνει ξανά χρονική παράγωγο:  $\dot{c}(t) := dc(t)/dt$ ) και τη σχετική αρχική συνθήκη

$$c(0) = c_0. \quad (11.16.2)$$

Το πρόβλημα αυτό μπορεί βέβαια να λυθεί με διάφορους τρόπους, π.χ. (α) με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών ή (β) με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως. Εδώ θα λύσουμε το ίδιο πρόβλημα με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace με εργασία ανάλογη με εκείνη που ακολουθήσαμε στην εφαρμογή της Παραγράφου A11.2 στη Μετάδοση Θερμότητας. Τώρα όμως θα είμαστε πιο σύντομοι στη λύση μας. Αναφέρουμε πρώτα τα τρία κύρια βήματα της επιλύσεως και τέλος το τέταρτο βήμα: το βήμα της επαληθεύσεως της λύσεως που βρέθηκε.

**A11.16.2. Βήμα 1: Μετατροπή της διαφορικής εξίσωσης σε αλγεβρική**

Καταρχήν δηλώνουμε με  $C(s)$  τον άγνωστο μετασχηματισμό Laplace της επίσης άγνωστης συγκεντρώσεως  $c(t)$  του ρύπου χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο κεφαλαίο γράμμα. Συγκεκριμένα

$$C(s) := \mathcal{L}\{c(t)\}. \quad (11.16.3)$$

Εφαρμόζουμε τώρα το μετασχηματισμό Laplace στη συνήθη διαφορική εξίσωση (11.16.1). Με βάση και τη γραμμική ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}\{\dot{c}(t)\} = -k\mathcal{L}\{c(t)\}. \quad (11.16.4)$$

Για το μετασχηματισμό Laplace  $\mathcal{L}\{\dot{c}(t)\}$  της πρώτης παραγώγου  $\dot{c}(t)$  της άγνωστης συναρτήσεως (της συγκεντρώσεως  $c(t)$  του ρύπου) θα χρησιμοποιήσουμε πάλι την Ιδιότητα 5 του μετασχηματισμού Laplace για το μετασχηματισμό Laplace της παραγώγου συναρτήσεως. Συγκεκριμένα θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (10.3.68) της Παραγράφου A10.3.5. Ο τύπος αυτός έχει τη μορφή

$$\mathcal{L}\{u'(t)\} = sU(s) - u(0). \quad (11.16.5)$$

Στην περίπτωσή μας ο ίδιος τύπος παίρνει για τη συγκέντρωση  $c(t)$  του ρύπου τη μορφή

$$\mathcal{L}\{\dot{c}(t)\} = sC(s) - c_0, \quad (11.16.6)$$

όπου πήραμε υπόψη μας και την αρχική συνθήκη (11.16.2):  $c(0) = c_0$ .

Επομένως η εξίσωση (11.16.4) που προέκυψε με μετασχηματισμό Laplace από την αρχική διαφορική εξίσωση της Χημικής Κινητικής (11.16.1) που εξετάζουμε στην παρούσα αποδόμηση ρύπου πρώτης τάξεως παίρνει τώρα την εξής πρωτοβάθμια αλγεβρική μορφή:

$$sC(s) - c_0 = -kC(s) \implies (s+k)C(s) = c_0. \quad (11.16.7)$$

Για να προσδιορίσουμε την εξίσωση αυτή λάβαμε υπόψη τον ορισμό (11.16.3) του μετασχηματισμού Laplace  $C(s)$  της συγκεντρώσεως  $c(t)$  του ρύπου. Πήραμε επίσης υπόψη την ιδιότητα (11.16.6) για το μετασχηματισμό Laplace  $sC(s) - c_0$  της πρώτης παραγώγου  $\dot{c}(t)$  της ίδιας συγκεντρώσεως  $c(t)$ .

**A11.16.3. Βήμα 2: Επίλυση της αλγεβρικής εξίσωσης**

Είναι πάλι πάρα πολύ εύκολο το βήμα της επιλύσεως της γραμμικής (πρωτοβάθμιας) αλγεβρικής εξίσωσης (11.16.7) ως προς την άγνωστη συνάρτηση  $C(s) = \mathcal{L}\{c(t)\}$ . Έτσι προκύπτει ότι

$$C(s) = \frac{c_0}{s+k}. \quad (11.16.8)$$

Τουλάχιστον έμμεσα είμαστε ξανά υποχρεωμένοι να υποθέσουμε ότι  $s+k > 0$  (δηλαδή ότι  $s > -k$ ).

**A11.16.4. Βήμα 3: Αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace**

Είναι στ' αλήθεια πάρα πολύ απλή η αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace (11.16.8) και θα μας επιτρέψει να επανέλθουμε από τη χωρίς φυσική σημασία μεταβλητή  $s$  του μετασχηματισμού Laplace στο χρόνο  $t$  με ξεκάθαρη φυσική σημασία. Για την αντιστροφή αυτή αρκεί να έχουμε υπόψη μας τη γραμμική ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace και να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (11.2.17) της παραγράφου A11.2.4. Επαναλαμβάνουμε τον τύπο αυτό:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+k}\right\} = e^{-kt}. \quad (11.16.9)$$

Έτσι με την αντιστροφή κατά Laplace της λύσεως (11.16.8) προκύπτει ότι

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}\{C(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{c_0}{s+k}\right\} = c_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+k}\right\} = c_0 e^{-kt}. \quad (11.16.10)$$

Αυτή είναι η λύση (φυσικά η μοναδική λύση!) του παρόντος προβλήματος αρχικής τιμής (11.16.1) και (11.16.2), το οποίο αφορά στην αποδόμηση ρύπου με χημική αντίδραση πρώτης τάξεως.

Από τη λύση αυτή  $c(t)$  μπορούμε να προσδιορίσουμε και το **χρόνο ημιζωής**  $t_{1/2}$  του ρύπου υπό τις παρούσες συνθήκες. Ο χρόνος ημιζωής  $t_{1/2}$  είναι ο χρόνος εκείνος όπου η συγκέντρωση  $c(t_{1/2})$  του ρύπου έχει μειωθεί στο μισό της αρχικής συγκέντρωσεως  $c(0) = c_0$ , δηλαδή εξ ορισμού έχουμε  $c(t_{1/2}) = c_0/2$ . Έτσι από την πιο πάνω λύση (11.16.10) βρίσκουμε εύκολα ότι

$$\frac{c_0}{2} = c_0 e^{-kt_{1/2}} \implies \frac{1}{2} = e^{-kt_{1/2}} \implies -kt_{1/2} = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 \implies t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k} \approx \frac{0.693}{k} \quad (11.16.11)$$

για το χρόνο ημιζωής  $t_{1/2}$  του ρύπου (επαναλαμβάνουμε υπό τις παρούσες συνθήκες, όχι γενικά!).

#### A11.16.5. Βήμα 4: Επαλήθευση της λύσεως

Θα επαληθεύσουμε τώρα τη λύση

$$c(t) = c_0 e^{-kt}, \quad (11.16.12)$$

που μόλις βρήκαμε στη σχέση (11.16.10). Καταρχήν, θέτοντας σ' αυτήν  $t = 0$ , διαπιστώνουμε αμέσως ότι  $c(0) = c_0$ , αφού η εκθετική συνάρτηση  $e^{-kt}$  παίρνει την τιμή 1 για  $t = 0$ . Επομένως επαληθεύεται η αρχική συνθήκη (11.16.2). Τώρα παραγωγίζουμε την ίδια λύση  $c(t)$  και έχουμε

$$\dot{c}(t) = c_0(-k)e^{-kt} = -kc_0 e^{-kt}. \quad (11.16.13)$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τη συνάρτηση (εδώ τη συγκέντρωση ρύπου)  $c(t)$  αλλά και την πρώτη παράγωγό της  $\dot{c}(t)$  στη διαφορική μας εξίσωση (11.16.1). Έτσι προκύπτει αμέσως ότι

$$\dot{c}(t) = -kc(t) \implies -kc_0 e^{-kt} = -kc_0 e^{-kt} \implies 0 = 0. \quad (11.16.14)$$

Με τον τρόπο αυτό τα δύο μέλη της διαφορικής εξισώσεως  $\dot{c}(t) = -kc(t)$  προέκυψαν ίσα, όταν  $c(t) = c_0 e^{-kt}$ , δηλαδή για τη λύση που βρήκαμε για τη συγκέντρωση  $c(t)$  του ρύπου. Επομένως επαληθεύθηκαν τόσο η διαφορική εξίσωση (11.16.1) όσο και η αρχική συνθήκη (11.16.2) στο παρόν πρόβλημα αρχικής τιμής. Άρα είναι σίγουρο πως η συνάρτηση  $c(t) = c_0 e^{-kt}$  στη λύση (11.16.10) είναι η λύση (η μοναδική λύση!) του παρόντος προβλήματος αρχικής τιμής (11.16.1) και (11.16.2).

Ας παρατηρήσουμε τέλος ότι προσδιορίσαμε κατευθείαν τη ζητούμενη λύση  $c(t)$  (μαζί με την αρχική συνθήκη  $c(0) = c_0$ ). Δε χρειάστηκε να βρούμε πρώτα τη γενική λύση  $c_g(t)$  της διαφορικής εξισώσεως (11.16.1) και στη συνέχεια να προσδιορίσουμε την αυθαίρετη σταθερά  $A$  σ' αυτήν, ώστε να τη μετατρέψουμε στη ζητούμενη μερική (ή ειδική) λύση που αντιστοιχεί στο πιο πάνω πρόβλημα αρχικής τιμής (11.16.1) (διαφορική εξίσωση) και (11.16.2) (αρχική συνθήκη). Τούτο αποτελεί ένα ιδιαίτερα σημαντικό πλεονέκτημα της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace.

### A11.17. ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ: ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΡΥΠΟΥ ΣΕ ΥΔΑΤΟΡΡΕΥΜΑ

#### A11.17.1. Το πρόβλημα αρχικής τιμής

Στην εφαρμογή αυτή θεωρούμε το ενδιαφέρον πρόβλημα της μεταφοράς ρύπου σε υδατόρρευμα. Η μεταφορά αυτή υποτίθεται πως γίνεται και με **μεταγωγή** και με **διάχυση** του ρύπου. (Η **διασπορά** του ρύπου θεωρείται ότι μαθηματικά έχει ενσωματωθεί στη διάχυσή του με τροποποίηση του σχετικού **συντελεστή μοριακής διαχύσεως**  $D$ .) Δεχόμαστε επίσης ότι υπάρχει και **αποδόμηση** του ρύπου πρώτης τάξεως με **σταθερά του ρυθμού αποδομήσεως**  $k$ . Η ταχύτητα του νερού (του ύδατος) στο υδατόρρευμα θεωρείται και αυτή σταθερά και ίση με  $V$  ( $V > 0$ ).

Εδώ θα εξετάσουμε τη μεταφορά του ρύπου σε μόνιμη (σταθερή) κατάσταση με τη συγκέντρωσή του  $c$  να εξαρτάται μόνο από τη θέση  $x$  (με  $0 \leq x < \infty$ ) κατά μήκος του υδατορρεύματος, που προσεγγιστικά το θεωρούμε ημιάπειρο. Το πιο δύσκολο πρόβλημα όπου η συγκέντρωση του ρύπου εξαρτάται τόσο από τη θέση  $x$  όσο και από το χρόνο  $t$  θα το εξετάσουμε στο Μέρος Β των διδακτικών αυτών βιβλίων. Το Μέρος Β αφορά στις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγωγούς.

Στο παρόν πρόβλημα προκύπτει μια γραμμική συνήθης διαφορική εξίσωση: η εξίσωση

$$V \frac{dc}{dx} = D \frac{d^2c}{dx^2} - kc \quad \text{ισοδύναμα} \quad Vc'(x) = Dc''(x) - kc(x) \quad \text{με} \quad c = c(x) \quad \text{και} \quad 0 \leq x < \infty. \quad (11.17.1)$$

Στην εξίσωση αυτή (11.17.1) ο όρος  $V(dc/dx) \equiv Vc'(x)$  αντιστοιχεί στη μεταγωγή του ρύπου, ο όρος  $D(d^2c/dx^2) \equiv Dc''(x)$  στη διάχυσή του (και στη διασπορά του, η οποία θεωρείται ότι «συμμετέχει» στο συντελεστή  $D$ ) και ο όρος  $-kc$  στην αποδόμησή του με χημική αντίδραση πρώτης τάξεως. Άγνωστη συνάρτηση είναι η συγκέντρωση  $c = c(x)$  του ρύπου κατά μήκος του υδατορρεύματος (με  $0 \leq x < \infty$ ). Θα προσδιορίσουμε τη λύση  $c = c(x)$  αυτής της συνήθους διαφορικής εξίσωσης.

Σαν αρχική συνθήκη (ως προς τη θέση  $x$  εννοείται) για  $x = 0$  δεχόμαστε τη συνθήκη

$$c(0) = c_0 \quad (11.17.2)$$

με το  $c_0$  γνωστή σταθερά. Υποθέτουμε επίσης ότι για  $x \rightarrow \infty$  δεν είναι δυνατόν από φυσικής απόψεως να απειρίζεται η συγκέντρωση  $c(x)$  του ρύπου. Δηλαδή δεχόμαστε και τον περιορισμό

$$c(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} c(x) < \infty \quad (11.17.3)$$

για πεπερασμένη συγκέντρωση  $c(\infty)$  του ρύπου στο άπειρο.

Η αρχική συνθήκη (11.17.2) και ο περιορισμός (11.17.3) μπορούν εναλλακτικά να θεωρηθούν ότι αποτελούν δύο συνοριακές συνθήκες: η πρώτη για  $x = 0$  και η δεύτερη για  $x \rightarrow \infty$ . Είναι λογικό αυτό, αφού η διαφορική μας εξίσωση (11.17.1) είναι δευτέρας τάξεως. Άρα χρειάζεται ουσιαστικά δύο συνθήκες για την επίλυσή της. Θα μπορούσαμε να έχουμε δύο αρχικές συνθήκες: για  $x = 0$  μόνο. Εντούτοις εδώ έχουμε μόνο (α) την αρχική συνθήκη (11.17.2): αρχική τιμή  $c(0) = c_0$  για  $x = 0$  και (β) τον περιορισμό (11.17.3): πεπερασμένη τιμή  $c(\infty)$  για  $x \rightarrow \infty$ .

Και το παρόν πρόβλημα μπορεί εύκολα να επιλυθεί με τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης, που περιγράφεται στην Παράγραφο A5.5 του Κεφαλαίου A5. Εδώ θα επιλύσουμε το ίδιο πρόβλημα με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Η εργασία μας θα είναι ανάλογη με εκείνη που ακολουθήσαμε στις εφαρμογές στη Μετάδοση Θερμότητας (στην Παράγραφο A11.2) και στη Χημική Κινητική (στην προηγούμενη Παράγραφο A11.16). Παρατηρούμε βέβαια ότι εδώ ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η θέση  $x$  κατά μήκος του υδατορρεύματος (με  $0 \leq x < \infty$ ) και όχι ο χρόνος  $t$  αντίθετα με ό,τι συνέβαινε στην προηγούμενη εφαρμογή. Αυτή η διαφορά είναι ουσιαστικής από φυσικής απόψεως (θέση  $x$  αντί για χρόνο  $t$ ), αλλ' εντελώς ασήμαντη από μαθηματικής απόψεως. Εδώ απλά θα χρησιμοποιήσουμε τη θέση  $x$  στον τόσο γνωστό μας πια ορισμό (10.2.1) του μετασχηματισμού Laplace, δηλαδή στην περίπτωση μας θα έχουμε

$$C(s) := \mathcal{L}\{c(x)\} := \int_0^{\infty} e^{-sx} c(x) dx. \quad (11.17.4)$$

Θα είμαστε και πάλι όσο μπορούμε πιο σύντομοι στη λύση μας, αν και δεν έχουμε και πολλά περιθώρια συντομίας! Ακολουθώντας την ήδη γνωστή μας διαδικασία, θα αναφέρουμε ξανά πρώτα τα τρία κύρια βήματα της επίλυσης και στο τέλος το τέταρτο βήμα: το βήμα της επαληθεύσεως της λύσεως που θα βρεθεί.

### A11.17.2. Βήμα 1: Μετατροπή της διαφορικής εξίσωσης σε αλγεβρική

Δηλώσαμε ήδη στη σχέση (11.17.4) με  $C(s)$  τον άγνωστο μετασχηματισμό Laplace της επίσης

άγνωστης συγκεντρώσεως  $c(x)$  του ρύπου στο υδατόρρευμα χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο κεφαλαίο γράμμα. Στο σημείο αυτό εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Laplace στη συνήθη διαφορική εξίσωση (11.17.1). Με βάση και τη γραμμική ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace προκύπτει ότι

$$V\mathcal{L}\{c'(x)\} = D\mathcal{L}\{c''(x)\} - k\mathcal{L}\{c(x)\}. \quad (11.17.5)$$

Για το μετασχηματισμό Laplace  $\mathcal{L}\{c'(x)\}$  της πρώτης παραγώγου  $c'(x)$  και για το μετασχηματισμό Laplace  $\mathcal{L}\{c''(x)\}$  της δευτέρας παραγώγου  $c''(x)$  της άγνωστης συναρτήσεως  $c(x)$  (της συγκεντρώσεως του ρύπου στο υδατόρρευμα) θα χρησιμοποιήσουμε για μία ακόμη φορά τη θεμελιώδη ιδιότητα 5 του μετασχηματισμού Laplace. Αυτή αφορά, όπως ξέρουμε, στους μετασχηματισμούς Laplace των παραγώγων συναρτήσεως. Συγκεκριμένα θα χρησιμοποιήσουμε τους δύο τύπους (10.3.68) και (10.3.69) της Παραγράφου A10.3.5 για τους μετασχηματισμούς Laplace της πρώτης και της δευτέρας παραγώγου αντίστοιχα. Οι τύποι αυτοί παίρνουν στο πρόβλημά μας τις αντίστοιχες μορφές

$$\mathcal{L}\{c'(x)\} = sC(s) - c(0), \quad (11.17.6)$$

$$\mathcal{L}\{c''(x)\} = s^2C(s) - sc(0) - c'(0). \quad (11.17.7)$$

Τους δύο αυτούς μετασχηματισμούς Laplace τους ξαναγράφουμε λαμβάνοντας τώρα υπόψη και την αρχική συνθήκη (11.17.2):  $c(0) = c_0$ . Δυστυχώς δε διαθέτουμε δεύτερη αρχική συνθήκη, π.χ. τη  $c'(0) = c'_0$ . Έτσι την παράγωγο  $c'(0)$  τη δηλώνουμε σαν αυθαίρετη σταθερά  $A$ :  $c'(0) = A$  και επιφυλασσόμαστε να την προσδιορίσουμε με τη χρήση του περιορισμού (11.17.3):  $c(\infty) < \infty$  στο άπειρο. Με τον τρόπο αυτό οι δύο παραπάνω τύποι (11.17.6) και (11.17.7) παίρνουν τις μορφές

$$\mathcal{L}\{c'(x)\} = sC(s) - c_0, \quad (11.17.8)$$

$$\mathcal{L}\{c''(x)\} = s^2C(s) - sc_0 - A. \quad (11.17.9)$$

Οι μορφές αυτές θα μας εξασφαλίσουν την αυτόματη πλήρωση της αρχικής συνθήκης (11.17.2). Τώρα για τον περιορισμό (11.17.3) στο άπειρο (για  $x \rightarrow \infty$ ) δεν έχουμε κάνει τίποτε ουσιαστικό προς το παρόν. Εντούτοις διαθέτουμε τη σταθερά  $A$  στον τύπο (11.17.9). Θα την προσδιορίσουμε κατάλληλα σε λίγο, έτσι ώστε και ο περιορισμός (11.17.3) να ληφθεί και αυτός υπόψη. Σε λίγο ...

Επομένως η εξίσωση (11.17.5), η οποία προέκυψε με μετασχηματισμό Laplace από την αρχική μας διαφορική εξίσωση (11.17.1) της μόνιμης (σταθερής) μεταφοράς ρύπου με αποδόμηση σε υδατόρρευμα που μελετάμε, παίρνει τώρα την εξής αλγεβρική μορφή:

$$V[sC(s) - c_0] = D[s^2C(s) - sc_0 - A] - kC(s) \implies (Ds^2 - Vs - k)C(s) = Dc_0s + AD - Vc_0. \quad (11.17.10)$$

Για να βρούμε την πρωτοβάθμια αυτή αλγεβρική εξίσωση, πήραμε βέβαια υπόψη μας: (α) τον ορισμό (11.17.4) του μετασχηματισμού Laplace  $C(s)$  της άγνωστης συγκεντρώσεως  $c(x)$  του ρύπου καθώς και (β) τους δύο τύπους (11.17.8) και (11.17.9) για τους μετασχηματισμούς Laplace των δύο πρώτων παραγώγων  $c'(x)$  και  $c''(x)$  αντίστοιχα της ίδιας άγνωστης συγκεντρώσεως  $c(x)$  του ρύπου.

### A11.17.3. Βήμα 2: Επίλυση της αλγεβρικής εξίσωσης

Και πάλι πρόκειται για ένα εξαιρετικά απλό βήμα στην όλη διαδικασία της επιλύσεως του παρόντος προβλήματος με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Απλά λύνουμε τη γραμμική (πρωτοβάθμια) αλγεβρική εξίσωση (11.17.10) ως προς την άγνωστη συνάρτηση  $C(s) = \mathcal{L}\{c(x)\}$ . Προκύπτει αμέσως ότι

$$C(s) = \frac{Dc_0s + AD - Vc_0}{Ds^2 - Vs - k}. \quad (11.17.11)$$

Σημειώνουμε πως είναι πάρα πολύ σημαντικός ο παρονομαστής  $q(s) = Ds^2 - Vs - k$  στο μετασχηματισμό αυτό Laplace. Είναι μάλιστα και δευτέρου βαθμού, ενώ ο αριθμητής  $p(s) = Dc_0s + AD - Vc_0$

είναι πρώτου βαθμού. Αυτό μας εξασφαλίζει από απειρισμούς τύπου συναρτήσεως δέλτα του Dirac,  $\delta(x)$ , στη λύση  $c(x) = \mathcal{L}^{-1}\{C(s)\}$  που επιδιώκουμε να προσδιορίσουμε.

#### A11.17.4. Βήμα 3: Αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace

Προχωράμε τώρα στην αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace (11.17.11), τον οποίο ήδη υπολογίσαμε. Προς το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της αναλύσεως σε απλά κλάσματα προσδιορίζοντας πρώτα τις δύο ρίζες  $\mu_1$  και  $\mu_2$  του παρονομαστή  $q(s) = Ds^2 - Vs - k$ . Πολύ εύκολα βρίσκουμε ότι

$$q(s) = Ds^2 - Vs - k = 0 \implies \mu_1 = \frac{V + \sqrt{V^2 + 4kD}}{2D} \quad \text{και} \quad \mu_2 = \frac{V - \sqrt{V^2 + 4kD}}{2D}. \quad (11.17.12)$$

Φυσικά, αφού  $k > 0$  και  $D > 0$ , η ρίζα  $\mu_1$  είναι θετική, ενώ αντίθετα η ρίζα  $\mu_2$  είναι αρνητική, γιατί προφανώς  $\sqrt{V^2 + 4kD} > V$ .

Τώρα ο παρονομαστής  $q(s)$  μπορεί να γραφεί σε μορφή γινομένου (με παράγοντες) ως εξής:

$$q(s) = Ds^2 - Vs - k = D(s - \mu_1)(s - \mu_2). \quad (11.17.13)$$

Επομένως ο μετασχηματισμός Laplace  $C(s)$  στη σχέση (11.17.11) μπορεί κι αυτός να γραφεί στην αντίστοιχη μορφή

$$C(s) = \frac{Dc_0s + AD - Vc_0}{Ds^2 - Vs - k} = \frac{Dc_0s + AD - Vc_0}{D(s - \mu_1)(s - \mu_2)}. \quad (11.17.14)$$

Το επόμενο βήμα μας είναι να προχωρήσουμε σε ανάλυση του μετασχηματισμού αυτού Laplace σε απλά κλάσματα. Προφανώς εξαιτίας του παρονομαστή η ανάλυση αυτή θα είναι της μορφής

$$C(s) = \frac{Dc_0s + AD - Vc_0}{D(s - \mu_1)(s - \mu_2)} = \frac{\Gamma}{s - \mu_1} + \frac{\Delta}{s - \mu_2}. \quad (11.17.15)$$

Για τον προσδιορισμό των δύο άγνωστων σταθερών  $\Gamma$  και  $\Delta$  ένας απλός δυνατός τρόπος είναι να πολλαπλασιάσουμε τη σχέση (11.17.15) επί  $q(s) = D(s - \mu_1)(s - \mu_2)$  διώχνοντας έτσι όλους τους παρονομαστές. Με τον τρόπο αυτό βρίσκουμε ότι

$$Dc_0s + AD - Vc_0 = D\Gamma(s - \mu_2) + D\Delta(s - \mu_1) \implies Dc_0s + AD - Vc_0 = D(\Gamma + \Delta)s - D(\Gamma\mu_2 + \Delta\mu_1). \quad (11.17.16)$$

Για να ισχύει εκ ταυτότητος η σχέση αυτή, θα πρέπει οπωσδήποτε να έχουμε

$$\Gamma + \Delta = c_0 \quad \text{και} \quad \Gamma\mu_2 + \Delta\mu_1 = -\frac{AD - Vc_0}{D}. \quad (11.17.17)$$

Πρόκειται για ένα πάρα πολύ απλό σύστημα δύο μη ομογενών γραμμικών (πρωτοβάθμιων) αλγεβρικών εξισώσεων με δύο αγνώστους: τις δύο σταθερές  $\Gamma$  και  $\Delta$  στην παραπάνω ανάλυση σε απλά κλάσματα (11.17.15), που ζητάμε να προσδιορίσουμε. Η λύση του συστήματος αυτού είναι η εξής:

$$\Gamma = \frac{D(c_0\mu_1 + A) - Vc_0}{D(\mu_1 - \mu_2)} \quad \text{και} \quad \Delta = -\frac{D(c_0\mu_2 + A) - Vc_0}{D(\mu_1 - \mu_2)}. \quad (11.17.18)$$

Για τον προσδιορισμό των ίδιων σταθερών  $\Gamma$  και  $\Delta$  ένας δεύτερος και υπολογιστικά απλούστερος τρόπος είναι ο εξής: Στην ανάλυση σε απλά κλάσματα (11.17.15) πολλαπλασιάζουμε πρώτα επί  $s - \mu_1$  και στο αποτέλεσμα θέτουμε αμέσως  $s = \mu_1$ . Διαπιστώνουμε ότι έτσι προκύπτει πολύ εύκολα η σταθερά  $\Gamma$ . Ανάλογα, πολλαπλασιάζοντας την ίδια σχέση (11.17.15) επί  $s - \mu_2$  και θέτοντας στο αποτέλεσμα  $s = \mu_2$ , βρίσκουμε και τη δεύτερη σταθερά  $\Delta$ . Ελέγξαμε και το δεύτερο αυτό τρόπο, που αναμφίβολα είναι υπολογιστικά πιο σύντομος, και καταλήξαμε στις ίδιες ακριβώς σχέσεις (11.17.18) για τις σταθερές  $\Gamma$  και  $\Delta$ , όπως και προηγουμένως με την πρώτη μέθοδο.

Εν πάση περιπτώσει τώρα έχουμε πλήρως διαθέσιμη την ανάλυση σε απλά κλάσματα (11.17.15). Την επαναλαμβάνουμε χωρίς το ενδιαμέσο κλάσμα

$$C(s) = \frac{\Gamma}{s - \mu_1} + \frac{\Delta}{s - \mu_2}. \quad (11.17.19)$$

Σημειώνουμε βέβαια ότι τώρα πλέον οι σταθερές  $\Gamma$  και  $\Delta$  σ' αυτήν την ανάλυση σε απλά κλάσματα είναι γνωστές από τις δύο σχέσεις (11.17.18).

Είμαστε τώρα πια απόλυτα έτοιμοι να προχωρήσουμε στην αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace  $C(s)$ . Έτσι θα βρούμε την άγνωστη συνάρτηση  $c(x) = \mathcal{L}^{-1}\{C(s)\}$  στο πεδίο της θέσεως  $x$  (και όχι της μεταβλητής  $s$  του μετασχηματισμού Laplace, η οποία δεν έχει φυσική σημασία). Απλά ξαναθυμόμαστε τον τύπο (10.2.17) για το μετασχηματισμό Laplace της εκθετικής συναρτήσεως

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s - a} \quad \text{και αντίστροφα κατά Laplace} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - a}\right\} = e^{at}, \quad \text{εφόσον } s > a. \quad (11.17.20)$$

Εδώ αρκεί να θέσουμε  $a = \mu_1$  και επίσης  $a = \mu_2$  χωρίς βέβαια να λησμονούμε και τη γραμμική ιδιότητα τόσο (α) στον ευθύ μετασχηματισμό Laplace (10.3.5) όσο και (β) στον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace (11.2.13). Με τον τρόπο αυτό, δηλαδή αντιστρέφοντας κατά Laplace το μετασχηματισμό Laplace  $C(s)$  της άγνωστης συναρτήσεως  $c(x)$  στη σχέση (11.17.19), βρίσκουμε ότι

$$c(x) = \mathcal{L}^{-1}\{C(s)\} = \Gamma e^{\mu_1 x} + \Delta e^{\mu_2 x}. \quad (11.17.21)$$

Πρέπει όμως στο σημείο αυτό να λάβουμε υπόψη μας και τον περιορισμό (11.17.3):  $c(\infty) < \infty$ . Επειδή η ρίζα  $\mu_1 = (V + \sqrt{V^2 + 4kD})/(2D)$  είναι πάντοτε θετική, ο σχετικός εκθετικός όρος  $e^{\mu_1 x}$  στη λύση αυτή (11.17.21) τείνει φυσικά στο άπειρο για  $x \rightarrow \infty$ . Τούτο όμως παραβιάζει τον πιο πάνω περιορισμό  $c(\infty) < \infty$  και επομένως είναι απαράδεκτο. Άρα ο σχετικός όρος  $\Gamma e^{\mu_1 x}$  δεν έχει κανένα λόγο παρουσίας στην πιο πάνω λύση (11.17.21). Η μόνη δυνατότητα για το σκοπό αυτό είναι να τεθεί  $\Gamma = 0$ . Τότε η ίδια λύση (11.17.21) θα μεταπέσει στην πολύ απλούστερη μορφή της

$$c(x) = \Delta e^{\mu_2 x} \quad (11.17.22)$$

με μία μόνο σταθερά σ' αυτήν: τη σταθερά  $\Delta$ .

Τώρα που θέσαμε  $\Gamma = 0$ , όπως πράγματι έπρεπε, από την πρώτη σχέση (11.17.18) θα έχουμε

$$\Gamma = \frac{D(c_0 \mu_1 + A) - Vc_0}{D(\mu_1 - \mu_2)} = 0 \implies D(c_0 \mu_1 + A) - Vc_0 = 0 \implies DA - Vc_0 = -Dc_0 \mu_1. \quad (11.17.23)$$

Αντικαθιστώντας την παράσταση αυτή  $DA - Vc_0 = -Dc_0 \mu_1$  στη δεύτερη σχέση (11.17.18) για τη σταθερά  $\Delta$  που έχει απομείνει στη λύση (11.17.22) (ήδη θέσαμε  $\Gamma = 0$ ), διαπιστώνουμε ότι

$$\Delta = -\frac{D(c_0 \mu_2 + A) - Vc_0}{D(\mu_1 - \mu_2)} = \frac{Dc_0 \mu_1 - Dc_0 \mu_2}{D(\mu_1 - \mu_2)} = \frac{Dc_0(\mu_1 - \mu_2)}{D(\mu_1 - \mu_2)} = c_0 \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} = c_0 \cdot 1 = c_0. \quad (11.17.24)$$

Επομένως με την τόσο απλή αυτή τιμή της σταθεράς  $\Delta$ , την τιμή  $\Delta = c_0$ , η λύση (11.17.22) παίρνει επιτέλους την τελική της μορφή

$$c(x) = c_0 e^{\mu_2 x}, \quad \text{όπου} \quad \mu_2 = \frac{V - \sqrt{V^2 + 4kD}}{2D} < 0, \quad (11.17.25)$$

όπως ήδη γνωρίζουμε καλά από την τελευταία σχέση (11.17.12). Ήταν βέβαια αναμενόμενη η λύση αυτή (11.17.25), αφού είχαμε πάρει ήδη υπόψη μας την αρχική συνθήκη (11.17.2):  $c(0) = c_0$  κατά την ώρα του μετασχηματισμού Laplace της διαφορικής εξισώσεως (11.17.1). Συγκεκριμένα την πήραμε υπόψη μας στους τύπους (11.17.8) και (11.17.9) για τους μετασχηματισμούς Laplace των δύο παραγώγων  $c'(x)$  και  $c''(x)$ . Προσδιορίσαμε έτσι τη λύση (11.17.25) του παρόντος προβλήματος μόνιμης μεταφοράς ρύπου σε υδατόρρευμα παράλληλα με αποδόμησή του πρώτης τάξεως.

**A11.17.5. Βήμα 4: Επαλήθευση της λύσεως**

Στο τελευταίο βήμα θα επαληθεύσουμε τη λύση (11.17.25), που μόλις προσδιορίσαμε. Καταρχήν, για  $x = 0$  έχουμε  $c(0) = c_0$ , αφού  $e^0 = 1$ . Άρα πληρούται η αρχική συνθήκη (11.17.2). Στη συνέχεια, επειδή  $\mu_2 < 0$ , πληρούται και ο περιορισμός (11.17.3), αφού  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\mu_2 x} = 0$  με  $\mu_2 < 0$ .

Μας απομένει τώρα η επαλήθευση της διαφορικής εξίσωσης (11.17.1). Προς το σκοπό αυτό παραγωγίζουμε δύο φορές τη λύση (11.17.25) που βρήκαμε προηγουμένως και διαπιστώνουμε ότι

$$c(x) = c_0 e^{\mu_2 x} \implies c'(x) = c_0 \mu_2 e^{\mu_2 x} \implies c''(x) = c_0 \mu_2^2 e^{\mu_2 x}. \quad (11.17.26)$$

Αντικαθιστούμε τη λύση  $c(x)$  και τις δύο αυτές πρώτες παραγώγους της  $c'(x)$  και  $c''(x)$  στη διαφορική εξίσωση (11.17.1), την υπενθυμίζουμε:  $Vc'(x) = Dc''(x) - kc(x)$ . Με τον τρόπο αυτό προκύπτει ότι

$$Vc_0 \mu_2 e^{\mu_2 x} = Dc_0 \mu_2^2 e^{\mu_2 x} - kc_0 e^{\mu_2 x}. \quad (11.17.27)$$

Απλοποιούμε την εξίσωση αυτή διαιρώντας και τα δύο μέλη της με το γινόμενο  $c_0 e^{\mu_2 x}$ . Παίρνουμε

$$V\mu_2 = D\mu_2^2 - k \implies D\mu_2^2 - V\mu_2 - k = 0. \quad (11.17.28)$$

Αλλά το  $\mu_2$  είναι στ' αλήθεια ρίζα του δευτεροβάθμιου αυτού πολυωνύμου  $q(s) = Ds^2 - Vs - k$  με  $q(\mu_2) = 0$ . Έτσι πραγματικά το προσδιορίσαμε (μαζί με την άλλη ρίζα  $\mu_1$ ) στη σχέση (11.17.12).

Επομένως ισχύει η σχέση (11.17.28) και έχει επαληθευθεί και η διαφορική εξίσωση (11.17.1). Άρα σίγουρα η λύση  $c(x) = c_0 e^{\mu_2 x}$  είναι η λύση του παρόντος προβλήματος μεταφοράς ρύπου (μαζί με αποδόμησή του) στη μόνιμη κατάσταση κατά μήκος ημιάπειρου υδατορρέυματος.

**A11.17.6. Τελικές παρατηρήσεις**

Από την παραπάνω λύση (11.17.25),  $c(x) = c_0 e^{\mu_2 x}$ , παρατηρούμε αμέσως ότι η συγκέντρωση του ρύπου  $c(x)$  ξεκινάει από την αρχική της τιμή  $c(0) = c_0$  και ολοένα ελαττώνεται καθώς μεγαλώνει η ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$ , η μεταβλητή που δηλώνει τη θέση κατά μήκος του υδατορρέυματος. Για  $x \rightarrow \infty$  προφανώς θα έχουμε  $c(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} c(x) = 0$ , αφού, όπως ήδη έχουμε υπολογίσει,  $\mu_2 = (V - \sqrt{V^2 + 4kD})/(2D) < 0$  στη λύση (11.17.25). Φυσικά η μείωση αυτή της συγκεντρώσεως  $c(x)$  του ρύπου οφείλεται προφανώς στην αποδόμησή του (αποδόμηση πρώτης τάξεως με σταθερά του ρυθμού αποδομήσεως  $k$ ). Αυτή η αποδόμηση αποτελεί την αιτία του μηδενισμού της συγκεντρώσεως του ρύπου για  $x \rightarrow \infty$ , που ήδη διαπιστώσαμε μαθηματικά στη λύση (11.17.25).

Αντίθετα, εάν δεν υπήρχε αποδόμηση του ρύπου (σε παράγωγά του), τότε θα είχαμε βέβαια  $k = 0$ . Στην περίπτωση αυτή οι τιμές των δύο ριζών  $\mu_1$  και  $\mu_2$  του παρονομαστή  $q(s)$ , τώρα απλά  $q(s) = Ds^2 - Vs = (Ds - V)s$ , στις σχέσεις (11.17.12) θα ήσαν οι ακόλουθες:  $\mu_1 = V/D > 0$  και  $\mu_2 = 0$ . Όμως με  $\mu_2 = 0$  η λύση μας  $c(x) = c_0 e^{\mu_2 x}$  θα μετατρέπεται στην απλούστερη λύση  $c(x) = c_0$ . Δηλαδή η συγκέντρωση  $c(x)$  του ρύπου κατά μήκος του υδατορρέυματος θα ήταν σταθερή και δε θα μειωνόταν με τη θέση  $x$ . Άρα ούτε στο άπειρο (για  $x \rightarrow \infty$ ) θα μηδενιζόταν αντίθετα με ό,τι συμβαίνει με  $k > 0$ . Αυτές οι παρατηρήσεις είναι βέβαια απόλυτα προφανείς: επειδή δεν υπάρχει αποδόμηση του ρύπου, είναι λογικό η συγκέντρωσή του να είναι σταθερή στη μόνιμη κατάσταση.

► **Παρατήρηση A11.9:** Σημειώνουμε τέλος δύο εφαρμογές στον Καθαρισμό Νερού.<sup>2</sup> Η διαφορική εξίσωση (11.16.1) παρουσιάζεται και στο πρόβλημα του **αντιδραστήρα πλήρους ανάμιξης ασυνεχούς τροφοδότησης** ή **CMBR αντιδραστήρα** στον Καθαρισμό Νερού σε περίπτωση αντιδράσεως πρώτης τάξεως. Επίσης η διαφορική εξίσωση (11.17.1) παρουσιάζεται και στο πρόβλημα του **αντιδραστήρα με διασκορπισμένη εμβολική ροή** υπό συνθήκες μόνιμης καταστάσεως και για αντίδραση πρώτης τάξεως στον Καθαρισμό Νερού. (Φυσικά και οι δυο τους μπορούν να λυθούν εύκολα και χωρίς μετασχηματισμό Laplace, π.χ. με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως!)

<sup>2</sup>Όλες οι σχετικές λεπτομέρειες αναφέρονται στις πολύ ενδιαφέρουσες πρόσφατες Πανεπιστημιακές Παραδόσεις: Χρυσικόπουλος, Κ. Β. (2007), *Καθαρισμός Νερού*, Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πάτρα.



---

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ *A12*

## ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ: ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

---

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Σε πολλές περιπτώσεις οι διαφορικές εξισώσεις που συναντάει ο Πολιτικός Μηχανικός στα θέματα της επιστήμης του είναι ανεξάρτητες συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Για παράδειγμα, τέτοιες εξισώσεις είναι η εξίσωση του μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος μάζας–ελατηρίου–αποσβεστήρα, η εξίσωση της συνήθους δοκού, η εξίσωση της δοκού επί ελαστικής βάσεως, κλπ. Στις διαφορικές αυτές εξισώσεις μία μόνο είναι η άγνωστη συνάρτηση (που καλείται και εξαρτημένη μεταβλητή).

Υπάρχουν εντούτοις και πάρα πολλές άλλες περιπτώσεις όπου ο Πολιτικός Μηχανικός έχει να αντιμετωπίσει (και να επιλύσει βέβαια ...) περισσότερες από μία διαφορικές εξισώσεις με περισσότερες από μία άγνωστες συναρτήσεις και οι διαφορικές αυτές εξισώσεις είναι συζευγμένες. Ο χαρακτηρισμός αυτός σημαίνει ότι η καθεμία από τις εξισώσεις αυτές (ή τουλάχιστον μία εξίσωση) περιέχει πάνω από μία άγνωστες συναρτήσεις. Στην περίπτωση αυτή έχουμε απλά ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων (εδώ συνήθων διαφορικών εξισώσεων) με περισσότερες από μία διαφορικές εξισώσεις και επίσης περισσότερες από μία άγνωστες συναρτήσεις. Όμως το σύστημα αυτό έχει μία μόνο εξαρτημένη μεταβλητή, συνήθως το χρόνο  $t$  και πολύ σπανιότερα τη θέση  $x$ .

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με τα γραμμικά συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων και μάλιστα με σταθερούς συντελεστές. Αυτά είναι τα ευκολότερα στην επίλυση τους και που παρουσιάζονται συχνότερα στα τεχνικά προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού. Κάνουμε πρώτα μια ήπια εισαγωγή στις σχετικές έννοιες αναφερόμενοι στο κλασικό πρόβλημα της Κινηματικής: θέση, ταχύτητα, επιτάχυνση. Στη συνέχεια γίνεται ανάλογη αναφορά στο πρόβλημα της συνήθους δοκού καθώς και της δοκού επί ελαστικής βάσεως, όπως είναι μια πεδילוδοκός. Ακολούθως γίνεται μια πολύ σύντομη εισαγωγή στα μητρώα (στους πίνακες) και παρουσιάζεται ένα απλό ομογενές γραμμικό σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων με δύο άγνωστες συναρτήσεις.

Το μεγαλύτερο μέρος του κεφαλαίου αυτού αφορά σε πέντε βασικές και στοιχειώδεις συνάμα μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων. Συγκεκριμένα εξετάζουμε τις μεθόδους: (α) **της απαλοιφής**: Ενότητα A12.5, (β) **του μετασχηματισμού Laplace**: Ενότητα A12.6, (γ) **της εκθετικής αντικαταστάσεως**: Ενότητα A12.7, (δ) **της τριγωνομετρικής αντικαταστάσεως** (που είναι εξειδικευμένη για τον Πολιτικό Μηχανικό): Ενότητα A12.8 και (ε) **της διαγωνιοποίησης (ή αποσυζεύξεως)**: Ενότητα A12.9. Τις εφαρμόζουμε (εκτός από τη μέθοδο (δ)) στο συγκεκριμένο γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων που προαναφέρθηκε. Ειδικά για τη μέθοδο της διαγωνιοποίησης (ή αποσυζεύξεως) γίνεται εκτενής αναφορά και στις σχετικές έννοιες από τη Γραμμική Άλγεβρα. Τέλος στην Ενότητα A12.10 γίνεται σύγκριση και των πέντε μεθόδων με συμπέρασμα.

Εφαρμογές στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού (κυρίως στη Δυναμική των Κατασκευών) περιλαμβάνονται στην Παράγραφο A12.8.2 (μία εφαρμογή) και κυρίως στο επόμενο Κεφάλαιο A13.

---

## Α12.1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΚΑΙ ΟΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

### Α12.1.1. Εισαγωγικό παράδειγμα από την Κινηματική

Αρκετά συχνά ο Πολιτικός Μηχανικός μπορεί να διατυπώσει τα προβλήματα της επιστήμης του σαν μια μεμονωμένη συνήθη διαφορική εξίσωση. Υπάρχουν εντούτοις και πολλές περιπτώσεις όπου ένα πρόβλημα ανάγεται σε σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Με τέτοια συστήματα θα ασχοληθούμε στο παρόν Κεφάλαιο Α12 και στο επόμενο Κεφάλαιο Α13.

Ας θεωρήσουμε καταρχήν την ευθύγραμμη κίνηση ενός υλικού σημείου  $M$  κατά μήκος του άξονα  $Ox$ . Η θέση του υλικού σημείου  $M$  είναι  $x = x(t)$  (με ανεξάρτητη μεταβλητή το χρόνο  $t$  και με  $t > 0$ ), η ταχύτητά του  $v = v(t)$  και η επιτάχυνσή του  $a = a(t)$ . Ισχύουν οι πολύ γνωστοί από την Κινηματική του Υλικού Σημείου τύποι

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt}. \quad (12.1.1)$$

Αν μάλιστα είναι γνωστές και οι αρχικές τιμές (έστω για  $t = 0$ ) της θέσεως  $x(0) = x_0$  και της ταχύτητας  $v(0) = v_0$  του υλικού σημείου  $M$ , τότε έχουμε διαθέσιμες και τις δύο αρχικές συνθήκες

$$x(0) = x_0, \quad v(0) = v_0. \quad (12.1.2)$$

Αν η θέση  $x = x(t)$  του υλικού σημείου  $M$  είναι γνωστή κάθε χρονική στιγμή  $t$  ( $t > 0$ ), ο πρώτος τύπος (12.1.1) μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε την ταχύτητα  $v(t)$  του ίδιου σημείου πάλι κάθε χρονική στιγμή  $t$  (με  $t > 0$ ) με απλή παραγωγή. Σ' αυτήν την περίπτωση ο πρώτος τύπος (12.1.1) είναι ο τύπος που μας δίνει την ταχύτητα  $v(t)$ . Με γνωστή τώρα την ταχύτητα  $v(t)$  του υλικού σημείου  $M$  ο δεύτερος τύπος (12.1.1) μας επιτρέπει τον προσδιορισμό της επιταχύνσεως  $a(t)$  του ίδιου σημείου πάλι με απλή παραγωγή (και πάλι για  $t > 0$ ). Σ' αυτήν την περίπτωση ο πρώτος τύπος (12.1.1) της Κινηματικής δεν αποτελεί διαφορική εξίσωση, γιατί η άγνωστη συνάρτηση  $v(t)$  δεν εμφανίζεται σε μορφή παραγώγου. Και μετά τον προσδιορισμό της  $v = v(t)$  από τον πρώτο τύπο (12.1.1) ούτε ο δεύτερος τύπος (12.1.1) αποτελεί διαφορική εξίσωση, επειδή η άγνωστη συνάρτηση  $a = a(t)$  δεν εμφανίζεται ούτε αυτή σε μορφή παραγώγου. Ένα τέτοιο πρόβλημα, που δεν αφορά ουσιαστικά σε διαφορικές εξισώσεις αλλά μόνο σε παραγωγίσεις, δε μας απασχολεί σ' αυτό το κεφάλαιο ούτε σ' αυτό το διδακτικό βιβλίο γενικότερα.

Εμείς θεωρούμε εδώ την αντίστροφη περίπτωση, δηλαδή εκείνη όπου γνωρίζουμε την επιτάχυνση  $a = a(t)$  του υλικού σημείου  $M$  και θέλουμε να προσδιορίσουμε την ταχύτητά του  $v = v(t)$  καθώς και τη θέση του  $x = x(t)$ . Υποθέτουμε μάλιστα διαθέσιμες και τις δύο αρχικές συνθήκες (12.1.2). Στην περίπτωση αυτή οι τύποι (12.1.1) της Κινηματικής μπορούν να αποκληθούν διαφορικές εξισώσεις, γιατί οι άγνωστες συναρτήσεις  $v = v(t)$  και  $x = x(t)$  εμφανίζονται και υπό τη μορφή παραγώγων. Συγκεκριμένα στη δεύτερη διαφορική εξίσωση (12.1.1) η ταχύτητα  $v = v(t)$  παρουσιάζεται στη μορφή παραγώγου, ενώ στην πρώτη διαφορική εξίσωση (12.1.1) η θέση  $x = x(t)$  είναι αυτή που παρουσιάζεται σε μορφή παραγώγου. Σημειώνεται επίσης ότι στην πρώτη διαφορική εξίσωση (12.1.1) εμφανίζεται και η ταχύτητα  $v = v(t)$ , όχι όμως σε παράγωγο. Επαναλαμβάνεται ότι η επιτάχυνση  $a = a(t)$  έχει υποθεθεί ότι είναι γνωστή συνάρτηση.

Τί διαθέτουμε υπό τις συνθήκες αυτές; Έχουμε ένα σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων, των εξισώσεων (12.1.1), με δύο άγνωστες συναρτήσεις (ή εξαρτημένες μεταβλητές): τις  $v = v(t)$  και  $x = x(t)$ . Ανεξάρτητη μεταβλητή είναι μόνο ο χρόνος  $t$ . Γι' αυτό μιλάμε για σύστημα δύο συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Αν υπήρχε και άλλη ανεξάρτητη μεταβλητή (δηλαδή πάνω από μία ανεξάρτητες μεταβλητές), τότε θα μιλούσαμε για διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγωγούς. Τέτοιες εξισώσεις, οι οποίες είναι επίσης ομολογουμένως πολύ ενδιαφέρουσες για τον Πολιτικό Μηχανικό, θα εξετασθούν στο επόμενο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙΙ κατά το επόμενο, το 3ο Εξάμηνο Σπουδών. Εδώ περιοριζόμαστε σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Ειδικότερα μάλιστα

στο Κεφάλαιο αυτό A12 καθώς και στο επόμενο Κεφάλαιο A13 σε συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Έχουμε δηλαδή διαθέσιμες δύο ή και περισσότερες συζευγμένες συνήθεις διαφορικές εξισώσεις με ίσο αριθμό αγνώστων συναρτήσεων (ή εξαρτημένων μεταβλητών). Εδώ άγνωστες συναρτήσεις είναι η ταχύτητα  $v = v(t)$  και η θέση  $x = x(t)$  του υλικού σημείου  $M$ . Αντίθετα υπάρχει μία μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή, εδώ ο χρόνος  $t$  (και μάλιστα με την υπόθεση ότι  $t > 0$ ).

Οι διαφορικές εξισώσεις (12.1.1) είναι προφανώς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Έχουν επίσης σταθερούς συντελεστές. Η πρώτη από αυτές είναι και ομογενής, γιατί περιέχει μόνο τις άγνωστες συναρτήσεις  $v = v(t)$  και  $x = x(t)$ . Η δεύτερη είναι μη ομογενής, επειδή περιέχει και τη γνωστή συνάρτηση  $a = a(t)$  (την επιτάχυνση του υλικού σημείου  $M$  στην κίνησή του). Συνολικά επομένως, εξαιτίας της δεύτερης διαφορικής εξίσωσης (12.1.1), το σύστημα και των δύο διαφορικών εξισώσεων (12.1.1) χαρακτηρίζεται σαν μη ομογενές. Ο χαρακτηρισμός αυτός είναι δικαιολογημένος, απλά επειδή υπάρχει η γνωστή συνάρτηση  $a(t)$ , παρόλο που αυτή εμφανίζεται μόνο στη δεύτερη διαφορική εξίσωση (12.1.1).

Θα περιορισθούμε στο κεφάλαιο αυτό και στο παρόν μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II μόνο σε γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές είτε ομογενή είτε μη ομογενή. (Τα τελευταία, τα μη ομογενή, είναι και δυσκολότερα στην επίλυσή τους!) Ο περιορισμός αυτός γίνεται, επειδή τα γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές διαθέτουν γενικές μεθόδους επίλυσης που θα τις εξετάσουμε στη συνέχεια στο παρόν κεφάλαιο. Τέτοιες μέθοδοι είναι: (α) η μέθοδος της απαλοιφής, (β) η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace, (γ) η μέθοδος της εκθετικής αντικαταστάσεως και (δ) η μέθοδος της διαγωνιοποίησης. Επιπλέον και στην πραγματικότητα ο Πολιτικός Μηχανικός αυτού του είδους τα συστήματα διαφορικών εξισώσεων, γραμμικά και με σταθερούς συντελεστές, συναντάει τις περισσότερες φορές στην πράξη. Πρέπει βέβαια να αναγνωρισθεί, να ομολογηθεί ότι τα γραμμικά συστήματα με σταθερούς συντελεστές (που είναι και τα απλούστερα στη επίλυσή τους) αποτελούν συχνά προϊόντα γραμμικοποιήσεων, δηλαδή προσεγγίσεων μη γραμμικών όρων με γραμμικούς. Παραδείγματος χάρι, αυτό συμβαίνει στις συνήθεις δοκούς στην Τεχνική Θεωρία της Κάμψεως στη Μηχανική των Υλικών, όπως ήδη γνωρίζουμε από το Κεφάλαιο A2.

Είναι αρκετά συνηθισμένη πρακτική (αλλ' όχι γενική βέβαια) οι άγνωστες συναρτήσεις (ή εξαρτημένες μεταβλητές), εδώ η ταχύτητα  $v = v(t)$  και η θέση  $x = x(t)$  να γράφονται στα αριστερά μέλη στις διαφορικές εξισώσεις και στα συστήματα διαφορικών εξισώσεων. Αντίθετα οι γνωστές συναρτήσεις, εδώ η επιτάχυνση  $a = a(t)$ , γράφονται συνήθως στα δεξιά μέλη των εξισώσεων αυτών. Άρα είναι ίσως καλύτερα το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (12.1.1) να γραφεί στη μορφή

$$\frac{dx}{dt} - v = 0, \quad \frac{dv}{dt} = a. \quad (12.1.3)$$

Μπορούμε μάλιστα να προχωρήσουμε και σε εναλλακτικές (αλλ' ασφαλώς μαθηματικά απόλυτα ισοδύναμες) γραφές του ίδιου συστήματος διαφορικών εξισώσεων, π.χ. στη γραφή

$$\dot{x}(t) - v(t) = 0, \quad \dot{v}(t) = a(t). \quad (12.1.4)$$

Στη γραφή αυτή έγινε ρητή δήλωση της εξαρτήσεως και των τριών συναρτήσεων  $x = x(t)$ ,  $v = v(t)$  (των δύο αγνώστων συναρτήσεων) και  $a = a(t)$  (της γνωστής συναρτήσεως) από το χρόνο  $t$ . Χρησιμοποιήθηκε επίσης ο συντομότερος τρόπος δηλώσεως των παραγώγων, σε προβλήματα με χρονικές παραγώγους πολύ συχνά με τελεία (για την πρώτη παράγωγο), με δύο τελείες (για τη δεύτερη παράγωγο), κλπ. πάνω από το σύμβολο της συναρτήσεως που παραγωγίζεται. (Εδώ χρησιμοποιήθηκαν οι συμβολισμοί  $\dot{x}(t)$  και  $\dot{v}(t)$  για τις δύο αυτές πρώτες παραγώγους αντίστοιχα.)

### A12.1.2. Αυθαίρετες σταθερές και πρόβλημα αρχικών τιμών

Θεωρώντας τις δύο αρχικές συνθήκες (12.1.2) (για  $t = 0$ ) να συνοδεύουν το σύστημα των δύο

γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (12.1.1) (ή (12.1.3) ή (12.1.4): απόλυτα ισοδύναμες γραφές), μιλάμε για πρόβλημα αρχικών τιμών. Πραγματικά οι διαφορικές εξισώσεις του συστήματός μας είναι και οι δύο πρώτης τάξεως, έχουμε δηλαδή ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως. Άρα η καθεμία από τις δύο αυτές διαφορικές εξισώσεις ζητάει την εμφάνιση μιας αυθαίρετης σταθεράς στην τελική γενική λύση του συστήματος που θα προκύψει. Επομένως στη γενική αυτή λύση θα παρουσιαστούν συνολικά δύο αυθαίρετες σταθερές, έστω οι  $C_1$  και  $C_2$ . Αν εμείς έχουμε διαθέσιμες δύο συνθήκες, εδώ τις δύο αρχικές συνθήκες (12.1.2), τότε είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε τις δύο σταθερές  $C_1$  και  $C_2$  μέσω των διαθέσιμων αρχικών τιμών  $x_0$  και  $v_0$  (αρχική θέση και αρχική ταχύτητα αντίστοιχα). Τότε στο πρόβλημα αυτό αρχικών τιμών (εδώ δύο διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως και δύο αρχικές συνθήκες) θα αντιστοιχεί μία μερική (ή ειδική) λύση χωρίς αυθαίρετες σταθερές, αλλά με ενσωματωμένες σ' αυτήν τις αρχικές τιμές (εδώ τις  $x_0$  και  $v_0$ ).

Ανάλογα ισχύουν βέβαια και για πολυπλοκότερα συστήματα διαφορικών εξισώσεων. Παραδείγματος χάριν, ένα σύστημα πέντε διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως θα περιέχει στη γενική λύση του πέντε αυθαίρετες σταθερές  $C_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4, 5$ ) και χρειάζεται επομένως πέντε συνθήκες για τον πλήρη προσδιορισμό των σταθερών αυτών. Ένα σύστημα τριών διαφορικών εξισώσεων δεύτερας τάξεως θα περιέχει γενικά στη γενική λύση του τρεις επί δύο ίσον έξι ( $3 \times 2 = 6$ ) αυθαίρετες σταθερές  $C_k$  και χρειάζεται έξι συνθήκες. Ανάλογα ένα σύστημα μιας διαφορικής εξισώσεως πρώτης τάξεως και δύο διαφορικών εξισώσεων δεύτερας τάξεως θα περιέχει γενικά στη γενική λύση του μια συν δύο επί δύο ίσον πέντε ( $1 + 2 \times 2 = 5$ ) αυθαίρετες σταθερές  $C_k$ . Άρα χρειάζεται πέντε συνθήκες για τον πλήρη προσδιορισμό των σταθερών αυτών  $C_k$  στη σχετική μερική λύση. Εννοείται ότι πέρα από τις αρχικές συνθήκες (που είναι και οι πιο εύκολες πρακτικά συνθήκες), μπορεί να είναι διαθέσιμες και πιο δύσκολες συνθήκες. Για παράδειγμα τέτοιες είναι οι συνοριακές συνθήκες (τούτο συμβαίνει σχεδόν πάντοτε σε προβλήματα δοκών στη Μηχανική των Υλικών) ή και ακόμη δυσκολότερες συνθήκες. Συνήθως όμως οι αρχικές συνθήκες (ή οι συνοριακές συνθήκες) αρκούν σε απλά προβλήματα διαφορικών εξισώσεων και συστημάτων διαφορικών εξισώσεων του Πολιτικού Μηχανικού. Τέτοια απλά προβλήματα είναι τα συνήθη προβλήματα της Δυναμικής και των Ταλαντώσεων, της Δυναμικής των Κατασκευών και της Μηχανικής των Υλικών.

### **A12.1.3. Λύση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων**

Ομολογείται, είναι απόλυτα παραδεκτό ότι στο παρόν εισαγωγικό παράδειγμα συστήματος διαφορικών εξισώσεων (12.1.1)

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt} \quad \text{με} \quad t > 0, \quad (12.1.5)$$

που συνοδεύεται μάλιστα από τις αρχικές συνθήκες (12.1.2) (πρόβλημα αρχικών τιμών)

$$x(0) = x_0, \quad v(0) = v_0 \quad (12.1.6)$$

ο Πολιτικός Μηχανικός δεν είναι ανάγκη να έχει γνώσεις τις θεωρίας των γραμμικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων για να το επιλύσει. Έτσι ολοκληρώνοντας άμεσα τη δεύτερη διαφορική εξίσωση (12.1.5) (ως προς το χρόνο  $t$  εννοείται, την ανεξάρτητη μεταβλητή), προκύπτει η ταχύτητα  $v = v(t)$  του υλικού σημείου  $M$  στη μορφή

$$v(t) = \int_0^t a(\tau) d\tau + C_1. \quad (12.1.7)$$

Η μορφή αυτή περιέχει ένα ολοκλήρωμα: έχει γίνει ολοκλήρωση στο διάστημα  $[0, t]$  με μεταβλητή το  $t$ . Συμπεριλαμβάνει βέβαια και μία αυθαίρετη σταθερά ολοκληρώσεως: τη σταθερά  $C_1$ .

Προχωρώντας (ή, μάλλον, οπισθοχωρώντας) τώρα στην πρώτη διαφορική εξίσωση (12.1.5),

αντικαθιστούμε σ' αυτήν τη λύση  $v = v(t)$  από την προηγούμενη σχέση (12.1.7), οπότε έχουμε

$$\frac{dx}{dt} = \int_0^t a(\tau) d\tau + C_1. \quad (12.1.8)$$

Πρόκειται για μια συνήθη διαφορική εξίσωση άμεσα επιλύσιμη με ολοκλήρωση ξανά ως προς το χρόνο  $t$ . Έτσι βρίσκεται και η δεύτερη άγνωστη συνάρτηση  $x = x(t)$  στη μορφή

$$x(t) = \int_0^t \left[ \int_0^{t^*} a(\tau) d\tau \right] dt^* + C_1 t + C_2. \quad (12.1.9)$$

Η συνάρτηση αυτή  $x(t)$  μπορεί εύκολα να γραφεί και σε ισοδύναμη μορφή με μία ολοκλήρωση, χωρίς διαδοχικές ολοκληρώσεις, με τη χρήση της μεθόδου της ολοκληρώσεως κατά μέρη ή κατά παράγοντες, της παραγοντικής ολοκληρώσεως. Με την προηγούμενη ολοκλήρωση προέκυψε και μια ακόμη αυθαίρετη σταθερά: η  $C_2$ . Λάβαμε επίσης πρόνοια (όπως πραγματικά οφείλαμε), ώστε σε κάθε ολοκλήρωση η μεταβλητή ολοκληρώσεως να μη συμπίπτει με το άνω όριο ολοκληρώσεως. Παραδείγματος χάρη, στη λύση (12.1.9)  $\tau \in [0, t^*]$  και  $t^* \in [0, t]$ . Αλλιώς προκαλείται σύγχυση με τα σύμβολα και από μαθηματικής απόψεως λάθος.

Η λύση (12.1.7) και (12.1.9) είναι η γενική λύση του συστήματος των δύο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (12.1.1) (ή, ισοδύναμα, (12.1.3) ή (12.1.4)) και τούτο μπορεί εύκολα να αποδειχθεί με επαλήθευση της ισχύος της. (Εννοείται στην περίπτωση αυτή βέβαια με παραγωγίσεις και όχι με ολοκληρώσεις!) Από τη λύση αυτή μπορούμε να προσδιορίσουμε και τη λύση του σχετικού προβλήματος αρχικών τιμών. Ασφαλώς αυτή θα είναι μια μερική λύση του συστήματος των δύο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (12.1.1).

Τούτο επιτυγχάνεται με τη χρήση των αρχικών συνθηκών (12.1.6) (ή (12.1.2)) προς προσδιορισμό των δύο αυθαίρετων σταθερών  $C_1$  και  $C_2$  στη γενική λύση. Έτσι θέτοντας  $t = 0$  στην έκφραση (12.1.7) της ταχύτητας  $v(t)$  και χρησιμοποιώντας τη δεύτερη αρχική συνθήκη (12.1.6):  $v(0) = v_0$ , βρίσκουμε αμέσως ότι

$$C_1 = v_0. \quad (12.1.10)$$

Επομένως προκύπτει ότι

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(\tau) d\tau \quad (12.1.11)$$

χωρίς πια την αυθαίρετη σταθερά  $C_1$ . Τη θέση της την πήρε η αρχική τιμή  $v_0$  της ταχύτητας  $v(t)$ .

Με όμοιο τρόπο θέτουμε  $C_1 = v_0$  (όπως ήδη διαπιστώσαμε) στη γενική λύση (12.1.9) για τη θέση  $x(t)$  του υλικού σημείου  $M$ , οπότε

$$x(t) = \int_0^t \left[ \int_0^{t^*} a(\tau) d\tau \right] dt^* + v_0 t + C_2. \quad (12.1.12)$$

Πρέπει τώρα να προσδιορίσουμε και την αυθαίρετη σταθερά  $C_2$  που παραμένει στη λύση αυτή. Προς το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε και την πρώτη αρχική συνθήκη (12.1.6):  $x(0) = x_0$  θέτοντας βέβαια  $t = 0$  στη πιο πάνω λύση (12.1.12). Πολύ εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$C_2 = x_0. \quad (12.1.13)$$

Άρα η έκφραση της άγνωστης συναρτήσεως  $x(t)$  παίρνει την τελική της μορφή

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \int_0^t \left[ \int_0^{t^*} a(\tau) d\tau \right] dt^* \quad (12.1.14)$$

με απλή αλλαγή της σειράς των προσθετέων στο δεξιό μέλος. Έτσι προκύπτει η συνηθισμένη για τον Πολιτικό Μηχανικό σειρά εμφανίσεώς τους.

Οι σχέσεις (12.1.11) (για την ταχύτητα  $v(t)$ ) και (12.1.14) (για τη θέση  $x(t)$ ) αποτελούν τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (12.1.5) και (12.1.6). Ισοδύναμα αποτελούν τη μερική (ή ειδική)

λύση του γραμμικού συστήματος των δύο διαφορικών εξισώσεων (12.1.5) υπό τις δύο αρχικές συνθήκες (12.1.6). Η πλήρωση των αρχικών συνθηκών (12.1.6) είναι προφανής απλά θέτοντας  $t = 0$  στις σχέσεις (12.1.11) και (12.1.14). Για την πλήρη επαλήθευση της λύσεως αυτής (12.1.11) και (12.1.14) καλό είναι να ελεγχθεί και η πλήρωση του ίδιου του γραμμικού συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (12.1.5) με παραγωγίσεις των σχέσεων (12.1.11) και (12.1.14). Δυστυχώς είναι αναγκαίες οι παραγωγίσεις αυτές, αν και δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολες.

#### **A12.1.4. Σύγκριση του συστήματος με μία μόνο διαφορική εξίσωση**

Ας σημειωθεί βέβαια ότι συνήθως ο Πολιτικός Μηχανικός προτιμάει να έχει προς επίλυση μία μόνο διαφορική εξίσωση παρά ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων, ακόμη και πρώτης τάξεως, όπως είναι το σύστημα (12.1.1) (ή (12.1.3)). Προς το σκοπό αυτό παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο  $t$  την πρώτη από τις διαφορικές εξισώσεις του συστήματος (12.1.1), διαπιστώνουμε άμεσα ότι

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (12.1.15)$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα αυτό (12.1.15) στη δεύτερη διαφορική εξίσωση του ίδιου συστήματος (12.1.1). Προκύπτει

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a. \quad (12.1.16)$$

Προφανώς με δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις από τη μεμονωμένη διαφορική εξίσωση (12.1.16) καταλήγουμε στην ίδια γενική λύση (12.1.9) ως προς τη θέση  $x = x(t)$  που είχαμε βρει και από το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (12.1.1) (ή (12.1.3)). Χρήση και των αρχικών συνθηκών (12.1.2) οδηγεί στη μερική λύση (12.1.14) του ίδιου συστήματος ή, καλύτερα, στη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (12.1.1) και (12.1.2) (ή (12.1.5) και (12.1.6)).

Συμπερασματικά, αν ζητάμε μόνο τη θέση  $x = x(t)$  του υλικού σημείου  $M$ , είναι ίσως προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε τη μεμονωμένη διαφορική εξίσωση (12.1.16) παρά το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (12.1.1) (ή (12.1.3)). Και τούτο παρόλο που η διαφορική εξίσωση (12.1.16) είναι δευτέρας τάξεως, ενώ το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (12.1.1) (ή (12.1.3)) έχει διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως. Εντούτοις υπάρχουν και περιπτώσεις όπου είναι επιθυμητό (ή και αναγκαίο σε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις) να παρουσιάζονται μόνο πρώτες παράγωγοι στις διαφορικές εξισώσεις. (Αυτό είναι δυνατόν να συμβαίνει κυρίως σε προγράμματα αριθμητικής επίλυσης διαφορικών εξισώσεων και συστημάτων διαφορικών εξισώσεων.) Σε μια τέτοια ειδική περίπτωση προτιμάται βέβαια το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (12.1.1) από τη μεμονωμένη διαφορική εξίσωση (12.1.16).

Πάντως γενικά μιλώντας, επαναλαμβάνεται ότι ο Πολιτικός Μηχανικός συνήθως αποφεύγει την αναγωγή διαφορικών εξισώσεων ανωτέρας της πρώτης τάξεως (μεμονωμένων ή σε συστήματα συζευγμένων διαφορικών εξισώσεων) σε αντίστοιχα συστήματα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως. Τούτο ισχύει κατά κόρο στη Δυναμική και τις Ταλαντώσεις, όπου οι διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως (που προκύπτουν από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα) γενικά δεν αντικαθίστανται από διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως. Παραδείγματα συστημάτων διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξεως θα δοθούν στο επόμενο Κεφάλαιο A13. Στο παρόν Κεφάλαιο A12 θα ξεκινήσουμε από συστήματα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως, όπως είναι το σύστημα (12.1.1). Επιπλέον, όπως ήδη αναφέραμε, περιορίζουμε την προσοχή μας σε γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων κυρίως πρώτης ή και δευτέρας τάξεως και με σταθερούς συντελεστές. Εντούτοις οι σχετικές μέθοδοι επίλυσης που θα εκθέσουμε σε επόμενες ενότητες του κεφαλαίου αυτού είναι εφαρμόσιμες και σε γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων κάθε τάξεως, αρκεί βέβαια αυτά να είναι με σταθερούς (και όχι μεταβλητούς) συντελεστές.

Στην επόμενη ενότητα θα αναφερθούμε σε ένα ακόμη σπουδαίο πρόβλημα του Πολιτικού

Μηχανικού που βασικά εκφράζεται από ένα σύστημα τεσσάρων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως. Στο τόσο μα τόσο κλασικό πρόβλημα της συνήθους δοκού στη Μηχανική των Υλικών.

## A12.2. ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΙΣΩΣΕΩΝ ΣΤΗ ΔΟΚΟ

### A12.2.1. Συνήθης δοκός

Στην Ενότητα A2.1 του Κεφαλαίου A2 είχαμε ήδη αναφερθεί εκτενώς στις τόσο απλές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως που διέπουν το πρόβλημα της συνήθους δοκού στην Τεχνική Θεωρία της Κάμψεως στη Μηχανική των Υλικών (ή Αντοχή των Υλικών). Ας τις επαναλάβουμε συγκεντρωτικά σε λίγο παραλλαγμένη μορφή, συγκεκριμένα αποφεύγοντας την καμπυλότητα  $\kappa(x)$  προς όφελος της καμπτικής ροπής (ή ροπής κάμψεως)  $M(x)$  που παίρνει τη θέση της:

$$v'(x) = \theta(x), \quad \theta'(x) = \frac{M(x)}{EI}, \quad M'(x) = Q(x), \quad Q'(x) = p(x) \quad (12.2.1)$$

με  $EI$  τη δυσκαμψία της δοκού. Στις διαφορικές αυτές εξισώσεις  $v(x)$  είναι το βέλος κάμψεως της δοκού (που δημιουργεί την ελαστική γραμμή της),  $\theta(x)$  η γωνία στροφής της δοκού (που είναι σχεδόν ίση με την κλίση της),  $M(x)$  η καμπτική ροπή (ή ροπή κάμψεως) κατά μήκος της δοκού και  $Q(x)$  (ή  $V(x)$ ) η τέμνουσα δύναμη (ή διατμητική δύναμη) επίσης κατά μήκος της δοκού. Αυτές είναι οι τέσσερις άγνωστες συναρτήσεις (ή εξαρτημένες μεταβλητές). Η θέση  $x$  κατά μήκος της δοκού είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή. Η συνάρτηση  $p(x)$  είναι γνωστή συνάρτηση και δηλώνει την κατανομημένη κάθετη φόρτιση κατά μήκος της δοκού. (Οι κύριες γραμμικοποιήσεις έχουν γίνει στις δύο πρώτες από τις διαφορικές αυτές εξισώσεις.)

Πρόκειται για ένα σύστημα τεσσάρων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως με σταθερούς συντελεστές και μη ομογενές. Το σύστημα είναι μη ομογενές, απλά επειδή η συνάρτηση  $p(x)$  της κατανομημένης κάθετης φορτίσεως στην τέταρτη διαφορική εξίσωση είναι γνωστή συνάρτηση. Μπορούμε να ξαναγράψουμε το σύστημα αυτό (12.2.1) με τις άγνωστες συναρτήσεις  $v(x)$ ,  $\theta(x)$ ,  $M(x)$  και  $Q(x)$  και τις παραγώγους τους να εμφανίζονται στα αριστερά μέλη ως εξής:

$$v'(x) - \theta(x) = 0, \quad \theta'(x) - \frac{1}{EI} M(x) = 0, \quad M'(x) - Q(x) = 0, \quad Q'(x) = p(x). \quad (12.2.2)$$

Συχνά, πολύ συχνά ο Πολιτικός Μηχανικός δίνει προτεραιότητα στο βέλος κάμψεως  $v(x)$  και στην καμπτική ροπή  $M(x)$  έναντι της γωνίας στροφής  $\theta(x)$  και της τέμνουσας δύναμης  $Q(x)$ . Στην περίπτωση αυτή η γωνία στροφής  $\theta(x)$  αντικαθίσταται από την πρώτη διαφορική εξίσωση του παραπάνω συστήματος (12.2.2) (παραγωγισμένη φυσικά, οπότε  $\theta'(x) = v''(x)$ ) στη δεύτερη. Τότε η δεύτερη αυτή διαφορική εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$v''(x) - \frac{1}{EI} M(x) = 0. \quad (12.2.3)$$

Εντελώς ανάλογα και η τέμνουσα δύναμη  $Q(x)$  μπορεί να ληφθεί από την τρίτη διαφορική εξίσωση του συστήματος (12.2.2), βέβαια παραγωγισμένη και αυτή, οπότε  $Q'(x) = M''(x)$ , και να αντικατασταθεί στην τέταρτη. Τότε η τέταρτη αυτή διαφορική εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$M''(x) = p(x). \quad (12.2.4)$$

Επομένως το γραμμικό σύστημα των τεσσάρων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως (12.2.2) έχει αναχθεί στο γραμμικό σύστημα των δύο διαφορικών εξισώσεων (12.2.3) και (12.2.4), που αποτελείται όμως από δύο διαφορικές εξισώσεις δεύτερας τάξεως. Οι άγνωστες συναρτήσεις είναι πλέον μόνο το βέλος κάμψεως  $v(x)$  και η καμπτική ροπή (ή ροπή κάμψεως)  $M(x)$ . Πραγματικά χρησιμοποιείται εκτενώς το σύστημα αυτό (12.2.3) και (12.2.4) από τον Πολιτικό Μηχανικό στη Μηχανική των Υλικών (ή Αντοχή των Υλικών) και στις τεχνικές μελέτες του γενικότερα.

Εντούτοις αρκετές φορές ο Πολιτικός Μηχανικός δεν αρκείται στην απαλοιφή της γωνίας στροφής  $\theta(x)$  και της τέμνουσας δύναμης  $Q(x)$  από το αρχικό σύστημά του (12.2.1) στο νέο σύστημά του (12.2.3) και (12.2.4). Και στο νέο αυτό σύστημα (12.2.3) και (12.2.4) προχωράει στην απαλοιφή και της καμπτικής ροπής (ή ροπής κάμψεως)  $M(x)$ . Τούτο είναι εφικτό λύνοντας ως προς την καμπτική ροπή  $M(x)$  τη διαφορική εξίσωση (12.2.3), οπότε

$$M(x) = EIv''(x) \quad (12.2.5)$$

και αντικαθιστώντας την έκφρασή της αυτή στη διαφορική εξίσωση (12.2.4). Το αποτέλεσμα είναι προφανώς μία μόνο διαφορική εξίσωση τετάρτης όμως τάξεως, η εξής:

$$EIv''''(x) = p(x), \quad (12.2.6)$$

δηλαδή η εξίσωση (2.1.40) του Κεφαλαίου Α2. Φυσικά λαμβάνονται υπόψη και οι αναγκαίες συνοριακές συνθήκες, όπως οι συνθήκες (2.1.41) σε περίπτωση προβόλου στηριγμένου στο αριστερό άκρο του  $x = 0$  και με ελεύθερο το δεξιό άκρο του  $x = L$ .

Καταλήγοντας, πετύχαμε να αναγάγουμε το αρχικό γραμμικό σύστημα των τεσσάρων διαφορικών εξισώσεων (12.2.1) (με όλες τις διαφορικές εξισώσεις να είναι εκεί πρώτης τάξεως) με απαλοιφή των αγνώστων συναρτήσεων  $\theta(x)$  και  $Q(x)$  στο επίσης γραμμικό σύστημα των δύο διαφορικών εξισώσεων (12.2.3) και (12.2.4). (Οι διαφορικές εξισώσεις είναι τώρα μόνο δύο και επίσης δευτέρας τάξεως.) Το «κόστος» υπήρξε η αύξηση της τάξεως των διαφορικών εξισώσεων από ένα (πρώτης τάξεως) σε δύο (δευτέρας τάξεως). Το «κέρδος» ήταν η μείωση των διαφορικών εξισώσεων από τέσσερις σε δύο. Με μία ακόμη απαλοιφή άγνωστης συναρτήσεως (αυτή τη φορά της καμπτικής ροπής  $M(x)$ ) καταλήξαμε σε μία μόνο γραμμική διαφορική εξίσωση: τη (12.2.6). Στη διαφορική αυτή εξίσωση άγνωστη συνάρτηση είναι το βέλος κάμψεως  $v(x)$ , η ελαστική γραμμή της συνήθους δοκού.

Έτσι αποφύγαμε εντελώς τα συστήματα διαφορικών εξισώσεων: αυτό είναι το «κέρδος» μας. Το κόστος είναι η παραπέρα αύξηση της τάξεως από δύο (δευτέρας τάξεως στις διαφορικές εξισώσεις (12.2.3) και (12.2.4)) σε τέσσερα (τετάρτης τάξεως στην τελική διαφορική εξίσωση (12.2.6)). Επιπλέον κόστος συνιστά η μη άμεση διαθεσιμότητα με τη λύση της διαφορικής εξισώσεως (12.2.6) της καμπτικής ροπής  $M(x)$  (ενός τόσο χρήσιμου τεχνικού μεγέθους για τον Πολιτικό Μηχανικό!), αλλά μόνο του βέλους κάμψεως  $v(x)$ . Βέβαια η καμπτική ροπή  $M(x)$  μπορεί και αυτή εύκολα να προσδιορισθεί στη συνέχεια από τον τύπο (12.2.5) μέσω του βέλους κάμψεως  $v(x)$  που ήδη προσδιορίστηκε από την τελική διαφορική εξίσωση (12.2.6). Τούτο όμως συνεπάγεται πρόσθετο υπολογιστικό κόστος.

Η γνώμη του γράφοντα (που ασφαλώς δεν είναι πάντοτε αποδεκτή από τον Πολιτικό Μηχανικό) είναι η εξής: Εάν ζητείται μόνο το βέλος κάμψεως  $v(x)$ , τότε πλεονεκτεί η χρήση της μιας διαφορικής εξισώσεως (12.2.6). Εάν ζητείται και η καμπτική ροπή (ή ροπή κάμψεως)  $M(x)$ , τότε πλεονεκτεί το σύστημα των δύο διαφορικών εξισώσεων (12.2.3) και (12.2.4). Ο γράφων αναγνωρίζει ασφαλώς ότι το σύστημα αυτό (12.2.3) και (12.2.4) είναι επίσης αποτελεσματικό ακόμη και στην περίπτωση που ζητείται μόνο το βέλος κάμψεως  $v(x)$  και τούτο πραγματικά προτιμάται σε πολλά συγγράμματα Μηχανικής των Υλικών. Είναι επίσης αληθές ότι με τη διαφορική εξίσωση (12.2.3) γραμμένη στην απόλυτα ισοδύναμη μορφή της

$$v''(x) = M^*(x) \quad \text{με} \quad M^*(x) := \frac{1}{EI} M(x) \quad (12.2.7)$$

οι δύο διαφορικές εξισώσεις (12.2.4) και τώρα πλέον (12.2.7) είναι παρόμοιες στη μορφή τους. Επιλύεται έτσι πρώτα η πρώτη διαφορική εξίσωση (12.2.4) και προσδιορίζεται η καμπτική ροπή (ροπή κάμψεως)  $M(x)$  άρα και η ανηγμένη στη δυσκαμψία  $EI$  «καμπτική ροπή» (εντός εισαγωγικών,



δεν είναι η αληθινή καμπτική ροπή, η καμπυλότητα  $\kappa(x)$  είναι!)  $M^*(x)$ . Στη συνέχεια απολύτως ανάλογα επιλύεται και η δεύτερη διαφορική εξίσωση (12.2.7) με παραπλήσιο τρόπο.

Τη μέθοδο της απαλοιφής αγνώστων συναρτήσεων σε συστήματα διαφορικών εξισώσεων που εισαγάγαμε στην προηγούμενη και στην παρούσα ενότητα θα την επεξηγήσουμε λεπτομερέστερα και περισσότερο μαθηματικά παρακάτω στην Ενότητα A12.5 του κεφαλαίου αυτού.

### A12.2.2. Δοκός επί ελαστικής βάσεως

Για να συμπληρώσουμε την παρούσα ενότητα, πρέπει να αναφερθούμε και πάλι στη δοκό (συνήθη δοκό εννοείται) επί ελαστικής βάσεως (συνήθως του εδάφους) σύμφωνα με τη θεωρία του Winkler (1867). (Τη θεωρία αυτή είχαμε ήδη την ευκαιρία να την αναφέρουμε σύντομα στην Παράγραφο A2.1.7 του Κεφαλαίου A2.) Με βάση τη σχετική υπόθεση του Winkler η ελαστική βάση (πρακτικά το έδαφος), επί της οποίας στηρίζεται η δοκός, αντιδρά σαν σύστημα μεμονωμένων ελατηρίων. (Ας σημειωθεί παρεμπιπτόντως ότι στις συνήθεις κατασκευές από σκυρόδεμα μια δοκός που στηρίζεται πάνω στο έδαφος καλείται συνήθως πεδילוδοκός και σπάνια θεμελιοδοκός.) Υπάρχει επομένως και η αντίδραση

$$p_f(x) = -kv(x) \quad (12.2.8)$$

της ελαστικής βάσεως με το  $k$  γνωστή θετική σταθερά του συστήματος δοκού-εδάφους. Σημειώνεται ότι ο δείκτης  $f$  στο σύμβολο  $p_f(x)$  δεν είναι τυχαίος: αναφέρεται στη λέξη θεμελίωση, στα Αγγλικά foundation. Στα Αγγλικά η δοκός επί ελαστικής βάσεως καλείται **beam on elastic foundation**, δηλαδή κατά λέξη **δοκός επί ελαστικής θεμελίωσης**. Στα Ελληνικά όμως ο όρος αυτός προφανώς προκαλεί κάποια σύγχυση στον Πολιτικό Μηχανικό και επομένως προτιμώνται άλλοι όροι με επικρατέστερο τον όρο **δοκός επί ελαστικής βάσεως** που χρησιμοποιείται και εδώ.

Στην περίπτωση αυτή η κατανεμημένη φόρτιση πάνω στη δοκό  $p(x)$  στις παραπάνω διαφορικές εξισώσεις πρέπει βέβαια να αντικατασταθεί από την τροποποιημένη έκφρασή της

$$p(x) + p_f(x) = p(x) - kv(x). \quad (12.2.9)$$

Τώρα η τέταρτη διαφορική εξίσωση του αρχικού συστήματος (12.2.1) παίρνει τη μορφή

$$Q'(x) = p(x) - kv(x) \quad \iff \quad Q'(x) + kv(x) = p(x) \quad (12.2.10)$$

με  $v(x)$  ασφαλώς το βέλος κάμψης της δοκού. Μερικές φορές σε πεδילוδοκούς (και όχι μόνο!) το βέλος κάμψης καλείται και βύθιση της δοκού. (Συγγνώμη για κάθε σύγχυση με τα πρόσημα, αλλ' εδώ τα πρόσημα δεν είναι το σημαντικότερο θέμα, ενώ, αντίθετα, είναι σε μαθήματα Μηχανικής των Υλικών και Επιφανειακών Θεμελιώσεων!) Ανάλογα και η διαφορική εξίσωση (12.2.4) τροποποιείται τώρα και αυτή ως εξής:

$$M''(x) = p(x) - kv(x) \quad \iff \quad M''(x) + kv(x) = p(x). \quad (12.2.11)$$

Είναι πια προφανές, δεν υπάρχει καμία αμφιβολία ότι το σύστημα των τριών πρώτων διαφορικών εξισώσεων (12.2.1), εδώ όμως με τέταρτη διαφορική εξίσωση τη (12.2.10), δε φαίνεται να είναι υπολογιστικά το καλύτερο δυνατό. Εξαιρούνται βέβαια ειδικές περιπτώσεις προγραμμάτων αριθμητικής επίλυσης συστημάτων διαφορικών εξισώσεων που δεν αποδέχονται παρά μόνο πρώτες παραγώγους των αγνώστων συναρτήσεων στις διαφορικές εξισώσεις. Επίσης και το σύστημα των δύο μόνο διαφορικών εξισώσεων (12.2.3) και (12.2.11) δεν είναι πια (εδώ σε δοκούς επί ελαστικής βάσεως, συνήθως του εδάφους) τόσο χρήσιμο και προτιμητέο, παρόλο που οι διαφορικές εξισώσεις του είναι δευτέρας τάξεως.

Την καλύτερη δυνατότητα μας την προσφέρει ασφαλώς η απαλοιφή και της καμπτικής ροπής (ή ροπής κάμψης)  $M(x)$  μεταξύ των διαφορικών εξισώσεων (12.2.5) και (12.2.11). Τότε προκύπτει

εύκολα η μεμονωμένη διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως

$$EIv''''(x) + kv(x) = p(x). \quad (12.2.12)$$

Στην εξίσωση αυτή έχει ληφθεί υπόψη και η αντίδραση του εδάφους  $-kv(x)$  στο αριστερό μέλος (εκεί με πρόσημο συν). Αυτή είναι και η μόνη διαφορά της από την εξίσωση (12.2.6) για συνήθη δοκό, αλλά μη στηριζόμενη επί ελαστικής βάσεως (πρακτικά χωρίς την υποστήριξη του εδάφους). Στην περίπτωση αυτή (με την επιφύλαξη μερικών αριθμητικών προγραμμάτων) δεν υπάρχει αμφιβολία για την αναγκαιότητα της πλήρους απαλοιφής των τριών αγνώστων συναρτήσεων από το αρχικό σύστημα των διαφορικών εξισώσεων. Με την απαλοιφή αυτή καταλήξαμε στην τελική διαφορική εξίσωση (12.2.12) αντί για σύστημα τεσσάρων ή έστω δύο διαφορικών εξισώσεων.

Μετά την επίλυση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (12.2.12) και τον προσδιορισμό του βέλους κάμψεως  $v(x)$ , εάν ζητείται και η καμπτική ροπή  $M(x)$ , τότε πρέπει να χρησιμοποιηθεί ο τύπος (12.2.5). Ο τύπος αυτός δεν αποτελεί πια διαφορική εξίσωση, γιατί το βέλος κάμψεως  $v(x)$  είναι τώρα γνωστό. Εάν ζητείται και η τέμνουσα δύναμη  $Q(x)$ , απαιτείται και άλλη μια παραγωγή. Αυτό συμβαίνει, επειδή  $Q(x) = M'(x)$ : τρίτη διαφορική εξίσωση του αρχικού συστήματος (12.2.1), η οποία τώρα πια είναι και αυτή ένας απλός τύπος για τον προσδιορισμό της τέμνουσας δύναμης  $Q(x)$  και όχι διαφορική εξίσωση. Τέλος αξ σημειωθεί ότι η άποψη αυτή, δηλαδή το να προτιμάται η μεμονωμένη διαφορική εξίσωση (12.2.12) από το ισοδύναμο σύστημα διαφορικών εξισώσεων, δεν απηχεί μόνο τη γνώμη του γράφοντα. Απηχεί φυσικά και τη γενική άποψη που διατυπώνεται σε όλα τα βιβλία που αναφέρονται και στο θέμα της δοκού επί ελαστικής βάσεως.

### Α12.3. ΧΡΗΣΗ ΜΗΤΡΩΩΝ ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

#### Α12.3.1. Βασικές έννοιες και πράξεις στα μητρώα

Πολλές φορές τα μητρώα (όπως ονομάζει ο Πολιτικός Μηχανικός τους πίνακες στη Γραμμική Άλγεβρα) αποδεικνύονται ένα ιδιαίτερα ισχυρό και χρήσιμο εργαλείο για τη γραφή αλλά και την επίλυση γραμμικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων. Οι σχετικές γνώσεις είναι ήδη γνωστές από τη Γραμμική Άλγεβρα, σημαντικό κεφάλαιο του μαθήματος Εφαρμοσμένα Μαθηματικά Ι του 1ου Εξαμήνου Σπουδών. Αναφέρουμε σύντομα ορισμένες στοιχειώδεις έννοιες και παραδείγματα.

Δύο μητρώα (πίνακες)  $\mathbf{A}$  και  $\mathbf{B}$  με  $m = 3$  γραμμές και  $n = 3$  στήλες το καθένα (είναι δηλαδή τετραγωνικά μητρώα με  $m = n = 3$ , συγκεκριμένα διαστάσεων  $3 \times 3$ ) και με στοιχεία  $a_{ij}$  και  $b_{ij}$  αντίστοιχα ( $i = 1, 2, 3$  και επίσης  $j = 1, 2, 3$ ) έχουν τις γενικές μορφές

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}. \quad (12.3.1)$$

Τα ανάστροφα (transpose) μητρώα των μητρώων αυτών  $\mathbf{A}$  και  $\mathbf{B}$ , που συμβολίζονται με  $\mathbf{A}^T$  και με  $\mathbf{B}^T$  αντίστοιχα, έχουν στοιχεία τα  $a_{ji}$  και  $b_{ji}$  αντίστοιχα, δηλαδή έχουν αλλάξει σ' αυτά οι γραμμές με τις στήλες: οι γραμμές έχουν γίνει στήλες και οι στήλες γραμμές. Συγκεκριμένα

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{bmatrix}. \quad (12.3.2)$$

Το γινόμενο μιας σταθεράς  $c$  επί το μητρώο  $\mathbf{A}$

$$c\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \\ ca_{31} & ca_{32} & ca_{33} \end{bmatrix} \quad (12.3.3)$$

έχει στοιχεία  $ca_{ij}$ , δηλαδή τα στοιχεία  $a_{ij}$  του μητρώου  $\mathbf{A}$  πολλαπλασιασμένα επί τη σταθερά  $c$ .

Το άθροισμα  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  και η διαφορά  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$  των μητρώων  $\mathbf{A}$  και  $\mathbf{B}$  έχουν σαν στοιχεία τα αθροίσματα  $a_{ij} + b_{ij}$  και τις διαφορές  $a_{ij} - b_{ij}$  αντίστοιχα των σχετικών στοιχείων  $a_{ij}$  του μητρώου  $\mathbf{A}$  και  $b_{ij}$  του μητρώου  $\mathbf{B}$ , δηλαδή

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} \\ a_{31} \pm b_{31} & a_{32} \pm b_{32} & a_{33} \pm b_{33} \end{bmatrix}. \quad (12.3.4)$$

Οι πράξεις αυτές είναι δυνατές, προφανώς μόνο όταν οι διαστάσεις  $m \times n$  (και οι  $m$  γραμμές και οι  $n$  στήλες, ειδικά εδώ έχουμε τετραγωνικά μητρώα με  $m = n = 3$ ) των μητρώων  $\mathbf{A}$  και  $\mathbf{B}$  είναι ίδιες.

Επίσης στον πολλαπλασιασμό μητρώων ισχύουν η προσεταιριστική και η επιμεριστική ιδιότητα, αλλ' όχι και η αντιμεταθετική ιδιότητα εκτός από σπάνιες περιπτώσεις. Έχουμε δηλαδή για τρία μητρώα  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  και  $\mathbf{C}$  κατάλληλων διαστάσεων για την εκτέλεση των πράξεων

$$\text{γενικά } \mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}, \text{ ενώ πάντοτε } (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \text{ και } \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}. \quad (12.3.5)$$

(Επαναλαμβάνουμε ότι σπάνια, πολύ σπάνια μόνο ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ .)

Το μητρώο  $\mathbf{C}$  που είναι γινόμενο των μητρώων  $\mathbf{A}$  (διαστάσεων  $m \times n$ , δηλαδή με  $m$  γραμμές και  $n$  στήλες) και  $\mathbf{B}$  (διαστάσεων  $n \times p$ , δηλαδή με  $n$  γραμμές και  $p$  στήλες) έχει διαστάσεις  $m \times p$  (δηλαδή  $m$  γραμμές και  $p$  στήλες). Το στοιχείο  $c_{ij}$  του μητρώου  $\mathbf{C}$  προσδιορίζεται σαν το άθροισμα των  $n$  γινομένων των αντίστοιχων στοιχείων της  $i$  γραμμής του μητρώου  $\mathbf{A}$  επί τη  $j$  στήλη του μητρώου  $\mathbf{B}$ . Παραδείγματος χάρη, για τα τετραγωνικά μητρώα  $\mathbf{A}$  και  $\mathbf{B}$  που ορίσθηκαν στις σχέσεις (12.3.1)

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{bmatrix}. \quad (12.3.6)$$

Ένα διάνυσμα (σαφέστερα διάνυσμα στήλης)  $\mathbf{u}$  με τρεις γραμμές και μία στήλη, δηλαδή μητρώο διαστάσεων  $3 \times 1$  (τρεις γραμμές και μία στήλη) και το ανάστροφό του  $\mathbf{u}^T$  που είναι διάνυσμα γραμμής (και όχι στήλης) διαστάσεων  $1 \times 3$  (με μία γραμμή και τρεις στήλες), έχουν τις μορφές

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T, \quad \mathbf{u}^T = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}^T = [u_1 \ u_2 \ u_3]. \quad (12.3.7)$$

Σημειώνεται ότι συχνά ο Πολιτικός Μηχανικός χρησιμοποιεί αγκύλες για τα συνήθη μητρώα, αλλά άγκιστρα για τα διανύσματα στήλης και συχνά ειδικό συμβολισμό για τα διανύσματα γραμμής.

Με το μητρώο  $\mathbf{A}$  να είναι τετραγωνικό και διαστάσεων  $m = 3$  επί  $n = 3$  και το διάνυσμα (λέγοντας απλά διάνυσμα, θα εννοούμε διάνυσμα στήλης)  $\mathbf{u}$  να είναι μητρώο διαστάσεων  $n = 3$  επί  $p = 1$  (μητρώο στήλης) έχει έννοια το γινόμενο  $\mathbf{Au}$ . Το γινόμενο αυτό θα έχει διαστάσεις  $m = 3$  επί  $p = 1$ , θα είναι δηλαδή και αυτό διάνυσμα (διάνυσμα στήλης εννοείται) της μορφής

$$\mathbf{Au} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 \\ a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3 \end{Bmatrix}. \quad (12.3.8)$$

### A12.3.2. Παράσταση γραμμικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων με μητρώα

Θεωρούμε ένα διάνυσμα, όπως είναι το διάνυσμα  $\mathbf{u}$  στην πρώτη σχέση (12.3.7), το οποίο έχει στοιχεία  $u_i = u_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) που εξαρτώνται από μία ανεξάρτητη μεταβλητή, π.χ. το χρόνο  $t$ . Στην περίπτωση αυτή έχει έννοια η παραγωγήιση του διανύσματος  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$  με αποτέλεσμα το διάνυσμα  $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}(t)$  με στοιχεία τις παραγώγους  $\dot{u}_i = \dot{u}_i(t)$  (που υποτίθενται ότι υπάρχουν) όλων

των στοιχείων  $u_i = u_i(t)$  του αρχικού διανύσματος  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ . (Παρενθετικά σημειώνουμε ότι απολύτως ανάλογα ισχύουν και για γενικά μητρώα, όχι μόνο για διανύσματα.) Για παράδειγμα, υποθέτοντας ότι τα στοιχεία του διανύσματος  $\mathbf{u}$  στην πρώτη σχέση (12.3.7), είναι συναρτήσεις του χρόνου  $t$ , δηλαδή  $u_1 = u_1(t)$ ,  $u_2 = u_2(t)$  και  $u_3 = u_3(t)$ , οπότε ασφαλώς και  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ , τότε θα έχουμε

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{Bmatrix} \implies \dot{\mathbf{u}}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \\ \dot{u}_3(t) \end{Bmatrix} \text{ και με συντομότερη γραφή } \dot{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix}. \quad (12.3.9)$$

Στο τελευταίο διάνυσμα  $\dot{\mathbf{u}}$  απλά θεωρείται ότι ισχύει η εξάρτηση του ίδιου και των τριών στοιχείων του  $\dot{u}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) από την ανεξάρτητη μεταβλητή  $t$  (το χρόνο) χωρίς τη ρητή γραφή της. (Ανάλογα ορίζονται και τα ολοκληρώματα διανυσμάτων και μητρώων γενικότερα.)

Επομένως το διάνυσμα  $\mathbf{A}\dot{\mathbf{u}}(t)$ , το γινόμενο του τετραγωνικού πίνακα  $\mathbf{A}$  (διαστάσεων  $3 \times 3$ ) επί το διάνυσμα (διάνυσμα στήλης)  $\dot{\mathbf{u}}$  (με 3 στοιχεία: 3 γραμμές και 1 στήλη) ορίζεται και έχει τη μορφή

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{u}}(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \\ \dot{u}_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{11}\dot{u}_1(t) + a_{12}\dot{u}_2(t) + a_{13}\dot{u}_3(t) \\ a_{21}\dot{u}_1(t) + a_{22}\dot{u}_2(t) + a_{23}\dot{u}_3(t) \\ a_{31}\dot{u}_1(t) + a_{32}\dot{u}_2(t) + a_{33}\dot{u}_3(t) \end{Bmatrix}. \quad (12.3.10)$$

Στη μορφή αυτή έγινε η επιλογή της ρητής δηλώσεως της εξαρτήσεως του διανύσματος (διανύσματος στήλης εννοείται)  $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}(t)$  από την ανεξάρτητη μεταβλητή  $t$ . Συχνά όμως τούτο θεωρείται αυτονόητο σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα του Πολιτικού Μηχανικού με τη χρήση μητρώων. Τότε η ρητή αυτή δήλωση παραλείπεται και γράφουμε απλούστερα

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{11}\dot{u}_1 + a_{12}\dot{u}_2 + a_{13}\dot{u}_3 \\ a_{21}\dot{u}_1 + a_{22}\dot{u}_2 + a_{23}\dot{u}_3 \\ a_{31}\dot{u}_1 + a_{32}\dot{u}_2 + a_{33}\dot{u}_3 \end{Bmatrix}. \quad (12.3.11)$$

Σε μια τέτοια έκφραση τα στοιχεία  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) του τετραγωνικού μητρώου  $\mathbf{A}$  θεωρούνται συνήθως σταθερές ποσότητες, τούτο όμως δεν είναι αναγκαίο. Εάν υπάρχει εξάρτησή τους από το χρόνο  $t$ , καλό είναι αυτή η εξάρτηση να δηλώνεται ρητά με τη γραφή  $\mathbf{A}(t)$  για το ίδιο το τετραγωνικό μητρώο  $\mathbf{A}$  και ανάλογα με τη γραφή  $a_{ij}(t)$  για τα στοιχεία του  $a_{ij}$ . Αυτό όμως συμβαίνει σε σπάνιες μόνο περιπτώσεις σε τετραγωνικά μητρώα  $\mathbf{A}$  σε προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού.

Επομένως με βάση τις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να έχουμε ένα γραμμικό σύστημα τριών διαφορικών εξισώσεων γραμμένο σε μορφή με μητρώα (μητρική μορφή), π.χ. το σύστημα

$$\mathbf{B}\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t) \quad (12.3.12)$$

με το διάνυσμα των αγνώστων συναρτήσεων  $\mathbf{u}(t)$  και το διάνυσμα των παραγώγων των αγνώστων συναρτήσεων  $\dot{\mathbf{u}}(t)$  να δίνονται από τις σχέσεις (12.3.9). Τα δύο τετραγωνικά μητρώα  $\mathbf{A}$  και  $\mathbf{B}$  θεωρούνται ότι δεν εξαρτώνται από τη μεταβλητή  $t$  και ότι δίνονται από τις σχέσεις (12.3.1).

Τώρα οι σχέσεις (12.3.8) για το γινόμενο  $\mathbf{A}\mathbf{u}(t)$  και (12.3.10) ή (12.3.11) για το γινόμενο  $\mathbf{B}\dot{\mathbf{u}}(t)$  (εδώ με  $\mathbf{B}$  αντί  $\mathbf{A}$ ) μας επιτρέπουν να γράψουμε αναλυτικά το γραμμικό σύστημα των τριών διαφορικών εξισώσεων (12.3.12) στη μορφή

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}. \quad (12.3.13)$$

Μετά την εκτέλεση των πολλαπλασιασμών σύμφωνα με τους κανόνες (12.3.8) και (12.3.11) για τον πολλαπλασιασμό μητρώου επί διάνυσμα το γραμμικό σύστημα των διαφορικών εξισώσεων

με μητρώα (12.3.13) παίρνει την εξής συνήθη μορφή ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned} b_{11}\dot{u}_1 + b_{12}\dot{u}_2 + b_{13}\dot{u}_3 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3, \\ b_{21}\dot{u}_1 + b_{22}\dot{u}_2 + b_{23}\dot{u}_3 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3, \\ b_{31}\dot{u}_1 + b_{32}\dot{u}_2 + b_{33}\dot{u}_3 &= a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3. \end{aligned} \quad (12.3.14)$$

#### A12.4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΙΣΩΣΕΩΝ

Σημειώνουμε καταρχήν ότι και στο Κεφάλαιο αυτό A12 αλλά και στο επόμενο Κεφάλαιο A13 ασχολούμαστε αποκλειστικά με γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων (ή συστήματα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων) και μάλιστα με σταθερούς συντελεστές ομογενή ή μη ομογενή. Όταν αναφερόμαστε λοιπόν σε συστήματα διαφορικών εξισώσεων, θα εννοούμε απλά γραμμικά συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές.

Στις επόμενες ενότητες αυτού του Κεφαλαίου A12 θα επιδείξουμε τη χρήση μερικών βασικών μεθόδων επιλύσεως γραμμικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων χρησιμοποιώντας για παράδειγμα το απλό σύστημα

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t). \quad (12.4.1)$$

Υποθέτοντας μάλιστα ότι  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$  (δηλαδή ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η  $t$ , συνήθως μάλιστα δηλώνοντας το χρόνο), μπορούμε να γράψουμε ακριβώς το ίδιο σύστημα στην απλούστερη μορφή

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\mathbf{u}. \quad (12.4.2)$$

Στο σύστημα αυτό υποθέτουμε εδώ ότι το διάνυσμα (εννοείται διάνυσμα στήλης)  $\mathbf{u}(t)$ , η πρώτη παράγωγος του διανύσματος αυτού  $\dot{\mathbf{u}}(t)$  καθώς και το τετραγωνικό μητρώο  $\mathbf{A}$  των σταθερών συντελεστών έχουν τις εξής συγκεκριμένες μορφές:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} \implies \dot{\mathbf{u}}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{Bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}. \quad (12.4.3)$$

Θα μπορούσαμε βέβαια να είχαμε παραλείψει την εξάρτηση του άγνωστου διανύσματος  $\mathbf{u}(t)$  από το χρόνο  $t$ . Το ίδιο και για τις δύο συνιστώσες  $x(t)$  και  $y(t)$  του διανύσματος αυτού, δηλαδή για τις δύο άγνωστες συναρτήσεις στο σύστημα των διαφορικών εξισώσεών μας (12.4.1) ή (12.4.2).

Πρόκειται για ένα πολύ απλό ομογενές γραμμικό σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων με δύο άγνωστες συναρτήσεις, τις  $x(t)$  και  $y(t)$ , και με απλούς αριθμητικούς συντελεστές: 1, 2, 4 και 3, όπως παρατηρούμε από το πιο πάνω μητρώο  $\mathbf{A}$ . Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις (12.4.3) του διανύσματος  $\mathbf{u}(t)$  και της πρώτης παραγώγου του  $\dot{\mathbf{u}}(t)$  καθώς και του μητρώου των συντελεστών  $\mathbf{A}$  στο αρχικό σύστημα (12.4.1), το γράφουμε στην εξής ισοδύναμη, αλλά πιο αναλυτική, μητρική μορφή (με άλλες λέξεις μορφή με μητρώα):

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix}. \quad (12.4.4)$$

Σημειώνουμε και πάλι ότι σε όλα τα μητρώα: και στο τετραγωνικό μητρώο  $\mathbf{A}$  και στα μητρώα μιας στήλης (διανύσματα)  $\mathbf{u}(t)$  και  $\dot{\mathbf{u}}(t)$  μπορούν να χρησιμοποιούνται ή αγκύλες ή παρενθέσεις. Συνήθως όμως ο Πολιτικός Μηχανικός χρησιμοποιεί αγκύλες για τα μητρώα με δύο ή περισσότερες στήλες (και γραμμές) και άγκιστρα για τα μητρώα μιας στήλης, τα διανύσματα (ή, λεπτομερέστερα, διανύσματα στήλης). Αυτόν τον τελευταίο συμβολισμό ακολουθούμε και εμείς. Έτσι δε θα δημιουργηθούν προβλήματα αλλαγής συμβολισμού σε επόμενα μαθήματα του Πολιτικού Μηχανικού, όπως στα μαθήματα Ανάλυση Γραμμικών Φορέων με Μητρώα και Δυναμική των Κατασκευών. Είναι δικαιολογημένη για τον Πολιτικό Μηχανικό η διάκριση μεταξύ μητρώων (με περισσότερες από μία

στήλης) και διανυσμάτων (μητρώων με μία στήλη). Ας επιτραπεί στο γράφοντα να την εφαρμόσει στο διδακτικό αυτό βιβλίο. Είναι συνηθισμένη στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού!

Το σύστημα των δύο ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (12.4.1) ή (12.4.4) μετατρέπεται εύκολα στη συνήθη (τη βαθμωτή) μορφή του (χωρίς καθόλου πλέον μητρώα). Αρχικά εκτελούμε τον πολλαπλασιασμό  $\mathbf{A}$  επί  $\mathbf{u}(t)$  στο δεξιό μέλος σύμφωνα με τις γνώσεις μας από τη Γραμμική Άλγεβρα. Με βάση το σχετικό κανόνα για τον πολλαπλασιασμό μητρώων, που ήδη τον υπενθυμίσαμε στην προηγούμενη Ενότητα A12.3, σχέσεις (12.3.6) και (12.3.8), προκύπτει ότι

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x(t) + 2y(t) \\ 4x(t) + 3y(t) \end{Bmatrix}. \quad (12.4.5)$$

Από τη διανυσματική αυτή μορφή του συστήματος (γραμμικών διαφορικών εξισώσεων εννοείται) αναγόμενατε εύκολα και στην καθαρά βαθμωτή μορφή του (χωρίς πλέον ούτε καν διανύσματα στήλης), δηλαδή στη μορφή

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t) + 2y(t), \\ \dot{y}(t) &= 4x(t) + 3y(t). \end{aligned} \quad (12.4.6)$$

Η μορφή αυτή προκύπτει άμεσα εξισώνοντας τα πάνω στοιχεία (πρώτη διαφορική εξίσωση) και τα κάτω στοιχεία (δεύτερη διαφορική εξίσωση) στα δύο διανύσματα στήλης (του αριστερού μέλους και του δεξιού μέλους) της διανυσματικής μορφής (12.4.5) του συστήματός μας.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι εύκολα αναγάγαμε το ομογενές γραμμικό σύστημα των δύο διαφορικών εξισώσεων (12.4.1) του παρόντος παραδείγματος στη συνήθη μορφή του (12.4.6). Παρά ταύτα είναι εξαιρετικά αμφίβολο αν ο Πολιτικός Μηχανικός, ο οποίος πολύ συχνά χρησιμοποιεί τα μητρώα στις μελέτες του, προτιμάει τη βαθμωτή μορφή (12.4.6) από την αρχική μορφή (12.4.1) ή, αναλυτικότερα, (12.4.4) του ίδιου ακριβώς συστήματος. Αναγνωρίζεται εντούτοις ότι στο Α' Έτος Σπουδών η συνήθης μορφή (12.4.6) είναι γενικά προτιμότερη κατά την εκμάθηση των μεθόδων επιλύσεως γραμμικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων απλά για εκπαιδευτικούς λόγους.

Στις επόμενες ενότητες θα ασχοληθούμε με τις κυριότερες μεθόδους επιλύσεως του συστήματος (12.4.1) χρησιμοποιώντας κυρίως τη συνήθη μορφή του (12.4.6). Πρόκειται πραγματικά για ένα πολύ απλό σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Τούτο συμβαίνει, επειδή αποτελείται από δύο μόνο διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως, είναι γραμμικό, με σταθερούς συντελεστές και ομογενές μάλιστα. Δυστυχώς, ερμηνεύοντας σαν  $\mathbf{u}(t)$  τη θέση υλικού σημείου  $M$  στο επίπεδο και  $t$  το χρόνο, πρέπει να ομολογήσουμε ότι δεν πρόκειται για σύστημα διαφορικών εξισώσεων που αφορά σε μηχανικό σύστημα του Πολιτικού Μηχανικού. Τούτο θα διαπιστωθεί εύκολα στις επόμενες ενότητες αυτού του Κεφαλαίου A12. Αντίθετα στο επόμενο Κεφάλαιο A13 θα έχουμε την ευκαιρία να αναφερθούμε σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων που πραγματικά μπορεί να παρουσιασθεί στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού και θα το εξακριβώσουμε κι αυτό.

Εδώ, στις ενότητες αυτού του Κεφαλαίου A12 που απομένουν, θα αναφερθούμε με συντομία στις μεθόδους επιλύσεως γραμμικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων χρησιμοποιώντας συνεχώς το σύστημα (12.4.1), συνήθως στη βαθμωτή μορφή του (12.4.6), σαν παράδειγμα. Τα συστήματα διαφορικών εξισώσεων του Πολιτικού Μηχανικού στη Δυναμική και τις Ταλαντώσεις, αλλά και στη Δυναμική των Κατασκευών, είναι συνήθως δευτέρας τάξεως λόγω της ισχύος του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα, από τον οποίο και προκύπτουν. Εντούτοις στο Κεφάλαιο αυτό A12 θα χρησιμοποιήσουμε σαν παράδειγμα το σύστημα (12.4.1) ή (12.4.6) που είναι πρώτης τάξεως απλά χάριν απλότητας. Αντίθετα στο επόμενο Κεφάλαιο A13, που αναφέρεται ρητά σε θέματα Δυναμικής και Ταλαντώσεων μηχανικών συστημάτων του Πολιτικού Μηχανικού, το σχετικό παράδειγμα θα αφορά σε σύστημα διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξεως. Επαναλαμβάνεται ότι τα συστήματα διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξεως είναι εκείνα που απαντώνται στη Δυναμική και τις Ταλαντώσεις. Παρά ταύτα εκπαιδευτικοί λόγοι απαιτούν το ξεκίνημά μας από το παράδειγμα (12.4.1) ή (12.4.6) ενός γραμμικού συστήματος διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως.

## A12.5. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ

### A12.5.1. Σύντομη περιγραφή της μεθόδου

Σε ένα συνηθισμένο γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων, π.χ. στο σύστημα

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned} \quad (12.5.1)$$

με  $x$  και  $y$  τους αγνώστους και  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1$  και  $b_2$  γνωστές σταθερές, συχνά προσπαθούμε να απαλείψουμε τον έναν άγνωστο, π.χ. το  $y$ . Έτσι καταλήγουμε σε μια γραμμική εξίσωση με ένα μόνο άγνωστο, το  $x$  (ή αντίστροφα). Βρίσκοντας το  $x$  από την εξίσωση αυτή, στη συνέχεια μπορούμε εύκολα να βρούμε και το  $y$ , π.χ. από την πρώτη ή τη δεύτερη από τις γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις (12.5.1). Αυτή είναι η μέθοδος της απαλοιφής για γραμμικά συστήματα αλγεβρικών εξισώσεων, δηλαδή εξισώσεων πρώτου βαθμού.

Απόλυτα ανάλογη είναι και η μέθοδος της απαλοιφής για γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων, όπως είναι το ομογενές σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t) + 2y(t), \\ \dot{y}(t) &= 4x(t) + 3y(t). \end{aligned} \quad (12.5.2)$$

Το σύστημα αυτό το αναφέραμε ήδη στο παράδειγμα της προηγούμενης Ενότητας A12.4. Η μορφή του αυτή, η (12.5.2), είναι η μορφή χωρίς μητρώα, η τελική του μορφή (12.4.6).

Σε ένα γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων, ομογενές ή μη ομογενές, εάν οι άγνωστες συναρτήσεις είναι λίγες (π.χ. μόλις δύο ή τρεις), είναι συχνά εύκολο να τις απαλείψουμε εκτός από μία. Καταλήγουμε έτσι σε μία μόνο διαφορική εξίσωση με επίσης μία μόνο άγνωστη συνάρτηση. Η διαφορική αυτή εξίσωση θα είναι βέβαια τάξεως ανώτερης από τις τάξεις των αρχικών διαφορικών εξισώσεων. Παραδείγματος χάρη, στο παραπάνω σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (12.5.2) θα είναι δευτέρας τάξεως είτε απαλείψουμε την άγνωστη συνάρτηση  $x(t)$  είτε την  $y(t)$ . Αντίθετα οι αρχικές διαφορικές εξισώσεις του συστήματος (12.5.2) είναι πρώτης τάξεως.

Σαν παράδειγμα της μεθόδου της απαλοιφής θα επιλύσουμε το γραμμικό σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (12.5.2) βρίσκοντας τη γενική λύση του  $x(t)$  και  $y(t)$ . Όμως και οι δύο διαφορικές εξισώσεις του συστήματος αυτού είναι πρώτης τάξεως και το ίδιο σύστημα είναι σε **κανονική μορφή**, δηλαδή σε λυμένη μορφή ως προς τις παραγώγους  $\dot{x}(t)$  και  $\dot{y}(t)$ . Επομένως περιμένουμε στη γενική λύση δύο αυθαίρετες σταθερές, ως τις αποκαλέσουμε  $E_1$  και  $E_2$ , και με κανέναν τρόπο περισσότερες. Η παρατήρηση αυτή θα γίνει σαφέστερη στο αμέσως παρακάτω παράδειγμα.

### A12.5.2. Παράδειγμα

Είναι πραγματικά πολύ απλή η επίλυση του γραμμικού συστήματος των δύο διαφορικών εξισώσεων (12.5.2) με τη μέθοδο της απαλοιφής.

Ας ξεκινήσουμε απαλείφοντας την άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή)  $y = y(t)$ . Προς το σκοπό αυτό από την πρώτη διαφορική εξίσωση (12.5.2) βρίσκουμε άμεσα, αλγεβρικά (χωρίς δηλαδή να λύσουμε κάποια διαφορική εξίσωση) ότι

$$y(t) = \frac{\dot{x}(t) - x(t)}{2}. \quad (12.5.3)$$

Στη σχέση αυτή παρουσιάζεται τόσο η άγνωστη συνάρτηση  $x(t)$  όσο και η πρώτη παράγωγός της  $\dot{x}(t)$ . Στη δεύτερη διαφορική εξίσωση του ίδιου συστήματος (12.5.2) παρουσιάζεται όμως και η άγνωστη συνάρτηση  $y(t)$  και η πρώτη παράγωγός της  $\dot{y}(t)$ . Ας την υπολογίσουμε λοιπόν και αυτήν, την  $\dot{y}(t)$ , παραγωγίζοντας τη σχέση (12.5.3). Έτσι βρίσκουμε αμέσως ότι

$$\dot{y}(t) = \frac{\ddot{x}(t) - \dot{x}(t)}{2}. \quad (12.5.4)$$

Επομένως παρατηρούμε ότι τώρα παρουσιάστηκε και η δεύτερη παράγωγος  $\ddot{x}(t)$  της άγνωστης συναρτήσεως  $x(t)$ . Άρα περιμένουμε η διαφορική εξίσωση στην οποία θα καταλήξουμε ως προς την άγνωστη συνάρτηση  $x(t)$  (που δε θα την απαλείψουμε κι αυτή) να είναι δευτέρας τάξεως.

Πραγματικά, μέχρι τώρα χρησιμοποιήσαμε μόνο την πρώτη διαφορική εξίσωση του συστήματος (12.5.2) και βρήκαμε τις σχέσεις (12.5.3) και (12.5.4). Αντικαθιστούμε και τις δύο αυτές σχέσεις στη δεύτερη διαφορική εξίσωση του συστήματος (12.5.2), την οποία δεν είχαμε την ευκαιρία να χρησιμοποιήσουμε μέχρι τώρα, αλλ' ούτε επιτρέπεται βέβαια και να την αγνοήσουμε. Έτσι προκύπτει η εξής διαφορική εξίσωση ως προς την άγνωστη συνάρτηση  $x(t)$  μόνο:

$$\frac{\ddot{x}(t) - \dot{x}(t)}{2} = 4x(t) + 3 \frac{\dot{x}(t) - x(t)}{2}. \quad (12.5.5)$$

Προέκυψε λοιπόν μια ανεξάρτητη, μεμονωμένη γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως ως προς την άγνωστη συνάρτηση  $x(t)$ . Άρα υπήρξε επιτυχής η μέθοδος της απαλοιφής στο παρόν απλό παράδειγμα συστήματος γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Ξαναγράφουμε τη διαφορική εξίσωση (12.5.5), στην οποία καταλήξαμε, σε ισοδύναμη, αλλά κάπως απλοποιημένη μορφή

$$\ddot{x}(t) - \dot{x}(t) = 8x(t) + 3\dot{x}(t) - 3x(t) \quad (12.5.6)$$

και στην πλήρως απλοποιημένη μορφή της

$$\ddot{x}(t) - 4\dot{x}(t) - 5x(t) = 0. \quad (12.5.7)$$

Με τη χρήση του διαφορικού τελεστή  $D \equiv d/dt$  (για τις παραγωγίσεις) παίρνουμε και την ισοδύναμη (και ακόμη πιο απλοποιημένη) μορφή

$$(D^2 - 4D - 5)x(t) = 0. \quad (12.5.8)$$

Πρόκειται για μια πολύ απλή γραμμική συνήθη διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως με μόνη άγνωστη συνάρτηση (εξαρτημένη μεταβλητή) την  $x(t)$ . Η άγνωστη συνάρτηση  $y(t)$  έχει ήδη απαλειφθεί! Εδώ μάλιστα η διαφορική εξίσωση είναι και ομογενής, επειδή και το αρχικό σύστημα (12.5.2) ήταν ομογενές. Εντούτοις η μέθοδος της απαλοιφής είναι εφαρμόσιμη και σε μη ομογενή γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων.

Για την επίλυση της διαφορικής αυτής εξισώσεως (12.5.8) έχουμε τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως για γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Δηλαδή μπορούμε να δοκιμάσουμε λύση της εκθετικής μορφής  $x_0(t) = e^{\mu t}$  με τη σταθερά  $\mu$  στον εκθέτη  $\mu t$  προς το παρόν άγνωστη. Τότε έχουμε

$$x_0(t) = e^{\mu t} \implies \dot{x}_0(t) = \mu e^{\mu t} \implies \ddot{x}_0(t) = \mu^2 e^{\mu t}. \quad (12.5.9)$$

Αρκετά! Δε χρειαζόμαστε άλλες παραγώγους, γιατί η γραμμική και με σταθερούς συντελεστές διαφορική εξίσωση (12.5.7) (ισοδύναμα (12.5.8)) που θέλουμε να επιλύσουμε είναι μόλις δευτέρας τάξεως. Αντικαθιστώντας τη δοκιμαστική συνάρτηση  $x_0(t)$  και τις δύο πρώτες παραγώγους της  $\dot{x}_0(t)$  και  $\ddot{x}_0(t)$  από τις σχέσεις (12.5.9) στη διαφορική εξίσωση (12.5.7), παίρνουμε την εξής εξίσωση:

$$\mu^2 e^{\mu t} - 4\mu e^{\mu t} - 5e^{\mu t} = 0 \implies (\mu^2 - 4\mu - 5)e^{\mu t} = 0. \quad (12.5.10)$$

Στην εξίσωση αυτή κάναμε και τη σχετική παραγοντοποίηση με κοινό παράγοντα φυσικά την εκθετική συνάρτηση  $e^{\mu t}$ . Όμως η εκθετική συνάρτηση  $e^{\mu t}$  δε μηδενίζεται για καμία πεπερασμένη τιμή του εκθέτη της  $\mu t$  (είτε με πραγματική είτε με μιγαδική τη σταθερά  $\mu$ ). Επομένως, για να είναι επιτυχής η εκθετική αντικατάσταση (12.5.9) (πρώτη σχέση (12.5.9)), πρέπει να μηδενίζεται στη σχέση (12.5.10) το δευτεροβάθμιο πολυώνυμο

$$p_2(\mu) = \mu^2 - 4\mu - 5 = 0. \quad (12.5.11)$$



Στις γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις το βοηθητικό αυτό πολυώνυμο  $p_2(\mu)$  καλείται, όπως πολύ καλά γνωρίζουμε από την Ενότητα A5.5, **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** και η αντίστοιχη δευτεροβάθμια εξίσωση (12.5.11) καλείται **χαρακτηριστική εξίσωση**. Οι ρίζες της  $\mu_{1,2}$  προσδιορίζονται πολύ εύκολα από το σχετικό τύπο για δευτεροβάθμιες αλγεβρικές εξισώσεις

$$\mu_{1,2} = \frac{4 \mp \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2} = \frac{4 \mp \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \mp \sqrt{36}}{2} = 2 \mp \sqrt{9} = 2 \mp 3. \quad (12.5.12)$$

Έτσι βρίσκουμε τις δύο ρίζες  $\mu_{1,2}$  της χαρακτηριστικής εξίσωσης (12.5.11)

$$\mu_1 = 2 - 3 = -1 \quad \text{και} \quad \mu_2 = 2 + 3 = 5. \quad (12.5.13)$$

Επιλέξαμε μάλιστα τη μικρότερη, την αρνητική ρίζα  $\mu_1 = -1$  σαν πρώτη ρίζα. (Γι' αυτό ακριβώς έγινε και η χρήση του συμβόλου  $\mp$  αντί του πολύ συνηθέστερου συμβόλου  $\pm$  στη λύση (12.5.12).)

Ας σημειωθεί τέλος ότι ο εξειδικευμένος στη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως για ανεξάρτητες συνήθεις διαφορικές εξισώσεις Πολιτικός Μηχανικός μεταβαίνει αμέσως από τη διαφορική εξίσωση (12.5.8) στη δεύτερη από τις εξισώσεις (12.5.10). (Αυτό το κατορθώνει βέβαια έχοντας στο νου του τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως  $x_0(t) = e^{\mu t}$ .) Ο ακόμη πιο εξειδικευμένος Πολιτικός Μηχανικός μεταβαίνει κατευθείαν από τη διαφορική εξίσωση (12.5.8) στη χαρακτηριστική εξίσωση (12.5.11) παραλείποντας μάλιστα το σύμβολο  $p_2(\mu)$  που είναι προφανές. Αυτό το κάνει κατανοώντας ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $p_2(\mu) = \mu^2 - 4\mu - 5$  μοιάζει με το γραμμικό διαφορικό τελεστή

$$L = D^2 - 4D - 5 \quad (12.5.14)$$

στη διαφορική εξίσωση (12.5.8), αλλά τώρα με  $\mu$ , που είναι αριθμός, και όχι με  $D$ , που είναι το σύμβολο της παραγωγίσεως (εδώ ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή  $t$ , ίσως το χρόνο). Φυσικά το να γράψει κανείς  $D = \mu$  αποτελεί *σοβαρότατο μαθηματικό λάθος*, γιατί το  $\mu$  είναι αριθμός, ενώ το  $D$  είναι διαφορικός τελεστής. Επομένως η εξίσωσή τους (με το σύμβολο ίσον μεταξύ τους) δεν επιτρέπεται με κανέναν τρόπο! Ίσως όμως επιτρέπεται η τυπική «αντικατάσταση»  $D \rightarrow \mu$ .

Εν πάση περιπτώσει προσδιορίσαμε ήδη τις κατάλληλες τιμές:  $\mu_1 = -1$  και  $\mu_2 = 5$  (τις δύο ρίζες (12.5.13)) της σταθεράς  $\mu$  στον εκθέτη  $\mu t$  της εκθετικής αντικαταστάσεως  $x_0(t) = e^{\mu t}$  στην πρώτη από τις αντικαταστάσεις (12.5.9). Επομένως έχουμε ήδη διαθέσιμες τις δύο μερικές λύσεις

$$x_1(t) = e^{\mu_1 t} = e^{-t} \quad \text{και} \quad x_2(t) = e^{\mu_2 t} = e^{5t} \quad (12.5.15)$$

της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως (12.5.7) ή (12.5.8) (με τη χρήση και του διαφορικού τελεστή  $D$ ). Οι δύο αυτές μερικές (ή ειδικές) λύσεις είναι βέβαια γραμμικά ανεξάρτητες. Τούτο φαίνεται και με τον υπολογισμό της σχετικής ορίζουσας Wronski

$$\begin{aligned} W[x_1, x_2] &\equiv W[x_1(t), x_2(t)] \equiv W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-t} & e^{5t} \\ -e^{-t} & 5e^{5t} \end{vmatrix} \\ &= (e^{-t})(5e^{5t}) - (-e^{-t})(e^{5t}) = 5e^{4t} + e^{4t} = 6e^{4t} \neq 0. \end{aligned} \quad (12.5.16)$$

Επομένως οι δύο αυτές μερικές λύσεις  $x_1(t) = e^{-t}$  και  $x_2(t) = e^{5t}$  αποτελούν ένα σύστημα (ή σύνολο) θεμελιωδών λύσεων για την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (12.5.7) ή (12.5.8). Άρα η γενική λύση της ίδιας διαφορικής εξισώσεως θα έχει την ακόλουθη μορφή:

$$x(t) = E_1 x_1(t) + E_2 x_2(t) = E_1 e^{-t} + E_2 e^{5t} \quad (12.5.17)$$

με τις ποσότητες  $E_1$  και  $E_2$  σ' αυτήν αυθαίρετες σταθερές. Δηλαδή έχουμε μια διπλή απειρία λύσεων, επειδή είχαμε μια γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερας τάξεως: την εξίσωση (12.5.7) και σε ισοδύναμη γραφή (12.5.8).

Έχοντας τώρα προσδιορίσει τη γενική λύση  $x(t)$  του αρχικού συστήματος των δύο διαφορικών εξισώσεων (12.5.2), αφού πρώτα απαλείψαμε τη δεύτερη άγνωστη συνάρτηση  $y(t)$ , επιστρέφουμε και σ' αυτή. Δε χρειάζεται πια να αναφερθούμε στις δύο διαφορικές εξισώσεις του γραμμικού συστήματος (12.5.2). Έχουμε ήδη επιλύσει την πρώτη από αυτές ως προς την άγνωστη συνάρτηση  $y(t)$  και διαθέτουμε τη σχετική λύση (12.5.3), την επαναλαμβάνουμε

$$y(t) = \frac{\dot{x}(t) - x(t)}{2}. \quad (12.5.18)$$

Στη λύση αυτή απομένει τώρα να αντικαταστήσουμε τη γενική λύση (12.5.17) που βρήκαμε για την πρώτη άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή)  $x(t)$  και την παράγωγό της βέβαια

$$\dot{x}(t) = E_1 \dot{x}_1(t) + E_2 \dot{x}_2(t) = -E_1 e^{-t} + 5E_2 e^{5t}. \quad (12.5.19)$$

(Είναι πραγματικά πολύ εύκολη η παραγωγή της αυτής!) Έτσι από τη σχέση (12.5.18) προσδιορίζουμε άμεσα τη γενική λύση  $y(t)$  στη μορφή

$$y(t) = \frac{1}{2} [(-E_1 e^{-t} + 5E_2 e^{5t}) - (E_1 e^{-t} + E_2 e^{5t})] = \frac{1}{2} (-2E_1 e^{-t} + 4E_2 e^{5t}) = -E_1 e^{-t} + 2E_2 e^{5t}. \quad (12.5.20)$$

Ας συνοψίσουμε τη γενική λύση (12.5.17) (για την άγνωστη συνάρτηση  $x(t)$ ) και (12.5.20) (για την άγνωστη συνάρτηση  $y(t)$ ) του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (12.5.2) σε μια γραμμή

$$\begin{aligned} x(t) &= E_1 e^{-t} + E_2 e^{5t}, \\ y(t) &= -E_1 e^{-t} + 2E_2 e^{5t}. \end{aligned} \quad (12.5.21)$$

Η ίδια λύση μπορεί βέβαια να γραφεί θαυμάσια και σε μητρική μορφή ως εξής:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ -E_1 & 2E_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e^{-t} \\ e^{5t} \end{Bmatrix} \quad (12.5.22)$$

σημειώνοντας και την πρώτη από τις σχέσεις (12.4.3). Αν θέλουμε μάλιστα, με τη χρήση του μητρώου  $\mathbf{E}$  και του διανύσματος (διανύσματος στήλης εννοείται)  $\mathbf{g}(t)$  που ορίζονται σαν

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ -E_1 & 2E_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(t) = \begin{Bmatrix} e^{-t} \\ e^{5t} \end{Bmatrix}, \quad (12.5.23)$$

ξαναγράφουμε τη γενική λύση (12.5.22) στη συνεπτυγμένη μητρική μορφή της

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{E}\mathbf{g}(t). \quad (12.5.24)$$

Αυτή είναι η γενική λύση (σε μητρική μορφή) του συστήματος των δύο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (12.4.1) (επίσης σε μητρική μορφή και με το μητρώο  $\mathbf{A}$  να έχει ορισθεί στη σχέση (12.4.3)). Η πλήρης επαλήθευση της λύσεως αυτής (12.5.24) θα γίνει στο Βήμα 4 της Παραγράφου A12.6.2 της επόμενης Ενότητας A12.6. Στην ίδια Παράγραφο A12.6.2 η ίδια ακριβώς λύση (12.5.21) (ή (12.5.22) ή (12.5.24)) θα προσδιορισθεί και με μια εντελώς διαφορετική μέθοδο: εκείνη του μετασχηματισμού Laplace αντί για την παρούσα μέθοδο της απαλοιφής.

Τελειώνουμε το παρόν παράδειγμα για τη μέθοδο της απαλοιφής για γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων κάνοντας δύο σημαντικές παρατηρήσεις:

► **Παρατήρηση A12.1:** Η πρώτη παρατήρηση αφορά στο ότι θα μπορούσαμε ασφαλώς να είχαμε απαλείψει την άγνωστη συνάρτηση  $x(t)$  αντί για την άγνωστη συνάρτηση  $y(t)$  με απόλυτα ανάλογη διαδικασία. Με τον τρόπο αυτό θα καταλήγαμε στην ακόλουθη ανεξάρτητη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως:

$$\ddot{y}(t) - 4\dot{y}(t) - 5y(t) = 0 \quad (12.5.25)$$

και σε ισοδύναμη γραφή (τώρα όμως με τη χρήση του διαφορικού τελεστή  $D$ )

$$(D^2 - 4D - 5)y(t) = 0. \quad (12.5.26)$$

Η επιπλέον παρατήρηση είναι ότι η διαφορική εξίσωση (12.5.25) (ή (12.5.26)) δε διαφέρει (στο συγκεκριμένο παράδειγμα του ομογενούς γραμμικού συστήματος διαφορικών εξισώσεων (12.5.2)) από την αντίστοιχη διαφορική εξίσωση (12.5.7) (ή (12.5.8)) για την άγνωστη συνάρτηση  $x(t)$ . Αυτό είναι γενικό φαινόμενο για τα ομογενή μέρη των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων που προκύπτουν με τη μέθοδο της απαλοιφής από γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές. Η επιλογή της άγνωστης συναρτήσεως που θα απαλειφθεί (ή των αγνώστων συναρτήσεων που θα απαλειφθούν) είναι θέμα υπολογιστικού κόπου και μια κατάλληλη συγκεκριμένη επιλογή μπορεί να μειώσει κάπως τον κόπο αυτό.

► **Παρατήρηση A12.2:** Η δεύτερη και πιο σημαντική παρατήρηση για τη μέθοδο της απαλοιφής είναι ο κίνδυνος αβλεψίας που υπάρχει για το χρήστη της ως προς τον αριθμό των αυθαίρετων σταθερών που τελικά εμφανίζονται στη γενική λύση. Για να γίνουμε συγκεκριμένοι ως προς τον κίνδυνο αυτό, ας παρατηρήσουμε πρώτα ότι η γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως (12.5.7) (ή (12.5.8)) ως προς την άγνωστη συνάρτηση  $x(t)$  στο σύστημα (12.5.2) είναι η (12.5.17), την επαναλαμβάνουμε

$$x(t) = E_1 e^{-t} + E_2 e^{5t}. \quad (12.5.27)$$

Με ανάλογη όμως απαλοιφή έχει προκύψει και η παρόμοια διαφορική εξίσωση (12.5.25), αλλά τώρα ως προς τη δεύτερη άγνωστη συνάρτηση  $y(t)$ . Και η διαφορική αυτή εξίσωση (12.5.25) έχει προφανώς την ίδια ακριβώς χαρακτηριστική εξίσωση (12.5.11) και την ανάλογη γενική λύση της

$$y(t) = F_1 e^{-t} + F_2 e^{5t} \quad (12.5.28)$$

με επίσης δύο αυθαίρετες σταθερές: τις  $F_1$  και  $F_2$ . Θα μπορούσε ίσως ένας χρήστης της μεθόδου να συνδυάσει τις γενικές λύσεις (12.5.27) και (12.5.28) και να τολμήσει (κακώς!) να ισχυρισθεί ότι η γενική λύση του αρχικού συστήματος διαφορικών εξισώσεων (12.5.2), δηλαδή του συστήματος

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t) + 2y(t), \\ \dot{y}(t) &= 4x(t) + 3y(t), \end{aligned} \quad (12.5.29)$$

είναι η λύση που προσδιορίζεται από τις σχέσεις (12.5.27) και (12.5.28) ταυτόχρονα. Τούτο είναι απόλυτα ανακριβές, επειδή το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (12.5.2) (ή (12.5.29)) αποτελείται από δύο διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως. Επομένως η γενική λύση του δε μπορεί να περιέχει περισσότερες από δύο αυθαίρετες σταθερές.

Με τις σκέψεις αυτές η γενική λύση (12.5.21) (ή (12.5.22) σε ισοδύναμη μητρική μορφή) είναι απόλυτα σωστή (και περιέχει πραγματικά δύο μονάχα σταθερές: τις  $E_1$  και  $E_2$ ). Αλλ' αντίθετα η απερίσκεπτα υποτιθέμενη «γενική λύση» (12.5.27) και (12.5.28) με τέσσερις αυθαίρετες σταθερές, τις  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $F_1$  και  $F_2$ , είναι λανθασμένη. Και τούτο συμβαίνει όχι επειδή έγιναν κάποιοι εσφαλμένοι υπολογισμοί (δεν έγιναν!), αλλά γιατί η μέθοδος της απαλοιφής εφαρμόστηκε ξεχωριστά τόσο για την άγνωστη συνάρτηση  $x(t)$  όσο και για την άγνωστη συνάρτηση  $y(t)$ . Το δέλεαρ ήταν η εμφάνιση της ίδιας ακριβώς διαφορικής εξισώσεως (12.5.7) και (12.5.25) ή, με τη χρήση του διαφορικού τελεστή  $D \equiv d/dt$ , (12.5.8) και (12.5.26). Δυστυχώς όμως η μέθοδος αυτή οδήγησε σε πρόσθετες, επιπλέον αυθαίρετες σταθερές: τέσσερις σταθερές αντί για δύο, όπως είναι το σωστό.

Ο τρόπος για να απαλλαγούμε από τις επιπλέον αυθαίρετες σταθερές, ας υποθέσουμε ότι αυτές είναι οι  $F_1$  και  $F_2$  στη λύση (12.5.28), είναι απλά να αντικαταστήσουμε τις εκφράσεις (12.5.27) και (12.5.28) στις ίδιες τις αρχικές διαφορικές εξισώσεις του συστήματος (12.5.29). Έτσι από την πρώτη από αυτές βρίσκουμε ότι

$$\dot{x}(t) = x(t) + 2y(t) \implies -E_1 e^{-t} + 5E_2 e^{5t} = (E_1 e^{-t} + E_2 e^{5t}) + 2(F_1 e^{-t} + F_2 e^{5t}). \quad (12.5.30)$$

Εξισώνοντας τώρα τους συντελεστές των εκθετικών όρων  $e^{-t}$  και  $e^{5t}$  (ξεχωριστά) στο αριστερό και στο δεξιό μέλος, διαπιστώνουμε ότι πρέπει οπωσδήποτε να ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} -E_1 = E_1 + 2F_1 &\implies -2E_1 = 2F_1 &\implies F_1 = -E_1, \\ 5E_2 = E_2 + 2F_2 &\implies 4E_2 = 2F_2 &\implies F_2 = 2E_2 \end{aligned} \quad (12.5.31)$$

ή αντίστροφα  $E_1 = -F_1$  και  $E_2 = F_2/2$ .

Θέτοντας επομένως  $F_1 = -E_1$  και  $F_2 = 2E_2$  από τις σχέσεις συμβατότητας (12.5.31) μεταξύ των σταθερών  $E_{1,2}$  και  $F_{1,2}$  στη λύση (12.5.28), την παίρνουμε στην τελική (και σωστή) της μορφή

$$y(t) = F_1 e^{-t} + F_2 e^{5t} = -E_1 e^{-t} + 2E_2 e^{5t}. \quad (12.5.32)$$

Αυτή ακριβώς είναι η μορφή που είχε εξαχθεί στη σχέση (12.5.21) για την άγνωστη συνάρτηση  $y(t)$ , αλλ' εκεί χωρίς επιπλέον σταθερές.

Στη σωστή γενική λύση θα φθάναμε βέβαια και αν, εναλλακτικά, εκφράζαμε τις αυθαίρετες σταθερές  $E_1$  και  $E_2$  μέσω των  $F_1$  και  $F_2$ , συγκεκριμένα, όπως ήδη αναφέραμε, θέτοντας  $E_1 = -F_1$  και  $E_2 = F_2/2$ .

Το τελικό συμπέρασμά μας είναι ότι πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί κατά τη χρήση της μεθόδου της απαλοιφής σε συστήματα διαφορικών εξισώσεων μήπως τυχόν και κατά λάθος έχουμε στην τελική «λύση» περισσότερες από τις αναγκαίες σταθερές. Τότε βέβαια δε θα πρόκειται για την αληθινή λύση του συστήματος των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων που θέλουμε να επιλύσουμε, αλλά για εσφαλμένη λύση. Προσοχή λοιπόν στο κρίσιμο αυτό σημείο!

## A12.6. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ LAPLACE

### A12.6.1. Σύνοψη περιγραφή της μεθόδου

Πρόκειται για απλή στην ιδέα της μέθοδο: Σε ένα γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές είτε ομογενές είτε μη ομογενές κάνουμε τα εξής τέσσερα βήματα:

- **Βήμα 1:** Εκτελούμε μετασχηματισμό Laplace  $\mathcal{L}$  και στο αριστερό και στο δεξιό μέλος κάθε διαφορικής εξίσωσης του συστήματος διατηρώντας φυσικά το σύμβολο της ισότητας και λαμβάνοντας υπόψη τις αρχικές συνθήκες, αν είναι διαθέσιμες. (Αν δεν είναι, θέτουμε σχετικά σύμβολα στις θέσεις τους.) Στο μετασχηματισμό αυτό χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace και, πιθανώς, και σχετικούς πίνακες (Ενότητα Α10.7). Η βασικότερη από τις ιδιότητες αυτές είναι εκείνη που αναφέρεται στους μετασχηματισμούς Laplace των παραγώγων των αγνώστων συναρτήσεων  $u_k(t)$  με μετασχηματισμούς Laplace  $\mathcal{L}\{u_k(t)\} = U_k(s)$ . Οι δύο πρώτοι από τους τύπους αυτούς, δηλαδή αυτοί που αφορούν στους μετασχηματισμούς Laplace της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου, είναι οι εξής:

$$\mathcal{L}\{\dot{u}_k(t)\} = sU_k(s) - u_k(0), \quad (12.6.1)$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{u}_k(t)\} = s^2 U_k(s) - su_k(0) - \dot{u}_k(0). \quad (12.6.2)$$

(Στους τύπους αυτούς συμπεριλαμβάνονται φυσικά και οι αναγκαίες αρχικές συνθήκες:  $u_k(0)$  για την πρώτη παράγωγο,  $u_k(0)$  και  $\dot{u}_k(0)$  για τη δεύτερη παράγωγο, κλπ.) Έτσι προκύπτει μια αλγεβρική εξίσωση από κάθε διαφορική εξίσωση. Τελικά το γραμμικό σύστημα των διαφορικών εξισώσεων μετατρέπεται σε γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων, δηλαδή αλγεβρικών εξισώσεων πρώτου βαθμού. Οι αρχικά άγνωστες συναρτήσεις στις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις έχουν βέβαια τώρα αντικατασταθεί από τους μετασχηματισμούς Laplace τους στις γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις. Παραδείγματος χάρη, στις άγνωστες συναρτήσεις  $u_k(t)$  στις διαφορικές εξισώσεις αντιστοιχούν οι μετασχηματισμοί Laplace τους

$\mathcal{L}\{u_k(t)\} = U_k(s)$  στις αλγεβρικές εξισώσεις. Εννοείται ότι και η αρχική μεταβλητή (π.χ. ο χρόνος  $t$  στις διαφορικές εξισώσεις) έχει ουσιαστικά αντικατασταθεί από τη μεταβλητή  $s$  του μετασχηματισμού Laplace στις αλγεβρικές εξισώσεις. (Δυστυχώς όμως η μεταβλητή  $s$  του μετασχηματισμού Laplace δεν έχει καμία άμεση φυσική σημασία!)

- **Βήμα 2:** Το σύστημα των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων που προέκυψε στο Βήμα 1 το λύνουμε με κάποια γνωστή μέθοδο από τη Γραμμική Άλγεβρα. Προσδιορίζουμε έτσι τους μετασχηματισμούς Laplace  $U_k(s) = \mathcal{L}\{u_k(t)\}$  των αγνώστων συναρτήσεων  $u_k(t)$  στο γραμμικό και με σταθερούς συντελεστές σύστημα των διαφορικών εξισώσεων.
- **Βήμα 3:** Στη συνέχεια ακολουθεί το βήμα της επιστροφής από την ανεξάρτητη μεταβλητή  $s$  του μετασχηματισμού Laplace στην αρχική μεταβλητή (π.χ. την  $t$ ) στο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων με τη χρήση αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace  $\mathcal{L}^{-1}$ . Το βήμα αυτό απαιτεί συχνά αναλύσεις σε απλά κλάσματα και τη χρήση ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Laplace και σχετικών πινάκων (Ενότητα A10.7) είτε (εναλλακτικά) τη χρήση του υπολογιστή. Γενικά δε θεωρείται ένα εύκολο βήμα. Εν πάση περιπτώσει, με τον τρόπο αυτό, δηλαδή με την αντιστροφή  $\mathcal{L}^{-1}$  των μετασχηματισμών Laplace  $U_k(s) = \mathcal{L}\{u_k(t)\}$  των αγνώστων συναρτήσεων  $u_k(t)$ , οι συναρτήσεις αυτές  $u_k(t)$  προσδιορίζονται πλήρως σαν γενικές ή μερικές λύσεις του συστήματος των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Το αν θα είναι γενικές ή μερικές λύσεις εξαρτάται βέβαια από το αν θα θεωρήσουμε τις σταθερές σαν αρχικές συνθήκες ή σαν αυθαίρετες σταθερές. Έτσι καταλήγουμε στην πλήρη λύση του αρχικού γραμμικού συστήματος διαφορικών εξισώσεων. Αν έχουμε συνοριακές συνθήκες αντί για αρχικές συνθήκες, τότε πρέπει φυσικά να τις λάβουμε και αυτές κατάλληλα υπόψη.
- **Βήμα 4:** Το τελικό βήμα (και παρακαλείται να μην το παραλείπει όσο είναι δυνατόν ο Πολιτικός Μηχανικός) είναι η επαλήθευση της λύσεως που βρέθηκε τόσο (α) ως προς το ίδιο το γραμμικό σύστημα των διαφορικών εξισώσεων όσο και (β) ως προς τις συνθήκες (συνήθως τις αρχικές συνθήκες, μερικές φορές και συνοριακές συνθήκες) που το συνοδεύουν. Έτσι διαπιστώνεται η ισχύς της λύσεως που προσδιορίστηκε. Επίσης διαπιστώνεται και η ισχύς των υποθέσεων που συνήθως γίνονται άμεσα ή έμμεσα κατά τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace. Παραδείγματος χάρη, συχνά γίνεται η υπόθεση ότι  $s > 0$ , ώστε να υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων  $\cos \omega t$  και  $\sin \omega t$  (ως προς  $t$ ) με το  $\omega$  σταθερά (τη σχετική κυκλική συχνότητα). Γίνονται ορισμένες παραδοχές και υποθέσεις κατά τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace. Φυσικά η πλήρης επαλήθευση της λύσεως που βρέθηκε τη δικαιολογεί σαν σωστή λύση. Μερικές φορές μάλιστα η λύση ισχύει και για αρνητικές τιμές (για  $t < 0$ ), παρόλο που ο μετασχηματισμός Laplace αναφέρεται σε μη αρνητικές τιμές ( $t \geq 0$ ) της ανεξάρτητης μεταβλητής  $t$ , η οποία συχνά παριστάνει το χρόνο.

Η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace είναι εφαρμόσιμη σε γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων κάθε τάξεως, αλλά γενικά, εκτός από εξαιρετικές περιπτώσεις που τις αγνοούμε, αποκλειστικά με σταθερούς συντελεστές. Με τον τρόπο αυτό προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων. Τα γραμμικά συστήματα των διαφορικών εξισώσεων μπορούν να είναι είτε ομογενή είτε μη ομογενή. Καλό είναι επίσης ο αριθμός των διαφορικών εξισώσεων να ισούται με τον αριθμό των αγνώστων συναρτήσεων. Έτσι θα έχουμε συνήθως μία γενική λύση στο σύστημά μας. Αν έχουμε περισσότερες διαφορικές εξισώσεις από τις άγνωστες συναρτήσεις, συνήθως δεν έχουμε καμία λύση. Αντίθετα, αν έχουμε περισσότερες άγνωστες συναρτήσεις από τις διαφορικές εξισώσεις, οι επιπλέον συναρτήσεις μπορούν να θεωρηθούν αυθαίρετες (ουσιαστικά γνωστές) συναρτήσεις συμβάλλοντας στα δεξιά μέλη των διαφορικών εξισώσεων. Έτσι περιορίζεται ο αριθμός των αγνώστων συναρτήσεων στον επιθυμητό αριθμό, δηλαδή στον αριθμό των διαφορικών εξισώσεων του γραμμικού συστήματος που εξετάζεται. Προχωράμε τώρα σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα.

**A12.6.2. Παράδειγμα**

Σαν παράδειγμα θα επιλύσουμε το ομογενές γραμμικό σύστημα των δύο διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως (12.4.6) της Ενότητας A12.4, το επαναλαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t) + 2y(t), \\ \dot{y}(t) &= 4x(t) + 3y(t).\end{aligned}\tag{12.6.3}$$

Δηλώνουμε τις αρχικές τιμές (για  $t = 0$ ) με τα σύμβολα

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.\tag{12.6.4}$$

Αυτές μπορεί να είναι γνωστές σταθερές  $x_0$  και  $y_0$ , οπότε η λύση του παραπάνω συστήματος θα είναι μερική (ή ειδική) λύση. Μπορεί ακόμη να είναι άγνωστες (αυθαίρετες σταθερές)  $x_0$  και  $y_0$ , οπότε η ίδια λύση θα είναι γενική λύση. Τίποτε δε θα αλλάξει όμως στους υπολογισμούς από τη μια περίπτωση στην άλλη. Είναι απλά θέμα ερμηνείας του αποτελέσματος σαν μερικής (ή ειδικής) λύσεως του συστήματος (12.6.3) ή σαν γενικής λύσεως του ίδιου συστήματος. Βέβαια η πρώτη ερμηνεία (αυτή της μερικής λύσεως) είναι υποχρεωτική, εφόσον τα  $x_0$  και  $y_0$  είναι δεδομένοι αριθμοί, π.χ.  $x_0 = 1$  και  $y_0 = 2$ , και όχι σύμβολα. (Η διπλή ερμηνεία ισχύει φυσικά μόνο για σύμβολα  $x_0$  και  $y_0$ !) Έμφαση στο χαρακτηρισμό της γενικής λύσεως προσδίδει και ο πιθανός συμβολισμός των σταθερών με  $C_1$  και  $C_2$  στο τέλος αντί με  $x_0$  και  $y_0$ . Οι σταθερές  $C_1$  και  $C_2$  μπορεί μάλιστα να είναι διαφορετικές από τις  $x_0$  και  $y_0$  προς απλοποίηση της γενικής λύσεως.

Ας μη χρονοτριβούμε όμως με σχόλια κι ας προχωρήσουμε τώρα στην επίλυση του γραμμικού συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (12.6.3) μαζί με τις δύο αρχικές συνθήκες (12.6.4) που υποθέσαμε (πρόβλημα αρχικών τιμών) με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Θα ακολουθήσουμε τα τέσσερα βήματα της προηγούμενης Παραγράφου A12.6.1.

Καταρχήν όμως για τη διευκόλυνσή μας δηλώνουμε τους μετασχηματισμούς Laplace των αγνώστων συναρτήσεων  $x(t)$  και  $y(t)$  με τα σύμβολα  $X(s)$  και  $Y(s)$  αντίστοιχα, δηλαδή

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s), \quad \mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s).\tag{12.6.5}$$

(Είναι πολύ συχνή η χρήση κεφαλαίων γραμμάτων για τους μετασχηματισμούς Laplace συναρτήσεων που έχουν δηλωθεί με τα αντίστοιχα μικρά γράμματα.) Μπορούμε βέβαια να χρησιμοποιήσουμε και τον ισοδύναμο διανυσματικό συμβολισμό

$$\mathbf{U}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{u}(t)\} = \mathcal{L}\begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{Bmatrix}\tag{12.6.6}$$

σύμφωνα και με τους συμβολισμούς (12.6.5). Έτσι δε λησμονούμε και τη χρήση των μητρώων! (Εδώ όμως μητρώων μιας στήλης, δηλαδή διανυσμάτων στήλης ή απλά διανυσμάτων.)

Προχωράμε τώρα στα τέσσερα συγκεκριμένα βήματα της επίλυσης του συστήματος (12.6.3) μαζί με τις δύο αρχικές συνθήκες του (12.6.4) είτε γνωστές είτε άγνωστες.

**Βήμα 1:** Χρησιμοποιούμε τον τύπο (12.6.1) για το μετασχηματισμό Laplace της πρώτης παραγωγού. Ας μην ξεχνάμε ότι το σύστημά μας (12.6.3) αποτελείται από δύο διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως, παρουσιάζονται δηλαδή σ' αυτό μέχρι πρώτες παράγωγοι. Με βάση τον τύπο αυτό (12.6.1) και για τις παρούσες άγνωστες συναρτήσεις  $x(t)$  και  $y(t)$  διαπιστώνουμε αμέσως ότι

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = sX(s) - x_0, \quad \mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} = sY(s) - y_0.\tag{12.6.7}$$

Εδώ ληφθήκανε υπόψη και οι δύο παραπάνω συμβολισμοί (12.6.5) για τους μετασχηματισμούς Laplace  $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$  και  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ . Επίσης και οι δύο αρχικές συνθήκες (12.6.4). Επομένως

με την εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (12.6.3) παίρνει την ακόλουθη αλγεβρική μορφή:

$$\begin{aligned} sX(s) - x_0 &= X(s) + 2Y(s), \\ sY(s) - y_0 &= 4X(s) + 3Y(s). \end{aligned} \quad (12.6.8)$$

Πρόκειται για ένα απλό γραμμικό σύστημα δύο αλγεβρικών (όχι πια διαφορικών!) εξισώσεων με δύο αγνώστους: τους μετασχηματισμούς Laplace  $X(s)$  και  $Y(s)$  των αγνώστων συναρτήσεων  $x(t)$  και  $y(t)$ . Το ξαναγράφουμε στην κάπως απλούστερη για την επίλυσή του ισοδύναμη μορφή

$$\begin{aligned} (s - 1)X(s) - 2Y(s) &= x_0, \\ -4X(s) + (s - 3)Y(s) &= y_0. \end{aligned} \quad (12.6.9)$$

Η επίσης ισοδύναμη μορφή με μητρώα είναι η προφανώς η εξής:

$$\begin{bmatrix} s - 1 & -2 \\ -4 & s - 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Bmatrix}. \quad (12.6.10)$$

Θα προχωρήσουμε τώρα στο δεύτερο βήμα, εκείνο της επιλύσεως του γραμμικού συστήματος των δύο αλγεβρικών (επαναλαμβάνουμε: όχι πια διαφορικών!) εξισώσεων (12.6.9) ή (12.6.10).

**Βήμα 2:** Πολύ εύκολα μπορούμε να επιλύσουμε το γραμμικό σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων (12.6.9) ή (12.6.10). Η ορίζουσα  $\Delta = \Delta(s)$  των συντελεστών των αγνώστων  $X(s)$  και  $Y(s)$  υπολογίζεται ως εξής:

$$\Delta = \Delta(s) = \begin{vmatrix} s - 1 & -2 \\ -4 & s - 3 \end{vmatrix} = (s - 1)(s - 3) - (-2)(-4) = s^2 - 4s + 3 - 8 = s^2 - 4s - 5. \quad (12.6.11)$$

Οι ρίζες  $s_1$  και  $s_2$  του δευτεροβάθμιου αυτού πολυωνύμου  $\Delta = \Delta(s) = s^2 - 4s - 5$  είναι οι εξής:

$$s_{1,2} = 2 \mp \sqrt{4 + 5} = 2 \mp \sqrt{9} = 2 \mp 3 \implies s_1 = 2 - 3 = -1 \quad \text{και} \quad s_2 = 2 + 3 = 5 \quad (12.6.12)$$

έχοντας προτιμήσει να διαλέξουμε για πρώτη ρίζα:  $s_1 = -1$  τη μικρότερη ρίζα:  $s_1 = -1 < s_2 = 5$ .

Κατά συνέπεια η ορίζουσα  $\Delta = \Delta(s)$  αναλύεται σε πρωτοβάθμιους παράγοντες ως εξής:

$$\Delta = \Delta(s) = s^2 - 4s - 5 = (s + 1)(s - 5). \quad (12.6.13)$$

Άρα σύμφωνα με το γνωστό από τη Γραμμική Άλγεβρα κανόνα του Cramer για γραμμικά συστήματα αλγεβρικών εξισώσεων έχουμε την ακόλουθη λύση του συστήματος (12.6.9) ή (12.6.10):

$$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & -2 \\ y_0 & s - 3 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{(s - 3)x_0 + 2y_0}{s^2 - 4s - 5} = \frac{(s - 3)x_0 + 2y_0}{(s + 1)(s - 5)}, \quad (12.6.14)$$

$$Y(s) = \frac{\begin{vmatrix} s - 1 & x_0 \\ -4 & y_0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{(s - 1)y_0 + 4x_0}{s^2 - 4s - 5} = \frac{4x_0 + (s - 1)y_0}{(s + 1)(s - 5)}. \quad (12.6.15)$$

Επομένως έχουμε προσδιορίσει και τους δύο μετασχηματισμούς Laplace  $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$  και  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$  των δύο αγνώστων συναρτήσεων  $x(t)$  και  $y(t)$  αντίστοιχα. Είμαστε λοιπόν απόλυτα έτοιμοι να προχωρήσουμε και στο επόμενο, στο τρίτο βήμα.

**Βήμα 3:** Το βήμα αυτό αφορά στην αντιστροφή κατά Laplace των μετασχηματισμών Laplace  $X(s)$  και  $Y(s)$  που ήδη βρέθηκαν. Έτσι θα προσδιορισθούν και οι ίδιες οι άγνωστες συναρτήσεις

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}, \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}. \quad (12.6.16)$$

Με τον τρόπο αυτό θα επιστρέψουμε και στο πεδίο της αρχικής μεταβλητής  $t$  (συχνά του χρόνου) που έχει φυσική έννοια (π.χ. χρόνος ή θέση) από το πεδίο της μεταβλητής  $s$  του μετασχηματισμού Laplace που στερείται άμεσης φυσικής έννοιας.

Δυστυχώς πάρα πολύ συχνά απαιτείται για την αντιστροφή αυτή η ανάλυση σε απλά κλάσματα των διαθέσιμων μετασχηματισμών Laplace, εδώ  $X(s)$  και  $Y(s)$ . Στον υπολογιστή αυτό γίνεται αυτόματα, εδώ όμως οι αλγεβρικές πράξεις θα γίνονται για εκπαιδευτικούς λόγους με το χέρι.

Η πρώτη ανάλυση σε απλά κλάσματα αφορά στο μετασχηματισμό Laplace  $X(s)$ , ο οποίος δίνεται από τη λύση (12.6.14) του γραμμικού συστήματος των δύο αλγεβρικών εξισώσεων (12.6.9) ή (12.6.10). Γράφουμε επομένως

$$X(s) = \frac{(s-3)x_0 + 2y_0}{(s+1)(s-5)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-5}. \quad (12.6.17)$$

Πρέπει τώρα να προσδιορίσουμε τις σταθερές, τους συντελεστές  $A$  και  $B$ . (Σημειώνουμε παρενθετικά ότι η σταθερά  $A$  δεν έχει καμία απολύτως σχέση με το μητρώο  $\mathbf{A}$  στην τελευταία από τις σχέσεις (12.4.3).) Με απαλοιφή των παρονομαστών στη σχέση (12.6.17) προκύπτει άμεσα ότι

$$\begin{aligned} (s-3)x_0 + 2y_0 &= A(s-5) + B(s+1) \\ \implies x_0s + (-3x_0 + 2y_0) &= (A+B)s + (-5A+B) \\ \implies (A+B-x_0)s + (-5A+B+3x_0-2y_0) &= 0 \end{aligned} \quad (12.6.18)$$

και μάλιστα εκ ταυτότητας, δηλαδή για κάθε τιμή του  $s$ . Επομένως μοναδική δυνατότητα αποτελεί ο προσδιορισμός των σταθερών  $A$  και  $B$  από το γραμμικό σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων

$$A+B-x_0=0, \quad -5A+B+3x_0-2y_0=0 \implies A+B=x_0, \quad -5A+B=-3x_0+2y_0. \quad (12.6.19)$$

Σημειώνεται ότι το τελευταίο αυτό σύστημα μπορεί να βρεθεί και λίγο πιο άμεσα. Αυτό το πετυχαίνουμε με κατευθείαν εξίσωση των συντελεστών της μεταβλητής  $s$  στο δεξιό και στο αριστερό μέλος του μετασχηματισμού Laplace στη δεύτερη (όχι στην τρίτη) από τις σχέσεις (12.6.18), επίσης δε και των ανεξάρτητων από τη μεταβλητή  $s$  όρων στα ίδια μέλη αυτής της σχέσεως.

Λύνοντας τώρα το τόσο απλό σύστημα των εξισώσεων (12.6.19), διαπιστώνουμε ότι

$$A = \frac{2x_0 - y_0}{3}, \quad B = \frac{x_0 + y_0}{3}. \quad (12.6.20)$$

Επομένως ο μετασχηματισμός Laplace  $X(s)$  στη σχέση (12.6.17) αναλύεται σε απλά κλάσματα ως εξής:

$$X(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-5} = \frac{2x_0 - y_0}{3} \frac{1}{s+1} + \frac{x_0 + y_0}{3} \frac{1}{s-5}. \quad (12.6.21)$$

Έχοντας επίσης υπόψη ότι για την εκθετική συνάρτηση (exponential function)  $e^{at} \equiv \exp at$  ισχύει

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \implies \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at} \quad \text{για } s > a, \quad (12.6.22)$$

η αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace  $X(s)$  στη σχέση (12.6.21) είναι εξαιρετικά ευχερής. Απλά θέτουμε  $a = -1$  και επίσης  $a = 5$  στον αμέσως πιο πάνω τύπο (12.6.22) και δε λησμονούμε τη γραμμική ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace  $\mathcal{L}$  και (στην περίπτωση μας) του αντίστροφου του  $\mathcal{L}^{-1}$ . Το τελικό αποτέλεσμα της αντιστροφής κατά Laplace της σχέσεως (12.6.21) είναι η συνάρτηση

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{2x_0 - y_0}{3} e^{-t} + \frac{x_0 + y_0}{3} e^{5t}. \quad (12.6.23)$$

Αυτή είναι η λύση  $x(t)$  (πρώτη άγνωστη συνάρτηση) του γραμμικού συστήματος των δύο διαφορικών εξισώσεων (12.6.3) υπό τις επίσης δύο γνωστές ή άγνωστες αρχικές συνθήκες (12.6.4).



Πρέπει όμως να βρούμε και τη λύση  $y(t)$  (δεύτερη άγνωστη συνάρτηση) στο ίδιο σύστημα. Αυτό το κατορθώνουμε με απόλυτα ανάλογο τρόπο εργασίας με βάση τη λύση (12.6.15) για το μετασχηματισμό Laplace  $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{4x_0 + (s-1)y_0}{(s+1)(s-5)} = \frac{\Gamma}{s+1} + \frac{\Delta}{s-5} \quad (12.6.24)$$

με τους συντελεστές  $\Gamma$  και  $\Delta$  προς προσδιορισμό. Εργαζόμαστε ακριβώς όπως και προηγουμένως (τώρα όμως για το μετασχηματισμό Laplace  $Y(s)$ ) και βρίσκουμε ότι

$$\Gamma = \frac{-2x_0 + y_0}{3}, \quad B = \frac{2(x_0 + y_0)}{3}, \quad (12.6.25)$$

οπότε

$$Y(s) = \frac{\Gamma}{s+1} + \frac{\Delta}{s-5} = \frac{-2x_0 + y_0}{3} \frac{1}{s+1} + \frac{2(x_0 + y_0)}{3} \frac{1}{s-5}. \quad (12.6.26)$$

Αντιστρέφοντας τώρα κατά Laplace (χωρίς βέβαια να ξεχνάμε το βασικό τύπο (12.6.22) και τη γραμμική ιδιότητα στο μετασχηματισμό Laplace  $\mathcal{L}$  και στον αντίστροφο του  $\mathcal{L}^{-1}$ ), προσδιορίζουμε πολύ εύκολα και τη δεύτερη άγνωστη συνάρτηση

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{-2x_0 + y_0}{3} e^{-t} + \frac{2(x_0 + y_0)}{3} e^{5t}. \quad (12.6.27)$$

Οι δύο σχέσεις (12.6.23) και (12.6.27) μας δίνουν την πλήρη λύση  $x(t)$  και  $y(t)$  του γραμμικού συστήματος των δύο διαφορικών εξισώσεων (12.6.3) υπό τις επίσης δύο αρχικές συνθήκες (12.6.4). Επαναλαμβάνεται για τελευταία φορά ότι πρόκειται για μερική λύση με γνωστές τις αρχικές συνθήκες (12.6.4), δηλαδή τις ποσότητες  $x_0$  και  $y_0$ . Στην αντίθετη περίπτωση πρόκειται για γενική λύση, όπου οι ποσότητες  $x_0$  και  $y_0$  θεωρούνται αυθαίρετες σταθερές. Εάν δε μας αρέσουν τα σύμβολα  $x_0$  και  $y_0$  για τις αυθαίρετες σταθερές στη γενική λύση, μπορούμε εύκολα να τα αντικαταστήσουμε με καταλληλότερα σύμβολα, π.χ. τα  $C_1$  και  $C_2$ . Πράγματι τα σύμβολα αυτά,  $C_1$  και  $C_2$ , μας θυμίζουν περισσότερο αυθαίρετες σταθερές. Επομένως ίσως να είναι στ' αλήθεια καταλληλότερα!

Με σκοπό να αποφύγουμε μάλιστα τον παρονομαστή 3 στα κλάσματα της λύσεως που βρήκαμε (12.6.23) και (12.6.27), μπορούμε να θέσουμε (εννοείται μόνο για τη γενική λύση)

$$C_1 = \frac{x_0}{3}, \quad C_2 = \frac{y_0}{3}. \quad (12.6.28)$$

Τώρα η ίδια λύση (12.6.23) και (12.6.27) (που θεωρείται εδώ αποκλειστικά σαν γενική λύση) γράφεται στην απλούστερη μορφή

$$\begin{aligned} x(t) &= (2C_1 - C_2)e^{-t} + (C_1 + C_2)e^{5t}, \\ y(t) &= (-2C_1 + C_2)e^{-t} + 2(C_1 + C_2)e^{5t}. \end{aligned} \quad (12.6.29)$$

Και ακόμη πιο απλή μορφή της ίδιας γενικής λύσεως είναι δυνατή με τη χρήση των δύο νέων σταθερών

$$E_1 = 2C_1 - C_2, \quad E_2 = C_1 + C_2 \quad (12.6.30)$$

σε αντικατάσταση των  $C_1$  και  $C_2$ . Τότε η πιο πάνω γενική λύση (12.6.29) γράφεται στην κάπως συντομότερη μορφή της

$$\begin{aligned} x(t) &= E_1 e^{-t} + E_2 e^{5t}, \\ y(t) &= -E_1 e^{-t} + 2E_2 e^{5t}. \end{aligned} \quad (12.6.31)$$

Τρεις σημαντικές παρατηρήσεις:

► **Παρατήρηση A12.3:** Είναι εύλογη η ύπαρξη των δύο σταθερών  $C_1$  και  $C_2$  ή, εναλλακτικά, των  $E_1$  και  $E_2$  στη γενική λύση (12.6.29) ή (12.6.31), επειδή το γραμμικό σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (12.6.3) είναι σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων και μάλιστα πρώτης τάξεως. Τότε η καθεμία από τις δύο αυτές διαφορικές εξισώσεις συμβάλλει στη γενική λύση (12.6.29) ή (12.6.31) γενικά με μία μόνο σταθερά. Άρα συνολικά προκύπτουν δύο σταθερές: οι  $C_1$  και  $C_2$  ή οι  $E_1$  και  $E_2$ .

► **Παρατήρηση Α12.4:** Η λύση  $\mathbf{u}(t) = [x(t) \ y(t)]^T$ , η οποία βρέθηκε και καταγράφηκε στις σχέσεις (12.6.23) και (12.6.27) μπορεί να είναι είτε μερική είτε γενική λύση. Το τί ακριβώς ισχύει εξαρτάται από την ερμηνεία που δίνεται στα σύμβολα  $x_0$  και  $y_0$  στις αρχικές συνθήκες (12.6.4) (μερική ή γενική λύση) ή στις σχέσεις (12.6.29) (γενική λύση) ή και στις σχέσεις (12.6.31) (επίσης γενική λύση). Είναι επίσης αυτονόητο ότι η ίδια λύση  $\mathbf{u}(t) = [x(t) \ y(t)]^T$  μπορεί να γραφεί άμεσα και σε μητρική μορφή, συγκεκριμένα

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2x_0 - y_0 & x_0 + y_0 \\ -2x_0 + y_0 & 2(x_0 + y_0) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e^{-t} \\ e^{5t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ -E_1 & 2E_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e^{-t} \\ e^{5t} \end{Bmatrix} \quad (12.6.32)$$

για τη λύση (12.6.23) και (12.6.27) καθώς και για τη λύση (12.6.31). Ανάλογος μητρικός συμβολισμός (απλούστερα συμβολισμός με μητρώα) ισχύει και για την ενδιάμεση λύση (12.6.29).

► **Παρατήρηση Α12.5:** Αναφερθήκαμε ήδη στο γεγονός ότι το παρόν γραμμικό σύστημα (12.6.3) δύο ομογενών διαφορικών εξισώσεων (και με σταθερούς μάλιστα συντελεστές) αποκλείεται να αφορά σε μηχανικό σύστημα του Πολιτικού Μηχανικού στη Δυναμική και τις Ταλαντώσεις. (Ανάλογα και στη Δυναμική των Κατασκευών.) Πραγματικά από τη μερική λύση (12.6.23) και (12.6.27) ή από τη γενική λύση (12.6.29) ή (12.6.31) είναι σαφές ότι η λύση περιέχει εκθετικούς όρους, συγκεκριμένα τους όρους  $e^{-t}$  και  $e^{5t}$ . Καταρχήν επισημαίνεται ότι σε ένα ομογενές γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων, όπως είναι το παρόν, δεν υπάρχει φόρτιση (δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις). Για το λόγο αυτό και το σύστημα (12.6.3) είναι ομογενές. Τώρα σε κάθε μηχανικό σύστημα του Πολιτικού Μηχανικού στη Δυναμική και τις Ταλαντώσεις ένας αρνητικός εκθετικός όρος της μορφής  $e^{-t}$  (με  $t \geq 0$ ) είναι οπωσδήποτε αποδεκτός με την υπόθεση ισχυρής αποσβέσεως. Αντίθετα ένας θετικός εκθετικός όρος της μορφής  $e^{5t}$  (πάλι με  $t \geq 0$ ) είναι απόλυτα απαράδεκτος: παραβιάζει την αρχή της διατηρήσεως της ενέργειας. Άρα το ομογενές γραμμικό σύστημα (12.6.3) δεν είναι δυνατόν να αφορά σε πρόβλημα μηχανικού συστήματος του Πολιτικού Μηχανικού.

Επιπλέον για ένα τέτοιο συμπέρασμα δεν είναι ανάγκη να έχουμε προχωρήσει στο Βήμα 3, δηλαδή στην αντιστροφή των δύο μετασχηματισμών Laplace  $X(s)$  και  $Y(s)$ . Αυτοί οι μετασχηματισμοί Laplace  $X(s)$  και  $Y(s)$  έχουν ήδη προσδιορισθεί στη λύση (12.6.14) και (12.6.15) αντίστοιχα (που βρέθηκε στο Βήμα 2) του γραμμικού συστήματος των αλγεβρικών εξισώσεων (12.6.8) ή (12.6.9) (που βρέθηκε στο Βήμα 1). Οι ίδιοι μετασχηματισμοί Laplace  $X(s)$  και  $Y(s)$  καθιστούν σαφές (λόγω του παρονομαστή  $(s+1)(s-5)$  στη λύση (12.6.14) και (12.6.15)) ότι θα προκύψει και θετικός εκθετικός όρος (με θετικό συντελεστή  $a = 5$  στον εκθέτη  $at$ ), μόλις επιχειρηθεί η αντιστροφή των μετασχηματισμών Laplace (12.6.14) και (12.6.15). Τούτο έγινε σαφέστερο στο παρόν Βήμα 3. Και μόνο η θετική ρίζα  $s_2 = 5$  στη λύση (12.6.12), η οποία αφορά στην ορίζουσα  $\Delta(s)$  που υπολογίστηκε στη σχέση (12.6.11), αποκαλύπτει το ίδιο ακριβώς γεγονός, δηλαδή ότι το ομογενές γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων (12.6.3) δεν είναι δυνατόν να παρουσιασθεί σε μηχανικό σύστημα.

► **Παρατήρηση Α12.6:** Ας παρατηρηθεί τέλος ότι, όπως έχει ήδη αναφερθεί, τα μηχανικά συστήματα του Πολιτικού Μηχανικού στη Δυναμική και τις Ταλαντώσεις είναι δευτέρας τάξεως λόγω της ισχύος του γνωστού δεύτερου νόμου του Νεύτωνα: δύναμη  $F = F(t)$  ίσον μάζα  $m$  επί επιτάχυνση  $a = \ddot{u}(t)$  με  $u = u(t)$  τη θέση:

$$F = ma = m\ddot{u}(t). \quad (12.6.33)$$

Αλλ' οπωσδήποτε κάθε διαφορική εξίσωση δευτέρας (ή και ανωτέρας) τάξεως μπορεί εύκολα να γραφεί και σαν σύστημα δύο (ή περισσότερων) διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως. Στο αμέσως πιο πάνω παράδειγμα (12.6.33) (δευτέρος νόμος του Νεύτωνα) ορίζοντας την ταχύτητα

$$v(t) = \dot{u}(t), \quad \text{οπότε} \quad \dot{v}(t) = \ddot{u}(t), \quad (12.6.34)$$

εύκολα διαπιστώνουμε ότι η διαφορική εξίσωση (12.6.33) παίρνει τη μορφή

$$F = ma = m\dot{v}(t). \quad (12.6.35)$$

Άρα έχουμε τελικά το μη ομογενές γραμμικό σύστημα των δύο διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως (12.6.34) (πρώτη εξίσωση) και (12.6.35), σε ισοδύναμη μορφή το σύστημα

$$\dot{u}(t) = v(t), \quad \dot{v}(t) = F(t)/m, \quad (12.6.36)$$

σε κανονική (δηλαδή λυμένη ως προς τις παραγώγους  $\dot{u}(t)$  και  $\dot{v}(t)$ ) μορφή, δηλαδή με τις παραγώγους  $\dot{u}(t)$  και  $\dot{v}(t)$  στα αριστερά μέλη. Ισοδύναμη μορφή με τη χρήση μητρώων είναι η ακόλουθη:

$$\begin{Bmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ F(t)/m \end{Bmatrix}. \quad (12.6.37)$$

Πρόκειται για ένα μη ομογενές γραμμικό σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως με δύο άγνωστες συναρτήσεις: τη μετατόπιση  $u(t)$  και την ταχύτητα  $v(t)$  στην απλή κίνηση στη Δυναμική που εξετάσαμε αποκλειστικά με βάση το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα (12.6.33) ή (12.6.35). Κατά συνέπεια η εμφάνιση ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως καθόλου δεν αποκλείεται σε ένα μηχανικό σύστημα του Πολιτικού Μηχανικού. Αρκεί αυτός να έχει επιλέξει τη χρήση σαν αγνώστων συναρτήσεων τόσο των μετατοπίσεων  $u_k(t)$  όσο και των αντίστοιχων ταχυτήτων  $v_k(t) = \dot{u}_k(t)$  για τα σημεία  $M_k$  του διακριτού (όχι συνεχούς) μηχανικού συστήματος που εξετάζει. Στο πιο πάνω απλούστατο παράδειγμα (12.6.36), ισοδύναμα (12.6.37), έχουμε ένα μόνο τέτοιο σημείο  $M_1$  ( $k = 1$ ). Το γεγονός που κατέστησε το ομογενές γραμμικό σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (12.6.3) απαράδεκτο για τον Πολιτικό Μηχανικό στη Δυναμική και τις Ταλαντώσεις υπήρξε, επαναλαμβάνεται, η εμφάνιση του θετικού εκθετικού όρου  $e^{5t}$  στη λύση ενός ομογενούς συστήματος. Όχι η τάξη των διαφορικών εξισώσεων: εδώ πρώτη τάξη.

Παρ' όλα αυτά, για να είμαστε ειλικρινείς, ο Πολιτικός Μηχανικός γενικά δεν αρέσκεται στη μετατροπή διαφορικών εξισώσεων δεύτερας τάξεως, όπως είναι η εξίσωση (12.6.33) (δευτερός νόμος του Νεύτωνα), σε συστήματα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως. (Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να είχε επιτευχθεί στη Δυναμική και τις Ταλαντώσεις με την εισαγωγή και των ταχυτήτων  $v_k(t) = \dot{u}_k(t)$  σαν πρόσθετων αγνώστων συναρτήσεων.) Όμως μάλλον το αντίθετο ισχύει, δηλαδή όχι μετατροπή γραμμικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων ανώτερης τάξεως σε ισοδύναμα συστήματα πρώτης τάξεως. Εξαιρείται βέβαια η περίπτωση της χρήσεως εξειδικευμένων αλγορίθμων (κυρίως αριθμητικών) για γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων που να αφορούν αποκλειστικά στην επίλυση γραμμικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως.

**Βήμα 4:** Το τελικό αυτό βήμα δεν είναι απόλυτα υποχρεωτικό, αν και είναι έντονα συνιστώμενο. Πρόκειται για το βήμα της επαληθεύσεως. Εδώ απλά θα επαληθεύσουμε τη γενική λύση (12.6.31), την επαναλαμβάνουμε

$$\begin{aligned} x(t) &= E_1 e^{-t} + E_2 e^{5t}, \\ y(t) &= -E_1 e^{-t} + 2E_2 e^{5t}, \end{aligned} \quad (12.6.38)$$

του αρχικού συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (12.6.3), το επαναλαμβάνουμε και αυτό

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t) + 2y(t), \\ \dot{y}(t) &= 4x(t) + 3y(t), \end{aligned} \quad (12.6.39)$$

υπό τις αρχικές συνθήκες (12.6.4) (εάν υπάρχουν στ' αλήθεια), ως τις επαναλάβουμε και αυτές

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \quad (12.6.40)$$

Πρόκειται για ένα εύκολο, πάρα πολύ εύκολο καθήκον για τον εξειδικευμένο στις παραγωγίσεις (ήδη από το Λύκειο) Πολιτικό Μηχανικό. Συγκεκριμένα με παραγωγή των συναρτήσεων  $x(t)$  και  $y(t)$  στη γενική λύση (12.6.38) προκύπτουν εύκολα οι δύο πρώτες παράγωγοι

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -E_1 e^{-t} + 5E_2 e^{5t}, \\ \dot{y}(t) &= E_1 e^{-t} + 10E_2 e^{5t}. \end{aligned} \quad (12.6.41)$$

Απομένει η αντικατάσταση τόσο των συναρτήσεων  $x(t)$  και  $y(t)$  (σχέσεις (12.6.38)) όσο και των πρώτων παραγώγων τους  $\dot{x}(t)$  και  $\dot{y}(t)$  που μόλις βρέθηκαν (σχέσεις (12.6.41)) στο ίδιο το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως (12.6.39). Το αποτέλεσμα είναι

$$\begin{aligned} -E_1 e^{-t} + 5E_2 e^{5t} &= (E_1 e^{-t} + E_2 e^{5t}) + 2(-E_1 e^{-t} + 2E_2 e^{5t}), \\ E_1 e^{-t} + 10E_2 e^{5t} &= 4(E_1 e^{-t} + E_2 e^{5t}) + 3(-E_1 e^{-t} + 2E_2 e^{5t}). \end{aligned} \quad (12.6.42)$$

Παίρνοντας τώρα τους συντελεστές των εκθετικών όρων  $e^{-t}$  στα αριστερά καθώς και στα δεξιά μέλη των προς επαλήθευση σχέσεων (12.6.42), διαπιστώνουμε ότι θα πρέπει να ισχύει

$$\begin{aligned} -E_1 &= E_1 - 2E_1 &\implies & -1 = -1 &\implies & \text{αληθές,} \\ E_1 &= 4E_1 - 3E_1 &\implies & 1 = 1 &\implies & \text{αληθές} \end{aligned} \quad (12.6.43)$$

και πραγματικά ισχύει! Άρα απαλείφονται όλοι οι όροι της εκθετικής συναρτήσεως  $e^{-t}$  και στις δύο προς επαλήθευση σχέσεις (12.6.42). Ανάλογα για τους συντελεστές των εκθετικών όρων  $e^{5t}$  διαπιστώνουμε ότι θα πρέπει να ισχύει

$$\begin{aligned} 5E_2 &= E_2 + 4E_2 &\implies & 5 = 5 &\implies & \text{αληθές,} \\ 10E_2 &= 4E_2 + 6E_2 &\implies & 10 = 10 &\implies & \text{αληθές.} \end{aligned} \quad (12.6.44)$$

Επομένως οι προς επαλήθευση σχέσεις (12.6.42) ισχύουν εκ ταυτότητας, δηλαδή για κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής  $t$ : αρνητική, μηδέν ή θετική. Είναι ευχάριστο αυτό, επειδή η χρήση του μετασχηματισμού Laplace αφορά σε μη αρνητικές τιμές της μεταβλητής  $t$  ( $t \geq 0$ ) εξαιτίας του ορισμού του με ολοκλήρωση στο ημιάπειρο διάστημα  $[0, \infty)$ . Μόλις είδαμε όμως ότι η γενική λύση (12.6.38) που προέκυψε αφορά και σε αρνητικές τιμές της μεταβλητής  $t$  ( $t < 0$ ). Η διαπίστωση αυτή ήταν το πρόσθετο κέρδος μας από την επαλήθευση που κάναμε.

Αν τώρα ενδιαφερόμαστε και για τις συνθήκες (12.6.40) (αρχικές συνθήκες, εάν  $t \geq 0$ , απλά συνθήκες για  $t = 0$ , εάν  $-\infty < t < \infty$ ) στην ίδια λύση (12.6.38), αλλά τώρα με την ερμηνεία της σαν μερικής (ή ειδικής) λύσεως, απλά θέτουμε σ' αυτήν  $t = 0$ . Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} x(0) &= E_1 + E_2, \\ y(0) &= -E_1 + 2E_2. \end{aligned} \quad (12.6.45)$$

Αυτές είναι οι τιμές των αγνώστων συναρτήσεων  $x(t)$  και  $y(t)$  για  $t = 0$ . Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε και τις σχέσεις (12.6.30), ώστε να επιστρέψουμε στις σταθερές  $C_1$  και  $C_2$ , τότε οι σχέσεις (12.6.45) μας δίνουν

$$\begin{aligned} x(0) &= E_1 + E_2 = (2C_1 - C_2) + (C_1 + C_2) = 3C_1 = 3 \frac{x_0}{3} = x_0, \\ y(0) &= -E_1 + 2E_2 = -(2C_1 - C_2) + 2(C_1 + C_2) = 3C_2 = 3 \frac{y_0}{3} = y_0. \end{aligned} \quad (12.6.46)$$

Εδώ πήραμε μάλιστα την πρωτοβουλία να χρησιμοποιήσουμε και τις σχέσεις (12.6.28), που ορίζουν τις σταθερές  $C_1$  και  $C_2$  μέσω των σταθερών  $x_0$  και  $y_0$  των αρχικών συνθηκών (12.6.4) ή (12.6.40).

Άρα επαληθεύονται και οι δύο αρχικές συνθήκες (12.6.40) και επομένως η όλη επαλήθευση της λύσεως (12.6.38) που βρήκαμε είναι πλήρης πέρα από την προφανή (από την επαλήθευση) επέκτασή της στις αρνητικές τιμές  $t < 0$  της ανεξάρτητης μεταβλητής  $t$ . Η επέκταση αυτή μπορεί να έχει ή και να μην έχει φυσική σημασία σε ένα συγκεκριμένο τεχνικό πρόβλημα του Πολιτικού Μηχανικού, αλλ' από μαθηματικής απόψεως είναι δικαιολογημένη. Δικαιολογημένες είναι επίσης και όσες παραδοχές έγιναν άμεσα ή έμμεσα κατά τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace, π.χ. για τις τιμές της μεταβλητής  $s$ , οι οποίες πρέπει να είναι  $s > 5$ . Έτσι έχει νόημα ο μετασχηματισμός Laplace  $1/(s - 5)$  της εκθετικής συναρτήσεως  $e^{5t}$ , η οποία προέκυψε στη γενική λύση (12.6.38).

Πρέπει τέλος να σημειωθεί ότι η γενική λύση (12.6.38) που βρήκαμε στην παρούσα Παράγραφο A12.6.2 με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace συμπίπτει απόλυτα με τη γενική λύση (12.5.21) για το ίδιο γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων (12.6.39). Τη λύση εκείνη την είχαμε βρει στην Παράγραφο A12.5.2, εκεί όμως με τη μέθοδο της απαλοιφής, μια εντελώς διαφορετική μέθοδο.

**A12.7. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ****A12.7.1. Εισαγωγή**

Θεωρούμε μια μεμονωμένη, ανεξάρτητη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές. Παραδείγματος χάρη, τέτοια εξίσωση είναι η γνωστή εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή σε ελεύθερες (χωρίς φόρτιση, χωρίς εξωτερικές δυνάμεις) και χωρίς απόσβεση ταλαντώσεις

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad (12.7.1)$$

με  $t$  το χρόνο,  $x(t)$  τη θέση και  $\omega_0$  τη φυσική κυκλική συχνότητα (την ιδιοσυχνότητα) του αρμονικού ταλαντωτή. Για μια τέτοια (μεμονωμένη) διαφορική εξίσωση η τόσο γνωστή από την Ενότητα A5.5 μέθοδος της εκθετικής αντικατάστασης, δηλαδή της υποθέσεως ότι

$$x(t) = e^{\mu t} \implies \dot{x}(t) = \mu e^{\mu t} \implies \ddot{x}(t) = \mu^2 e^{\mu t}, \text{ κλπ.}, \quad (12.7.2)$$

οδηγεί άμεσα στη βοηθητική εξίσωση

$$\mu^2 e^{\mu t} + \omega_0^2 e^{\mu t} = 0 \implies (\mu^2 + \omega_0^2) e^{\mu t} = 0. \quad (12.7.3)$$

Με απαλοιφή μάλιστα του εκθετικού όρου  $e^{\mu t}$  (που δε μηδενίζεται ποτέ) οδηγούμαστε στη δευτεροβάθμια χαρακτηριστική εξίσωση

$$p_2(\mu) = \mu^2 + \omega_0^2 = 0 \implies \mu^2 = -\omega_0^2 \quad (12.7.4)$$

με ρίζες τις

$$\mu_1 = i\omega_0 \text{ και } \mu_2 = -i\omega_0, \text{ επειδή } \omega_0 > 0 \text{ και } \pm\sqrt{-1} = \pm i. \quad (12.7.5)$$

Άρα έχουμε τις ακόλουθες δύο μερικές (ή ειδικές) λύσεις της διαφορικής εξισώσεως (12.7.1):

$$x_1(t) = e^{\mu_1 t} = e^{i\omega_0 t} \text{ και } x_2(t) = e^{\mu_2 t} = e^{-i\omega_0 t}. \quad (12.7.6)$$

Αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις και συναρτήσεις γενικότερα. (Τούτο μπορεί εύκολα να αποδειχθεί με τη χρήση ορίζουσας Wronski.) Εδώ αποτελούν ένα θεμελιώδες σύνολο (ή σύστημα) λύσεων της διαφορικής εξισώσεως (12.7.1). Η σχετική γενική λύση είναι ασφαλώς η εξής:

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} \quad (12.7.7)$$

με τα  $C_1$  και  $C_2$  αυθαίρετες και συνήθως συζυγείς μιγαδικές σταθερές. Σχεδόν πάντα ο Πολιτικός Μηχανικός προτιμάει τη γενική αυτή λύση γραμμένη στην ισοδύναμή της τριγωνομετρική μορφή

$$x(t) = D_1 \cos \omega_0 t + D_2 \sin \omega_0 t \quad (12.7.8)$$

με τις νέες αυθαίρετες σταθερές  $D_1$  και  $D_2$  (συνήθως πραγματικές) στη θέση των αρχικών αυθαίρετων σταθερών  $C_1$  και  $C_2$  (συνήθως συζυγών μιγαδικών). Η τριγωνομετρική αυτή λύση προέκυψε με τη χρήση των γνωστών τύπων του Euler

$$e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta \quad \text{με } i = \sqrt{-1} \quad (12.7.9)$$

τη φανταστική μονάδα.

Η ιδέα της μεθόδου της εκθετικής αντικατάστασης  $x(t) = e^{\mu t}$  (πρώτη σχέση (12.7.2)) για ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές, όπως είναι η εξίσωση (12.7.1), είναι απλά η εξής: Οι παράγωγοι της εκθετικής συναρτήσεως  $e^{\mu t}$  δίνουν και πάλι την ίδια συνάρτηση  $e^{\mu t}$ , πολλαπλασιασμένη όμως επί  $\mu^k$  για την  $k$ -τάξεως παράγωγο. Τούτο ισχύει, επειδή

$$x(t) = e^{\mu t} \implies x^{(k)}(t) = \mu^k e^{\mu t}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (12.7.10)$$

όπως ήδη αναφέραμε και στις σχέσεις (12.7.2) ειδικά για την πρώτη παράγωγο (με  $k = 1$ ) και τη δεύτερη παράγωγο (με  $k = 2$ ).

### A12.7.2. Σύνομη περιγραφή της μεθόδου

Εντελώς ανάλογα ισχύουν και για ομογενή γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές με γενίκευση της μεθόδου της εκθετικής αντικαταστάσεως. Υποθέτουμε ότι έχουμε, π.χ., τις άγνωστες συναρτήσεις  $x(t)$ ,  $y(t)$  και  $z(t)$  σε ένα ομογενές και γραμμικό σύστημα τριών διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξεως με σταθερούς συντελεστές, π.χ. της μορφής

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{Bmatrix}. \quad (12.7.11)$$

Οι συντελεστές  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) είναι εδώ απλά σταθερές, όχι συναρτήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής  $t$ . Το σύστημα αυτό (12.7.11) αποτελεί κατά κάποιο τρόπο γενίκευση της διαφορικής εξισώσεως (12.7.1) του αρμονικού ταλαντωτή χωρίς εξωτερική φόρτιση και απόσβεση. Επίσης μπορεί πραγματικά να θεωρηθεί ότι αναφέρεται σε ένα μηχανικό σύστημα του Πολιτικού Μηχανικού με τρεις βαθμούς ελευθερίας (**τριβάθμιο μηχανικό σύστημα**: με τρεις άγνωστες συναρτήσεις) λόγω της παρουσίας τριών αγνώστων συναρτήσεων: των  $x(t)$ ,  $y(t)$  και  $z(t)$ . Οι συναρτήσεις αυτές ίσως εκφράζουν τις θέσεις τριών σημείων  $M_1$ ,  $M_2$  και  $M_3$  του μηχανικού συστήματος (με αντίστοιχες μάζες  $m_1$ ,  $m_2$  και  $m_3$ ) σε ευθεία γραμμή και συνδεδεμένων με ελατήρια.

Σε αναλυτικότερη, βαθμωτή μορφή το σύστημα των ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (12.7.11) γράφεται ως εξής μετά τον πολλαπλασιασμό των μητρώων, μάλλον του μητρώου επί το διάλυμα στήλης, στο δεξιό μέλος του:

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= a_{11}x(t) + a_{12}y(t) + a_{13}z(t), \\ \ddot{y}(t) &= a_{21}x(t) + a_{22}y(t) + a_{23}z(t), \\ \ddot{z}(t) &= a_{31}x(t) + a_{32}y(t) + a_{33}z(t). \end{aligned} \quad (12.7.12)$$

Στην παρούσα περίπτωση η μέθοδος της εκθετικής αντικαταστάσεως (12.7.2) θα έχει τη γενικότερη μορφή

$$x(t) = Ae^{\mu t}, \quad y(t) = Be^{\mu t}, \quad z(t) = Ce^{\mu t} \quad (12.7.13)$$

με τις επιπλέον τρεις σταθερές (τους συντελεστές)  $A$ ,  $B$  και  $C$  προς προσδιορισμό και αυτές πέρα από τη σταθερά  $\mu$  στον εκθέτη  $\mu t$  στην εκθετική συνάρτηση  $e^{\mu t}$ . Πραγματικά έχουμε τώρα τρεις άγνωστες συναρτήσεις: τις  $x(t)$ ,  $y(t)$  και  $z(t)$ . Επομένως απαιτούνται και τρεις ακριβώς εκθετικές αντικαταστάσεις: οι πιο πάνω αντικαταστάσεις (12.7.13) με τη χρήση (και στις τρεις) της ίδιας ακριβώς εκθετικής συναρτήσεως  $e^{\mu t}$  με τη σταθερά  $\mu$  σ' αυτήν προς το παρόν άγνωστη.

Παραγωγίσεις των εκθετικών συναρτήσεων (12.7.13) οδηγούν στις πρώτες παραγώγους τους

$$\dot{x}(t) = A\mu e^{\mu t}, \quad \dot{y}(t) = B\mu e^{\mu t}, \quad \dot{z}(t) = C\mu e^{\mu t}. \quad (12.7.14)$$

Και νέες, δεύτερες παραγωγίσεις των ίδιων συναρτήσεων οδηγούν στις δεύτερες παραγώγους

$$\ddot{x}(t) = A\mu^2 e^{\mu t}, \quad \ddot{y}(t) = B\mu^2 e^{\mu t}, \quad \ddot{z}(t) = C\mu^2 e^{\mu t}. \quad (12.7.15)$$

Συνεχίζοντας τις παραγωγίσεις, παίρνουμε γενικά τις  $k$ -τάξεως παραγώγους

$$x^{(k)}(t) = A\mu^k e^{\mu t}, \quad y^{(k)}(t) = B\mu^k e^{\mu t}, \quad z^{(k)}(t) = C\mu^k e^{\mu t}, \quad (12.7.16)$$

αν και, προφανώς, στο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (12.7.11) ή, καλύτερα, (12.7.12) δε μας χρειάζονται παρά μόνο οι δεύτερες παράγωγοι (12.7.15): αυτές με  $k = 2$ .

Με αντικατάσταση των εκθετικών συναρτήσεων (12.7.13) και των δευτέρων παραγώγων τους (12.7.15) στο γραμμικό σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (12.7.12) οδηγούμαστε στις εξισώσεις

$$\begin{aligned} A\mu^2 e^{\mu t} &= a_{11}Ae^{\mu t} + a_{12}Be^{\mu t} + a_{13}Ce^{\mu t}, \\ B\mu^2 e^{\mu t} &= a_{21}Ae^{\mu t} + a_{22}Be^{\mu t} + a_{23}Ce^{\mu t}, \\ C\mu^2 e^{\mu t} &= a_{31}Ae^{\mu t} + a_{32}Be^{\mu t} + a_{33}Ce^{\mu t}. \end{aligned} \quad (12.7.17)$$

Η ιδέα είναι αρχικά να απλοποιήσουμε (με απλές παραγοντοποιήσεις) το σύστημα αυτό στα δεξιά μέλη του στη μορφή

$$\begin{aligned} A\mu^2 e^{\mu t} &= (a_{11}A + a_{12}B + a_{13}C)e^{\mu t}, \\ B\mu^2 e^{\mu t} &= (a_{21}A + a_{22}B + a_{23}C)e^{\mu t}, \\ C\mu^2 e^{\mu t} &= (a_{31}A + a_{32}B + a_{33}C)e^{\mu t} \end{aligned} \quad (12.7.18)$$

με κοινό παράγοντα την εκθετική συνάρτηση  $e^{\mu t}$ . Επειδή μάλιστα η συνάρτηση αυτή  $e^{\mu t}$  δε μηδενίζεται ποτέ, μπορούμε να την απλοποιήσουμε τόσο στα αριστερά όσο και στα δεξιά μέλη. Τότε παίρνουμε το ομογενές σύστημα των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} A\mu^2 &= a_{11}A + a_{12}B + a_{13}C, \\ B\mu^2 &= a_{21}A + a_{22}B + a_{23}C, \\ C\mu^2 &= a_{31}A + a_{32}B + a_{33}C \end{aligned} \quad (12.7.19)$$

ως προς τους άγνωστους συντελεστές (τις σταθερές)  $A$ ,  $B$  και  $C$  στις εκθετικές εκφράσεις (12.7.13), τις οποίες έχουμε υποθέσει για τις άγνωστες συναρτήσεις  $x(t)$ ,  $y(t)$  και  $z(t)$  αντίστοιχα.

► **Παρατήρηση A12.7:** Στο σημείο αυτό πρέπει να παρατηρηθεί με έμφαση το ακόλουθο γεγονός: Τόσο οι παραγοντοποιήσεις στις εξισώσεις (12.7.18) όσο και η πλήρης εξάλειψη της εκθετικής συναρτήσεως  $e^{\mu t}$  στις γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις (12.7.19) οφείλονται απλούστατα στο γεγονός ότι είχαμε λάβει την πρόνοια να χρησιμοποιήσουμε την ίδια σταθερά  $\mu$  στον εκθέτη  $\mu t$  στις τρεις εκθετικές αντικαταστάσεις (12.7.13). Αυτό το κάναμε μάλιστα και για τις τρεις άγνωστες συναρτήσεις:  $x(t)$ ,  $y(t)$  και  $z(t)$ . Στην αντίθετη περίπτωση, δηλαδή στην περίπτωση διαφορετικών σταθερών  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  και  $\mu_3$  στις τρεις εκθετικές αντικαταστάσεις (12.7.13) για τις άγνωστες συναρτήσεις  $x(t)$ ,  $y(t)$  και  $z(t)$ , η μέθοδος της εκθετικής αντικαταστάσεως που παρουσιάζουμε στην ενότητα αυτή θα είχε οδηγηθεί σε πλήρη αποτυχία. Αυτό θα συνέβαινε, επειδή θα ήταν απολύτως αδύνατο να απλοποιήσουμε τις εκθετικές συναρτήσεις. Επαναλαμβάνεται ότι η απλοποίηση της εκθετικής συναρτήσεως  $e^{\mu t}$  επιτεύχθηκε, απλά γιατί υποθέσαμε την ίδια σταθερά  $\mu$  και στις τρεις εκθετικές αντικαταστάσεις (12.7.13). Λήγει η σημαντική αυτή παρατήρηση και υποτίθεται ότι έχει γίνει πλήρως κατανοητή!

Είναι πραγματικά ομογενές και γραμμικό το σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων (12.7.19), εννοείται ως προς τους άγνωστους συντελεστές  $A$ ,  $B$  και  $C$ . Αυτό μάλιστα φαίνεται καθαρότερα, αν το ξαναγράψουμε στην απόλυτα ισοδύναμη μορφή του

$$\begin{aligned} (a_{11} - \mu^2)A + a_{12}B + a_{13}C &= 0, \\ a_{21}A + (a_{22} - \mu^2)B + a_{23}C &= 0, \\ a_{31}A + a_{32}B + (a_{33} - \mu^2)C &= 0. \end{aligned} \quad (12.7.20)$$

Η προφανής και τετριμμένη λύση ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων είναι απλά η μηδενική λύση, στην περίπτωση μας η λύση

$$A = B = C = 0. \quad (12.7.21)$$

Δεν ενδιαφερόμαστε όμως γι' αυτήν, γιατί οδηγεί στην επίσης μηδενική και τετριμμένη λύση

$$x(t) \equiv 0, \quad y(t) \equiv 0, \quad z(t) \equiv 0 \quad (12.7.22)$$

(λόγω των εκθετικών εκφράσεων (12.7.13) που υποθέσαμε) για το ομογενές γραμμικό σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (12.7.11) ή ισοδύναμα (12.7.12). Επομένως με κανέναν τρόπο δεν είναι πρακτικά αποδεκτή η λύση (12.7.21).

Αντίθετα ενδιαφερόμαστε για μια μη μηδενική λύση  $A, B, C$  του ομογενούς γραμμικού συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων (12.7.20). Μια τέτοια μη μηδενική λύση είναι δυνατή, μόνο εφόσον η ορίζουσα  $\Delta = \Delta(\mu)$  των συντελεστών των αγνώστων  $A, B$  και  $C$  είναι ίση με το μηδέν. Η ορίζουσα αυτή έχει προφανώς εδώ τη μορφή

$$\Delta = \Delta(\mu) = \begin{vmatrix} a_{11} - \mu^2 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \mu^2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \mu^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (12.7.23)$$

Φυσικά η ορίζουσα αυτή  $\Delta = \Delta(\mu)$  μπορεί (με την εκτέλεση των σχετικών πράξεων) να γραφεί και σε μορφή πολυωνύμου του  $\mu$  βέβαια μόνο με άρτιες δυνάμεις του  $\mu$ : τις δυνάμεις  $\mu^2, \mu^4$  και  $\mu^6$ . Παίρνουμε δηλαδή τελικά μια εκτοβάθμια αλγεβρική εξίσωση της μορφής

$$b_0\mu^6 + b_1\mu^4 + b_2\mu^2 + b_3 = 0 \implies b_0\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0 \quad (12.7.24)$$

έχοντας θέσει

$$\mu^2 = \lambda, \quad \text{οπότε} \quad \mu^4 = \lambda^2 \quad \text{και} \quad \mu^6 = \lambda^3. \quad (12.7.25)$$

Προσδιορίζουμε τώρα τις τρεις τιμές του  $\lambda$ , τις τιμές  $\lambda_1, \lambda_2$  και  $\lambda_3$ , από την τριτοβάθμια εξίσωση (12.7.24), αυτήν ως προς  $\lambda$ . Για διευκόλυνση στους υπολογισμούς θα τις υποθέσουμε μη μηδενικές και διαφορετικές μεταξύ τους. Στη συνέχεια προσδιορίζουμε και τις αντίστοιχες τιμές του  $\mu$ :

$$\mu = \pm\sqrt{\lambda} \quad (12.7.26)$$

μέσω των αντίστοιχων τετραγωνικών ριζών (με διπλό πρόσημο:  $\pm$ )

$$\mu_m = \pm\sqrt{\lambda_k}, \quad k = 1, 2, 3, \quad m = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \quad (12.7.27)$$

Γενικά οι τρεις πιο πάνω ρίζες  $\lambda_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) μπορούν βέβαια να είναι είτε πραγματικές είτε μιγαδικές. Το ίδιο ασφαλώς ισχύει και για τις αντίστοιχες έξι ρίζες  $\mu_m$  ( $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ).

Εν πάση περιπτώσει υποθέτουμε ότι οι τρεις ρίζες  $\lambda_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) είναι μη μηδενικές και διαφορετικές μεταξύ τους. Έχουμε τώρα τις τρεις γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις (12.7.20) (μάλλον το γραμμικό σύστημα των τριών αλγεβρικών εξισώσεων (12.7.20)) να διαθέτει εκτός από την τετριμμένη μηδενική λύση (12.7.21), την  $A = B = C = 0$ , και μη μηδενικές λύσεις  $A_m, B_m$  και  $C_m$  ( $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ). Αυτό συμβαίνει για καθεμία ρίζα  $\mu_m$  της εκτοβάθμιας αλγεβρικής εξίσωσης (12.7.24) (ως προς  $\mu$ ). Και μάλιστα για κάθε ρίζα  $\mu_m$  ( $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) υπάρχει μια απλή απειρία μη μηδενικών λύσεων  $A_m, B_m$  και  $C_m$  ( $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) του ομογενούς συστήματος των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (12.7.20). Η απειρία αυτή των λύσεων  $A_m, B_m$  και  $C_m$  προκύπτει από μία οποιαδήποτε συγκεκριμένη λύση  $A_{m0}, B_{m0}$  και  $C_{m0}$  μεταξύ των άπειρων αυτών λύσεων με πολλαπλασιασμό της επί μία σταθερά  $k_m$ . Τούτο συμβαίνει, επειδή το σύστημα των τριών αλγεβρικών εξισώσεων (12.7.20) είναι όχι μόνο γραμμικό, αλλ' επίσης και ομογενές. Επομένως, εφόσον



διαθέτουμε μια λύση  $A_{m0}$ ,  $B_{m0}$  και  $C_{m0}$  που να αντιστοιχεί στη ρίζα  $\mu_m$  της εκτοβάθμιας πολυωνυμικής εξίσωσης (12.7.24), τότε η γενικότερη λύση (για την ίδια ρίζα  $\mu_m$ ) του ίδιου γραμμικού συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων (12.7.20) θα έχει τη γενική μορφή

$$A_m = k_m A_{m0}, \quad B_m = k_m B_{m0}, \quad C_m = k_m C_{m0} \quad (12.7.28)$$

με το  $k_m$  αυθαίρετη σταθερά.

Πρακτικά η συγκεκριμένη λύση  $A_{m0}$ ,  $B_{m0}$  και  $C_{m0}$  προσδιορίζεται πολύ εύκολα, π.χ. συχνά θέτοντας  $\mu = \mu_m$  και  $A_{m0} = 1$  στις τρεις γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις (12.7.20) και λύνοντας τις δύο από αυτές (συνήθως οποιοσδήποτε δύο) ως προς  $B_{m0}$  και  $C_{m0}$ . (Ανάλογα θα μπορούσαμε να είχαμε θέσει  $B_{m0} = 1$  ή  $C_{m0} = 1$ .) Εάν η συγκεκριμένη λύση  $A_{m0}$ ,  $B_{m0}$  και  $C_{m0}$  που προκύπτει με τον τρόπο αυτό είναι κλασματική, μπορούμε επίσης να τη φέρουμε σε ακέραιη μορφή (αν και τούτο δεν είναι αναγκαίο) πολλαπλασιάζοντάς την με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών. Με τον τρόπο αυτό θα έχουμε τελικά τη συγκεκριμένη αυτή λύση  $A_{m0}$ ,  $B_{m0}$  και  $C_{m0}$  στην απλούστερη δυνατή μορφή της απλά χάριν ευκολίας.

Παραμένουμε στο παρόν συγκεκριμένο παράδειγμα (12.7.11) (σε μητρωική μορφή) ή ισοδύναμα (12.7.12) (σε συνήθη μορφή) ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος τριών διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξεως. Τελικά σε κάθε τιμή  $\mu_m$  με  $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  (μέχρι 6) στις τρεις εκθετικές αντικαταστάσεις (12.7.13) που έχουμε υποθέσει για το σύστημα αυτό αντιστοιχεί η μερική λύση

$$x_m(t) = k_m A_{m0} e^{\mu_m t}, \quad y_m(t) = k_m B_{m0} e^{\mu_m t}, \quad z_m(t) = k_m C_{m0} e^{\mu_m t}, \quad m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \quad (12.7.29)$$

του γραμμικού συστήματος των τριών διαφορικών εξισώσεων (12.7.11) ή (12.7.12). (Το σύμβολο  $k_m$  δηλώνει αυθαίρετη σταθερά.) Η παραπάνω λύση (12.7.29) αποτελεί φυσικά συνέπεια των τριών εκθετικών αντικαταστάσεων (12.7.13) καθώς και της πλήρους ελλείψεως επιθυμίας μας να αρκестούμε στην τετριμμένη μηδενική λύση (12.7.22). Αντίθετα είχαμε την πρακτικά εύλογη απαίτηση να έχουμε μη μηδενική λύση. Τέτοια, μη μηδενική, είναι πράγματι η λύση (12.7.29). Όμως η λύση αυτή δε σχηματίσθηκε τυχαία. Αντίθετα βασίσθηκε στην αλγεβρική εξίσωση (12.7.23), δηλαδή στην εξίσωση  $\Delta = \Delta(\mu) = 0$ , και στην απόλυτα ισοδύναμη καθαρά πολυωνυμική εξίσωση (12.7.24) με  $\lambda = \mu^2$ . Τούτο δηλώθηκε και στη σχέση (12.7.25).

Θεωρούμε τώρα μια συγκεκριμένη μερική λύση (ή ειδική λύση)

$$x_{m0}(t) = A_{m0} e^{\mu_m t}, \quad y_{m0}(t) = B_{m0} e^{\mu_m t}, \quad z_{m0}(t) = C_{m0} e^{\mu_m t} \quad (12.7.30)$$

του γραμμικού συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (12.7.11) ή (12.7.12) με τη λύση αυτή να μην περιέχει καμία απολύτως αυθαίρετη σταθερά. Είναι βέβαια προφανές ότι στη μερική αυτή λύση αντιστοιχεί και η γενικότερη μερική λύση

$$\begin{aligned} x_m(t) &= k_m x_{m0}(t) = k_m A_{m0} e^{\mu_m t}, \\ y_m(t) &= k_m y_{m0}(t) = k_m B_{m0} e^{\mu_m t}, \\ z_m(t) &= k_m z_{m0}(t) = k_m C_{m0} e^{\mu_m t} \end{aligned} \quad (12.7.31)$$

με το  $k_m$  αυθαίρετη σταθερά. Αυτό ισχύει, όπως και ευκολότατα επαληθεύεται, επειδή το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (12.7.11) ή (12.7.12) είναι όχι μόνο γραμμικό, αλλά και ομογενές.

Επομένως για κάθε ρίζα  $\mu_m$  της εξίσωσης (12.7.23) (ή μάλλον (12.7.24)) έχουμε και μια μερική λύση της μορφής (12.7.29) (απόλυτα ισοδύναμα (12.7.31)) εξαρτώμενη από μία αυθαίρετη σταθερά  $k_m$ . Στη συγκεκριμένη περίπτωση (με  $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) έχουμε επομένως έξι μερικές λύσεις της μορφής (12.7.29) (ή (12.7.31)) με την καθεμιά τους να περιέχει και από μία αυθαίρετη σταθερά  $k_m$  ( $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ). Επιπλέον είναι γνωστό, αλλά και πολύ εύκολα επαληθεύσιμο, ότι για ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων που είναι και γραμμικό αλλά και ομογενές το άθροισμα

μερικών λύσεων και γενικά ο γραμμικός συνδυασμός μερικών λύσεων μας δίνει μερική λύση, μερικές φορές και τη γενική λύση. Άρα από τις μερικές λύσεις (12.7.29) παίρνουμε (με άθροιση) τη λύση

$$x(t) = \sum_{m=1}^6 k_m A_{m0} e^{\mu_m t}, \quad y(t) = \sum_{m=1}^6 k_m B_{m0} e^{\mu_m t}, \quad z(t) = \sum_{m=1}^6 k_m C_{m0} e^{\mu_m t} \quad (12.7.32)$$

του συστήματος των τριών ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (12.7.11) ή, ισοδύναμα, χωρίς μητρώα (12.7.12).

Η λύση αυτή περιέχει έξι αυθαίρετες σταθερές  $k_m$ : τις  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$  και  $k_6$ . (Οι τρεις συντελεστές  $A_{m0}, B_{m0}$  και  $C_{m0}$  έχουν ήδη προσδιορισθεί!) Είναι εύλογο να υπάρχουν έξι αυθαίρετες σταθερές στη λύση αυτή, γιατί το γραμμικό σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (12.7.11) (ή (12.7.12)) αποτελείται από τρεις διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως η καθεμία. Επομένως συνολικά πρέπει να έχουμε  $3 \times 2 = 6$  σταθερές στη γενική λύση του. Αποδεικνύεται μάλιστα ότι η λύση (12.7.32) είναι η γενική λύση του συστήματος αυτού με την προϋπόθεση (την υπόθεση που ήδη έχουμε κάνει) ότι οι τρεις λύσεις  $\lambda_1, \lambda_2$  και  $\lambda_3$  της τριτοβάθμιας πολυωνυμικής εξισώσεως (12.7.24) (της δεύτερης, αυτής που είναι ως προς  $\lambda$ ) είναι μη μηδενικές και διαφορετικές μεταξύ τους. Τότε το ίδιο θα ισχύει φυσικά και για τις έξι λύσεις  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$  και  $\mu_6$  της εκτοβάθμιας πολυωνυμικής εξισώσεως (12.7.24) (της πρώτης, ως προς  $\mu$  τώρα) λόγω των σχέσεων (12.7.27).

Φυσικά σε περίπτωση διαθεσιμότητας των αρχικών συνθηκών (έστω για  $t = t_0$ ), π.χ. των έξι αρχικών συνθηκών

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = u_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad \dot{y}(t_0) = v_0, \quad z(t_0) = z_0, \quad \dot{z}(t_0) = w_0 \quad (12.7.33)$$

με τα δεξιά μέλη τους δεδομένες σταθερές, τότε βέβαια μπορούν εύκολα να προσδιορισθούν οι αυθαίρετες σταθερές  $k_m$  ( $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) στη γενική λύση (12.7.32). Τούτο μπορεί σχετικά εύκολα να επιτευχθεί από τη λύση αυτή και την παράγωγό της, στην πραγματικότητα έχουμε τρεις παραγώγους: τις ακόλουθες:

$$\dot{x}(t) = \sum_{m=1}^6 \mu_m k_m A_{m0} e^{\mu_m t}, \quad \dot{y}(t) = \sum_{m=1}^6 \mu_m k_m B_{m0} e^{\mu_m t}, \quad \dot{z}(t) = \sum_{m=1}^6 \mu_m k_m C_{m0} e^{\mu_m t}, \quad (12.7.34)$$

θέτοντας  $t = t_0$  και στη λύση (12.7.32) και στην παράγωγό της (12.7.34) και χρησιμοποιώντας τις έξι αρχικές συνθήκες (12.7.33). Έτσι προκύπτει ένα μη ομογενές σύστημα έξι γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων με αγνώστους τις έξι σταθερές  $k_m$  ( $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ). Αυτό το σύστημα μπορεί πολύ εύκολα να επιλυθεί και να βρεθούν έτσι οι έξι σταθερές  $k_m$  συναρτήσει των επίσης έξι αρχικών συνθηκών (12.7.33):  $x_0, y_0, z_0, u_0, v_0$  και  $w_0$ . Με τον τρόπο αυτό προσδιορίζεται η μερική λύση του συστήματος των τριών ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (12.7.11) ή (12.7.12) που αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες (12.7.33) ή, με άλλες λέξεις, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (12.7.11) (ή (12.7.12)) και (12.7.33).

Σε ορισμένα προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού (όπως σε συστήματα δοκών σε κατασκευές) μπορεί να έχουμε και συνοριακές συνθήκες αντί μόνο αρχικές συνθήκες. Ο τρόπος εργασίας και με τις συνοριακές συνθήκες είναι καταρχήν ανάλογος. Εντούτοις σε προβλήματα Ταλαντώσεων και Δυναμικής γενικότερα είναι οι αρχικές συνθήκες (για  $t = t_0$ , πολύ συχνά για  $t = 0$ ) αυτές που είναι διαθέσιμες στον Πολιτικό Μηχανικό.

Ας προχωρήσουμε τώρα σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως (12.7.13) και μάλιστα για σύστημα δύο μόνο ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης (και όχι δεύτερας) τάξεως. Με το απλό αυτό παράδειγμα ελπίζεται να γίνει κάπως πιο κατανοητό το θεωρητικό μέρος που προηγήθηκε για την τόσο ενδιαφέρουσα και χρήσιμη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως, εδώ σε συστήματα διαφορικών εξισώσεων.

**A12.7.3. Παράδειγμα**

Θεωρούμε το ίδιο ακριβώς παράδειγμα (12.4.4) (σε μητρική μορφή), ισοδύναμα (12.4.6) (σε βαθμωτή μορφή), συγκεκριμένα

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t) + 2y(t), \\ \dot{y}(t) &= 4x(t) + 3y(t).\end{aligned}\tag{12.7.35}$$

Το παράδειγμα αυτό το αναφέραμε στην Ενότητα A12.4 και ήδη το επιλύσαμε με τη μέθοδο της απαλοιφής στην Παράγραφο A12.5.2 καθώς και με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace στην Παράγραφο A12.6.2. Η γενική λύση που βρέθηκε είχε τη μορφή (12.5.21) ή (12.6.31), συγκεκριμένα

$$\begin{aligned}x(t) &= E_1 e^{-t} + E_2 e^{5t}, \\ y(t) &= -E_1 e^{-t} + 2E_2 e^{5t}.\end{aligned}\tag{12.7.36}$$

Την ίδια ακριβώς λύση (12.7.36), αλλά με την παρούσα μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης που παρουσιάσαμε θεωρητικά στην προηγούμενη Παράγραφο A12.7.2, θα προσπαθήσουμε να τη βρούμε και στην παρούσα Παράγραφο A12.7.3.

Η εκθετική αντικατάσταση (12.7.13) παίρνει στην παρούσα περίπτωση δύο μόνο αγνώστων συναρτήσεων (ή εξαρτημένων μεταβλητών): των  $x(t)$  και  $y(t)$  τη μορφή

$$x(t) = Ae^{\mu t}, \quad y(t) = Be^{\mu t}\tag{12.7.37}$$

με τον εκθέτη  $\mu$  άγνωστο και τους συντελεστές  $A$  και  $B$  επίσης άγνωστους. Οι διαφορικές εξισώσεις του συστήματος (12.7.35) είναι πρώτης τάξεως. Άρα μας χρειάζονται μόνο οι πρώτες παράγωγοι των εκθετικών εκφράσεων (12.7.37) που υποθέσαμε για τις άγνωστες συναρτήσεις  $x(t)$  και  $y(t)$ . Είναι ευχερέστατος ο προσδιορισμός τους με παραγωγή της εκθετικής συναρτήσεως και δίνει

$$\dot{x}(t) = \mu Ae^{\mu t}, \quad \dot{y}(t) = \mu Be^{\mu t}.\tag{12.7.38}$$

Αντικαθιστούμε τώρα τις εκθετικές εκφράσεις (12.7.37) των δύο αγνώστων συναρτήσεων  $x(t)$  και  $y(t)$  και των παραγώγων τους (12.7.38) στο ομογενές γραμμικό σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (12.7.35) που πρέπει να επιλύσουμε. Χωρίς καμία απολύτως δυσκολία προκύπτει ότι

$$\begin{cases} \mu Ae^{\mu t} = Ae^{\mu t} + 2Be^{\mu t} \\ \mu Be^{\mu t} = 4Ae^{\mu t} + 3Be^{\mu t} \end{cases} \implies \begin{cases} \mu A = A + 2B \\ \mu B = 4A + 3B \end{cases} \implies \begin{cases} (1 - \mu)A + 2B = 0, \\ 4A + (3 - \mu)B = 0. \end{cases}\tag{12.7.39}$$

Αφού απλοποιήσαμε τον κοινό εκθετικό παράγοντα  $e^{\mu t}$ , καταλήξαμε επομένως σε ένα ομογενές γραμμικό σύστημα δύο αλγεβρικών εξισώσεων με δύο αγνώστους: τους συντελεστές  $A$  και  $B$  στις εκθετικές αντικαταστάσεις (12.7.37). Το ομογενές γραμμικό αυτό σύστημα δύο αλγεβρικών εξισώσεων (12.7.39) (στο τέλος) έχει προφανώς την τετριμμένη μηδενική λύση  $A = B = 0$ . Η μηδενική αυτή λύση οδηγεί και σε εξίσου τετριμμένη και μηδενική (εννοείται σε ταυτοτικά μηδενική!) λύση  $x(t) \equiv 0$  και  $y(t) \equiv 0$  το ομογενές γραμμικό σύστημα των δύο διαφορικών εξισώσεων (12.7.35), το οποίο επιδιώκουμε να επιλύσουμε. Αυτό συμβαίνει βέβαια εξαιτίας των εκθετικών αντικαταστάσεων (12.7.37) που υιοθετήσαμε.

Μία μόνο δυνατότητα υπάρχει τώρα, ώστε να μην καταλήξουμε στην ταυτοτικά μηδενική λύση  $x(t) \equiv y(t) \equiv 0$ . Η δυνατότητα αυτή είναι απλά η ορίζουσα  $\Delta = \Delta(\mu)$  των συντελεστών  $A$  και  $B$  στο τελικό ομογενές γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων (12.7.39) (δύο γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις) να είναι ίση με μηδέν. Πρέπει επομένως να έχουμε

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} 1 - \mu & 2 \\ 4 & 3 - \mu \end{vmatrix} = (1 - \mu)(3 - \mu) - 2 \cdot 4 = \mu^2 - 4\mu + 3 - 8 = \mu^2 - 4\mu - 5 = 0.\tag{12.7.40}$$

Επομένως πρέπει η σταθερά  $\mu$  στον εκθέτη  $\mu t$  των εκθετικών αντικαταστάσεων (12.7.37) να επιλεγεί σαν ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου  $p_2(\mu) \equiv \Delta(\mu)$ , δηλαδή σαν ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$p_2(\mu) = \Delta(\mu) = \mu^2 - 4\mu - 5 = 0 \quad (12.7.41)$$

μετά τον απλούστατο υπολογισμό της ορίζουσας  $\Delta(\mu)$  στη σχέση (12.7.40). Η δευτεροβάθμια αυτή αλγεβρική εξίσωση  $p_2(\mu) = \Delta(\mu) = 0$  λύνεται ευκολότατα και παίρνουμε τις λύσεις της  $\mu_{1,2}$  (που εδώ προκύπτουν πραγματικές)

$$\mu_{1,2} = 2 \mp \sqrt{4+5} = 2 \mp \sqrt{9} = 2 \mp 3 \implies \mu_1 = -1 \quad \text{και} \quad \mu_2 = 5. \quad (12.7.42)$$

Οι λύσεις αυτές είναι οι κατάλληλες σταθερές  $\mu$  στις εκθετικές αντικαταστάσεις (12.7.37), ώστε να μην αρκестούμε στην τετριμμένη, τη μηδενική λύση  $A = B = 0$  και παραπέρα  $x(t) \equiv y(t) \equiv 0$ . Έτσι κι αλλιώς η λύση αυτή ήταν προφανής και δεν έχει κανένα πρακτικό ενδιαφέρον για τον Πολιτικό Μηχανικό στο ομογενές γραμμικό σύστημα των δύο διαφορικών εξισώσεων (12.7.35).

Παρεμπιπτόντως μπορούμε να προσθέσουμε ότι ειδικά σε συστήματα δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων, όπως είναι το σύστημα (12.7.39), δεν είναι αναγκαίο να χρησιμοποιήσουμε την ορίζουσα  $\Delta = \Delta(\mu)$  των συντελεστών των αγνώστων  $A$  και  $B$ , για να καταλήξουμε στη χαρακτηριστική εξίσωση (12.7.41):  $p_2(\mu) = 0$ . (Το αντίστοιχο χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι βέβαια το  $p_2(\mu) = \mu^2 - 4\mu - 5$ .) Στην ειδική αυτή περίπτωση μπορούμε απλά να προσδιορίσουμε το λόγο (το πηλίκο)  $A/B$  (υποθέτοντας ότι  $B \neq 0$ ) από την πρώτη εξίσωση του ομογενούς γραμμικού συστήματος των αλγεβρικών εξισώσεων (12.7.39) και, στη συνέχεια, και από τη δεύτερη εξίσωση του ίδιου ακριβώς γραμμικού συστήματος (12.7.39) χωριστά. Έτσι διαπιστώνουμε εύκολα ότι

$$\begin{aligned} (1 - \mu)A + 2B = 0 &\implies \frac{A}{B} = -\frac{2}{1 - \mu}, \\ 4A + (3 - \mu)B = 0 &\implies \frac{A}{B} = -\frac{3 - \mu}{4}. \end{aligned} \quad (12.7.43)$$

Αφού όμως εξετάζουμε το ομογενές γραμμικό σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων (12.7.39) με αγνώστους τους συντελεστές  $A$  και  $B$  των εκθετικών αντικαταστάσεων (12.7.37), είναι προφανές ότι οι τιμές του λόγου (του πηλίκου)  $A/B$  στις δύο αμέσως πιο πάνω σχέσεις (12.7.43) θα πρέπει να συμπίπτουν. Έτσι το σύστημα αυτό (12.7.39) θα έχει μη μηδενική λύση. Επομένως

$$\frac{A}{B} = -\frac{2}{1 - \mu} = -\frac{3 - \mu}{4}. \quad (12.7.44)$$

Από την τελευταία αυτή ισότητα των δύο κλασμάτων προκύπτει (με απαλοιφή των παρονομαστών) ότι

$$-\frac{2}{1 - \mu} = -\frac{3 - \mu}{4} \implies (1 - \mu)(3 - \mu) - 2 \cdot 4 = 0 \implies \mu^2 - 4\mu - 5 = 0. \quad (12.7.45)$$

Προκύπτει δηλαδή η ίδια χαρακτηριστική εξίσωση (12.7.40) ή (12.7.41), η οποία είχε ήδη βρεθεί με τη μέθοδο της ορίζουσας  $\Delta = \Delta(\mu)$  των συντελεστών των αγνώστων  $A$  και  $B$  στο ομογενές γραμμικό σύστημα των δύο αλγεβρικών εξισώσεων (12.7.39).

Ίσως η παραπάνω μέθοδος, που δε χρησιμοποιεί ορίζουσες  $\Delta = \Delta(\mu)$ , να είναι κάπως απλούστερη στην κατανόησή της. Εντούτοις για περισσότερες από δύο εξισώσεις η γενίκευσή της δεν είναι άμεση και η μέθοδος της ορίζουσας  $\Delta = \Delta(\mu)$  σίγουρα πλεονεκτεί και πρέπει να προτιμάται.

Έχουμε ήδη υπολογίσει τις δύο ρίζες  $\mu_1 = -1$  και  $\mu_2 = 5$  (σχέσεις (12.7.42)) της χαρακτηριστικής εξίσωσης (12.7.41):  $p_2(\mu) = 0$ . Ας πάρουμε πρώτα την πρώτη (τη μικρότερη) από τις δύο αυτές ρίζες: τη ρίζα  $\mu = \mu_1 = -1$ . Γι' αυτήν ακριβώς την τιμή της σταθεράς  $\mu$ :  $\mu = \mu_1 = -1$  το τελευταίο γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων (12.7.39) γράφεται ως εξής (με  $A_1$  και  $B_1$  αντί  $A$  και  $B$ ):

$$2A_1 + 2B_1 = 0, \quad 4A_1 + 4B_1 = 0, \quad \text{οπότε απλά} \quad A_1 = -B_1 = E_1 \quad (12.7.46)$$

με  $E_1$  την κοινή τιμή των  $A_1$  και  $-B_1$  για  $\mu = \mu_1 = -1$ , που είναι αυθαίρετη σταθερά. (Με άλλα λόγια οι δύο εξισώσεις του συστήματος (12.7.39) συμπίπτουν σε μία: απλά στην  $A_1 + B_1 = 0$ !) Τότε η λύση (12.7.37) του γραμμικού συστήματος διαφορικών εξισώσεων (12.7.35) παίρνει τη μορφή

$$x_1(t) = E_1 e^{-t}, \quad y_1(t) = -E_1 e^{-t}. \quad (12.7.47)$$

Ανάλογα για  $\mu = \mu_2 = 5$  το ομογενές γραμμικό σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων (12.7.39) γράφεται ως εξής:

$$-4A_2 + 2B_2 = 0, \quad 4A_2 - 2B_2 = 0, \quad \text{οπότε απλά } A_2 = \frac{B_2}{2} = E_2 \quad (12.7.48)$$

με  $E_2$  τώρα την κοινή τιμή των  $A_2$  και  $B_2/2$  για  $\mu = \mu_2 = 5$ , που είναι αυθαίρετη σταθερά. Τώρα η λύση (12.7.37) του γραμμικού συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (12.7.35) παίρνει τη μορφή

$$x_2(t) = E_2 e^{5t}, \quad y_2(t) = 2E_2 e^{5t}. \quad (12.7.49)$$

Έχοντας πια διαθέσιμες τις μερικές (ή ειδικές) λύσεις (12.7.47) και (12.7.49) (με δύο αυθαίρετες σταθερές: τις  $E_1$  και  $E_2$ ), μπορούμε προσθέτοντάς τις να σχηματίσουμε τη γενική λύση πάλι με δύο αυθαίρετες σταθερές, τις  $E_1$  και  $E_2$ ,

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) = E_1 e^{-t} + E_2 e^{5t}, \\ y(t) &= y_1(t) + y_2(t) = -E_1 e^{-t} + 2E_2 e^{5t}. \end{aligned} \quad (12.7.50)$$

Φυσικά η λύση αυτή συμπίπτει με την αντίστοιχη γενική λύση (12.5.21) ή (12.6.31) ή (12.7.36) του ίδιου ακριβώς γραμμικού συστήματος διαφορικών εξισώσεων (12.4.6) ή (12.5.2) ή (12.6.3) ή (12.7.35) που είχε βρεθεί με τη μέθοδο της απαλοιφής καθώς και με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Εκτιμάται μάλιστα ότι η μέθοδος της εκθετικής αντικαταστάσεως είναι γενικά απλούστερη στην εφαρμογή της από τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace για την επίλυση ομογενών γραμμικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων. Η δυσκολία που παρουσιάζεται στη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace έγκειται βασικά στην αναγκαιότητα της αντιστροφής των μετασχηματισμών Laplace των αγνώστων συναρτήσεων που προκύπτουν. Αυτή είναι μια όχι και τόσο εύκολη εργασία που απαιτεί συνήθως προηγουμένως και αναλύσεις σε απλά κλάσματα.

Όμως από την άλλη πλευρά η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace (όπως και η μέθοδος της απαλοιφής) είναι άμεσα εφαρμόσιμες και σε μη ομογενή γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων. Αντίθετα η μέθοδος της εκθετικής αντικαταστάσεως πρέπει να συνοδεύεται και από τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών ή, γενικότερα, από τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων απολύτως ανάλογα με τις ανεξάρτητες γραμμικές διαφορικές εξισώσεις: Ενότητες A5.8 και A5.9 του Κεφαλαίου A5 αντίστοιχα. Έτσι μόνο θα μπορεί να είναι εφαρμόσιμη και σε μη ομογενή γραμμικά συστήματα. Η σχετική διαδικασία, επαναλαμβάνεται: απόλυτα ανάλογη με εκείνη στις ανεξάρτητες γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, δεν παρουσιάζει καμία υπολογιστική δυσκολία.

## A12.8. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ

### A12.8.1. Σύνοψη εισαγωγή στη μέθοδο

Η μέθοδος της εκθετικής αντικαταστάσεως, η οποία αναπτύχθηκε στην προηγούμενη ενότητα, είναι μια επίσημη, γενική και πολύ γνωστή μαθηματική μέθοδος επίλυσεως ομογενών γραμμικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων (ισοδύναμα, ίσως και καλύτερα, συστημάτων ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων) με σταθερούς συντελεστές.

Μερικές φορές όμως ο Πολιτικός Μηχανικός έχει να αντιμετωπίσει στις κατασκευές του μηχανικά συστήματα με σταθερές βέβαια παραμέτρους (όπως είναι ο κανόνας, π.χ. μάζες ή σταθερές ελατηρίων) που δεν έχουν όμως απόσβεση (είναι τουλάχιστον προσεγγιστικά χωρίς απόσβεση,

χωρίς αποσβεστήρες). Θεωρούμε επίσης εδώ τις περιπτώσεις ιδιοταλαντώσεων και γενικότερα ελεύθερων ταλαντώσεων, δηλαδή τις περιπτώσεις που δεν εφαρμόζονται εξωτερικές δυνάμεις πάνω στο μηχανικό σύστημα. Σε τέτοιες περιπτώσεις (ιδιοταλαντώσεων και γενικότερα ελεύθερων ταλαντώσεων) λόγω της πολύ γνωστής αρχής της διατηρήσεως της ενεργείας τα ομογενή γραμμικά συστήματα των διαφορικών εξισώσεων που προκύπτουν (γενικά με σταθερούς μάλιστα συντελεστές!) πρέπει να έχουν τριγωνομετρικές λύσεις (χωρίς αποσβέσεις των ταλαντώσεων). Για παράδειγμα, η μετατόπιση  $u_1(t)$  ενός υλικού σημείου  $M_1$  (μάζας  $m_1$ ) σε ένα διβάθμιο (δηλαδή με δύο βαθμούς ελευθερίας) μηχανικό σύστημα θα είναι της μορφής

$$u_1(t) = (A_{11} \cos \omega_1 t + B_{11} \sin \omega_1 t) + (A_{12} \cos \omega_2 t + B_{12} \sin \omega_2 t). \quad (12.8.1)$$

Στη σχέση αυτή  $\omega_1$  και  $\omega_2$  είναι οι δύο κυκλικές ιδιοσυχνότητες του διβάθμιου μηχανικού συστήματος και  $A_{11}$ ,  $B_{11}$ ,  $A_{12}$  και  $B_{12}$  κατάλληλες σταθερές. (Ανάλογα και για το δεύτερο υλικό σημείο  $M_2$ .)

Σε κάθε τέτοια περίπτωση που δεν υπάρχει απόσβεση (επομένως δεν υπάρχουν και όροι με πρώτη παράγωγο των αγνώστων συναρτήσεων) σε ένα διβάθμιο ή γενικότερα πολυβάθμιο μηχανικό σύστημα του Πολιτικού Μηχανικού η χρήση της μεθόδου της εκθετικής αντικατάστασης  $e^{\mu t}$  δεν είναι ιδιαίτερα σκόπιμη. Αυτό ισχύει, επειδή η μέθοδος θα οδηγήσει σε καθαρά φανταστικές τιμές της σταθεράς  $\mu$  στον εκθέτη  $\mu t$ , π.χ. στις τιμές  $\mu_{1,2} = \pm i\omega$  με  $i = \sqrt{-1}$  τη φανταστική μονάδα.

Ο Πολιτικός Μηχανικός ενδιαφέρεται όμως για πραγματικές λύσεις στα τεχνικά προβλήματά του, π.χ. για πραγματικές μετατοπίσεις  $u_k(t)$  των σημείων  $M_k$  του μηχανικού συστήματός του. Για να αποφύγει λοιπόν τις μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις, θα πρέπει να χρησιμοποιήσει τους γνωστούς τύπους του Euler:  $e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$ , ώστε να μετατρέψει τις λύσεις του σε τριγωνομετρικές. Επομένως είναι έξυπνη ιδέα και πάρα πολύ συχνά πραγματικά εφαρμόζεται να δηλωθούν εξ αρχής οι άγνωστες συναρτήσεις  $u_k(t)$  τριγωνομετρικά και όχι εκθετικά. Η μέθοδος αυτή δεν είναι επίσημη μέθοδος στα γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων. Είναι όμως πάρα πολύ χρήσιμη για τον Πολιτικό Μηχανικό σε μηχανικά συστήματα χωρίς απόσβεση σε ιδιοταλαντώσεις και γενικότερα σε ελεύθερες ταλαντώσεις. Θα την επιδείξουμε τώρα σε ένα πολύ απλό παράδειγμα.

### A12.8.2. Παράδειγμα σε διβάθμιο μηχανικό σύστημα του Πολιτικού Μηχανικού

Θεωρούμε το διβάθμιο (με δύο βαθμούς ελευθερίας) μηχανικό σύστημα δύο μαζών  $m_1$  και  $m_2$  που είναι στα άκρα δύο ελατηρίων σταθερών  $k_1$  και  $k_2$  με το πάνω άκρο του πάνω ελατηρίου ακίνητο. Για διευκόλυνση στις πράξεις θεωρούμε τις δύο μάζες ίσες:  $m_1 = m_2 = m$ , και τις δύο σταθερές των ελατηρίων επίσης ίσες:  $k_1 = k_2 = k$ . Υποθέτουμε επιπλέον ότι δεν υπάρχει απόσβεση στο μηχανικό αυτό σύστημα ούτε και εξωτερική φόρτιση. Εκτελούνται όμως ταλαντώσεις, οι οποίες είναι ιδιοταλαντώσεις ή καλύτερα ελεύθερες ταλαντώσεις που οφείλονται (οι ελεύθερες ταλαντώσεις!) απλά στις αρχικές συνθήκες. Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα προκύπτει εύκολα το εξής σύστημα δύο ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές:

$$\begin{aligned} m\ddot{u}_1(t) + 2ku_1(t) - ku_2(t) &= 0, \\ m\ddot{u}_2(t) - ku_1(t) + ku_2(t) &= 0 \end{aligned} \quad (12.8.2)$$

με άγνωστες συναρτήσεις τις μετατοπίσεις  $u_1(t)$  και  $u_2(t)$  των μαζών του μηχανικού συστήματος.

Με τη μέθοδο της τριγωνομετρικής αντικατάστασης μπορούμε απλά να υποθέσουμε ότι

$$u_1(t) = A_1 \cos(\omega t - \alpha), \quad u_2(t) = A_2 \cos(\omega t - \alpha) \quad (12.8.3)$$

με τα  $A_1$  και  $A_2$  άγνωστες σταθερές (τα εύρη των ταλαντώσεων) και  $\alpha$  μια επίσης άγνωστη γωνία φάσεως (με πλην,  $-\alpha$ , ή με συν,  $+\alpha$ ). Μπορούμε βέβαια να χρησιμοποιήσουμε και ημιτονική αντικατάσταση με  $\sin(\omega t + \beta)$  αντί  $\cos(\omega t - \alpha)$  σαν κατάλληλη τριγωνομετρική συνάρτηση. Τονίζουμε ξανά ότι δεν πρέπει να παρουσιάζονται οι πρώτες παράγωγοι των αγνώστων συναρτήσεων  $u_1(t)$  και  $u_2(t)$ . Δηλαδή δεν πρέπει να υπάρχει όρος αποσβέσεως σε καμία από τις διαφορικές εξισώσεις.

Μπορούμε τώρα να αντικαταστήσουμε τις δύο παραπάνω τριγωνομετρικές εκφράσεις (12.8.3) (που σωστά υποθέσαμε, αφού δεν έχουμε ούτε απόσβεση ούτε εξωτερική φόρτιση) στις πιο πάνω διαφορικές εξισώσεις (12.8.2). Προηγουμένως όμως καλό είναι να τις ξαναγράψουμε στη μορφή

$$\left. \begin{aligned} \ddot{u}_1(t) + 2\omega_0^2 u_1(t) - \omega_0^2 u_2(t) &= 0 \\ \ddot{u}_2(t) - \omega_0^2 u_1(t) + \omega_0^2 u_2(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{έχοντας θέσει } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (12.8.4)$$

φυσικά χωρίς η σταθερά αυτή  $\omega_0$  να δηλώνει κάποια αληθινή ιδιοσυχνότητα. Έτσι μετά βέβαια και την απλοποίηση του παράγοντα  $\cos(\omega t - \alpha)$  (που είναι κοινός σε όλους τους όρους) παίρνουμε

$$\left. \begin{aligned} -\omega^2 A_1 + 2\omega_0^2 A_1 - \omega_0^2 A_2 &= 0 \\ -\omega^2 A_2 - \omega_0^2 A_1 + \omega_0^2 A_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{και λίγο απλούστερα } \left\{ \begin{aligned} (2\omega_0^2 - \omega^2)A_1 - \omega_0^2 A_2 &= 0, \\ -\omega_0^2 A_1 + (\omega_0^2 - \omega^2)A_2 &= 0. \end{aligned} \right. \quad (12.8.5)$$

Όπως συμβαίνει στη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως, έτσι κι εδώ είναι σαφές ότι έχουμε καταλήξει σε ένα ομογενές σύστημα δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Για να έχει μη μηδενική λύση (ισοδύναμα, για να παρουσιάζονται ταλαντώσεις στο παρόν διβάθμιο μηχανικό σύστημα), είναι προφανές ότι θα πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων  $A_1$  και  $A_2$  να είναι ίση με το μηδέν, δηλαδή

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} 2\omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & \omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = \omega^4 - 3\omega_0^2 \omega^2 + \omega_0^4 = 0. \quad (12.8.6)$$

Πρόκειται για μια διτετράγωνη εξίσωση (ή δευτεροβάθμια εξίσωση με άγνωστο το  $\lambda^* = \omega^2$ ). Είναι η **εξίσωση ιδιοσυχνοτήτων** (εννοείται κυκλικών ιδιοσυχνοτήτων) ή απλούστερα η **εξίσωση συχνοτήτων** στο παρόν απλό πρόβλημα **διβάθμιου ταλαντωτή**. Τη λύνουμε αμέσως βρίσκοντας

$$\lambda^* = \omega^2 = \frac{3\omega_0^2 \mp \sqrt{9\omega_0^4 - 4\omega_0^4}}{2} = \frac{3\omega_0^2 \mp \sqrt{5}\omega_0^2}{2} = \frac{3\omega_0^2 \mp \sqrt{5}\omega_0^2}{2} = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2} \omega_0^2, \quad (12.8.7)$$

έτσι ώστε η πρώτη ιδιοσυχνότητα  $\omega_1$  να προκύψει η μικρότερη. Άρα οι δύο ιδιοσυχνότητες  $\omega_1$  και  $\omega_2$  στο παρόν μηχανικό σύστημα (που είναι βέβαια και οι δυο τους θετικές) είναι οι ακόλουθες:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} \omega_0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \omega_0 \approx 0.61803 \omega_0, \quad (12.8.8)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} \omega_0 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \omega_0 \approx 1.61803 \omega_0. \quad (12.8.9)$$

Τώρα το ομογενές σύστημα των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (12.8.5) έχει μη μηδενική λύση. Για την ακρίβεια έχει απειρία μη μηδενικών λύσεων. Το μόνο που μπορούμε να υπολογίσουμε είναι ο λόγος  $A_1/A_2$  (ή αντίστροφα  $A_2/A_1$ ) των προσημασμένων ευρών των ταλαντώσεων  $A_1$  και  $A_2$ . Πράγματι, από την δεύτερη γραμμική αλγεβρική εξίσωση (12.8.5) διαπιστώνεται αμέσως ότι

$$A_1 = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} A_2, \quad \text{ισοδύναμα} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2}. \quad (12.8.10)$$

Έτσι για τις δύο ιδιοσυχνότητες  $\omega_1$  και  $\omega_2$  βρίσκουμε εύκολα τους δύο αντίστοιχους λόγους

$$\frac{A_{11}}{A_{21}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.61803 \quad \text{και} \quad \frac{A_{12}}{A_{22}} = -\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx -1.61803. \quad (12.8.11)$$

Στις σχέσεις αυτές χρησιμοποιήσαμε μάλιστα και ένα δεύτερο δείκτη: 1 ή 2, για να δηλώσουμε την πρώτη ιδιοσυχνότητα  $\omega_1$  ή τη δεύτερη  $\omega_2$  αντίστοιχα. (Τα ίδια αποτελέσματα προκύπτουν φυσικά και από την πρώτη γραμμική αλγεβρική εξίσωση (12.8.5).) Από το δεύτερο λόγο (που είναι αρνητικός:  $A_{12}/A_{22} < 0$ ) παρατηρούμε για τη δεύτερη ιδιοσυχνότητα  $\omega_2$  ότι όταν η πρώτη μάζα έχει μετακινηθεί προς τα αριστερά της θέσεως ισορροπίας της, τότε η δεύτερη μάζα έχει μετακινηθεί προς τα δεξιά και αντίστροφα. Αντίθετα για την πρώτη ιδιοσυχνότητα  $\omega_1$  (τη **θεμελιώδη ιδιοσυχνότητα**) και οι δύο μάζες μετακινούνται ταυτόχρονα προς την ίδια κατεύθυνση:  $A_{11}/A_{21} > 0$ . Εννοείται βέβαια ότι η συνολική ταλάντωση αποτελεί **υπέρθεση** των δύο αυτών **ιδιοταλαντώσεων**.

## Α12.9. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΔΙΑΓΩΝΙΟΠΟΙΗΣΕΩΣ

### Α12.9.1. Εισαγωγή στη μέθοδο της διαγωνιοποίησης

Η μέθοδος της *διαγωνιοποίησης* (ή *αποσυζεύξεως*) μας επιτρέπει την αναγωγή ενός γραμμικού συστήματος  $n$  *συζευγμένων διαφορικών εξισώσεων* πρώτης τάξεως με σταθερούς συντελεστές σε ένα αντίστοιχο σύστημα  $n$  *ασύζευκτων διαφορικών εξισώσεων*. Δηλαδή ουσιαστικά οδηγεί σε  $n$  μεμονωμένες (ανεξάρτητες) διαφορικές εξισώσεις. Είναι πολύ ενδιαφέρουσα μέθοδος και χρήσιμη για τον Πολιτικό Μηχανικό. Είναι επίσης εφαρμόσιμη τόσο σε συστήματα ομογενών διαφορικών εξισώσεων όσο και σε συστήματα μη ομογενών διαφορικών εξισώσεων. (Στα τελευταία δεν είναι εφαρμόσιμη η μέθοδος της εκθετικής αντικατάστασης.) Απαιτεί όμως και μερικές απλές γνώσεις από τη Γραμμική Άλγεβρα, συγκεκριμένα από το κεφάλαιο των Ιδιοτιμών και Ιδιοδιανυσμάτων τετραγωνικών μητρώων  $\mathbf{A}$ . (Εδώ θεωρούμε μονάχα πραγματικά τετραγωνικά μητρώα  $\mathbf{A}$ .) Τις γνώσεις αυτές από τη Γραμμική Άλγεβρα τις αποκτήσαμε στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά Ι και τις υπενθυμίζουμε σύντομα στις επόμενες τρεις παραγράφους αυτής της ενότητας. Καλό είναι όμως ο αναγνώστης/η αναγνώστρια Πολιτικός Μηχανικός να ανατρέξει και στη βιβλιογραφία.<sup>1</sup>

### Α12.9.2. Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

Θεωρούμε ένα τετραγωνικό μητρώο  $\mathbf{A}$ , π.χ. το μητρώο διαστάσεων  $2 \times 2$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad (12.9.1)$$

που το ορίσαμε στην τελευταία σχέση (12.4.3) στο εκεί παράδειγμα συστήματος διαφορικών εξισώσεων. Για ένα τετραγωνικό μητρώο  $\mathbf{A}$  ορίζουμε τις *ιδιοτιμές* του (ή *χαρακτηριστικές τιμές* του)  $\lambda$  και τα αντίστοιχα *ιδιοδιανύσματα* του (ή *χαρακτηριστικά διανύσματα* του)  $\boldsymbol{\delta}$  μέσω της σχέσεως (με το  $T$  να δηλώνει *ανάστροφο* μητρώο ή διάνυσμα)

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\delta} = \lambda\boldsymbol{\delta} \quad \text{με} \quad \boldsymbol{\delta} = [\delta_1 \ \delta_2 \ \dots \ \delta_n]^T \equiv \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{Bmatrix}. \quad (12.9.2)$$

Ξαναγράφουμε την ίδια σχέση στη μορφή

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\delta} = \lambda\boldsymbol{\delta} \implies \mathbf{A}\boldsymbol{\delta} = \lambda\mathbf{I}_n\boldsymbol{\delta} \implies \mathbf{A}\boldsymbol{\delta} - \lambda\mathbf{I}_n\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0} \implies (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0} \quad (12.9.3)$$

με  $\mathbf{I}_n$  το αντίστοιχο μοναδιαίο μητρώο  $n \times n$  και επίσης  $\mathbf{0}$  το αντίστοιχο μηδενικό διάνυσμα στήλης (με  $n$  μηδενικά στοιχεία στη μοναδική στήλη του). Επειδή  $\boldsymbol{\delta} = [\delta_1 \ \delta_2 \ \dots \ \delta_n]^T$ , έχουμε καταλήξει σε ένα ομογενές γραμμικό σύστημα  $n$  αλγεβρικών εξισώσεων ως προς  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ . Για να έχει μη μηδενική λύση ( $\boldsymbol{\delta} \neq \mathbf{0}$ ) το σύστημα αυτό, θα πρέπει η ορίζουσα  $D = D(\lambda)$  των συντελεστών των αγνώστων  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  να είναι ίση με το μηδέν. Δηλαδή θα πρέπει να ισχύει η σχέση

$$D(\lambda) := \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n) = 0 \quad \text{με ισοδύναμη γραφή της τη} \quad D(\lambda) := |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n| = 0. \quad (12.9.4)$$

Φυσικά η ορίζουσα αυτή  $D(\lambda)$  είναι απλά ένα πολυώνυμο βαθμού  $n$  ως προς  $\lambda$ . Τη συμβολίζουμε συνήθως με  $p_n(\lambda) := D(\lambda)$  και την αποκαλούμε *χαρακτηριστικό πολυώνυμο* του μητρώου  $\mathbf{A}$ . Η αντίστοιχη εξίσωση  $p_n(\lambda) = 0$  καλείται ανάλογα *χαρακτηριστική εξίσωση* του ίδιου μητρώου  $\mathbf{A}$ . Οι ρίζες  $\lambda$  του χαρακτηριστικού πολυωνύμου (ή της χαρακτηριστικής εξισώσεως) είναι οι *ιδιοτιμές* (ή *χαρακτηριστικές τιμές*) του μητρώου  $\mathbf{A}$ . Πρόκειται για  $n$  συνολικά ιδιοτιμές (απλές ή πολλαπλές) λαμβάνοντας υπόψη και την πολλαπλότητα  $\rho$  της καθεμιάς τους. Επαναλαμβάνουμε λοιπόν τη χαρακτηριστική εξίσωση

$$p_n(\lambda) := D(\lambda) := \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n) = 0. \quad (12.9.5)$$

<sup>1</sup>Για παράδειγμα στο ενδιαφέρον διδακτικό σύγγραμμα: Μάρκελλος, Β. Β. (2000), *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*, Τόμος ΙΙ, Τεύχος 4: *Γραμμική Άλγεβρα, Εφαρμοσμένη Θεωρία Πινάκων*, Κεφάλαιο 3: *Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.



Για κάθε ιδιοτιμή  $\lambda_k$  είμαστε τώρα πια βέβαιοι πως το ομογενές σύστημα των  $n$  γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (12.9.3) έχει μία μη μηδενική λύση  $\delta = [\delta_1 \ \delta_2 \ \dots \ \delta_n]^T \neq \mathbf{0}$ . Μια τέτοια μη μηδενική (μη τετριμμένη) λύση καλείται **ιδιοδιάνυσμα** (ή **χαρακτηριστικό διάνυσμα**)  $\delta_k$  του τετραγωνικού μητρώου  $\mathbf{A}$  που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή του (ή χαρακτηριστική τιμή του)  $\lambda_k$ . Για να είμαστε ειλικρινείς, κάθε ιδιοδιάνυσμα  $\delta_k$  ( $\delta_k \neq \mathbf{0}$ ) ορίζεται με προσέγγιση σταθεράς  $c$  (με  $c \neq 0$ ), δηλαδή το διάνυσμα  $c\delta_k$  είναι εξίσου αποδεκτό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda_k$ .

Συνήθως μας αρκεί ένα μόνο από τα ιδιοδιανύσματα αυτά  $c\delta_k$ , όποιο τύχει να έχει υπολογισθεί από την αρχή ή καλύτερα αυτό που έχει ένα στοιχείο ίσο με 1 (συνχνά το μεγαλύτερο στοιχείο του) ή αυτό που έχει μέτρο ίσο με 1, δηλαδή  $|\delta_k| = 1$ . Ειδικά για τον Πολιτικό Μηχανικό σε ένα γενικότερο ιδιοδιάνυσμα  $\delta$  που αφορά στις οριζόντιες μετατοπίσεις των μαζών των πλακών ενός πολυώροφου κτιρίου με  $n$  ορόφους είναι συνηθισμένο η συνιστώσα του  $\delta_n$  (η οριζόντια μετατόπιση του τελευταίου ορόφου) να υποτίθεται ίση με 1:  $\delta_n = 1$ . Πρόκειται για μια γενικά πολύ καλή επιλογή του ιδιοδιανύσματος αυτού  $\delta$  κι αν μην έχει μοναδιαίο μέτρο. (Στο θέμα αυτό θα αναφερθούμε εκτενέστερα στο επόμενο Κεφάλαιο A13 σε εφαρμογή στη Δυναμική των Κατασκευών.)

▼ **Παράδειγμα A12.1:** Να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές  $\lambda_k$  και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα  $\delta_k$  του τετραγωνικού μητρώου  $\mathbf{A}$  (διαστάσεων  $2 \times 2$ ), που έχει ορισθεί στη σχέση (12.9.1).

**Λύση:** Πρώτα υπολογίζουμε τις δύο ιδιοτιμές (ή χαρακτηριστικές τιμές)  $\lambda_k$  του μητρώου  $\mathbf{A}$ . Αυτές είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξισώσεως (12.9.5), στο παρόν παράδειγμα

$$p_2(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_2) \equiv |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_2| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 4 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 \cdot 4 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 - 8$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda + 1)(\lambda - 5) = 0, \quad \text{οπότε} \quad \lambda_1 = -1 \quad \text{και} \quad \lambda_2 = 5. \quad (12.9.6)$$

Οι λύσεις αυτές της δευτεροβάθμιας χαρακτηριστικής εξισώσεως  $p_2(\lambda) = 0$  προέκυψαν εύκολα κι έτσι κι αλλιώς μας είναι γνωστές. Συγκεκριμένα έχουν προσδιορισθεί στη σχέση (12.7.42) για το ίδιο μητρώο  $\mathbf{A}$  από το εκεί χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $p_2(\mu)$  στη σχέση (12.7.41), το οποίο συμπίπτει με το εδώ χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $p_2(\lambda)$ . (Το ίδιο συμπίπτουν και οι οριζουσες των σχέσεων (12.7.40) και (12.9.6), που δίνουν τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα  $p_2(\mu)$  και  $p_2(\lambda)$  αντίστοιχα καθώς και τις αντίστοιχες χαρακτηριστικές εξισώσεις  $p_2(\mu) = 0$  και  $p_2(\lambda) = 0$ .) Διαθέτουμε λοιπόν για το μητρώο  $\mathbf{A}$  δύο ιδιοτιμές: τις  $\lambda_1 = -1$  και  $\lambda_2 = 5$ , εδώ και τις δύο πραγματικές και πολλαπλότητας  $\rho = 1$  (διακεκριμένες ιδιοτιμές). Αυτή είναι και η πιο ευνοϊκή περίπτωση στην πράξη!

Θα προσδιορίσουμε και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα  $\delta_1$  και  $\delta_2$  με βάση το ομογενές σύστημα των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (12.9.3). Αυτό παίρνει στο παρόν παράδειγμα τη μορφή

$$(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I}_2)\delta_k = \mathbf{0} \quad \implies \quad \begin{bmatrix} 1 - \lambda_k & 2 \\ 4 & 3 - \lambda_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{1k} \\ \delta_{2k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{με} \quad k = 1, 2, \quad (12.9.7)$$

επειδή έχουμε δύο ιδιοτιμές του τετραγωνικού μητρώου  $\mathbf{A}$ : τις  $\lambda_1 = -1$  και  $\lambda_2 = 5$ .

Ξεκινάμε με την πρώτη ιδιοτιμή: την ιδιοτιμή  $\lambda_1 = -1$  (για  $k = 1$ ). Τώρα το σύστημα των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (12.9.7) έχει μη μηδενική (μη τετριμμένη) λύση παίρνοντας τη μορφή

$$2\delta_{11} + 2\delta_{21} = 0 \quad \text{και} \quad 4\delta_{11} + 4\delta_{21} = 0, \quad \text{δηλαδή τελικά} \quad \delta_{11} + \delta_{21} = 0 \quad \implies \quad \delta_{21} = -\delta_{11}. \quad (12.9.8)$$

Επιλέγοντας  $\delta_{11} = 1$ , θα έχουμε  $\delta_{21} = -1$ . Έτσι παίρνουμε το πρώτο ιδιοδιάνυσμα  $\delta_1 = [1 \ -1]^T$ . Προφανώς και κάθε πολλαπλάσιό του  $c_1 \delta_1 = [c_1 \ -c_1]^T$  θα είναι και αυτό ιδιοδιάνυσμα που θα αντιστοιχεί στην πρώτη ιδιοτιμή  $\lambda_1 = -1$ . Εμείς πήραμε  $c_1 = 1$  αντί να πάρουμε κάποια άλλη τιμή της πολλαπλασιαστικής σταθεράς  $c_1$ . Ένα συγκεκριμένο ιδιοδιάνυσμα, εδώ το  $\delta_1$ , μας φθάνει!

Με όμοιο τρόπο συνεχίζουμε με τη δεύτερη ιδιοτιμή  $\lambda_2 = 5$  (για  $k = 2$ ) του ίδιου μητρώου  $\mathbf{A}$ . Το σύστημα των δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (12.9.7) παίρνει τώρα τη μορφή

$$-4\delta_{12} + 2\delta_{22} = 0 \quad \text{και} \quad 4\delta_{12} - 2\delta_{22} = 0, \quad \text{δηλαδή τελικά} \quad 2\delta_{12} - \delta_{22} = 0 \quad \implies \quad \delta_{22} = 2\delta_{12}. \quad (12.9.9)$$

Επιλέγοντας  $\delta_{12} = 1$ , θα έχουμε  $\delta_{22} = 2$ . Έτσι παίρνουμε το δεύτερο ιδιοδιάνυσμα  $\delta_2 = [1 \ 2]^T$ . Σίγουρα ξανά και κάθε πολλαπλασίο του  $c_2 \delta_2 = [c_2 \ 2c_2]^T$  θα είναι και αυτό ένα ιδιοδιάνυσμα που θα αντιστοιχεί στη δεύτερη ιδιοτιμή  $\lambda_2 = 5$ . Εμείς πήραμε πάλι  $c_2 = 1$  κι αυτό μας είναι αρκετό!

Επομένως υπολογίσαμε τα δύο ιδιοδιανύσματα  $\delta_1$  και  $\delta_2$  (με προσέγγιση πολλαπλασιαστικών σταθερών  $c_1$  και  $c_2$  αντίστοιχα). Τα ξαναγράφουμε μαζί σε ένα τετραγωνικό μητρώο  $\mathbf{T} = [\delta_1 \ \delta_2]$  με πρώτη στήλη στο  $\mathbf{T}$  το πρώτο ιδιοδιάνυσμα  $\delta_1$  και δεύτερη στήλη το δεύτερο ιδιοδιάνυσμα  $\delta_2$ :

$$\delta_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}, \quad \text{οπότε} \quad \mathbf{T} = [\delta_1 \ \delta_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (12.9.10)$$

Το μητρώο αυτό  $\mathbf{T}$  θα μας φανεί πολύ χρήσιμο στην παρούσα ενότητα στη μέθοδο της διαγωνιοποίησης για την επίλυση συστημάτων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως. ▲

### A12.9.3. Διαγωνιοποίηση τετραγωνικών μητρώων

Θεωρούμε και πάλι το τετραγωνικό μητρώο  $\mathbf{A}$  διαστάσεων  $n \times n$ . Ένα πολύ σημαντικό θεώρημα της Γραμμικής Άλγεβρας μας επιτρέπει τη **διαγωνιοποίηση** του μητρώου αυτού. Αυτή θα μας φανεί χρήσιμη για την επίλυση γραμμικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων. Συγκεκριμένα ισχύει ότι:

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ:** Θεωρούμε ένα τετραγωνικό μητρώο  $\mathbf{A}$  διαστάσεων  $n \times n$  το οποίο έχει  $n$  απλές (διακεκριμένες) ιδιοτιμές  $\lambda_k$ . Θεωρούμε και το τετραγωνικό μητρώο  $\mathbf{T}$  (επίσης διαστάσεων  $n \times n$ ) με στήλες τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα  $\delta_k$  του τετραγωνικού μητρώου  $\mathbf{A}$ . Τότε αυτά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και επομένως υπάρχει και το αντίστροφο μητρώο  $\mathbf{T}^{-1}$  του τετραγωνικού μητρώου  $\mathbf{T}$ . Υπ' αυτές τις συνθήκες ισχύει η ακόλουθη ενδιαφέρουσα σχέση διαγωνιοποίησης του μητρώου  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \mathbf{\Lambda} \quad \text{με} \quad \mathbf{\Lambda} := \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad (12.9.11)$$

το διαγώνιο τετραγωνικό μητρώο των ιδιοτιμών  $\lambda_k$  (που εδώ έχουν υποθεθεί απλές, διακεκριμένες), δηλαδή το διαγώνιο μητρώο με στοιχεία της διαγωνίου του τις  $n$  απλές ιδιοτιμές  $\lambda_k$  του μητρώου  $\mathbf{A}$ .

Με τον τρόπο αυτό το τετραγωνικό μητρώο  $\mathbf{A}$  στο αριστερό μέλος έχει διαγωνιοποιηθεί, αφού το τετραγωνικό μητρώο  $\mathbf{\Lambda}$  των ιδιοτιμών  $\lambda_k$  στο δεξιό μέλος είναι διαγώνιο. Πάρα πολύ ωραία!

▼ **Παράδειγμα A12.2:** Με βάση το προηγούμενο θεώρημα ζητείται τώρα να διαγωνιοποιηθεί το τετραγωνικό μητρώο  $\mathbf{A}$  της σχέσεως (12.9.1).

**Λύση:** Από το προηγούμενο Παράδειγμα A12.1 έχουμε ήδη υπολογίσει τόσο (α) τις δύο ιδιοτιμές  $\lambda_1 = -1$  και  $\lambda_2 = 5$  (δύο τελευταίες σχέσεις (12.9.6)) του μητρώου  $\mathbf{A}$  όσο και (β) τα δύο αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα  $\delta_1 = [1 \ -1]^T$  και  $\delta_2 = [1 \ 2]^T$  (δύο πρώτες σχέσεις (12.9.10)) εννοείται με προσέγγιση πολλαπλασιαστικής σταθεράς. Υπολογίσαμε επίσης (στην τρίτη σχέση (12.9.10)) και το τετραγωνικό μητρώο  $\mathbf{T}$  με στήλες τα ιδιοδιανύσματα αυτά  $\delta_1$  και  $\delta_2$ . Χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία προσδιορίζουμε τώρα και το αντίστροφο μητρώο  $\mathbf{T}^{-1}$  του μητρώου  $\mathbf{T}$ . Έχουμε

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{οπότε} \quad |\mathbf{T}| = \det \mathbf{T} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) = 2 + 1 = 3. \quad (12.9.12)$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε και το **προσαρτημένο** μητρώο  $\text{adj} \mathbf{T}$  του μητρώου  $\mathbf{T}$ , δηλαδή το **αντίστροφο μητρώο των συμπαραγόντων** (ή **συμπολλαπλασιαστών**) του μητρώου  $\mathbf{T}$ . Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα και το αντίστροφο μητρώο  $\mathbf{T}^{-1}$ . Συγκεκριμένα προκύπτει αμέσως ότι

$$\text{adj} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{οπότε} \quad \mathbf{T}^{-1} = \frac{\text{adj} \mathbf{T}}{\det \mathbf{T}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (12.9.13)$$

Εύκολα επαληθεύουμε (με πολλαπλασιασμό) το αποτέλεσμα αυτό για το αντίστροφο μητρώο  $\mathbf{T}^{-1}$ :

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{T} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{I}_2. \quad (12.9.14)$$

Το τελικό μας καθήκον είναι να σχηματίσουμε το γινόμενο  $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$  στο προηγούμενο σημαντικό θεώρημα: σχέση (12.9.11). Προκύπτει εύκολα (με δύο απλούς πολλαπλασιασμούς μητρώων) ότι

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 15 \end{bmatrix} \quad (12.9.15)$$

και τελικά

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{\Lambda}, \quad (12.9.16)$$

αφού οι δύο ιδιοτιμές του μητρώου  $\mathbf{A}$  είναι οι  $\lambda_1 = -1$  και  $\lambda_2 = 5$ . Διαγωνιοποιήθηκε λοιπόν το τετραγωνικό μητρώο  $\mathbf{A}$ . Άρα επαληθεύθηκε στο συγκεκριμένο αυτό παράδειγμα το προηγούμενο τόσο σημαντικό θεώρημα για τη διαγωνιοποίηση τετραγωνικών μητρώων, εδώ του μητρώου  $\mathbf{A}$ . ▲

#### A12.9.4. Διαγωνιοποίηση πραγματικών συμμετρικών μητρώων

Πολύ απλούστερη είναι η κατάσταση με τη διαγωνιοποίηση πραγματικών **συμμετρικών** μητρώων, δηλαδή τετραγωνικών μητρώων  $\mathbf{A}_s$  για τα οποία για όλα τους τα στοιχεία ισχύει η σχέση

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \text{και επομένως} \quad \mathbf{A}_s^T = \mathbf{A}_s. \quad (12.9.17)$$

Επομένως ένα συμμετρικό μητρώο  $\mathbf{A}_s$  είναι ίσο με το **ανάστροφο** του μητρώο  $\mathbf{A}_s^T$ . Από τη Γραμμική Άλγεβρα γνωρίζουμε (ή τουλάχιστον πρέπει να γνωρίζουμε ...) τις εξής δύο πάρα πολύ αξιόλογες ιδιότητες των πραγματικών συμμετρικών μητρώων  $\mathbf{A}_s$ :

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ:** Οι ιδιοτιμές  $\lambda_k$  ενός πραγματικού συμμετρικού μητρώου  $\mathbf{A}_s$  είναι όλες τους πραγματικές είτε είναι απλές είτε είναι πολλαπλές. Φυσικά και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα  $\mathbf{\delta}_k$  είναι πραγματικά. Επιπλέον δύο ιδιοδιανύσματα  $\mathbf{\delta}_r$  και  $\mathbf{\delta}_s$  που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές  $\lambda_r$  και  $\lambda_s$  είναι **ορθογώνια**, δηλαδή  $\mathbf{\delta}_r^T \mathbf{\delta}_s = \mathbf{\delta}_s^T \mathbf{\delta}_r = 0$  (με διανυσματικό συμβολισμό:  $\mathbf{\delta}_r \cdot \mathbf{\delta}_s = \mathbf{\delta}_s \cdot \mathbf{\delta}_r = 0$ ).

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ:** Εάν οι ιδιοτιμές  $\lambda_k$  ενός πραγματικού συμμετρικού μητρώου  $\mathbf{A}_s$  είναι όλες τους απλές (διακεκριμένες μεταξύ τους), τότε το συμμετρικό αυτό μητρώο  $\mathbf{A}_s$  διαγωνιοποιείται ως εξής:

$$\mathbf{T}^T \mathbf{A}_s \mathbf{T} = \mathbf{A}_d \quad \text{με} \quad \mathbf{T} = [\mathbf{\delta}_1 \quad \mathbf{\delta}_2 \quad \dots \quad \mathbf{\delta}_n] \quad (12.9.18)$$

και με  $\mathbf{A}_d$  ένα διαγώνιο μητρώο. Επαναλαμβάνουμε ότι το μητρώο  $\mathbf{T}$  δηλώνει πάλι το τετραγωνικό μητρώο των ιδιοδιανυσμάτων  $\mathbf{\delta}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) του πραγματικού συμμετρικού μητρώου  $\mathbf{A}_s$ . Εάν υπάρχουν και πολλαπλές ιδιοτιμές  $\lambda_k$  με πολλαπλότητες  $\rho_k > 1$ , πάλι ισχύει αυτή η σχέση διαγωνιοποίησης (12.9.18). Πρέπει βέβαια προηγουμένως να βρεθούν  $\rho_k$  **ορθογώνια** (που είναι προφανώς και γραμμικά ανεξάρτητα) ιδιοδιανύσματα  $\mathbf{\delta}_{km}$  (με  $m = 1, 2, \dots, \rho_k$ ) για καθεμιά από τις πολλαπλές ιδιοτιμές  $\lambda_k$ . Αυτό είναι πάντοτε εφικτό για πραγματικά συμμετρικά μητρώα  $\mathbf{A}_s$ .

Άρα το ίδιο χρήσιμο θεώρημα με μια πολύ συνοπτικότερη διατύπωση:

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ:** Κάθε πραγματικό συμμετρικό μητρώο  $\mathbf{A}_s$  διαγωνιοποιείται πάντοτε (ακόμη κι αν έχει πολλαπλές ιδιοτιμές) με την ισχύ της σχέσεως διαγωνιοποίησης (12.9.18). Βέβαια τα  $n$  ιδιοδιανύσματα  $\mathbf{\delta}_1, \mathbf{\delta}_2, \dots, \mathbf{\delta}_n$  που σχηματίζουν το μητρώο  $\mathbf{T}$  πρέπει να είναι ορθογώνια μεταξύ τους.

Άρα με τα προηγούμενα θεωρήματα είμαστε 100% βέβαιοι για ένα πραγματικό συμμετρικό μητρώο  $\mathbf{A}_s$  με απλές (διακεκριμένες) ιδιοτιμές  $\lambda_k$  (α) ότι αυτές είναι πραγματικές και (β) ότι επιτρέπουν τη διαγωνιοποίηση του μητρώου  $\mathbf{A}_s$  με τη χρήση του μητρώου  $\mathbf{T}$  των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων  $\mathbf{\delta}_k$ . Ανάλογη (αλλά υπολογιστικά λίγο δυσκολότερη, πρακτικά σπανιότερη και θα την αμελήσουμε) είναι η κατάσταση και στην περίπτωση υπάρξεως πολλαπλών ιδιοτιμών. Θαυμάσια!

Και λέμε θαυμάσια (χωρίς μάλιστα κανέναν ενδοιασμό, με σιγουριά!). Το λέμε, επειδή τα δύο βασικά μητρώα του Πολιτικού Μηχανικού, το **μητρώο μάζας**  $\mathbf{M}$  και το **μητρώο δυσκαμψίας**  $\mathbf{K}$  είναι και τα δυο τους συμμετρικά μητρώα με  $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}$  και  $\mathbf{K}^T = \mathbf{K}$ . Όμως αυτά θα τα εξετάσουμε

καλύτερα στο επόμενο Κεφάλαιο Α13: στο κεφάλαιο των εφαρμογών στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Εδώ προέχουν η θεωρία και μερικά απλά παραδείγματα για την κατανόησή της!

▼ **Παράδειγμα Α12.3:** Με βάση τα δύο προηγούμενα θεωρήματα ζητείται να διαγωνιστοποιηθεί το πραγματικό συμμετρικό μητρώο

$$\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}. \quad (12.9.19)$$

Σημειώνουμε ότι το συμμετρικό αυτό μητρώο  $\mathbf{A}_s$  διαφέρει από το μη συμμετρικό μητρώο  $\mathbf{A}$  της σχέσεως (12.9.1) μόνο στο στοιχείο του  $a_{s,12} = 4$  (αντί για  $a_{12} = 2$ ), που το κατέστησε συμμετρικό.

**Λύση:** Στη δουλειά μας τώρα! Ακριβώς όπως και στο αμέσως προηγούμενο Παράδειγμα Α12.2, με τη χρήση της χαρακτηριστικής εξίσωσης (12.9.5):  $p_2(\lambda) = 0$ , προσδιορίζουμε και τώρα τις δύο άγνωστες ιδιοτιμές  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  για το παρόν συμμετρικό μητρώο  $\mathbf{A}_s$ . Στη συνέχεια προσδιορίζουμε και τα δύο αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα  $\boldsymbol{\delta}_1$  και  $\boldsymbol{\delta}_2$  εννοείται με προσέγγιση μη μηδενικών πολλαπλασιαστικών σταθερών  $c_1$  και  $c_2$  αντίστοιχα. (Ποτέ δεν προσδιορίζονται επακριβώς τα ιδιοδιανύσματα  $\boldsymbol{\delta}_k$ ! Απλά **κανονικοποιούνται** με κάποιον τρόπο ο οποίος να μας διευκολύνει όμως στους παραπέρα υπολογισμούς μας, π.χ. με ένα στοιχείο τους ίσο με τη μονάδα.) Έτσι βρίσκουμε

$$\lambda_1 = 2 - \sqrt{17} \approx -2.12311 \quad \text{και} \quad \lambda_2 = 2 + \sqrt{17} \approx 6.12311 \quad (12.9.20)$$

για τις δύο ιδιοτιμές  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$ . Ευτυχώς είναι απλές (διακεκριμένες, πολλαπλότητας  $\rho = 1$ ). Επομένως είμαστε πανέτοιμοι να εφαρμόσουμε το δεύτερο πιο πάνω θεώρημα, συγκεκριμένα τη θεμελιώδη σχέση διαγωνιστοποίησης (12.9.18):  $\mathbf{T}^T \mathbf{A}_s \mathbf{T} = \mathbf{A}_d$  για το πραγματικό συμμετρικό μητρώο  $\mathbf{A}_s$ .

Τώρα τα δύο αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα  $\boldsymbol{\delta}_1$  και  $\boldsymbol{\delta}_2$  προκύπτουν να έχουν τις τιμές

$$\boldsymbol{\delta}_1 = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{4}(1 + \sqrt{17}) \\ 1 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} -1.28078 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\delta}_2 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{17}) \\ 1 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 0.78078 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (12.9.21)$$

Η **κανονικοποίηση** έγινε εδώ με δεύτερο στοιχείο των δύο ιδιοδιανυσμάτων  $\boldsymbol{\delta}_1$  και  $\boldsymbol{\delta}_2$  τη μονάδα. Άρα το μέτρο των ιδιοδιανυσμάτων αυτών δεν είναι 1:  $|\boldsymbol{\delta}_1| > 1$  και  $|\boldsymbol{\delta}_2| > 1$ . Δεν πειράζει όμως: αν είχαμε ένα διάφορο ιδεατό κτίριο, θα ήταν σαν να είχαμε επιλέξει στα ιδιοδιανύσματα αυτά  $\boldsymbol{\delta}_1$  και  $\boldsymbol{\delta}_2$  την οριζόντια μετατόπιση του δεύτερου ορόφου ίση με τη μονάδα. Αυτό κάνει συνήθως και ο Πολιτικός Μηχανικός, μόνο που σε ένα πρόβλημα κτιρίου έχουμε γενικευμένα ιδιοδιανύσματα: τις **ιδιομορφές** (σαφέστερα τις **ιδιομορφές ταλαντώσεως**) του κτιρίου. (Οι ιδιομορφές ενός κτιρίου είναι ιδιαίτερα σημαντικές για τη **δυναμική συμπεριφορά** του, π.χ. κατά τη διάρκεια ενός ισχυρού ανέμου ή ενός σεισμού.) Αυτά όμως θα τα δούμε με λεπτομέρειες στο επόμενο Κεφάλαιο Α13.

Τώρα με βάση τα δύο πιο πάνω ιδιοδιανύσματα  $\boldsymbol{\delta}_1$  και  $\boldsymbol{\delta}_2$  σχηματίζουμε αμέσως και το σχετικό πραγματικό τετραγωνικό (όχι όμως και συμμετρικό) μητρώο  $\mathbf{T}$  με στήλες τα ιδιοδιανύσματα αυτά:

$$\mathbf{T} = [\boldsymbol{\delta}_1 \quad \boldsymbol{\delta}_2] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}(1 + \sqrt{17}) & \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{17}) \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -1.28078 & 0.78078 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (12.9.22)$$

Τώρα για τη διαγωνιστοποίηση του πραγματικού συμμετρικού μητρώου  $\mathbf{A}_s$  στο παρόν παράδειγμα, σχέση (12.9.19), θα μπορούσαμε βέβαια να υπολογίσουμε το αντίστροφο μητρώο  $\mathbf{T}^{-1}$  του μητρώου  $\mathbf{T}$  (σχέση (12.9.22)) των ιδιοδιανυσμάτων  $\boldsymbol{\delta}_{1,2}$ . Αυτός ήταν στ' αλήθεια κι ο τρόπος εργασίας μας στο προηγούμενο Παράδειγμα Α12.2 με το μη συμμετρικό μητρώο  $\mathbf{A}$  ( $\mathbf{A}^T \neq \mathbf{A}$ ) εκεί, όπου είχαμε χρησιμοποιήσει τη γενική σχέση διαγωνιστοποίησης (12.9.11). Εδώ όμως μας αρκεί να πάρουμε το ανάστροφο μητρώο  $\mathbf{T}^T$  αντί για το αντίστροφο μητρώο  $\mathbf{T}^{-1}$  και η εναλλακτική αυτή δυνατότητα είναι δίχως καμία αμφιβολία υπολογιστικά απλούστερη. Ασφαλώς από την αμέσως παραπάνω σχέση (12.9.22) βρίσκουμε για το ανάστροφο μητρώο  $\mathbf{T}^T$

$$\mathbf{T}^T = [\boldsymbol{\delta}_1 \quad \boldsymbol{\delta}_2]^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}(1 + \sqrt{17}) & 1 \\ \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{17}) & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -1.28078 & 1 \\ 0.78078 & 1 \end{bmatrix}. \quad (12.9.23)$$

Σημειώνουμε βέβαια ότι  $\mathbf{T}^T \neq \mathbf{T}^{-1}$  στην παρούσα περίπτωση: το ανάστροφο μητρώο  $\mathbf{T}^T$  δεν ισούται με το αντίστροφο μητρώο  $\mathbf{T}^{-1}$  για το μητρώο των ιδιοδιανυσμάτων  $\mathbf{T} = [\boldsymbol{\delta}_1 \ \boldsymbol{\delta}_2]$ . Δηλαδή το μητρώο των ιδιοδιανυσμάτων  $\mathbf{T}$  δεν είναι **ορθογώνιο** μητρώο:  $\mathbf{T}^T \neq \mathbf{T}^{-1}$ . Πραγματικά έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^T \mathbf{T} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}(1 + \sqrt{17}) & 1 \\ \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{17}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}(1 + \sqrt{17}) & \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{17}) \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{8}(17 + \sqrt{17}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{8}(17 - \sqrt{17}) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2.64039 & 0 \\ 0 & 1.60961 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{I}_2. \end{aligned} \quad (12.9.24)$$

Αυτό συνέβη, γιατί δεν πήραμε τα **κανονικοποιημένα** ιδιοδιανύσματα  $\boldsymbol{\delta}_1$  και  $\boldsymbol{\delta}_2$  να είναι μοναδιαία. Όμως τούτο το γεγονός ( $\mathbf{T}^T \neq \mathbf{T}^{-1}$ ) καμία συνέπεια δεν έχει στη διαγωνιοποίηση του αρχικού συμμετρικού μητρώου μας  $\mathbf{A}_s$ . Δεν απαιτείται από το δεύτερο θεώρημα της παρούσας παραγράφου!

Εκτελούμε τώρα τους δύο πολλαπλασιασμούς μητρώων στη σχέση (12.9.18):  $\mathbf{T}^T \mathbf{A}_s \mathbf{T} = \mathbf{A}_d$  του ίδιου θεωρήματος. Έτσι βρίσκουμε το διαγώνιο μητρώο  $\mathbf{A}_d$

$$\mathbf{A}_d = \mathbf{T}^T \mathbf{A}_s \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8}(17 - 15\sqrt{17}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{8}(17 + 15\sqrt{17}) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -5.60582 & 0 \\ 0 & 9.85582 \end{bmatrix} \quad (12.9.25)$$

και δε μας πειράζει καθόλου που δεν είναι το διαγώνιο μητρώο των ιδιοτιμών  $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1 \ \lambda_2)$ . Ας μην έχουμε καμία τύψη συνειδήσεως. Στ' αλήθεια δε μας πειράζει! Η διαγωνιοποίηση του συμμετρικού μητρώου  $\mathbf{A}_s$  που επιδιώκαμε έχει πετύχει έτσι κι αλλιώς, όπως ήταν ο στόχος μας! ▲

► **Παρατήρηση A12.8:** Τονίζουμε ξανά και με έμφαση ότι ο Πολιτικός Μηχανικός, όταν έχει πραγματικά συμμετρικά μητρώα (όπως είναι τα μητρώα μάζας  $\mathbf{M}$  και δυσκαμψίας  $\mathbf{K}$  στις κατασκευές του), πρέπει να εκμεταλλεύεται τη συμμετρία τους κατά τη διαγωνιοποίηση. Η διαγωνιοποίηση γίνεται, απλά ώστε να μπορέσει το σχετικό **συζευγμένο** σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων να αναχθεί σε **ασύζευκτο**, δηλαδή σε ξεχωριστές διαφορικές εξισώσεις (με μία άγνωστη συνάρτηση η καθεμιά τους). Αυτό θα το δούμε στην επόμενη παράγραφο αυτής της ενότητας.

► **Παρατήρηση A12.9:** Σ' αυτήν εδώ την ενότητα ασχολούμαστε με συστήματα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές κυρίως πρώτης τάξεως. Αντίθετα ο Πολιτικός Μηχανικός συναντάει στις κατασκευές του συστήματα δευτέρας τάξεως λόγω της ισχύος του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα. Η αναγωγή ενός συστήματος γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές δευτέρας τάξεως σε πρώτης είναι απόλυτα εφικτή, αλλά δε συνιστάται, γιατί απαιτεί κάποια σκέψη και υπολογισμούς και (το χειρότερο) οδηγεί σε σύστημα διπλάσιου αριθμού διαφορικών εξισώσεων. Με τις σκέψεις αυτές η διαδικασία αυτή γενικά αποφεύγεται (όχι όμως πάντοτε: χρησιμοποιείται κυρίως κατά τη χρήση αριθμητικών προγραμμάτων) από τον Πολιτικό Μηχανικό, που είναι μάλιστα απόλυτα δικαιολογημένος σ' αυτό. Εντούτοις, από την άλλη όψη του νομίσματος, η διαγωνιοποίηση συστημάτων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξεως απαιτεί και μια μικρή γενίκευση των εννοιών των ιδιοτιμών  $\lambda_k$  και των ιδιοδιανυσμάτων  $\boldsymbol{\delta}_k$ . Τη γενίκευση αυτή του σχετικού **προβλήματος ιδιοτιμών** (ή απλούστερα **ιδιοπροβλήματος**) θα την κάνουμε στο επόμενο Κεφάλαιο A13 με έντονη έμφαση στις κατασκευές του Πολιτικού Μηχανικού. Μάλιστα με τις βάσεις τις οποίες έχουμε αποκτήσει στη Γραμμική Άλγεβρα (αλλά και σε τούτη 'δώ την ενότητα) η γενίκευση αυτή δε θα μας φανεί καθόλου μα καθόλου δύσκολη. *Το υποσχόμαστε αυτό στον αναγνώστη και στην αναγνώστρια Πολιτικό Μηχανικό!* Απλά χρειάζεται λίγη υπομονή!

### A12.9.5. Αποσύζευξη συστήματος γραμμικών διαφορικών εξισώσεων

Είμαστε τώρα πια απόλυτα έτοιμοι για την **αποσύζευξη** ενός γενικά μη ομογενούς συστήματος γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως και με σταθερούς συντελεστές. Ένα σύστημα  $n$

τέτοιων εξισώσεων (γενικά μη ομογενών: οι ομογενείς είναι ειδική περίπτωση) με άγνωστες συναρτήσεις (εξαρτημένες μεταβλητές) τις συναρτήσεις  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$  (η ανεξάρτητη μεταβλητή  $t$  παριστάνει συνήθως το χρόνο στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού) έχει τη γενική μητρική μορφή

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t) + \mathbf{g}(t) \quad \text{και συντομότερα} \quad \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{g} \quad (12.9.26)$$

με το  $\mathbf{A}$  σταθερό πραγματικό τετραγωνικό μητρώο διαστάσεων  $n \times n$  και το  $\mathbf{g}(t)$  γνωστό διάνυσμα στήλης. Υποτίθεται βέβαια ότι το μητρώο αυτό  $\mathbf{A}$  δεν είναι διαγώνιο. Αν ήταν (τί ωραία!), δε θα υπήρχε **σύζευξη** μεταξύ των διαφορικών αυτών εξισώσεων. Θα ήσαν ανεξάρτητες διαφορικές εξισώσεις και θα τις λύναμε με τις γνωστές μας μεθόδους από τα Κεφάλαια Α3 και Α5. Τώρα όμως;

Τώρα μπορούμε να εφαρμόσουμε μία από τις μεθόδους αυτού του Κεφαλαίου Α12: (α) τη μέθοδο της απαλοιφής της Ενότητας Α12.5 ή (β) τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace της Ενότητας Α12.6 ή (γ) τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως της προπροηγούμενης Ενότητας Α12.7 (μόνο εάν  $\mathbf{g}(t) \equiv \mathbf{0}$ ). Όχι όμως και τη μέθοδο της τριγωνομετρικής αντικαταστάσεως της προηγούμενης Ενότητας Α12.8. Αυτή είναι εξειδικευμένη για συστήματα ομογενών διαφορικών εξισώσεων της μορφής  $\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{A}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$  με τη δεύτερη παράγωγο  $\ddot{\mathbf{u}}(t)$  και όχι την πρώτη  $\dot{\mathbf{u}}(t)$ .

Και τούτη 'δώ η ενότητα; Στην Ενότητα αυτή Α12.9 θα εφαρμόσουμε μια κάπως διαφορετική μέθοδο επιλύσεως του ίδιου ακριβώς συστήματος γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως:  $\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t) + \mathbf{g}(t)$ . Αυτή είναι η **μέθοδος της διαγωνιοποίησης** (ή **αποσυζεύξεως**) και θα μας οδηγήσει σ' ένα αποσυζευγμένο σύστημα αντίστοιχων διαφορικών εξισώσεων της μορφής

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{A}_d\mathbf{v}(t) + \mathbf{h}(t) \quad \text{και συντομότερα} \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{A}_d\mathbf{v} + \mathbf{h} \quad (12.9.27)$$

με  $\mathbf{h}(t)$  πάλι διάνυσμα στήλης, δηλαδή  $\mathbf{h}(t) = [h_1(t) \ h_2(t) \ \dots \ h_n(t)]^T$ . Τώρα όμως στο δεξιό μέλος το μητρώο  $\mathbf{A}_d$  είναι διαγώνιο μητρώο διαστάσεων  $n \times n$ . Για να δούμε πώς επιτυγχάνεται αυτό ...

Εύκολα, πολύ εύκολα με τις γνώσεις που έχουμε αποκομίσει από τις τρεις προηγούμενες παραγράφους αυτής εδώ της Ενότητας Α12.9. Ξεκινάμε λοιπόν αμέσως χρησιμοποιώντας τη «γλώσσα» των μητρώων. Η βασική ιδέα στην παρούσα μέθοδο της διαγωνιοποίησης (ή αποσυζεύξεως) του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (12.9.26) είναι απλά η αλλαγή των αγνώστων συναρτήσεων (ή εξαρτημένων μεταβλητών) από  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$  σε  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ . (Η ανεξάρτητη μεταβλητή  $t$  παραμένει η ίδια!) Αυτό θα το κάνουμε με ένα μετασχηματισμό της μορφής  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{B}\mathbf{v}(t)$  με το  $\mathbf{B}$  να δηλώνει ένα σταθερό τετραγωνικό μητρώο  $n \times n$ . Και ποιο πρέπει να είναι το μητρώο αυτό  $\mathbf{B}$ ;

Μα από ό,τι ήδη μάθαμε στην προπροηγούμενη Παράγραφο Α12.9.3 για τη διαγωνιοποίηση τετραγωνικών μητρώων  $\mathbf{A}$  το μητρώο  $\mathbf{B}$  πρέπει να είναι το μητρώο  $\mathbf{T} = [\boldsymbol{\delta}_1 \ \boldsymbol{\delta}_2 \ \dots \ \boldsymbol{\delta}_n]$  των  $n$  γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων  $\boldsymbol{\delta}_k$  του μητρώου  $\mathbf{A}$ , δηλαδή  $\mathbf{B} = \mathbf{T}$ . Γενικά κάνουμε όμως την υπόθεση ότι το μητρώο  $\mathbf{A}$  έχει  $n$  απλές (διακεκριμένες μεταξύ τους, διαφορετικές ανά δύο) ιδιοτιμές  $\lambda_k$  (με  $k = 1, 2, \dots, n$ ) και τη θεωρούμε πως ισχύει κι εδώ. Άρα ορίζουμε τις νέες άγνωστες συναρτήσεις  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$  μέσω της μητρικής σχέσεως (σχέσεως η οποία είναι γραμμένη με μητρώα)

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{T}\mathbf{v}(t), \quad \text{οπότε} \quad \dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{T}\dot{\mathbf{v}}(t), \quad (12.9.28)$$

μια που το μητρώο  $\mathbf{T}$  είναι σταθερό. Με την αλλαγή αυτή αγνώστων συναρτήσεων το αρχικό σύστημα των μη ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (12.9.26) παίρνει τώρα τη νέα μορφή

$$\mathbf{T}\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{v}(t) + \mathbf{g}(t) \quad \text{και συντομότερα} \quad \mathbf{T}\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{v} + \mathbf{g}. \quad (12.9.29)$$

Δεν είναι ακόμη διαγωνιοποιημένη, αποσυζευγμένη η μορφή αυτή. Απαιτείται κι ένα τελευταίο και λίγο πολύ προφανές βήμα: ο πολλαπλασιασμός από τα αριστερά της παραπάνω εξισώσεως επί το αντίστροφο μητρώο  $\mathbf{T}^{-1}$  του μητρώου  $\mathbf{T}$  των ιδιοδιανυσμάτων  $\boldsymbol{\delta}_k$ . (Και υπάρχει βέβαια το αντίστροφο αυτό μητρώο  $\mathbf{T}^{-1}$ , επειδή οι ιδιοτιμές  $\lambda_k$  του μητρώου  $\mathbf{A}$  έχουν υποθεθεί όλες απλές.

Άρα τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα  $\mathbf{d}_k$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και το μητρώο τους  $\mathbf{T}$  αντιστρέφεται.) Επομένως με τον πολλαπλασιασμό αυτό επί  $\mathbf{T}^{-1}$  του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (12.9.29) (με τις νέες άγνωστες συναρτήσεις  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$  σ' αυτές) παίρνουμε σχεδόν τελικά

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{v}(t) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}(t) \quad \text{και συντομότερα} \quad \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{v} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}. \quad (12.9.30)$$

Τώρα πια δε μας απομένει παρά να παρατηρήσουμε απλά ότι

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \mathbf{I}_n \quad \text{και επίσης ότι} \quad \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{\Lambda} \quad (12.9.31)$$

εξαιτίας της τόσο σημαντικής μητρικής σχέσεως (12.9.11) στο θεώρημα της Παραγράφου A12.9.3, την οποία κι επαναλάβουμε εδώ. Στην παραπάνω σχέση τα σύμβολα  $\mathbf{I}_n$  και  $\mathbf{\Lambda}$  δηλώνουν δύο γνωστά μας διαγώνια μητρώα: το μοναδιαίο μητρώο  $\mathbf{I}_n$  και το διαγώνιο μητρώο  $\mathbf{\Lambda}$  των ιδιοτιμών  $\lambda_k$  του μητρώου μας  $\mathbf{A}$ . (Και τα δύο είναι βέβαια διαστάσεων  $n \times n$ .) Με τις δύο αυτές σχέσεις (12.9.31) η τελική μορφή του πιο πάνω συστήματος των  $n$  διαφορικών εξισώσεων (12.9.30) είναι η εξής:

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{\Lambda}\mathbf{v}(t) + \mathbf{h}(t) \quad \text{και συντομότερα} \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{v} + \mathbf{h} \quad \text{με} \quad \mathbf{h}(t) := \mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}(t). \quad (12.9.32)$$

Ας τη γράψουμε και λίγο αναλυτικότερα

$$\begin{Bmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \dot{v}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{v}_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ \vdots \\ h_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda_1 v_1(t) \\ \lambda_2 v_2(t) \\ \vdots \\ \lambda_n v_n(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ \vdots \\ h_n(t) \end{Bmatrix} \quad (12.9.33)$$

έχοντας κάνει μάλιστα και τον πολλαπλασιασμό μητρώου επί διάνυσμα στήλης στο δεξιό μέλος. Μια ακόμη πιο αναλυτική γραφή κι έχουμε επιτέλους τελειώσει την εργασία μας, «ξεμπερδέψαμε»:

$$\left. \begin{Bmatrix} \dot{v}_1(t) = \lambda_1 v_1(t) + h_1(t), \\ \dot{v}_2(t) = \lambda_2 v_2(t) + h_2(t), \\ \vdots \\ \dot{v}_n(t) = \lambda_n v_n(t) + h_n(t) \end{Bmatrix} \right\} \begin{array}{l} \text{και για το αντίστοιχο ομογενές} \\ \text{σύστημα διαφορικών εξισώσεων} \\ \text{με } \mathbf{g}(t) \equiv \mathbf{0}, \text{ οπότε και } \mathbf{h}(t) \equiv \mathbf{0}: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \dot{v}_1(t) = \lambda_1 v_1(t), \\ \dot{v}_2(t) = \lambda_2 v_2(t), \\ \vdots \\ \dot{v}_n(t) = \lambda_n v_n(t). \end{array} \right. \quad (12.9.34)$$

Ίσως δεν πιστεύουμε ακόμη τα μάτια μας! Λάθος μας αυτό (το να μην τα πιστεύουμε), ίσως το πιο σημαντικό λάθος μας στην παρούσα παράγραφο. Άλλη μια προσπάθεια! Ναι, στ' αλήθεια έχουμε **αποσυζεύξει** τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις του αρχικού μας συστήματος (12.9.26) των  $n$  γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως. Συγκεκριμένα έχουμε καταλήξει στις απλούστατες γραμμικές διαφορικές εξισώσεις (12.9.34), που είναι και **αποσυζευγμένες** ασφαλώς. Δηλαδή η καθεμιά τους έχει μία μόνο άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή): τη  $v_k(t)$ .

Ας περιορισθούμε τώρα στο αντίστοιχο ομογενές σύστημα διαφορικών εξισώσεων: στο σύστημα με  $\mathbf{g}(t) \equiv \mathbf{0}$  (οπότε και  $\mathbf{h}(t) \equiv \mathbf{0}$ ), δηλαδή στο δεξιό σύστημα (12.9.34). Για το ομογενές αυτό σύστημα αρκεί η απλούστατη εκθετική αντικατάσταση  $v_{0k}(t) = e^{\mu_k t}$  στην  $k$  πιο πάνω ομογενή διαφορική εξίσωση και βρίσκουμε  $\mu_k = \lambda_k$  (ναι, την ιδιοτιμή  $\lambda_k$ ) για την εξίσωση αυτή. Επομένως οι λύσεις των ομογενών διαφορικών εξισώσεων στο δεξιό μέλος της σχέσεως (12.9.34) θα είναι

$$\left. \begin{Bmatrix} v_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ v_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ v_n(t) = C_n e^{\lambda_n t} \end{Bmatrix} \right\} \text{ και με ισοδύναμη γραφή} \quad \mathbf{v}(t) \equiv \begin{Bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{Bmatrix} \quad (12.9.35)$$

φυσικά με τα σύμβολα  $C_1, C_2, \dots, C_n$  να δηλώνουν  $n$  συνολικά αυθαίρετες σταθερές. Δεν ήταν και άσχημη η παρούσα αποσύζευξη του αρχικού συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (12.9.26). Μάλλον είναι καλύτερη από τη χρήση της μεθόδου της απαλοιφής ή της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace. Θα μπορούσε ίσως να ανταγωνισθεί και την ίδια τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως, η οποία αναπτύχθηκε στην προπροηγούμενη Ενότητα A12.7. Όμως εκείνη η μέθοδος εφαρμόζεται μόνη της αποκλειστικά σε ομογενή συστήματα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων.

Αλλά μέσ' στη χαρά μας αφαιρεθήκαμε εντελώς και ξεχάσαμε προς στιγμή ότι οι άγνωστες συναρτήσεις μας ήταν οι  $u_k(t)$ , όχι οι  $v_k(t)$  (ασφαλώς με  $k = 1, 2, \dots, n$ ). Ε δε χάλασε κι ο κόσμος! Θυμόμαστε βέβαια την αλλαγή αγνώστων συναρτήσεων (12.9.28) που έχουμε κάνει:  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{T}\mathbf{v}(t)$ . Ξέρουμε ήδη το μητρώο  $\mathbf{T}$  των ιδιοδιανυσμάτων  $\delta_k$  του μητρώου  $\mathbf{A}$ . Προσδιορίζουμε επίσης και το διάνυσμα στήλης  $\mathbf{v}(t)$  των λύσεων  $v_k(t)$  των διαφορικών εξισώσεων (12.9.34). (Για  $\mathbf{g}(t) \equiv \mathbf{0}$  είναι οι λύσεις (12.9.35).) Άρα αρκεί να κάνουμε τον πολλαπλασιασμό στο δεξιό μέλος της αλλαγής αυτής αγνώστων συναρτήσεων  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{T}\mathbf{v}(t)$  (μια πάρα πολύ εύκολη εργασία!). Έτσι θα 'χουμε επιστρέψει στις αρχικές μας άγνωστες συναρτήσεις  $\mathbf{u}(t)$ . Αν μάλιστα διαθέτουμε και τις  $n$  αρχικές συνθήκες

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \text{αναλυτικότερα} \quad u_k(0) = u_{k0} \quad \text{με} \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (12.9.36)$$

θα μπορέσουμε εύκολα να προσδιορίσουμε και τις  $n$  αυθαίρετες σταθερές  $C_k$  στην πιο πάνω λύση μας  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{T}\mathbf{v}(t)$ . Έτσι θα πάρουμε τη μερική λύση  $\mathbf{u}_p(t)$  στο παρόν πρόβλημα αρχικών τιμών. Αλλιώς θα μείνουμε με τη γενική λύση  $\mathbf{u}_g(t) = \mathbf{u}(t)$ , την οποία έχουμε ήδη πλήρως προσδιορίσει.

▼ **Παράδειγμα A12.4:** Να επιλυθεί με τη μέθοδο της διαγωνιοποίησης (ή αποσυσζεύξεως) το σύστημα των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (12.4.6) της Ενότητας A12.4, το ξαναγράφουμε

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t) + 2y(t) \\ \dot{y}(t) &= 4x(t) + 3y(t) \end{aligned} \right\} \quad \text{ή} \quad \dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t) \quad \text{με} \quad \mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}. \quad (12.9.37)$$

(Υπενθυμίζεται ότι το ίδιο σύστημα έχει ήδη επιλυθεί με τρεις μεθόδους: (α) της απαλοιφής, (β) του μετασχηματισμού Laplace και (γ) της εκθετικής αντικαταστάσεως. Είναι το στοιχειώδες παράδειγμα που επιλέξαμε στο παρόν Κεφάλαιο A12 για τα γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων.)

**Λύση:** Είμαστε ήδη επαρκώς προετοιμασμένοι για τη λύση αυτή. Συγκεκριμένα για το μητρώο αυτό  $\mathbf{A}$  γνωρίζουμε ήδη τις ιδιοτιμές του  $\lambda_1 = -1$  και  $\lambda_2 = 5$  από τις σχέσεις (12.9.6) καθώς και τα ιδιοδιανύσματα  $\delta_1$  και  $\delta_2$  και το μητρώο τους  $\mathbf{T}$  διαστάσεων  $2 \times 2$  από τις σχέσεις (12.9.10). Άρα

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 5, \quad \text{επίσης} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (12.9.38)$$

με βάση και τη σχέση (12.9.13) για το αντίστροφο μητρώο  $\mathbf{T}^{-1}$  του μητρώου  $\mathbf{T}$  των ιδιοδιανυσμάτων. Επομένως με την αλλαγή μεταβλητών  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{T}\mathbf{v}(t)$ , ακριβώς όπως την εκθέσαμε ήδη πιο πάνω (εδώ με  $n = 2$  και με  $\mathbf{v}(t) = [r(t) \quad s(t)]^T$ ), οδηγούμαστε στο σύστημα των δύο **ασύζευκτων** ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{\Lambda}\mathbf{v}(t) \quad \text{και} \quad \text{ισοδύναμα} \quad \dot{\mathbf{v}}(t) \equiv \begin{Bmatrix} \dot{r}(t) \\ \dot{s}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r(t) \\ s(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r(t) \\ 5s(t) \end{Bmatrix}. \quad (12.9.39)$$

Η ακόμη αναλυτικότερη μορφή του τελευταίου αυτού συστήματος είναι προφανώς η εξής:

$$\dot{r}(t) = -r(t), \quad \dot{s}(t) = 5s(t) \quad \text{με προφανή λύση την} \quad r(t) = E_1 e^{-t}, \quad s(t) = E_2 e^{5t} \quad (12.9.40)$$

με τα  $E_1$  και  $E_2$  δύο αυθαίρετες σταθερές. Η λύση αυτή προκύπτει αμέσως με την τόσο γνωστή μας και προσφιλή μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως ή με την εξίσου γνωστή μας (αλλ' όχι προτιμητέα εδώ) μέθοδο επιλύσεως διαφορικών εξισώσεων χωριζόμενων μεταβλητών. Επομένως

$$\mathbf{v}(t) \equiv \begin{Bmatrix} r(t) \\ s(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_1 e^{-t} \\ E_2 e^{5t} \end{Bmatrix}, \quad \text{οπότε} \quad \mathbf{u}(t) \equiv \begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = \mathbf{T}\mathbf{v}(t) = \begin{Bmatrix} E_1 e^{-t} + E_2 e^{5t} \\ -E_1 e^{-t} + 2E_2 e^{5t} \end{Bmatrix}. \quad (12.9.41)$$



Παρατηρούμε φυσικά ότι καταλήξαμε στην ίδια ακριβώς λύση (γενική λύση)

$$\begin{aligned} x(t) &= E_1 e^{-t} + E_2 e^{5t}, \\ y(t) &= -E_1 e^{-t} + 2E_2 e^{5t} \end{aligned} \tag{12.9.42}$$

του παρόντος συστήματος διαφορικών εξισώσεων, στην οποία είχαμε καταλήξει και με τις μεθόδους (α) της απαλοιφής: λύση (12.5.21), (β) του μετασχηματισμού Laplace: λύση (12.6.31) και (γ) της εκθετικής αντικατάστασης: λύση (12.7.50). Κι εδώ (δ) με τη μέθοδο της διαγωνιοποίησης (ή αποσυζεύξεως): η παραπάνω λύση (12.9.42). Τέσσερις λοιπόν εντελώς διαφορετικές μέθοδοι οδήγησαν στην ίδια ακριβώς λύση και ασφαλώς μας είναι ιδιαίτερα ευχάριστο το γεγονός αυτό. ▲

▼ **Παράδειγμα A12.5:** Να επιλυθεί με τη μέθοδο της διαγωνιοποίησης (ή αποσυζεύξεως) το σύστημα των δύο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t) + 4y(t) \\ \dot{y}(t) &= 4x(t) + 3y(t) \end{aligned} \right\} \text{ ή } \dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{A}_s \mathbf{u}(t) \text{ με } \mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} \text{ και } \mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}. \tag{12.9.43}$$

**Λύση:** Η μόνη διαφορά του παρόντος συστήματος (12.9.43) από το σύστημα (12.9.37) του αμέσως προηγούμενου παραδείγματος είναι ότι τώρα το μητρώο  $\mathbf{A}$  είναι το συμμετρικό μητρώο  $\mathbf{A}_s$ . Πρόκειται για το ίδιο συμμετρικό μητρώο  $\mathbf{A}_s$  (σχέση (12.9.19)) που είχαμε διαγωνιοποιήσει στο Παράδειγμα A12.3. Εκεί χρησιμοποιήσαμε το μητρώο  $\mathbf{T}$  των ιδιοδιανυσμάτων του (σχέση (12.9.22)) και το ανάστροφό του μητρώο  $\mathbf{T}^T$  (σχέση (12.9.23)). Τα υπενθυμίζουμε στις προσεγγιστικές εκφράσεις τους

$$\mathbf{T} \approx \begin{bmatrix} -1.28078 & 0.78078 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{T}^T \approx \begin{bmatrix} -1.28078 & 1 \\ 0.78078 & 1 \end{bmatrix} \tag{12.9.44}$$

για τη διαγωνιοποίηση (12.9.25):  $\mathbf{T}^T \mathbf{A}_s \mathbf{T} = \mathbf{A}_d$ . Δηλαδή στο παρόν παράδειγμα με πραγματικό **συμμετρικό** το μητρώο  $\mathbf{A}_s$  δε χρειάζεται να υπολογίσουμε το αντίστροφο μητρώο  $\mathbf{T}^{-1}$ . Το ανάστροφο μητρώο  $\mathbf{T}^T$  στη σχέση (12.9.23) μας αρκεί εδώ για την αποσύζευξη των διαφορικών εξισώσεων.

Δηλαδή, όπως και στο προηγούμενο Παράδειγμα A12.4, έτσι κι εδώ χρησιμοποιούμε τις νέες άγνωστες συναρτήσεις  $\mathbf{v}(t)$  μέσω της μητρικής σχέσεως ορισμού τους (12.9.28) στο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (12.9.43). Τότε αυτό παίρνει τη μορφή (12.9.29), εδώ με  $\mathbf{g}(t) \equiv \mathbf{0}$ . Στο σημείο αυτό όμως εκμεταλλευόμαστε τη συμμετρία του μητρώου  $\mathbf{A}_s$  στο παρόν παράδειγμα. Αποφεύγουμε τη χρήση του αντίστροφου μητρώου  $\mathbf{T}^{-1}$  (απλά για διευκόλυνσή μας) και χρησιμοποιούμε το ανάστροφο μητρώο  $\mathbf{T}^T$  της δεύτερης σχέσεως (12.9.44). (Δε χρειάζεται κανένας υπολογισμός για το σχηματισμό του ανάστροφου μητρώου  $\mathbf{T}^T$  του μητρώου  $\mathbf{T}$  των ιδιοδιανυσμάτων. Απλά αλλάζουμε τις γραμμές με τις στήλες, όπως είναι εξάλλου εμφανές στις σχέσεις (12.9.44).)

Επομένως στο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (12.9.43) απλά θέτουμε  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{T}\mathbf{v}(t)$  και το πολλαπλασιάζουμε από αριστερά επί  $\mathbf{T}^T$  (με τα μητρώα  $\mathbf{T}$  και  $\mathbf{T}^T$  γνωστά στις σχέσεις (12.9.44)). Προκύπτει έτσι αμέσως το ασύζευκτο (διαγωνιοποιημένο) σύστημα των διαφορικών εξισώσεων

$$\left. \begin{aligned} 2.64039\dot{r}(t) + 5.60582r(t) &\approx 0 \\ 1.60961\dot{s}(t) - 9.85582s(t) &\approx 0 \end{aligned} \right\} \text{ με λύση τη } \begin{cases} r(t) \approx E_1 e^{-2.12311t} \\ s(t) \approx E_2 e^{6.12311t} \end{cases} \tag{12.9.45}$$

με τα  $E_1$  και  $E_2$  δύο αυθαίρετες σταθερές. Θυμίζουμε ότι οι σταθερές στους εκθέτες των δύο αυτών λύσεων είναι οι ιδιοτιμές  $\lambda_1 \approx -2.12311$  και  $\lambda_2 \approx 6.12311$  του παρόντος συμμετρικού μητρώου  $\mathbf{A}_s$ . (Αυτές έχουν προσδιορισθεί στο Παράδειγμα A12.3: σχέσεις (12.9.20).) Τούτο συμφωνεί βέβαια με τις λύσεις (12.9.35) των αποσυζευγμένων ομογενών διαφορικών εξισώσεων. Δηλαδή δεν έχει ιδιαίτερη σημασία που εδώ χρησιμοποιήσαμε το ανάστροφο μητρώο  $\mathbf{T}^T$  αντί για το αντίστροφο μητρώο  $\mathbf{T}^{-1}$  έχοντας εκμεταλλευθεί τη συμμετρία  $a_{ij} = a_{ji}$  του πραγματικού συμμετρικού μητρώου  $\mathbf{A}_s$ .

Τέλος με τη χρήση της σχέσεως μετασχηματισμού αγνώστων συναρτήσεων  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{T}\mathbf{v}(t)$  επιστρέφουμε από τις δύο νέες (τις βοηθητικές) άγνωστες συναρτήσεις  $r(t)$  και  $s(t)$  στις αρχικές μας

άγνωστες συναρτήσεις  $x(t)$  και  $y(t)$ . Θέσαμε, επαναλαμβάνουμε,  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{T}\mathbf{v}(t)$  και επομένως έχουμε

$$\begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -1.28078 & 0.78078 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r(t) \\ s(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.28078r(t) + 0.78078s(t) \\ r(t) + s(t) \end{Bmatrix}. \quad (12.9.46)$$

Εισάγοντας και τις λύσεις (12.9.45), τις οποίες έχουμε ήδη προσδιορίσει για τις δύο βοηθητικές άγνωστες συναρτήσεις  $r(t)$  και  $s(t)$ , καταλήγουμε στην τελική μας προσεγγιστική λύση

$$\begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} -1.28078E_1e^{-2.12311t} + 0.78078E_2e^{6.12311t} \\ E_1e^{-2.12311t} + E_2e^{6.12311t} \end{Bmatrix}. \quad (12.9.47)$$

Φυσικά η λύση αυτή περιέχει και δύο αυθαίρετες σταθερές  $E_1$  και  $E_2$ , επειδή έχουμε ένα σύστημα δύο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως. Οι δύο αυτές σταθερές μπορούν βέβαια να προσδιορισθούν από τις αρχικές συνθήκες  $x(0) = x_0$  και  $y(0) = y_0$ , εάν αυτές είναι διαθέσιμες. ▲

## A12.10. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Στο κεφάλαιο αυτό αναφερθήκαμε στην επίλυση γραμμικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές με πέντε διαφορετικές μεθόδους. Στην τελευταία αυτή ενότητα συνοψίζουμε τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα καθενιάς από τις πέντε αυτές μεθόδους:

- **Μέθοδος της απαλοιφής:** **Πλεονεκτήματα:** Είναι απλή στη θεωρία της. **Μειονεκτήματα:** Δεν είναι υπολογιστικά απλή στην εφαρμογή της. Γενικά οδηγεί σε περισσότερες σταθερές από όσες πρέπει και χρειάζεται προσοχή, ώστε να απαλειφθούν οι πρόσθετες από αυτές.
  - **Μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace:** **Πλεονεκτήματα:** Ανάγει το σύστημα των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων σε σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. **Μειονεκτήματα:** Πολύ συχνά οι αντιστροφές των μετασχηματισμών Laplace που προκύπτουν είναι υπολογιστικά δύσκολες. Χρησιμοποιεί βοηθητική ανεξάρτητη μεταβλητή  $s$  χωρίς φυσική σημασία.
  - **Μέθοδος της εκθετικής αντικαταστάσεως:** **Πλεονεκτήματα:** Είναι απλή στη θεωρία της. **Μειονεκτήματα:** Εφαρμόζεται μόνο σε συστήματα ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Συχνά οδηγεί σε μιγαδικές λύσεις, που πρέπει μετά να μετατραπούν σε πραγματικές.
  - **Μέθοδος της τριγωνομετρικής αντικαταστάσεως:** **Πλεονεκτήματα:** Είναι κι αυτή απλή στη θεωρία της. Δίνει και κατευθείαν πραγματικές λύσεις. **Μειονεκτήματα:** Εφαρμόζεται κι αυτή μόνο σε συστήματα ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Είναι επίσης αναγκαίο να μην παρουσιάζονται καθόλου οι παράγωγοι περιττής τάξεως των αγνώστων συναρτήσεων.
  - **Μέθοδος της διαγωνιοποίησης (ή αποσυζεύξεως):** **Πλεονεκτήματα:** Οδηγεί σε σύστημα ασύζευκτων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, δηλαδή σε ξεχωριστές διαφορικές εξισώσεις (με μία άγνωστη συνάρτηση) αντί για σύστημα συζευγμένων διαφορικών εξισώσεων. Είναι εφαρμόσιμη και σε ομογενή και σε μη ομογενή συστήματα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. **Μειονεκτήματα:** Είναι αρκετά δύσκολη στη θεωρία της χρησιμοποιώντας στοιχεία από τη Γραμμική Άλγεβρα (ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα, κλπ.) και βοηθητικές άγνωστες συναρτήσεις.
- ◆ **Συμπέρασμα:** Με βάση όλες τις παραπάνω παρατηρήσεις συνιστάται στον Πολιτικό Μηχανικό για την επίλυση συστημάτων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων στις Ταλαντώσεις και στη Δυναμική των Κατασκευών η χρήση κυρίως (όχι βέβαια υποχρεωτικά) των εξής μεθόδων:
- Σε πολυβάθμια μηχανικά συστήματα σε **ελεύθερες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση:** (α) της μεθόδου της τριγωνομετρικής αντικαταστάσεως ή (β) της μεθόδου της διαγωνιοποίησης.
  - Σε πολυβάθμια μηχανικά συστήματα σε **ελεύθερες ταλαντώσεις με απόσβεση:** (α) της μεθόδου της εκθετικής αντικαταστάσεως ή (β) της μεθόδου της διαγωνιοποίησης.
  - Σε πολυβάθμια μηχανικά συστήματα σε **εξαναγκασμένες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση ή με απόσβεση:** της μεθόδου της διαγωνιοποίησης. Αυτή είναι η μέθοδος που χρησιμοποιείται πιο πολύ από τον Πολιτικό Μηχανικό στις Ταλαντώσεις και στη Δυναμική των Κατασκευών.

---

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ *A13*

## ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

---

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Σ' αυτό το Κεφάλαιο A13 θα εφαρμόσουμε τις γνώσεις που αποκτήσαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο A12 για τα συστήματα των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές σε προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού. Συγκεκριμένα πρώτα-πρώτα θα καταστρώσουμε το σύστημα των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων που αφορά σε ένα απλό διβάθμιο μηχανικό σύστημα δύο υλικών σημείων και δύο ελατηρίων: **διβάθμιος ταλαντωτής**. Στη συνέχεια θα κάνουμε ακριβώς το ίδιο και για ένα διώροφο **ιδεατό κτίριο διατμήσεως** (όμως με αρκετές παραδοχές). Θα διαπιστώσουμε με κάποια μικρή έκπληξη ότι τα δύο αυτά συστήματα διαφορικών εξισώσεων συμπίπτουν απόλυτα, αν και αναφέρονται σε εντελώς διαφορετικά διβάθμια μηχανικά συστήματα.

Το επόμενο βήμα μας θα είναι να σχηματίσουμε τα μητρώα μάζας (ή αδρανείας) και δυσκαμψίας για ένα συγκεκριμένο διώροφο ιδεατό κτίριο διατμήσεως χωρίς φόρτιση ούτε απόσβεση. Έτσι θα διαθέτουμε πλέον σε πλήρη μορφή το σχετικό σύστημα των δύο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων.

Στη συνέχεια προχωράμε στην επίλυση αυτού του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων με τις μεθόδους που γνωρίζουμε από το προηγούμενο κεφάλαιο: (α) τη μέθοδο της απαλοιφής, (β) τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace, (γ) τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως, (δ) τη μέθοδο της τριγωνομετρικής αντικαταστάσεως και (ε) τη μέθοδο της διαγωνιοποίησης (ή αποσυζεύξεως).

Ειδικά για τη μέθοδο της διαγωνιοποίησης (ή αποσυζεύξεως) χρειαζόμαστε εδώ μια απλή γενίκευσή της. Έτσι αυτή θα είναι κατευθείαν εφαρμόσιμη και σε γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξεως (πάντοτε με σταθερούς συντελεστές). Πρόκειται για μια γενίκευση του κλασικού προβλήματος των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων (του ιδιοπροβλήματος) με ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τον Πολιτικό Μηχανικό στη Δυναμική των Κατασκευών. Εκεί ο Πολιτικός Μηχανικός μιλάει βέβαια για **ιδιοσυχνότητες** και **ιδιομορφές** αντί για ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα αντίστοιχα.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα και των πέντε αυτών διαφορετικών μεθόδων θα διαπιστώσουμε ότι συμπίπτουν ως προς τις ιδιοσυχνότητες  $\omega_k$  του μηχανικού μας συστήματος, εδώ ενός ιδεατού διώροφου κτιρίου διατμήσεως. Αυτό επιτρέπει στον Πολιτικό Μηχανικό να εργάζεται με διαφορετικές μεθόδους συγκρίνοντας τα αποτελέσματα παράλληλα με την άμεση επαλήθευσή τους.

Εντούτοις πρέπει να σημειώσουμε τη σύγκριση των μεθόδων και τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε στην προηγούμενη Ενότητα A12.10. Από αυτά το σημαντικότερο είναι ότι η καλύτερη μέθοδος για την επίλυση γενικά μη ομογενών γραμμικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές είναι η μέθοδος της διαγωνιοποίησης (ή αποσυζεύξεως). Σ' αυτή δίνει τη βαρύτητά του ο Πολιτικός Μηχανικός στη Δυναμική των Κατασκευών. Για παράδειγμα, μη ομογενή είναι τα συστήματα τα οποία ισχύουν στις κατασκευές κατά τη διάρκεια σεισμικών φαινομένων.

---

**A13.1. ΜΗΧΑΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΥΟ ΥΛΙΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΚΑΙ ΔΥΟ ΕΛΑΤΗΡΙΩΝ**

Πρόκειται για το κλασικό παράδειγμα **διβάθμιου** (με δύο βαθμούς ελευθερίας) μηχανικού συστήματος. Ας το περιγράψουμε σύντομα. Θεωρούμε το μηχανικό σύστημα που αποτελείται από δύο υλικά σημεία  $M_1$  και  $M_2$  (μαζών  $m_1$  και  $m_2$  αντίστοιχα) και δύο ελατήρια  $S_1$  και  $S_2$  (σταθερών  $k_1$  και  $k_2$  αντίστοιχα). Τα δύο υλικά σημεία  $M_1$  και  $M_2$  του συστήματος αυτού μπορούν να κινούνται (χωρίς τριβή) πάνω στον άξονα  $Ox$  σε οριζόντιο επίπεδο. Το αριστερό άκρο του πρώτου ελατηρίου  $S_1$  είναι σταθερό στη θέση  $O$ . Το δεξιό άκρο είναι σταθερά συνδεδεμένο με το πρώτο υλικό σημείο  $M_1$  και στη συνέχεια με το αριστερό άκρο του δεύτερου ελατηρίου  $S_2$ . Παραπέρα το δεξιό άκρο του δεύτερου ελατηρίου  $S_2$  είναι σταθερά συνδεδεμένο με το υλικό σημείο  $M_2$ . Δηλαδή στη σειρά: (α) σταθερή στήριξη, (β) πρώτο ελατήριο  $S_1$ , (γ) πρώτο υλικό σημείο  $M_1$ , (δ) δεύτερο ελατήριο  $S_2$  και (ε) δεύτερο υλικό σημείο  $M_2$  χωρίς αποσβεστήρες (χωρίς αντιστάσεις τριβής). Τέλος θεωρούμε ότι ασκούνται φορτίσεις (εξωτερικές δυνάμεις)  $p_1(t)$  και  $p_2(t)$  πάνω στα δύο υλικά σημεία  $M_1$  και  $M_2$  αντίστοιχα με θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά.

Για την κατάστρωση των **εξιώσεων κινήσεως** για τα δύο υλικά σημεία  $M_1$  και  $M_2$  θα εφαρμόσουμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα κατά μήκος του άξονα  $Ox$  με την παραδοχή γραμμικά ελαστικής αποκρίσεως των δύο ελατηρίων  $S_1$  και  $S_2$  με **δυνάμεις επαναφοράς**. Δηλώνουμε τώρα με  $u_1(t)$  και  $u_2(t)$  τις μετατοπίσεις των δύο υλικών σημείων  $M_1$  και  $M_2$  αντίστοιχα από τις θέσεις ισορροπίας τους με θετικές κατευθύνσεις πάλι προς τα δεξιά. Τότε οι επιμήκυνσεις  $\Delta s_1(t)$  και  $\Delta s_2(t)$  των δύο ελατηρίων  $S_1$  και  $S_2$  αντίστοιχα θα είναι

$$\Delta s_1(t) = u_1(t) - 0 = u_1(t) \quad \text{και} \quad \Delta s_2(t) = u_2(t) - u_1(t) \quad (13.1.1)$$

αντίστοιχα. (Το μηδέν στη διαφορά  $u_1(t) - 0$  δηλώνει απλά πως το αριστερό άκρο του ελατηρίου  $S_1$  είναι στερεωμένο, ακίνητο.)

Τώρα, αφού η συμπεριφορά των δύο ελατηρίων  $S_1$  και  $S_2$  θεωρείται γραμμικά ελαστική, οι δύο δυνάμεις επαναφοράς  $F_{s1}(t)$  και  $F_{s2}(t)$ , οι οποίες ασκούνται από τα δύο ελατήρια  $S_1$  και  $S_2$  πάνω στα δύο υλικά σημεία  $M_1$  και  $M_2$  αντίστοιχα, θα είναι

$$F_{s1}(t) = -k_1 \Delta s_1(t) = -k_1 u_1(t) \quad \text{και} \quad F_{s2}(t) = -k_2 \Delta s_2(t) = -k_2 [u_2(t) - u_1(t)]. \quad (13.1.2)$$

(Τα πρόσημα μείον δηλώνουν δυνάμεις επαναφοράς και είναι σωστά, όπως εύκολα διαπιστώνεται.) Με βάση την αρχή δράσεως και αντιδράσεως, η δύναμη  $F_{s1}(t)$  θα ασκείται (με αντίθετη φορά βέβαια: με συν) και στο σταθερό σημείο στηρίζεως  $O$ . Επίσης η δύναμη  $F_{s2}(t)$  θα ασκείται (και αυτή με αντίθετη φορά: με συν) και πάνω στο υλικό σημείο  $M_1$ . (Εννοείται βέβαια ότι η μετατόπιση  $u_1(t)$  μπορεί να είναι θετική, αρνητική ή μηδενική μια χρονική στιγμή  $t$ . Ανάλογα και η μετατόπιση  $u_2(t)$ .)

Τώρα με βάση τα παραπάνω ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα (δύναμη ίσον μάζα επί επιτάχυνση:  $F = ma$ ) παίρνει για το πρώτο υλικό σημείο  $M_1$  τη μορφή

$$m_1 \ddot{u}_1(t) = [F_{s1}(t) - F_{s2}(t)] + p_1(t) = -k_1 u_1(t) + k_2 [u_2(t) - u_1(t)] + p_1(t), \quad (13.1.3)$$

οπότε

$$m_1 \ddot{u}_1(t) + (k_1 + k_2) u_1(t) - k_2 u_2(t) = p_1(t). \quad (13.1.4)$$

Ανάλογη (και μάλιστα λίγο απλούστερη) μορφή παίρνει ο ίδιος θεμελιώδης νόμος και για το δεύτερο υλικό σημείο  $M_2$ :

$$m_2 \ddot{u}_2(t) = F_{s2}(t) + p_2(t) = -k_2 [u_2(t) - u_1(t)] + p_2(t), \quad (13.1.5)$$

οπότε

$$m_2 \ddot{u}_2(t) - k_2 u_1(t) + k_2 u_2(t) = p_2(t). \quad (13.1.6)$$

Επομένως το παρόν πρόβλημα του **διβάθμιου μηχανικού συστήματος** δύο υλικών σημείων και δύο ελατηρίων (δηλαδή ενός **διβάθμιου ταλαντωτή**) έχει αναχθεί στις δύο **συζευγμένες** γραμμικές

διαφορικές εξισώσεις (13.1.4) και (13.1.6). Αυτές περιέχουν (δυστυχώς για μας και οι δυο τους) και τις δύο άγνωστες συναρτήσεις  $u_1(t)$  και  $u_2(t)$  (τις μετατοπίσεις των υλικών σημείων  $M_1$  και  $M_2$  αντίστοιχα). (Γι' αυτό χρησιμοποιήθηκε και ο όρος συζευγμένες διαφορικές εξισώσεις.) Πρόκειται βέβαια για γραμμικές μη ομογενείς διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως και με σταθερούς συντελεστές που αντιστοιχούν σε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις. Έχουμε έτσι σχηματίσει ένα απλό σύστημα δύο μη ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές.

Ας γράψουμε τώρα το ίδιο σύστημα και στην ισοδύναμη μητρική (με μητρώα) μορφή του

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(t). \quad (13.1.7)$$

Προφανώς στη μορφή αυτή τα δύο μητρώα  $\mathbf{M}$  (**μητρώο μάζας**) και  $\mathbf{K}$  (**μητρώο στιβαρότητας**) είναι διαστάσεων  $2 \times 2$ , ενώ τα μητρώα  $\mathbf{u}(t)$  (μετατοπίσεων),  $\ddot{\mathbf{u}}(t)$  (επιταχύνσεων) και  $\mathbf{p}(t)$  (φορτίσεων) είναι διανύσματα στήλης με δύο στοιχεία. Συγκεκριμένα με βάση τις δύο παραπάνω διαφορικές εξισώσεις (13.1.4) και (13.1.6) έχουμε για τα μητρώα  $\mathbf{M}$  (μάζας) και  $\mathbf{K}$  (στιβαρότητας) τις εκφράσεις

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (13.1.8)$$

και επίσης για τα διανύσματα  $\mathbf{u}(t)$  (μετατοπίσεων),  $\ddot{\mathbf{u}}(t)$  (επιταχύνσεων) και  $\mathbf{p}(t)$  (φορτίσεων)

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix}, \quad \text{οπότε} \quad \ddot{\mathbf{u}}(t) = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{Bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{p}(t) = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix}. \quad (13.1.9)$$

Με τη χρήση αυτών των σχέσεων το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (13.1.7) μπορεί να γραφεί και στην ακόλουθη λίγο αναλυτικότερη (αλλά και πάλι μητρική) μορφή του:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix}. \quad (13.1.10)$$

Φυσικά, εκτελώντας εδώ τους πολλαπλασιασμούς μητρώων, επιστρέφουμε εύλογα στο σύστημα των δύο διαφορικών εξισώσεων (13.1.4) και (13.1.6), από το οποίο είχαμε εξάλλου ξεκινήσει.

► **Παρατήρηση A13.1:** Παρενθετικά σημειώνουμε ότι το **μητρώο μάζας**  $\mathbf{M}$  καλείται μερικές φορές στις Ταλαντώσεις και **μητρώο αδρανείας**, επειδή σχετίζεται με τις **αδρανειακές δυνάμεις**

$$F_{i1}(t) = -m_1\ddot{u}_1(t) \quad \text{και} \quad F_{i2}(t) = -m_2\ddot{u}_2(t) \quad (13.1.11)$$

που «ασκούνται» στα υλικά σημεία  $M_1$  και  $M_2$ . Αυτές οι αδρανειακές δυνάμεις δεν είναι βέβαια αληθινές δυνάμεις, αλλά μας βοηθάνε να γράψουμε τις δυναμικές εξισώσεις κινήσεως σαν εξισώσεις στατικής (ή καλύτερα «ψευδοστατικής») ισορροπίας. Για παράδειγμα, εδώ μπορούμε να γράψουμε

$$F_{i1}(t) + [F_{s1}(t) - F_{s2}(t)] + p_1(t) = 0 \quad \text{και} \quad F_{i2}(t) + F_{s2}(t) + p_2(t) = 0 \quad (13.1.12)$$

αντί για το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στις σχέσεις (13.1.3) και (13.1.5) για τα δύο υλικά σημεία  $M_1$  και  $M_2$  αντίστοιχα. Επίσης το **μητρώο στιβαρότητας**  $\mathbf{K}$  καλείται σε πρόβλημα που σχετίζονται με την κάμψη δοκών (όπως στο πρόβλημα του ιδεατού δώροφου κτιρίου στην επόμενη ενότητα) **μητρώο δυσκαμψίας**. Εντούτοις όσες φορές δεν υπάρχει κάμψη (όπως στο παρόν πρόβλημα του διβάθμιου ταλαντωτή) η χρήση του όρου μητρώο δυσκαμψίας (δίχως να παρουσιάζεται κάμψη κάποιου φορέα: συνήθως δοκού, σπάνια πλάκας ή κελύφους) πρέπει να θεωρείται ανεπιτυχής.

► **Παρατήρηση A13.2:** Συνεχίζοντας την προηγούμενη παρατήρηση, πρέπει επίσης να σημειώσουμε ότι πετύχαμε τη γραφή των εξισώσεων «ψευδοστατικής» ισορροπίας (13.1.12) χωρίς λάθος. Τούτο οφείλεται στην πρόνοια που πήραμε να έχουμε το πρόσημο μείον τόσο στις ελαστικές δυνάμεις επαναφοράς  $F_{s1}(t)$  και  $F_{s2}(t)$  των ελατηρίων όσο και στις αδρανειακές δυνάμεις  $F_{i1}(t)$  και  $F_{i2}(t)$ .

Συνήθως όμως ο Πολιτικός Μηχανικός παραβλέπει αυτό το πρόσημο μείον στις δυνάμεις αυτές (χωρίς βέβαια να κάνει κάποιο λάθος!) γράφοντας τις εξισώσεις ισορροπίας (13.1.12) στη μορφή

$$f_{i1}(t) + [f_{s1}(t) - f_{s2}(t)] = p_1(t) \quad \text{και} \quad f_{i2}(t) + f_{s2}(t) = p_2(t). \quad (13.1.13)$$

Σ' αυτήν τη μορφή  $f_{ik}(t) = -F_{ik}(t)$  και  $f_{sk}(t) = -F_{sk}(t)$  (με  $k = 1, 2$ ). Τις εξισώσεις (13.1.12) τις υιοθετούμε εδώ, απλά επειδή είναι σαφείς σαν εξισώσεις ισορροπίας (με μηδενικά τα δεξιά μέλη τους).

► **Παρατήρηση A13.3:** Είναι προφανές ότι το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (13.1.7):  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(t)$ , που καταστρώσαμε εδώ, ισχύει (με γενίκευση των ορισμών των μητρώων και διανυσμάτων στήλης σ' αυτό) και σε πιο σύνθετους ταλαντωτές με  $n$  βαθμούς ελευθερίας (αντί μόνο δύο εδώ.) Όμως πολύ πιο ενδιαφέρον για τον Πολιτικό Μηχανικό είναι να δείξουμε πως το ίδιο σύστημα (13.1.7) παρουσιάζεται και στην περίπτωση κτιρίων. Αυτό θα το επιχειρήσουμε στην επόμενη ενότητα στην ειδική περίπτωση ενός ιδεατού δώροφου κτιρίου διατμήσεως. *Πάμε!*

## A13.2. ΙΔΕΑΤΟ ΔΙΩΡΟΦΟ ΚΤΙΡΙΟ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ

### A13.2.1. Καθορισμός του προβλήματος και σχετικές υποθέσεις

Στη δεύτερη αυτή ενότητα θεωρούμε ένα δώροφο κτίριο με πάρα πολλές εξιδανικεύσεις: ένα **ιδεατό κτίριο**. Οι κυριότερες από αυτές είναι οι εξής: (α) Το δώροφο κτίριο θεωρείται ότι προσεγγίζεται από ένα απλό επίπεδο δώροφο πλαίσιο. (β) Οι μάζες των δύο ορόφων  $m_1$  (του πρώτου ορόφου) και  $m_2$  (του δεύτερου ορόφου) θεωρούνται συγκεντρωμένες στα επίπεδα των δύο πλακών των ορόφων. (Σ' αυτές συμπεριλαμβάνονται και οι μάζες των υποστυλωμάτων.) (γ) Και οι δύο αυτές πλάκες θεωρούνται απόλυτα απαραμόρφωτες (με άπειρη δυσκαμψία). (δ) Τα **υποστυλώματα** (οι **στύλοι**, οι **κολώνες**), μία αριστερά και μία δεξιά, θεωρούνται αβαρείς αμφίπακτες δοκοί χωρίς αξονικές φορτίσεις, αν και φυσικά υπάρχουν θλιπτικές αξονικές φορτίσεις των υποστυλωμάτων. Δεχόμαστε επίσης τη δυνατότητα κάμψεως των υποστυλωμάτων, άρα και οριζόντιων μετατοπίσεών τους στα επίπεδα των πλακών των δύο ορόφων. (ε) Δε δεχόμαστε όμως απόλυτως καμία δυνατότητα στροφής τους στα ίδια επίπεδα. Δηλαδή υποθέτουμε μηδενικές γωνίες στροφής και στα δύο άκρα των υποστυλωμάτων.

Με όλες αυτές τις παραδοχές τις οποίες κάνουμε κατορθώνουμε να μειώσουμε τον αριθμό των **βαθμών ελευθερίας** του δώροφου κτιρίου σε δύο μόνο. Αν είχαμε περισσότερους (συγκεκριμένα  $n$ ) βαθμούς ελευθερίας,  $\epsilon$  και τότε τίποτε το ουσιαστικό δε θα άλλαζε από μαθηματικής απόψεως. Απλά θα καταλήγαμε στο τέλος σε ένα σύστημα  $n$  γραμμικών διαφορικών εξισώσεων αντί δύο μόνο, όπως θα συμβεί εδώ. Η συνοπτική μητρική γραφή του θα παρέμενε όμως ουσιαστικά αναλλοίωτη, όπως και η επίλυσή του. Εντούτοις η επίλυσή του θα απαιτούσε πολύ περισσότερους υπολογισμούς. Αυτούς θα έπρεπε οπωσδήποτε να τους «αναθέσουμε» στον υπολογιστή μας.

Για τα υποστυλώματα δεν πρόκειται ακριβώς για το κλασικό πρόβλημα της αμφίπακτης δοκού: (α) επειδή δεν υπάρχει κάποια φόρτιση  $p$  κατά μήκος της και κυρίως (β) επειδή επιτρέπεται η εγκάρσια μετατόπιση  $u_0$  της δοκού στο ένα άκρο της σχετικά με το άλλο. Μια τέτοια δοκό πρέπει οπωσδήποτε να τη μελετήσουμε τώρα, πριν προχωρήσουμε στη μελέτη του παρόντος ιδεατού δώροφου κτιρίου διατμήσεως. Αυτό ακριβώς θα το κάνουμε στην επόμενη παράγραφο.

### A13.2.2. Μελέτη του αμφίπακτου υποστυλώματος

Όπως αναφέραμε παραπάνω, θεωρούμε το υποστυλώμα (το στυλό, την κολώνα) ότι ισοδυναμεί με συνήθη δοκό. Η δυσκαμψία του είναι  $EI$  και το μήκος του (ύψος του)  $h$  με  $0 \leq x \leq h$ . (Προτιμάμε εδώ το σύμβολο  $h$  αντί για το κλασικό σύμβολο  $L$  για το μήκος, επειδή πρόκειται για υποστυλώμα.) Η γνωστή μας σχετική διαφορική εξίσωση είναι η (2.1.34), την υπενθυμίζουμε:

$$v''''(x) = \frac{\rho(x)}{EI}. \quad (13.2.1)$$

Στην εξίσωση αυτή άγνωστη συνάρτηση  $v(x)$  είναι το βέλος κάμψεως της δοκού (εδώ του κατακόρυφου υποστυλώματος). Επίσης  $p(x)$  είναι η γνωστή κατανεμημένη κάθετη φόρτιση κατά μήκος της δοκού (εδώ του υποστυλώματος). Εδώ όμως έχουμε μηδενική φόρτιση:  $p(x) \equiv 0$ , οπότε απλά

$$v''''(x) = 0. \quad (13.2.2)$$

Τώρα με τέσσερις άμεσες ολοκληρώσεις προσδιορίζουμε πολύ εύκολα τη γενική λύση  $v(x)$ :

$$v(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 \quad \text{με πρώτη παράγωγο τη} \quad v'(x) = C_2 + 2C_3x + 3C_4x^2. \quad (13.2.3)$$

Στη γενική αυτή λύση  $v(x)$  τα σύμβολα  $C_1, C_2, C_3$  και  $C_4$  δηλώνουν τέσσερις αυθαίρετες σταθερές. Θα τις προσδιορίσουμε από τις τέσσερις συνοριακές συνθήκες στα δύο άκρα του υποστυλώματος. Οι συνοριακές αυτές συνθήκες, εδó στις δύο πακτώσεις  $x = 0$  και  $x = h$ , είναι οι εξής:

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v(h) = u_0, \quad v'(h) = 0. \quad (13.2.4)$$

Άρα το μόνο που υπάρχει είναι η οριζόντια μετατόπιση  $u_0$  του υποστυλώματος στο πάνω άκρο του  $x = h$ , που είναι έτσι μετατοπισμένο οριζόντια κατά  $u_0$  σχετικά με το κάτω άκρο του  $x = 0$ .

Ξεκινάμε τώρα τον προσδιορισμό των τεσσάρων σταθερών  $C_1, C_2, C_3$  και  $C_4$  από τις τέσσερις συνοριακές συνθήκες (13.2.4). Οι δύο πρώτες,  $v(0) = 0$  και  $v'(0) = 0$ , προφανώς μας δίνουν  $C_1 = 0$  και  $C_2 = 0$  αντίστοιχα, όπως φαίνεται καθαρά από τις σχέσεις (13.2.3). Επομένως τώρα

$$v(x) = C_3x^2 + C_4x^3 \quad \text{με πρώτη παράγωγο τη} \quad v'(x) = 2C_3x + 3C_4x^2. \quad (13.2.5)$$

Τώρα οι άλλες δύο συνοριακές συνθήκες,  $v(h) = u_0$  και  $v'(h) = 0$ , στο πάνω άκρο  $x = h$  του υποστυλώματος μας δίνουν

$$v(h) = C_3h^2 + C_4h^3 = u_0 \quad \text{και} \quad v'(h) = 2C_3h + 3C_4h^2 = 0. \quad (13.2.6)$$

Από τη δεύτερη αυτή σχέση προκύπτει αμέσως ότι

$$2C_3h = -3C_4h^2 \quad \implies \quad C_3 = -\frac{3}{2}C_4h. \quad (13.2.7)$$

Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή της σταθεράς  $C_3$  στη συνθήκη  $v(h) = u_0$ , παίρνουμε τη σταθερά  $C_4$

$$v(h) = C_3h^2 + C_4h^3 = u_0 \quad \implies \quad -\frac{3}{2}C_4h^3 + C_4h^3 = u_0 \quad \implies \quad C_4 = -\frac{2u_0}{h^3}. \quad (13.2.8)$$

Τέλος από τη σχέση (13.2.7) βρίσκουμε τη σταθερά  $C_3$ , που μας έχει απομείνει να υπολογίσουμε:

$$C_3 = -\frac{3}{2}C_4h, \quad \text{οπότε} \quad C_3 = \frac{3u_0}{h^2}. \quad (13.2.9)$$

Αυτό ήταν όλο! Προσδιορίστηκαν οι τέσσερις σταθερές. Τελικά από την πρώτη σχέση (13.2.5)

$$v(x) = C_3x^2 + C_4x^3 = \frac{3u_0}{h^2}x^2 - \frac{2u_0}{h^3}x^3, \quad \text{οπότε} \quad v(x) = \frac{u_0x^2}{h^3}(3h - 2x) \quad (13.2.10)$$

για το βέλος κάμψεως  $v(x)$  του υποστυλώματος (της κολώνας). Η σχετική γωνία στροφής  $\theta(x)$  είναι

$$\theta(x) = v'(x) = \frac{u_0}{h^3}(6hx - 6x^2) = \frac{6u_0x}{h^3}(h - x). \quad (13.2.11)$$

Είναι πάρα πολύ εύκολο να διαπιστώσουμε ότι επαληθεύονται τόσο η διαφορική εξίσωση (13.2.2) όσο και οι τέσσερις συνοριακές συνθήκες (13.2.4). Μια κυριολεκτικά πανεύκολη δουλειά! Την παραλείπουμε.

Τέλος για την καμπτική ροπή (ή ροπή κάμψεως)  $M(x)$  και την τέμνουσα δύναμη (ή διατμητική δύναμη)  $Q(x)$  (ή  $V(x)$ ) κατά μήκος του υποστυλώματος παίρνουμε με δύο ακόμη παραγωγίσεις

$$M(x) = EI\theta'(x) \implies M(x) = \frac{6EIu_0}{h^3}(h-2x) \quad \text{και} \quad Q(x) = M'(x) \implies Q(x) = -\frac{12EIu_0}{h^3}. \quad (13.2.12)$$

Δηλαδή παρατηρούμε πως η τέμνουσα δύναμη (ή διατμητική δύναμη) είναι σταθερή καθ' όλο το ύψος  $0 \leq x \leq h$  του υποστυλώματος:  $Q(x) = -12EIu_0/h^3 =$  σταθερά, κάτι το προφανές βέβαια. Αυτό ήταν και το αποτέλεσμα που θέλαμε: ο προσδιορισμός της τέμνουσας δύναμης  $Q(x)$  (ή  $V(x)$ ). Τη χρειαζόμαστε, μας είναι απόλυτα αναγκαία για τον προσδιορισμό του **μητρώου δυσκαμψίας  $K$**  του διώροφου ιδεατού κτιρίου διατμήσεως που εξετάζουμε. Αλλιώς τίποτε δε θα προχωρούσε από 'δώ και πέρα! Τώρα όμως προχωράμε! *Ναι, κάναμε ουσιαστική πρόοδο και προχωράμε!*

Το πρώτο βήμα μας είναι να δηλώσουμε την παραπάνω έκφραση (13.2.12) της τέμνουσας δύναμης  $Q = Q(x)$  στη μορφή

$$Q = -\hat{k}u_0 \quad \text{με} \quad \hat{k} := \frac{12EI}{h^3} \quad (\hat{k} > 0). \quad (13.2.13)$$

Ορίσαμε έτσι ένα χρήσιμο **συντελεστή δυσκαμψίας** (ή **σταθερά δυσκαμψίας**): το συντελεστή  $\hat{k}$ .

### A13.2.3. Αναγωγή του προβλήματος σε σύστημα διαφορικών εξισώσεων

Αυτό είναι το κύριο μέρος στην παρούσα ενότητα. Για να δούμε με απλές φυσικές σκέψεις τί ακριβώς συμβαίνει. Στον πρώτο όροφο πρώτα: έχουμε άκαμπτη πλάκα με συγκεντρωμένη τη μάζα  $m_1$  του πρώτου ορόφου στο επίπεδο της πλάκας, όπως ήδη υποθέσαμε. Όταν η πλάκα αυτή μετακινηθεί οριζόντια κατά  $u_1$  (ας πούμε προς τα δεξιά, ανάλογα και προς τα αριστερά), θα ασκήσει τέμνουσα δύναμη  $|Q_1|$  στο υποστύλωμα (προς τα δεξιά, ανάλογα και προς και τα αριστερά). Αυτό θα συμβεί, γιατί το υποστύλωμα (ο στύλος, η κολώνα) του πρώτου ορόφου (με ύψος  $h_1$  και δυσκαμψία  $EI_1$ ) έχει υποτεθεί πακτωμένη και στο έδαφος, αλλά και στην πλάκα του πρώτου ορόφου. Όμως η τέμνουσα αυτή δύναμη  $|Q_1|$  θα προκαλέσει την αντίδραση του υποστυλώματος, που θα ασκήσει αντίθετη δύναμη  $|Q_1|$  στην πλάκα (προς τα αριστερά τώρα, αντίθετα, ανάλογα και προς τα δεξιά). Είναι σαν το υποστύλωμα να θέλει έτσι να επαναφέρει την πλάκα στην αρχική της θέση: στη θέση χωρίς την οριζόντια μετατόπιση της πλάκας  $u_1$  (προς τα δεξιά, ανάλογα και προς τα αριστερά). Επομένως με τις σκέψεις αυτές συνάγεται ότι η μάζα του πρώτου ορόφου υφίσταται δύναμη  $Q_1 = -\hat{k}_1u_1$  από το ένα υποστύλωμά της. Ανάλογα ξανά δύναμη  $Q_1 = -\hat{k}_1u_1$  και από το δεύτερο υποστύλωμά της. Συνολικά έχουμε δύναμη  $2Q_1 = -2\hat{k}_1u_1$ , αν έχουμε δύο υποστυλώματα. Τώρα κάνουμε χρήση του τύπου (13.2.13), τον οποίο βρήκαμε, εδώ στη μορφή  $Q_1 = -\hat{k}_1u_1$ , καθώς και του ορισμού της σχετικής σταθεράς  $\hat{k}_1 = 12EI_1/h_1^3$  (βάζουμε δείκτες 1 για τον πρώτο όροφο) στον ίδιο ακριβώς τύπο. Προσδιορίζουμε έτσι τη συνολική δύναμη επαναφοράς  $F_{s1}(t)$  που ασκούν τα δύο υποστυλώματα του πρώτου ορόφου στην πλάκα του πρώτου ορόφου (με συγκεντρωμένη  $\sigma'$  αυτήν τη μάζα  $m_1$  του πρώτου ορόφου):

$$F_{s1}(t) = -2\hat{k}_1u_1(t) = -\frac{24EI_1}{h_1^3}u_1(t) \implies F_{s1}(t) = -k_1u_1(t) \quad \text{με} \quad k_1 := \frac{24EI_1}{h_1^3}. \quad (13.2.14)$$

Πάμε τώρα πάνω: στο δεύτερο όροφο, ακριβέστερα στην επίσης άκαμπτη πλάκα του δεύτερου ορόφου με συγκεντρωμένη  $\sigma'$  αυτήν τη μάζα  $m_2$  του δεύτερου ορόφου με δείκτες 2 τώρα για το δεύτερο όροφο. Αλλιώς δε γίνεται δουλειά, θα μπερδευτούμε χωρίς δείκτες με ολόκληρο διώροφο κτίριο που έχουμε! Και γενικά ο Πολιτικός Μηχανικός έχει  $n$ -ώροφα κτίρια (ναι, *μονώροφος, διώροφος, πολυώροφος με ωμέγα, όχι με όμικρον*<sup>1</sup>), ας πούμε μια πολυκατοικία. Τα ίδια και στο δεύτερο όροφο: τα δύο υποστυλώματα (με ύψη  $h_2$  και δυσκαμψίες  $EI_2$ ) του δεύτερου ορόφου με ανάλογη αιτιολόγηση θα ασκούν πάνω στην πλάκα του δεύτερου ορόφου τη δύναμη επαναφοράς

$$F_{s2}(t) = -2\hat{k}_2[u_2(t) - u_1(t)] = -\frac{24EI_2}{h_2^3}[u_2(t) - u_1(t)] \implies F_{s2}(t) = -k_2[u_2(t) - u_1(t)] \quad \text{με} \quad k_2 := \frac{24EI_2}{h_2^3}. \quad (13.2.15)$$

<sup>1</sup> Βλέπε: Μπαμπινιώτη, Γ. Δ. (2002), *Λεξικό της Νέας Ελληνικής Γλώσσας*, Β' έκδοση, Κέντρο Λεξικολογίας, Αθήνα.



Ωραία ως εδώ! Για την ακρίβεια σχεδόν ωραία. Και βάζουμε τη λέξη σχεδόν, επειδή κάναμε μια πολύ σοβαρή παράλειψη. Αυτή η παράλειψη συνίσταται στο ότι με βάση την αρχή της ισορροπίας των δυνάμεων που ασκούνται στο κάθε υποστυλώμα του δεύτερου ορόφου τα δύο αυτά υποστυλώματα δεν ασκούν μόνο τη δύναμη  $F_{s2}(t)$  στην πλάκα του δεύτερου ορόφου μέσω της πάνω πάκτωσής τους. Ασκούν ταυτόχρονα και την αντίθετή της δύναμη  $-F_{s2}(t)$  στην πλάκα του πρώτου ορόφου, εκεί μέσω της κάτω πάκτωσής τους. Άρα με βάση το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα ισχύουν και εδώ ακριβώς οι ίδιες διαφορικές εξισώσεις (13.1.3) και (13.1.5), ισοδύναμα (13.1.4) και (13.1.6) αντίστοιχα, για τις πλάκες του πρώτου και του δεύτερου ορόφου αντίστοιχα. (Υποθέσαμε ότι υπάρχουν και εξωτερικές φορτίσεις  $p_1(t)$  και  $p_2(t)$ .) Άρα ισχύει παραπέρα και η μητρική γραφή τους (13.1.7) με τους ορισμούς (13.1.8) των μητρώων μάζας  $\mathbf{M}$  και δυσκαμψίας  $\mathbf{K}$  και (13.1.9) των διανυσμάτων στήλης  $\mathbf{u}(t)$  (οριζόντιες μετατοπίσεις των δύο πλακών των ορόφων),  $\ddot{\mathbf{u}}(t)$  (αντίστοιχες επιταχύνσεις) και  $\mathbf{p}(t)$  (φορτίσεις, εξωτερικές δυνάμεις). Ισχύει φυσικά και η αναλυτικότερη γραφή του συστήματος των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (13.1.10).

Γενικά έχει ήδη αποδειχθεί ο βασικός στην ενότητα αυτή τύπος (13.2.13) για την τέμνουσα δύναμη  $Q$  στα υποστυλώματα από τις πλάκες των δύο ορόφων με την κατάλληλη μάλιστα επιλογή της σταθεράς  $\hat{k}$ . Εξαιτίας του το παρόν πρόβλημα του ιδεατού διώροφου κτιρίου διατμήσεως είναι μαθηματικά ισοδύναμο με το πρόβλημα του μηχανικού συστήματος δύο υλικών σημείων και δύο ελατηρίων που εξετάσθηκε λεπτομερώς στην προηγούμενη Ενότητα A13.1. Λέμε μαθηματικά, όχι φυσικά. Στο διώροφο ιδεατό μας κτίριο διατμήσεως δεν υπάρχουν ελατήρια να ασκούν τις δυνάμεις επαναφοράς  $F_{s1}$  και  $F_{s2}$ . Υπάρχουν όμως τα υποστυλώματα με τις τέμνουσες (ή διατμητικές) δυνάμεις τους. Επίσης οι μετατοπίσεις των πλακών του κτιρίου γίνονται κάθετα στα υποστυλώματα, ενώ οι μετατοπίσεις των υλικών σημείων στο διβάθμιο ταλαντωτή της προηγούμενης ενότητας γίνονται παράλληλα στα ελατήρια. Λοιπόν ανάμεσα στα δύο αυτά προβλήματα: (α) το διβάθμιο ταλαντωτή και (β) το ιδεατό κτίριο διατμήσεως (που είναι και το σημαντικότερο για τον Πολιτικό Μηχανικό) υπάρχει μαθηματική αναλογία να (απόλυτη), αλλά με φυσικές διαφορές (τεράστιες).

▼ **Εφαρμογή A13.1 (Ιδεατό κτίριο διατμήσεως):** Στη στοιχειώδη αυτή εφαρμογή ζητείται απλά η κατάστρωση του συστήματος των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων σε μητρική μορφή για ιδεατό κτίριο διατμήσεως με τα εξής χαρακτηριστικά: (α) Διώροφο κτίριο με όλες τις υποθέσεις που έχουν γίνει στην πρώτη Παράγραφο A13.2.1 τούτης της ενότητας. (β) Μάζες των δύο ορόφων:

$$m_1 = 3m_0 \quad \text{και} \quad m_2 = 2m_0 \quad \text{με το } m_0 \text{ γνωστή σταθερά μάζας, π.χ. } m_0 = 10^4 \text{ kg.} \quad (13.2.16)$$

(γ) Ύψη των δύο ορόφων:

$$h_1 = 4h_0 \quad \text{και} \quad h_2 = 3h_0 \quad \text{με το } h_0 \text{ γνωστή σταθερά μήκους, π.χ. } h_0 = 1 \text{ m.} \quad (13.2.17)$$

(δ) Δυσκαμψίες των υποστυλωμάτων:

$$EI_1 = 2EI_0 \quad \text{και} \quad EI_2 = EI_0 \quad \text{με το } EI_0 \text{ γνωστή δυσκαμψία.} \quad (13.2.18)$$

(Δηλαδή τα υποστυλώματα του πρώτου ορόφου έχουν διπλή δυσκαμψία από τα υποστυλώματα του δεύτερου ορόφου:  $EI_1 = 2EI_0 = 2EI_2$ .) (ε) Καμία εξωτερική φόρτιση  $\mathbf{p}(t)$ : ελεύθερη ταλάντωση.

**Λύση:** Γνωρίζουμε πολύ καλά το σχετικό σύστημα των διαφορικών εξισώσεων σε μητρική μορφή. Αυτό έχει τη μορφή (13.1.7) και στην περίπτωση μας (χωρίς φόρτιση:  $\mathbf{p}(t) \equiv \mathbf{0}$ ) την ακόμη απλούστερη μορφή

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}. \quad (13.2.19)$$

Άρα το καθήκον μας είναι να υπολογίσουμε λεπτομερώς τα μητρώα μάζας  $\mathbf{M}$  και δυσκαμψίας  $\mathbf{K}$ . (Ναι, **δυσκαμψίας**: τα υποστυλώματα είναι **παραμορφώσιμα** και επομένως μπορούν να καμφθούν. Οι πλάκες είναι που έχουν υποθεθεί **απαραμόρφωτες**, άκαμπτες, απόλυτα στερεές.)

Αρχίζουμε με το μητρώο μάζας (ή αδρανείας)  $\mathbf{M}$ . Είναι εδώ (όχι πάντοτε) διαγώνιο. Το υπολογίζουμε από τον πρώτο τύπο (13.1.8) με βάση και τα δεδομένα (13.2.16):  $m_1 = 3m_0$  και  $m_2 = 2m_0$ :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3m_0 & 0 \\ 0 & 2m_0 \end{bmatrix} = m_0 \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (13.2.20)$$

Και το μητρώο δυσκαμψίας  $\mathbf{K}$  τώρα με στοιχεία  $k_{ij}$ . Θα το υπολογίσουμε (στην παρούσα εφαρμογή) από το δεύτερο τύπο (13.1.8). Τον υπενθυμίζουμε (λίγο λεπτομερέστερα μάλιστα):

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad \text{με} \quad k_{21} = k_{12}. \quad (13.2.21)$$

Δηλαδή εδώ έχουμε (για το πραγματικό και συμμετρικό μητρώο δυσκαμψίας  $\mathbf{K}$ )

$$k_{11} = k_1 + k_2, \quad k_{12} = k_{21} = -k_2, \quad k_{22} = k_2. \quad (13.2.22)$$

Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε τις σταθερές δυσκαμψίας  $k_1$  και  $k_2$ . Το πετυχαίνουμε εύκολα αυτό χρησιμοποιώντας απλά τους τελευταίους τύπους στις δύο σχέσεις (13.2.14) και (13.2.15). Παίρνουμε βέβαια υπόψη μας και τα δεδομένα της εφαρμογής μας (13.2.17): για τα ύψη των ορόφων, και (13.2.18): για τις δυσκαμψίες των υποστυλωμάτων τους. Αμέσως βρίσκουμε ότι

$$k_1 = \frac{24El_1}{h_1^3} = \frac{24(2El_0)}{(4h_0)^3} = \frac{3}{4} \frac{El_0}{h_0^3} = 27k_0 \quad \text{και} \quad k_2 = \frac{24El_2}{h_2^3} = \frac{24El_0}{(3h_0)^3} = \frac{8}{9} \frac{El_0}{h_0^3} = 32k_0 \quad (13.2.23)$$

έχοντας ορίσει και χρησιμοποιήσει τη βοηθητική (και χωρίς φυσική σημασία) σταθερά δυσκαμψίας

$$k_0 := \frac{El_0}{36h_0^3}. \quad (13.2.24)$$

Χρησιμοποιούμε τώρα και τον τελικό τύπο (13.2.21) για το μητρώο δυσκαμψίας  $\mathbf{K}$  βρίσκοντας

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27k_0 + 32k_0 & -32k_0 \\ -32k_0 & 32k_0 \end{bmatrix} = k_0 \begin{bmatrix} 59 & -32 \\ -32 & 32 \end{bmatrix}. \quad (13.2.25)$$

Τώρα με γνωστά τα μητρώα μάζας  $\mathbf{M}$  και δυσκαμψίας  $\mathbf{K}$  από τις σχέσεις (13.2.20) και (13.2.25) αντίστοιχα το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (13.2.19) είναι πλήρως προσδιορισμένο για το παρόν ιδεατό διώροφο κτίριο διατμήσεως που εξετάζουμε. Ας το γράψουμε και στην αρκετά αναλυτικότερη μορφή του

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \implies m_0 \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{Bmatrix} + k_0 \begin{bmatrix} 59 & -32 \\ -32 & 32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (13.2.26)$$

Εάν μάλιστα εισαγάγουμε και δεύτερη βοηθητική σταθερά:  $\omega_0 = \sqrt{k_0/m_0}$  (που δεν παριστάνει βέβαια κάποια φυσική ιδιοσυχνότητα), τότε το ίδιο σύστημα γράφεται και στην τελική του μορφή

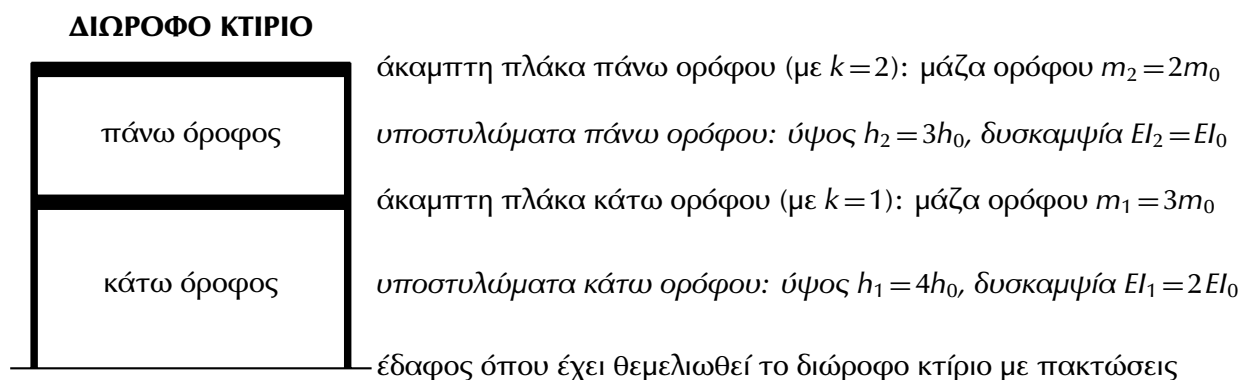
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{Bmatrix} + \omega_0^2 \begin{bmatrix} 59 & -32 \\ -32 & 32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{με} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_0}{m_0}}. \quad (13.2.27)$$

Αν εκτελέσουμε επιπλέον και τους πολλαπλασιασμούς μητρώων στο σύστημα αυτό, μπορούμε να το γράψουμε και χωρίς καθόλου μητρώα στη συνηθισμένη του μορφή

$$\begin{aligned} 3\ddot{u}_1(t) + 59\omega_0^2 u_1(t) - 32\omega_0^2 u_2(t) &= 0, \\ 2\ddot{u}_2(t) - 32\omega_0^2 u_1(t) + 32\omega_0^2 u_2(t) &= 0. \end{aligned} \quad (13.2.28)$$

Φυσικά πρόκειται, δυστυχώς, για ένα **συζευγμένο** σύστημα δύο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με δύο άγνωστες συναρτήσεις: τις δύο μετατοπίσεις  $u_1(t)$  και  $u_2(t)$  των πλακών του διώροφου ιδεατού κτιρίου διατμήσεως που εξετάζουμε. Για να το λύσουμε, θα δούμε ότι μπορούμε να το αποσυζεύξουμε με τη μέθοδο της διαγωνιοποίησης (ή αποσυζεύξεως) ή να το λύσουμε κατευθείαν με τη μέθοδο της τριγωνομετρικής (ή της εκθετικής) αντικαταστάσεως ή κάποια άλλη μέθοδο. Τούτο όμως (η επίλυση του συστήματος) θα γίνει παρακάτω στο παρόν Κεφάλαιο A13. ▲

Για την καλύτερη κατανόηση της παρούσας Εφαρμογής A13.1 παραθέτουμε και το Σχήμα A13.1 με τα στοιχεία (13.2.16) έως (13.2.18) του παρόντος ιδεατού δώροφου κτιρίου διατμήσεως (ή διατμητικού κτιρίου). Οι επόμενες δύο ενότητες θα είναι αφιερωμένες στην επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (13.2.26) ή (13.2.27) ή (13.2.28) με πέντε διαφορετικές μεθόδους.



**Σχήμα A13.1:** Γεωμετρία ιδεατού δώροφου κτιρίου διατμήσεως.  
(Το κτίριο προσεγγίζεται από αντίστοιχο επίπεδο πλαίσιο.)

### A13.3. ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΕΙΣΩΣΕΩΝ ΓΙΑ ΤΟ ΔΙΩΡΟΦΟ ΚΤΙΡΙΟ

#### A13.3.1. Εισαγωγικές παρατηρήσεις

Στην προηγούμενη Ενότητα A13.2 αναγάγαμε το πρόβλημα ενός ιδεατού δώροφου κτιρίου διατμήσεως (ή διατμητικού κτιρίου) σε σύστημα δύο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων: (13.2.26) ή (13.2.27) ή (13.2.28). (Σε ένα τέτοιο κτίριο: ένα **κτίριο διατμήσεως** ή **διατμητικό κτίριο**, έχουμε πλήρεις πακτώσεις των υποστυλωμάτων του στις άκαμπτες πλάκες των ορόφων. Αυτές έχουν μόνο τη δυνατότητα οριζόντιας μετατοπίσεως και όχι στροφής.) Οι παραπάνω διαφορικές εξισώσεις προέκυψαν χωρίς φόρτιση του κτιρίου. Άρα αφορούν σε ιδιοταλαντώσεις του και ελεύθερες ταλαντώσεις του γενικότερα, αν λάβουμε υπόψη μας και τυχόν διαθέσιμες αρχικές συνθήκες.

Στην παρούσα ενότητα πρόθεσή μας αποτελεί η επίδειξη των δυνατοτήτων επιλύσεως του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων που προαναφέραμε με τη χρήση της μιας ή της άλλης από τις πέντε μεθόδους του προηγούμενου Κεφαλαίου A12. Αυτές είναι οι μέθοδοι:

- της απαλοιφής: Ενότητα A12.5,
- του μετασχηματισμού Laplace: Ενότητα A12.6,
- της εκθετικής αντικαταστάσεως: Ενότητα A12.7,
- της τριγωνομετρικής αντικαταστάσεως: Ενότητα A12.8 και
- της διαγωνιοποίησης (ή αποσυζεύξεως): Ενότητα A12.9.

Γνωρίζουμε ήδη ότι και οι πέντε αυτές μέθοδοι είναι καταρχήν εφαρμόσιμες στο παρόν πρόβλημα ιδιοταλαντώσεων και ελεύθερων ταλαντώσεων γενικότερα του ιδεατού δώροφου κτιρίου διατμήσεως που εξετάζουμε. Αυτό θα το επιβεβαιώσουμε αμέσως παρακάτω με την εφαρμογή καθεμιάς από τις πέντε αυτές μεθόδους στο παρόν απλό πρόβλημα κτιρίου. Τούτο έχει ήδη αναχθεί στο τελικό σύστημα των δύο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (13.2.28). Ας το επαναλάβουμε

$$\begin{aligned} 3\ddot{u}_1(t) + 59\omega_0^2 u_1(t) - 32\omega_0^2 u_2(t) &= 0, \\ 2\ddot{u}_2(t) - 32\omega_0^2 u_1(t) + 32\omega_0^2 u_2(t) &= 0. \end{aligned} \quad (13.3.1)$$

Πρόθεσή μας αποτελεί να επιχειρήσουμε αμέσως την επίλυσή του εφαρμόζοντας τις μεθόδους που γνωρίζουμε από το προηγούμενο Κεφάλαιο A12. Ξεκινάμε με τη μέθοδο της απαλοιφής.

**A13.3.2. Η μέθοδος της απαλοιφής**

Τη μέθοδο της απαλοιφής την έχουμε ήδη περιγράψει στην Ενότητα A12.5. Εδώ θα την εφαρμόσουμε με συντομία στο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (13.3.1) του ιδεατού διώροφου κτιρίου μας. Σκοπό μας αποτελεί να απαλείψουμε τη μία άγνωστη συνάρτηση, ως υποθέσουμε τη  $u_2(t)$ , μεταξύ των δύο αυτών διαφορικών εξισώσεων (13.3.1). Θα καταλήξουμε έτσι σε μία διαφορική εξίσωση με μία μόνο άγνωστη συνάρτηση, εδώ τη  $u_1(t)$ , αφού η  $u_2(t)$  θα έχει απαλειφθεί.

Για να το πετύχουμε αυτό, λύνουμε την πρώτη διαφορική εξίσωση (13.3.1) ως προς τη δεύτερη άγνωστη συνάρτηση  $u_2(t)$ . Είναι η ευκολότερη δυνατότητα που έχουμε. Προκύπτει αμέσως ότι

$$u_2(t) = \frac{1}{32\omega_0^2} [3\ddot{u}_1(t) + 59\omega_0^2 u_1(t)] \text{ και στη συνέχεια } \ddot{u}_2(t) = \frac{1}{32\omega_0^2} [3u_1^{(4)}(t) + 59\omega_0^2 \ddot{u}_1(t)]. \quad (13.3.2)$$

Παρατηρούμε πως στη δεύτερη παράγωγο  $\ddot{u}_2(t)$  της δεύτερης άγνωστης συναρτήσεώς μας  $u_2(t)$  παρουσιάζεται και η τέταρτη παράγωγος  $u_1^{(4)}(t)$  της πρώτης άγνωστης συναρτήσεώς μας  $u_1(t)$ .

Αντικαθιστούμε τώρα τις εκφράσεις (13.3.2) στη δεύτερη διαφορική εξίσωση (13.3.1). Έτσι καταλήγουμε αμέσως σε μία διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως, στην εξίσωση

$$\frac{1}{16\omega_0^2} [3u_1^{(4)}(t) + 59\omega_0^2 \ddot{u}_1(t)] - 32\omega_0^2 u_1(t) + [3\ddot{u}_1(t) + 59\omega_0^2 u_1(t)] = 0. \quad (13.3.3)$$

Απλοποιώντας την εξίσωση αυτή και πολλαπλασιάζοντάς την επί τη σταθερά  $16\omega_0^2$ , ώστε να φύγει ο παρονομαστής στον πρώτο όρο, παίρνουμε το τελικό αποτέλεσμα

$$3u_1^{(4)}(t) + 107\omega_0^2 \ddot{u}_1(t) + 432\omega_0^4 u_1(t) = 0. \quad (13.3.4)$$

Πρόκειται για μια διαφορική εξίσωση με μία μόνο άγνωστη συνάρτηση: την πρώτη άγνωστη συνάρτηση  $u_1(t)$  στο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (13.3.1). Καταφέραμε λοιπόν και απαλείψαμε τη δεύτερη άγνωστη συνάρτηση  $u_2(t)$ . (Γι' αυτό και η μέθοδος καλείται μέθοδος της απαλοιφής.) Όμως έχουμε ένα σημαντικό κόστος, «πληρώσαμε» για την απαλοιφή αυτή. Συγκεκριμένα η παραπάνω διαφορική εξίσωση (13.3.4) είναι τετάρτης τάξεως, ενώ οι δύο διαφορικές εξισώσεις στο σύστημα (13.3.1) ήταν μόλις δευτέρας τάξεως. Τί να κάνουμε; Πολλά πράγματα έχουν το κόστος τους. Για παράδειγμα, μια αντισεισμική κατασκευή που εκπονεί τη μελέτη της ο Πολιτικός Μηχανικός ώστε να αντέχει σεισμούς μέχρι τα 8.5 Richter κοστίζει πολύ περισσότερο από την αντίστοιχη αντισεισμική κατασκευή που να αντέχει σεισμούς μόλις μέχρι τα 7.5 Richter.

Από 'δώ και πέρα λύνουμε θαυμάσια τη διαφορική εξίσωσή μας τετάρτης τάξεως (13.3.4) ως προς  $u_1(t)$ . Αυτό συνήθως επιτυγχάνεται με τη γνωστή μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης (για μία μόνο διαφορική εξίσωση) της Ενότητας A5.5 του Κεφαλαίου A5. Εδώ μάλιστα υποθέτουμε ότι  $u_{10}(t) = e^{\mu t}$  και προκύπτει αμέσως η διτετράγωνη χαρακτηριστική εξίσωση

$$p_4(\mu) = 3\mu^4 + 107\omega_0^2 \mu^2 + 432\omega_0^4 = 0. \quad (13.3.5)$$

Αυτή έχει τέσσερις φανταστικές ρίζες (ανά δύο συζυγείς). Οι ακριβείς τιμές τους και οι δεκαδικές προσεγγίσεις τους είναι οι εξής:

$$\begin{aligned} \mu_{1,3} &= \pm \sqrt{\frac{1}{6} (107 - \sqrt{6265})} i\omega_0 \approx \pm 2.15438i\omega_0, \\ \mu_{2,4} &= \pm \sqrt{\frac{1}{6} (107 + \sqrt{6265})} i\omega_0 \approx \pm 5.57004i\omega_0. \end{aligned} \quad (13.3.6)$$

Συνήθως δε μας πολυαρέσει να βλέπουμε τη φανταστική μονάδα  $i = \sqrt{-1}$  (με  $i^2 = -1$ ) σε προβλήματα ταλαντώσεων κατασκευών (εδώ ενός ιδεατού διώροφου κτιρίου διατμήσεως) χωρίς απόσβεση. Θα ήταν επομένως πιο έξυπνο να την είχαμε ενσωματώσει από την αρχή στην εκθετική αντικατάσταση  $u_{10}(t)$  που υποθέσαμε γράφοντας  $u_{10}(t) = e^{i\omega t}$ , δηλαδή κατευθείαν με  $\mu = i\omega$ .

Τότε η πιο πάνω διτετράγωνη χαρακτηριστική εξίσωση  $p_4(\mu) = 0$  θα έπερνε, όπως εύκολα διαπιστώνεται με τη δεύτερη αυτή εκθετική αντικατάσταση, την παραπλήσια μορφή της

$$p_4^*(\omega) = 3\omega^4 - 107\omega_0^2\omega^2 + 432\omega_0^4 = 0. \quad (13.3.7)$$

Τώρα οι τέσσερις ρίζες  $\omega_{1,2,3,4}$  θα είναι πραγματικές και θα έχουν τις δεκαδικές προσεγγίσεις

$$\omega_{1,3} \approx \pm 2.15438\omega_0 \quad \text{και} \quad \omega_{2,4} \approx \pm 5.57004\omega_0 \quad (13.3.8)$$

χωρίς πια το  $i = \sqrt{-1}$  σ' αυτές. Ίσως ο Πολιτικός Μηχανικός να αισθάνεται λίγο πιο άνετα τώρα.

Είτε έτσι είτε αλλιώς η γενική λύση  $u_1(t)$  της διαφορικής εξίσωσης τετάρτης τάξεως (13.3.4) θα είναι η ακόλουθη:

$$u_1(t) = C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{i\omega_3 t} + C_3 e^{i\omega_2 t} + C_4 e^{i\omega_4 t} = C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_1 t} + C_3 e^{i\omega_2 t} + C_4 e^{-i\omega_2 t}, \quad (13.3.9)$$

όπου υπάρχει πάλι η φανταστική μονάδα  $i$ . Εάν ο Πολιτικός Μηχανικός δε θέλει να τη βλέπει καθόλου (σχεδόν ποτέ δε θέλει!), απλά χρησιμοποιεί και τους τύπους του Euler (1.5.3) και (1.5.4)

$$e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta. \quad (13.3.10)$$

Μετατρέπει έτσι τη λύση  $u_1(t)$  στην τελική της πραγματική μορφή (με νέες αυθαίρετες σταθερές)

$$u_1(t) = D_1 \cos \omega_1 t + D_2 \sin \omega_1 t + D_3 \cos \omega_2 t + D_4 \sin \omega_2 t. \quad (13.3.11)$$

Υπάρχει βέβαια κι η δυνατότητα μιας ακόμη πιο σύντομης, πιο «προωθημένης» μορφής:

$$u_1(t) = E_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1) + E_2 \cos(\omega_2 t - \alpha_2). \quad (13.3.12)$$

Εδώ χρησιμοποιήθηκαν τέσσερις νέες αυθαίρετες σταθερές: οι σταθερές  $E_1$  και  $E_2$  των ευρών ταλαντώσεων και οι σταθερές  $\alpha_1$  και  $\alpha_2$  των γωνιών φάσεως. Όλα αυτά βέβαια ισχύουν, μόνο αν δεν υπάρχει απόσβεση στις παρούσες ιδιοταλαντώσεις και γενικότερα ελεύθερες ταλαντώσεις!

Κι ο «επιλόγος» της παρούσας παραγράφου με εφαρμογή της μεθόδου της απαλοιφής: Μετά την εύρεση της γενικής λύσεως  $u_1(t)$  για την πρώτη άγνωστη συνάρτηση (σε κάποια από τις παραπάνω μορφές της) προκύπτει αμέσως από την πρώτη σχέση (13.3.2) και η δεύτερη άγνωστη συνάρτηση  $u_2(t)$ . Αυτή έχει τώρα τις ίδιες ακριβώς αυθαίρετες σταθερές που είχε και η  $u_1(t)$ . (Εδώ τέσσερις συνολικά αυθαίρετες σταθερές, ας πούμε τις  $D_1, D_2, D_3, D_4$ , επειδή έχουμε δύο διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως η καθεμία. Ή με τον τεχνικό τρόπο σκέψης του Πολιτικού Μηχανικού, επειδή έχουμε δύο πλάκες στους ορόφους του κτιρίου διατήσεως με συγκεντρωμένες τις μάζες τους και η κάθε πλάκα έχει αρχική θέση και αρχική ταχύτητα. Επομένως έχουμε τέσσερις αρχικές συνθήκες, άρα περιμένουμε τέσσερις αυθαίρετες σταθερές στη γενική λύση.) Πάρα πολύ ωραία!

Την τονίζουμε αυτήν τη λέξη «ωραία». Αυτό το κάνουμε, επειδή υπάρχει στα Ελληνικά και η λέξη «άσχημα». Πότε όμως θα ήταν άσχημα; Σύντομη απάντηση: Μετά την εύρεση της γενικής λύσεως  $u_1(t)$  από τη διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως (13.3.4) μπορούμε να επιχειρήσουμε να κάνουμε το ίδιο (ανάλογη απαλοιφή) και για τη δεύτερη άγνωστη συνάρτηση  $u_2(t)$  στο αρχικό μας σύστημα διαφορικών εξισώσεων (13.3.1). (Είναι πολύ σωστό και συνετό αυτό και γίνεται συχνά!) Τότε θα καταλήξουμε, όπως μπορούμε εξάλλου εύκολα να διαπιστώσουμε, στην ίδια ακριβώς διαφορική εξίσωση (13.3.4) για τη δεύτερη άγνωστη συνάρτηση  $u_2(t)$ . Ίδια διαφορική εξίσωση, κατά συνέπεια και ίδια ακριβώς γενική λύση, τώρα όμως για τη δεύτερη άγνωστη συνάρτηση  $u_2(t)$ . Ας τη γράψουμε στη μορφή (13.3.11)

$$u_2(t) = D_1^* \cos \omega_1 t + D_2^* \sin \omega_1 t + D_3^* \cos \omega_2 t + D_4^* \sin \omega_2 t. \quad (13.3.13)$$

Αυθαίρετες είναι οι τέσσερις σταθερές. Μπορούν να πάρουν οποιοσδήποτε τιμές. Τις δηλώσαμε τώρα με τα σύμβολα με αστεράκι:  $D_1^*, D_2^*, D_3^*, D_4^*$ . Και πού καταλήξαμε (ή μάλλον κατανητήσαμε); Καταλήξαμε στο να έχουμε τη λύση (13.3.11) και (13.3.13) του συστήματος των δύο διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξεως (13.3.1) με τέσσερις συν τέσσερις ίσον οκτώ αυθαίρετες σταθερές: τις  $D_1, D_2, D_3, D_4$  και  $D_1^*, D_2^*, D_3^*, D_4^*$ . Αυτό είναι λάθος, πολύ σοβαρό λάθος. Η λύση του συστήματος πρέπει να έχει τέσσερις μόνο αυθαίρετες σταθερές και για μαθηματικούς αλλά και για φυσικούς λόγους: αρχικές θέσεις και αρχικές ταχύτητες των δύο πλακών των ορόφων. Άρα ...;

Άρα πρέπει να αντικαταστήσουμε τις γενικές λύσεις (α) τη (13.3.11) για τη συνάρτηση  $u_1(t)$  και (β) τη (13.3.13) για τη συνάρτηση  $u_2(t)$  στην πρώτη διαφορική εξίσωση (ή εναλλακτικά στη δεύτερη διαφορική εξίσωση) του συστήματος (13.3.1). Τότε θα διαπιστώσουμε από τη διαφορική αυτή εξίσωση (που πρέπει βέβαια να επαληθεύεται εκ ταυτότητας, ώστε να ισχύει) ότι οι τέσσερις δεύτερες σταθερές  $D_1^*, D_2^*, D_3^*, D_4^*$  μπορούν να εκφραστούν εύκολα συναρτήσει των τεσσάρων πρώτων σταθερών  $D_1, D_2, D_3, D_4$  (ή αντίστροφα). Επομένως τελικά μας απομένουν τέσσερις μόνο σταθερές και είμαστε ευχαριστημένοι που απαλλαγίκαμε από τις άλλες τέσσερις, ας πούμε από τις  $D_1^*, D_2^*, D_3^*, D_4^*$ . Κάπου εδώ πρέπει να κλείσουμε την παράγραφο αυτή. Προχωράμε τώρα στις επόμενες και πιο σημαντικές για τον Πολιτικό Μηχανικό μεθόδους επιλύσεως του ίδιου συστήματος διαφορικών εξισώσεων (13.3.1). Κι αλίμονό μας, αν καταλήξουμε σε διαφορετικές λύσεις! Χαθήκαμε, γελοιοποιηθήκαμε ... Ας προσέχουμε λοιπόν. Διώροφο κτίριο έχουμε, όχι παιχνίδι!

### A13.3.3. Η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace

Τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace την αναπτύξαμε όχι μόνο στα Κεφάλαια A10 και A11, αλλά και στην Ενότητα A12.6 του Κεφαλαίου A12, σ' αυτήν ειδικά για συστήματα διαφορικών εξισώσεων. Εκεί την παρουσιάσαμε πολύ αναλυτικά και σε ένα παράδειγμα συστήματος διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως, χωρίς όμως συνάφεια με την Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Ήρθε τώρα η στιγμή να την επιδείξουμε (κάπως σύντομα όμως για οικονομία χώρου ...) και στο παρόν παράδειγμα του ιδεατού διώροφου κτιρίου διατμήσεως της Εφαρμογής A13.1. Αυτή κατέληξε στο σύστημα των δύο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές (13.2.28), το οποίο και ξαναδηλώσαμε στην παρούσα ενότητα και σαν σύστημα (13.3.1). Το ξαναξαναυπενθυμίζουμε

$$\begin{aligned} 3\ddot{u}_1(t) + 59\omega_0^2 u_1(t) - 32\omega_0^2 u_2(t) &= 0, \\ 2\ddot{u}_2(t) - 32\omega_0^2 u_1(t) + 32\omega_0^2 u_2(t) &= 0. \end{aligned} \quad (13.3.14)$$

Αρκετή η εισαγωγή αυτή! Προχωράμε! Θα μετατρέψουμε τώρα το σύστημα αυτό από σύστημα δύο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (με σταθερούς συντελεστές εννοείται) σε σύστημα δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Καταρχήν δηλώνουμε τους μετασχηματισμούς Laplace

$$U_1(s) = \mathcal{L}\{u_1(t)\} \quad \text{και} \quad U_2(s) = \mathcal{L}\{u_2(t)\}. \quad (13.3.15)$$

Θεωρούμε επίσης και τις τέσσερις αρχικές συνθήκες για  $t = 0$ : δύο θέσεις και επίσης δύο ταχύτητες

$$u_1(0) = u_{10}, \quad \dot{u}_1(0) = v_{10}, \quad u_2(0) = u_{20}, \quad \dot{u}_2(0) = v_{20} \quad (13.3.16)$$

για τις δύο άκαμπτες πλάκες των δύο ορόφων του ιδεατού διώροφου κτιρίου διατμήσεως που έχουμε. Ανακαλούμε στη μνήμη μας (και στο χαρτί ή στην οθόνη, αν την προτιμάμε) και το θεμελιώδη τύπο (10.3.69) για το μετασχηματισμό Laplace της δευτέρας παραγωγής συναρτήσεως  $u(t)$ :

$$\mathcal{L}\{\ddot{u}(t)\} = s^2 U(s) - su(0) - \dot{u}(0) \quad \text{εννοείται με} \quad U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}. \quad (13.3.17)$$

(Εδώ το γράφουμε με τελείες αντί για τόνους για την παράγωγο: δεύτερη χρονική παράγωγος  $\ddot{u}(t)$ .)

Εφαρμόζουμε τώρα τον τύπο αυτό μαζί με τους συμβολισμούς (13.3.15) για τους δύο μετασχηματισμούς Laplace  $U_1(s)$  και  $U_2(s)$  καθώς και τις τέσσερις αρχικές συνθήκες (13.3.16) στο σύστημα

των δύο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (13.3.14) για το ιδεατό δώροφο κτίριό μας. Με τον τρόπο αυτό οδηγούμαστε αμέσως στο σύστημα των δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} 3[s^2 U_1(s) - su_{10} - v_{10}] + 59\omega_0^2 U_1(s) - 32\omega_0^2 U_2(s) &= 0, \\ 2[s^2 U_2(s) - su_{20} - v_{20}] - 32\omega_0^2 U_1(s) + 32\omega_0^2 U_2(s) &= 0. \end{aligned} \quad (13.3.18)$$

Μπορούμε βέβαια να το γράψουμε και στην ακόλουθη τελική του μορφή:

$$\begin{aligned} (3s^2 + 59\omega_0^2)U_1(s) - 32\omega_0^2 U_2(s) &= 3su_{10} + 3v_{10}, \\ -32\omega_0^2 U_1(s) + (2s^2 + 32\omega_0^2)U_2(s) &= 2su_{20} + 2v_{20}. \end{aligned} \quad (13.3.19)$$

Ένα απλό «συστηματάκι» δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων είναι. Το λύνουμε αμέσως με απαλοιφή ή καλύτερα με τον κανόνα του Cramer. Προσδιορίζουμε έτσι τους μετασχηματισμούς Laplace  $U_1(s)$  και  $U_2(s)$  των δύο άγνωστων συναρτήσεων  $u_1(t)$  και  $u_2(t)$  αντίστοιχα. Στη συνέχεια με αντιστροφή των μετασχηματισμών αυτών Laplace  $U_1(s)$  και  $U_2(s)$  προσδιορίζουμε τις ίδιες τις άγνωστες συναρτήσεις  $u_1(t)$  και  $u_2(t)$ . Έχουμε έτσι επιλύσει πλήρως το σύστημα των δύο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (13.3.14). Δε θα υπεισέλθουμε στις σχετικές λεπτομέρειες, που είναι λίγο-πολύ τετριμμένες. Αρκετά έχουμε εξασκηθεί ήδη σε αντιστροφές μετασχηματισμών Laplace. Υπάρχουν εξάλλου και τα προγράμματα συμβολικών υπολογισμών από ένα σημείο υπολογιστικής δυσκολίας και μετά ...! Για παράδειγμα, για ένα δεκαώροφο ιδεατό κτίριο διατμήσεως κι ακόμη πιο πέρα, αν αφαιρέσουμε τη λέξη διατμήσεως και μειώσουμε λιγάκι ακόμη και τις παραδοχές στη λέξη ιδεατό. Και αυξάνεται με τον τρόπο αυτό (δηλαδή με ολοένα και λιγότερες παραδοχές) ο αριθμός των διαφορικών εξισώσεων στο σύστημα που προσομοιάζει το κτίριο. Και χρειάζεται τον υπολογιστή ο μελετητής Πολιτικός Μηχανικός που εκπονεί τη μελέτη μιας κατασκευής της ειδικότητάς του. Σίγουρα το χρειάζεται. Αυτή είναι η πραγματικότητα για σύγχρονες αντισεισμικές κατασκευές με πάρα-πάρα πολλούς βαθμούς ελευθερίας. Δε μπορεί να κρύβεται κανείς πίσω από το δάχτυλό του! Συμπληρώνουμε την παράγραφο αυτή με τρεις σημαντικές παρατηρήσεις:

► **Παρατήρηση A13.4:** Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace (όπως και η προηγούμενη μέθοδος της απαλοιφής) είναι γενική μέθοδος. Εννοούμε ότι είναι εφαρμόσιμη τόσο για ομογενή όσο και για μη ομογενή συστήματα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, δηλαδή και σε περιπτώσεις εξωτερικών φορτίσεων των πλακών του κτιρίου: είτε (α) αληθινών: π.χ. ισχυρός άνεμος είτε (β) αδρανειακών: π.χ. σεισμική φόρτιση, που φθάνει στις πλάκες μέσω του εδάφους. Δυστυχώς οι μέθοδοι των επόμενων δύο παραγράφων: η εκθετική αντικατάσταση (η τρίτη μέθοδος) και η τριγωνομετρική αντικατάσταση (η τέταρτη μέθοδος) είναι εφαρμόσιμες μόνο σε ομογενή συστήματα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Αντίθετα η πέμπτη μέθοδος: της διαγωνιοποίησης (ή αποσυζεύξεως) στην επόμενη Ενότητα A13.4 θα μας ξαναδώσει τη δυνατότητα εφαρμογής και σε μη ομογενή συστήματα. Για τα μη ομογενή συστήματα υπάρχουν βέβαια και οι μέθοδοι (α) των προσδιοριστέων συντελεστών και (β) της μεταβολής των παραμέτρων. Τούτες αποτελούν γενικεύσεις των όσων έχουμε ήδη αναφέρει στις Ενότητες A5.8 και A5.9 του Κεφαλαίου A5 αντίστοιχα για απλές διαφορικές εξισώσεις. Αυτές τις μεθόδους δε θα τις αναπτύξουμε εδώ, παρόλο που δεν παρουσιάζουν κάποια ιδιαίτερη δυσκολία: απλά γενικεύσεις είναι!

► **Παρατήρηση A13.5:** Είναι ίσως αυτονόητο, αλλά το ξαναλέμε: Στη λύση  $u_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_1(s)\}$  και  $u_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_2(s)\}$  του συστήματος των δύο διαφορικών εξισώσεων (13.3.14) παρουσιάζονται οι τέσσερις αρχικές συνθήκες  $u_{10}$ ,  $v_{10}$ ,  $u_{20}$  και  $v_{20}$ . Άμα τις ξέρουμε, πάει καλά: προσδιορίσαμε τη λύση ολόκληρου του προβλήματος αρχικών τιμών που λύνουμε. Άμα δεν τις ξέρουμε, τότε έχουμε προσδιορίσει απλά τη γενική λύση του συστήματος (13.3.14) με τέσσερις αυθαίρετες σταθερές σ' αυτήν: τις άγνωστες αρχικές συνθήκες  $u_{10}$ ,  $v_{10}$ ,  $u_{20}$  και  $v_{20}$ . Εάν κάποτε τις μάθουμε (ή τις μετρήσουμε), γυρίζουμε στη μερική λύση (υπό συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες). Όσο ακόμη δεν τις ξέρουμε, ας είμαστε ευχαριστημένοι που έχουμε τουλάχιστον τη γενική λύση διαθέσιμη. Αυτά!

► **Παρατήρηση A13.6:** Και η τρίτη και τελευταία παρατήρηση: η πιο σημαντική απ' όλες και την αφήσαμε τελευταία ... Ντροπή μας! Ας δούμε λιγάκι καλύτερα το σύστημα των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (13.3.19) που βρήκαμε. Ας υποθέσουμε ότι εφαρμόσαμε τον κανόνα του Cramer για την επίλυσή του ως προς τους άγνωστους μετασχηματισμούς Laplace  $U_1(s)$  και  $U_2(s)$ . Ποια ακριβώς ήταν η ορίζουσα  $\Delta = \Delta(s)$  στους παρονομαστές μ' αυτήν τη μέθοδο; Μα η ορίζουσα

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} 3s^2 + 59\omega_0^2 & -32\omega_0^2 \\ -32\omega_0^2 & 2s^2 + 32\omega_0^2 \end{vmatrix} = 2(3s^4 + 107\omega_0^2s^2 + 432\omega_0^4). \quad (13.3.20)$$

Ουσιαστικά προέκυψε το ίδιο το χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $p_4(\mu)$  στην προηγούμενη μέθοδο της απαλοιφής στη σχέση (13.3.5) (και με ένα μείον:  $-107$ , το πολυώνυμο  $p_4^*(\omega)$  στη σχέση (13.3.7)):

$$p_4(\mu) = 3\mu^4 + 107\omega_0^2\mu^2 + 432\omega_0^4 = 0 \quad \text{με } s \text{ αντί } \mu \text{ και επί } 2: \quad \Delta(s) = 2p_4(s). \quad (13.3.21)$$

Έχουμε συμφωνία λοιπόν:  $\Delta(s) = 2p_4(s)$ . Και πού το πάμε τώρα; Λίγο ακόμη πιο πέρα: Γνωρίζοντας πια τις ρίζες  $\mu_{1,3} = \pm i\omega_1$  και  $\mu_{2,4} = \pm i\omega_2$ , άρα  $\mu_{1,3}^2 = -\omega_1^2$  και  $\mu_{2,4}^2 = -\omega_2^2$ , παραγοντοποιούμε την πιο πάνω ορίζουσα  $\Delta(s)$  (τον παρονομαστή στον κανόνα του Cramer) ως εξής:

$$\Delta(s) = 2(3s^4 + 107\omega_0^2s^2 + 432\omega_0^4) = 6(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2). \quad (13.3.22)$$

Κατά την αντιστροφή των μετασχηματισμών Laplace  $U_1(s) = \mathcal{L}\{u_1(t)\}$  και  $U_2(s) = \mathcal{L}\{u_2(t)\}$  αυτή η παραγοντοποίηση μας δείχνει σαφώς ότι στα σχετικά απλά κλάσματα θα έχουμε παρονομαστές τις εκφράσεις  $s^2 + \omega_1^2$  και  $s^2 + \omega_2^2$ : με συν και οι δύο εδώ. Άρα οι αντιστροφές  $u_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_1(s)\}$  και  $u_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_2(s)\}$  θα οδηγήσουν σίγουρα σε τριγωνομετρικές συναρτήσεις (και όχι σε υπερβολικές συναρτήσεις). Αυτές τις δύο τριγωνομετρικές συναρτήσεις τις βρήκαμε ήδη στις σχέσεις (13.3.11) και (13.3.13). Μπορούμε ασφαλώς να τις βρούμε κι εδώ με αντιστροφές των μετασχηματισμών Laplace  $U_1(s)$  και  $U_2(s)$  σε ισοδύναμες μορφές: εδώ με χρήση των αρχικών συνθηκών  $u_{10}, v_{10}, u_{20}$  και  $v_{20}$  σαν σταθερών στις λύσεις  $u_1(t)$  και  $u_2(t)$  (είτε γενικές είτε μερικές: υπολογιστικά το ίδιο είναι!). Κι ανάποδα. Αν είχαμε παρονομαστές με πλην: π.χ.  $s^2 - a^2$ , ε τότε αλίμονό μας! Έχουμε κάνει πολύ σημαντικό λάθος και θα οδηγηθούμε σε υπερβολικές συναρτήσεις (ή σε πραγματικές εκθετικές συναρτήσεις) σε ένα πρόβλημα ελεύθερων ταλαντώσεων χωρίς απόσβεση. Ας προσέχει λοιπόν πάρα πολύ ο Πολιτικός Μηχανικός, ώστε ποτέ μα ποτέ του να μην κάνει ένα τέτοιο λάθος!

#### A13.3.4. Η μέθοδος της εκθετικής αντικαταστάσεως

Τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως για συστήματα διαφορικών εξισώσεων την εξετάσαμε λεπτομερώς στην Ενότητα A12.7 του προηγούμενου Κεφαλαίου A12 και την επιδείξαμε εκεί σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Εδώ την εφαρμόζουμε στο πρόβλημα του ιδεατού διώροφου κτιρίου διατήσεως σε ιδιοταλαντώσεις και γενικότερα σε ελεύθερες ταλαντώσεις που εξετάζουμε. Επαναλαμβάνουμε για διευκόλυνση το σύστημα των δύο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξεως με σταθερούς συντελεστές (13.2.28), στο οποίο έχουμε αναγάγει το πρόβλημα αυτό στην Εφαρμογή A13.1:

$$\begin{aligned} 3\ddot{u}_1(t) + 59\omega_0^2u_1(t) - 32\omega_0^2u_2(t) &= 0, \\ 2\ddot{u}_2(t) - 32\omega_0^2u_1(t) + 32\omega_0^2u_2(t) &= 0. \end{aligned} \quad (13.3.23)$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως, δοκιμάζουμε μερική λύση της εκθετικής μορφής

$$u_{10}(t) = Ae^{\mu t} \quad \text{και} \quad u_{20}(t) = Be^{\mu t} \quad (13.3.24)$$

για τις δύο άγνωστες συναρτήσεις (τις οριζόντιες μετατοπίσεις των δύο άκαμπτων πλακών του διώροφου κτιρίου μας)  $u_1(t)$  και  $u_2(t)$  αντίστοιχα. Στις εκθετικές αυτές δοκιμαστικές λύσεις τόσο η σταθερά  $\mu$  στον εκθέτη όσο και οι συντελεστές  $A$  και  $B$  είναι άγνωστες προς το παρόν σταθερές.



Τώρα βέβαια αντικαθιστούμε τις εκφράσεις (13.3.24) στο σύστημα των δύο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (13.3.23) του ιδεατού διώροφου κτιρίου διατμήσεως και βρίσκουμε αμέσως ότι

$$\begin{aligned} 3\mu^2 Ae^{\mu t} + 59\omega_0^2 Ae^{\mu t} - 32\omega_0^2 Be^{\mu t} &= 0, \\ 2\mu^2 Be^{\mu t} - 32\omega_0^2 Ae^{\mu t} + 32\omega_0^2 Be^{\mu t} &= 0. \end{aligned} \quad (13.3.25)$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα τον εκθετικό όρο  $e^{\mu t}$ , ξαναγράφουμε το ίδιο σύστημα στη μορφή

$$\begin{aligned} (3\mu^2 A + 59\omega_0^2 A - 32\omega_0^2 B)e^{\mu t} &= 0, \\ (2\mu^2 B - 32\omega_0^2 A + 32\omega_0^2 B)e^{\mu t} &= 0. \end{aligned} \quad (13.3.26)$$

Αρκετά ωραία ως εδώ! Ωραία, γιατί κάναμε τη σωστή σκέψη να έχουμε θέσει την ίδια σταθερά  $\mu$  στον εκθέτη των όρων  $e^{\mu t}$  και στις δύο συναρτήσεις (13.3.24) που δοκιμάζουμε. Αυτό είναι κρίσιμο για την παραγοντοποίηση (13.3.26) και στη συνέχεια για την επιτυχία της μεθόδου της εκθετικής αντικαταστάσεως. Δύο διαφορετικοί εκθέτες  $\mu$  θα οδηγούσαν σε πλήρη αποτυχία τη μέθοδο.

Και τώρα σκεφτόμαστε ... Θέλουμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (13.3.23) να ισχύει για τιμές του  $t$  σε ένα χρονικό διάστημα, έστω στο διάστημα  $[0, \infty)$ . Επειδή όμως ο εκθετικός όρος  $e^{\mu t}$  μεταβάλλεται με το χρόνο  $t$  (ακόμη και για μιγαδικές τιμές της σταθεράς  $\mu$ ), θα πρέπει στις δύο σχέσεις (13.3.26) να μηδενίζονται οπωσδήποτε οι συντελεστές του όρου αυτού  $e^{\mu t}$ . Δηλαδή θα πρέπει να ισχύει το ακόλουθο ομογενές σύστημα των δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned} (3\mu^2 + 59\omega_0^2)A - 32\omega_0^2 B &= 0, \\ -32\omega_0^2 A + (2\mu^2 + 32\omega_0^2)B &= 0. \end{aligned} \quad (13.3.27)$$

Άγνωστοι είναι οι δύο συντελεστές  $A$  και  $B$  των εκθετικών αντικαταστάσεων (13.3.24).

Κι αν μεν θεωρήσουμε την προφανή μηδενική λύση  $A = B = 0$  του τελευταίου συστήματος, έχει καλώς. Παίρνουμε έτσι τη μηδενική λύση  $u_1(t) \equiv u_2(t) \equiv 0$  του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (13.3.23). Πρόκειται για τετριμμένη λύση, η οποία απλά εκφράζει την πλήρη απουσία ταλαντώσεων στο διώροφο κτίριο. Τούτο είναι πολύ ευχάριστο για τον Πολιτικό Μηχανικό, αλλά δυστυχώς όχι και απόλυτα αναγκαίο. Υπάρχει πραγματικά και η δυνατότητα μη μηδενικής λύσεως του ομογενούς συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων (13.3.27). Αυτό όμως μπορεί να συμβεί, μόνο εφόσον η ορίζουσα  $\Delta = \Delta(\mu)$  των συντελεστών των αγνώστων  $A$  και  $B$  είναι μηδενική, δηλαδή όταν

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} 3\mu^2 + 59\omega_0^2 & -32\omega_0^2 \\ -32\omega_0^2 & 2\mu^2 + 32\omega_0^2 \end{vmatrix} = 2(3\mu^4 + 107\omega_0^2\mu^2 + 432\omega_0^4) = 0. \quad (13.3.28)$$

Βρήκαμε ξανά το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο με εκείνο το οποίο είχαμε προσδιορίσει στη σχέση (13.3.5) στην προπροηγούμενη Παράγραφο A13.3.2, εκεί με τη μέθοδο της απαλοιφής:

$$p_4(\mu) = 3\mu^4 + 107\omega_0^2\mu^2 + 432\omega_0^4 = 0, \quad \text{εδώ επί 2: } \Delta(\mu) = 2p_4(\mu). \quad (13.3.29)$$

Επίσης προέκυψε η ίδια ακριβώς ορίζουσα  $\Delta(\mu)$  με εκείνη που είχαμε βρει στην προηγούμενη Παράγραφο A13.3.3, εκεί με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace (ορίζουσα (13.3.20)), εδώ απλά με  $\mu$  αντί για  $s$ :  $\Delta(\mu)$  αντί για  $\Delta(s)$ . Είναι προφανές αυτό, αφού διαλέξαμε το σύμβολο  $\mu$  σαν σταθερά στον εκθέτη  $\mu t$ . Πολύ καλά τα πάμε λοιπόν. Υπάρχει συμφωνία και των τριών μεθόδων ως προς τη χαρακτηριστική εξίσωση. Το ίδιο θα γίνει και παρακάτω, το ελπίζουμε τουλάχιστον: τόσο λίγη αγωνία δε βλάπτει, και με τις δύο μεθόδους που μας απομένουν να εφαρμόσουμε: τις μεθόδους της τριγωνομετρικής αντικαταστάσεως και της διαγωνιοποίησεως (ή της αποσυζεύξεως.)

Ήδη από τις σχέσεις (13.3.6) και (13.3.8) γνωρίζουμε πολύ καλά τις τέσσερις ρίζες της χαρακτηριστικής εξισώσεως  $\Delta(\mu) = 0$ . Τις υπενθυμίζουμε

$$\mu_{1,3} = \pm i\omega_1 \approx \pm 2.15438i\omega_0 \quad \text{και} \quad \mu_{2,4} = \pm i\omega_2 \approx \pm 5.57004i\omega_0 \quad (13.3.30)$$

με

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{και επίσης} \quad \omega_1 \approx 2.15438\omega_0 \quad \text{και} \quad \omega_2 \approx 5.57004\omega_0. \quad (13.3.31)$$

Αυτές είναι οι **ιδιοσυχνότητες** στο παρόν πρόβλημα ταλαντώσεων ενός ιδεατού δώροφου κτιρίου: οι δύο ιδιοσυχνότητες του κτιρίου  $\omega_1$  και  $\omega_2$  (εννοείται **κυκλικές ιδιοσυχνότητες**). Η μικρότερη από αυτές, εδώ όπως και συνήθως η  $\omega_1$ , καλείται **θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα**. Εδώ υπολογίσαμε τις δύο ιδιοσυχνότητες  $\omega_1$  και  $\omega_2$  (με αρκετές όμως παραδοχές για το ιδεατό δώροφο κτίριο διατήσεως). Άλλη δυνατότητα του Πολιτικού Μηχανικού είναι να τις μετρήσει πειραματικά.

Για τις πιο πάνω τιμές  $\mu_{1,2,3,4}$  της σταθεράς  $\mu$  στον εκθέτη του όρου  $e^{\mu t}$  είναι προφανές ότι το ομογενές σύστημα των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (13.3.27) θα έχει μη μηδενική λύση ως προς τους αγνώστους  $A$  και  $B$ . Ακριβέστερα θα έχει μία απειρία μη μηδενικών λύσεων με προσέγγιση σταθεράς  $c$ . Δηλαδή δε μπορούν να προσδιορισθούν πλήρως και οι δύο άγνωστοι  $A$  και  $B$ . Πρέπει να γίνει κάποια **κανονικοποίηση**. Στα κτίρια προτιμάται συχνά η κανονικοποίηση αυτή να αφορά (α) σε μοναδιαίο εύρος  $B = 1$  των ταλαντώσεων της πλάκας του δευτέρου ορόφου, όπου θεωρείται συγκεντρωμένη η μάζα του δευτέρου ορόφου, γενικότερα του τελευταίου ορόφου.

Πέρα από την κανονικοποίηση (α) με  $B = 1$  υπάρχουν άλλες δύο ενδιαφέρουσες κανονικοποιήσεις. Αυτές αφορούν: (β) στην επιλογή του απόλυτα μεγαλύτερου αγνώστου ίσου με τη μονάδα ανεξάρτητα από τον όροφο όπου παρουσιάζεται και (γ) σπανιότερα στην επιλογή του μέτρου του διανύσματος στήλης  $\boldsymbol{\varphi}$  των αγνώστων  $\boldsymbol{\varphi} = [A \ B]^T$  ίσου με τη μονάδα, δηλαδή εδώ  $A^2 + B^2 = 1$ . Τούτη η τρίτη κανονικοποίηση είναι η κλασική κανονικοποίηση στη Γραμμική Άλγεβρα με μεγάλη χρήση και στα υπολογιστικά προγράμματα. Δεν έχει όμως ιδιαίτερη χρήση και στις Ταλαντώσεις και στη Δυναμική των Κατασκευών. Εδώ επιλέγουμε την πρώτη κανονικοποίηση: αυτή με  $B = 1$ . Έτσι από την πρώτη ή τη δεύτερη ομογενή γραμμική αλγεβρική εξίσωση (13.3.27) προσδιορίζουμε τον άγνωστο  $A$ . Αμέσως προκύπτουν οι δύο τιμές (εννοείται με  $B = 1$ , όπως έχουμε ήδη υποθέσει)

$$A = A_1 \approx 0.709914 \quad \text{για} \quad \mu^2 = \mu_{1,3}^2 = -\omega_1^2 \quad \text{και} \quad A = A_2 \approx -0.939081 \quad \text{για} \quad \mu^2 = \mu_{2,4}^2 = -\omega_2^2. \quad (13.3.32)$$

Άρα κατάλληλα διανύσματα στήλης  $\boldsymbol{\varphi} = [A \ B]^T$  για τους αγνώστους  $A$  και  $B$  (με  $B = 1$ ) είναι τα δύο ιδιοδιανύσματα  $\boldsymbol{\varphi}_1 = [A_1 \ 1]^T$  και  $\boldsymbol{\varphi}_2 = [A_2 \ 1]^T$  και με τις δεκαδικές προσεγγίσεις (13.3.32):

$$\boldsymbol{\varphi}_1 = \begin{Bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 0.709914 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\varphi}_2 = \begin{Bmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{22} \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} -0.939081 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (13.3.33)$$

το  $\boldsymbol{\varphi}_1$  για  $\mu = \mu_{1,3}$  και το  $\boldsymbol{\varphi}_2$  για  $\mu = \mu_{2,4}$ . Σημειώνουμε ότι τα ιδιοδιανύσματα αυτά ο Πολιτικός Μηχανικός τα αποκαλεί **ιδιομορφές ταλαντώσεως** ή απλούστερα (και συχνότερα) **ιδιομορφές**.

Επομένως ως εδώ έχουμε τις εξής τέσσερις διαφορετικές λύσεις του αρχικού μας συστήματος γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (13.3.23)

$$u_{11}(t) = A_1 e^{i\omega_1 t} \quad \text{και} \quad u_{21}(t) = e^{i\omega_1 t}, \quad (13.3.34)$$

$$u_{12}(t) = A_1 e^{-i\omega_1 t} \quad \text{και} \quad u_{22}(t) = e^{-i\omega_1 t}, \quad (13.3.35)$$

$$u_{13}(t) = A_2 e^{i\omega_2 t} \quad \text{και} \quad u_{23}(t) = e^{i\omega_2 t}, \quad (13.3.36)$$

$$u_{14}(t) = A_2 e^{-i\omega_2 t} \quad \text{και} \quad u_{24}(t) = e^{-i\omega_2 t} \quad (13.3.37)$$

με  $A_1 \approx 0.709914$  και  $A_2 \approx -0.939081$  με βάση τις αριθμητικές τιμές στις σχέσεις (13.3.32).

Το σύστημα των δύο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (13.3.23) είναι ομογενές. Επομένως είναι προφανές πως ο γραμμικός συνδυασμός των παραπάνω τεσσάρων λύσεων  $u_{1k}(t)$  και  $u_{2k}(t)$  (με  $k = 1, 2, 3, 4$ ) για τις οριζόντιες μετατοπίσεις των πλακών των δύο ορόφων (πρώτου και δευτέρου αντίστοιχα), θα είναι κι αυτός λύση. Άρα συνολικά θα έχουμε τη γενική λύση

$$u_1(t) = \sum_{k=1}^4 E_k u_{1k}(t) \equiv E_1 u_{11}(t) + E_2 u_{12}(t) + E_3 u_{13}(t) + E_4 u_{14}(t), \quad (13.3.38)$$

$$u_2(t) = \sum_{k=1}^4 E_k u_{2k}(t) \equiv E_1 u_{21}(t) + E_2 u_{22}(t) + E_3 u_{23}(t) + E_4 u_{24}(t). \quad (13.3.39)$$

Τονίζουμε ότι δεν προσθέσαμε απλά τις τέσσερις πιο πάνω λύσεις για τις δύο άγνωστες συναρτήσεις  $u_1(t)$  και  $u_2(t)$ : πήραμε το γραμμικό συνδυασμό τους. Στο γραμμικό αυτό συνδυασμό στην πρώτη λύση βάλουμε σταθερά  $E_1$ , στη δεύτερη  $E_2$ , στην τρίτη  $E_3$  και τέλος στην τέταρτη  $E_4$ . Αυτές οι τέσσερις σταθερές  $E_1, E_2, E_3$  και  $E_4$  μπορούν βέβαια να προσδιορισθούν στο σχετικό πρόβλημα αρχικών τιμών από τις τέσσερις γνωστές αρχικές συνθήκες (13.3.16):  $u_{10}, v_{10}, u_{20}$  και  $v_{20}$ .

Συνήθως βέβαια ο Πολιτικός Μηχανικός αντιπαθεί τις μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (13.3.34) έως (13.3.37) και τους τύπους του Euler (13.3.10), ξαναγράφει εύκολα (με νέες σταθερές τώρα) την πιο πάνω γενική λύση στην ισοδύναμη τριγωνομετρική μορφή

$$u_1(t) = F_1 A_1 \cos \omega_1 t + F_2 A_1 \sin \omega_1 t + F_3 A_2 \cos \omega_2 t + F_4 A_2 \sin \omega_2 t, \quad (13.3.40)$$

$$u_2(t) = F_1 \cos \omega_1 t + F_2 \sin \omega_1 t + F_3 \cos \omega_2 t + F_4 \sin \omega_2 t \quad (13.3.41)$$

βέβαια με τέσσερις νέες αυθαίρετες σταθερές: τις  $F_1, F_2, F_3$  και  $F_4$  αντί για τις  $E_1, E_2, E_3$  και  $E_4$ .

Εισάγουμε τώρα στη λύση αυτή τις αριθμητικές τιμές (13.3.31) και (13.3.32) για τις σταθερές  $\omega_{1,2}$  και  $A_{1,2}$  αντίστοιχα. (Ήδη θέσαμε  $B = B_1 = B_2 = 1$ .) Έτσι διαθέτουμε και την προσεγγιστική μορφή της λύσεως αυτής (υπενθυμίζουμε με  $\omega_0 = \sqrt{k_0/m_0}$  από τη δεύτερη σχέση (13.2.27)):

$$u_1(t) \approx 0.709914[F_1 \cos(2.15438\omega_0 t) + F_2 \sin(2.15438\omega_0 t)] - 0.939081[F_3 \cos(5.57004\omega_0 t) + F_4 \sin(5.57004\omega_0 t)], \quad (13.3.42)$$

$$u_2(t) \approx F_1 \cos(2.15438\omega_0 t) + F_2 \sin(2.15438\omega_0 t) + F_3 \cos(5.57004\omega_0 t) + F_4 \sin(5.57004\omega_0 t). \quad (13.3.43)$$

Μπορεί ο Πολιτικός Μηχανικός να μην είναι ευχαριστημένος ούτε με την τριγωνομετρική αυτή μορφή της λύσεως. Τότε τη γράφει σε ισοδύναμη γραφή με την εισαγωγή των συνολικών (μη αρνητικών) ευρών ταλαντώσεως  $H_1$  και  $H_2$  και των αντίστοιχων γωνιών φάσεως  $\alpha_1$  και  $\alpha_2$ . Έτσι παίρνει

$$u_1(t) \approx 0.709914 H_1 \cos(2.15438\omega_0 t - \alpha_1) - 0.939081 H_2 \cos(5.57004\omega_0 t - \alpha_2), \quad (13.3.44)$$

$$u_2(t) \approx H_1 \cos(2.15438\omega_0 t - \alpha_1) + H_2 \cos(5.57004\omega_0 t - \alpha_2). \quad (13.3.45)$$

Πάλι έχει τέσσερις αυθαίρετες σταθερές: τις  $H_1, H_2, \alpha_1$  και  $\alpha_2$ . Μπορεί ακόμη να χρησιμοποιήσει και τις αντίστοιχες ημιτονικές συναρτήσεις  $\sin(\omega_1 t + \beta_1)$  και  $\sin(\omega_2 t + \beta_2)$  με ίδια εύρη  $H_1$  και  $H_2$ , αλλά εύλογα με διαφορετικές γωνίες φάσεως  $\beta_1$  και  $\beta_2$ : αυθαίρετες σταθερές οι  $H_1, H_2, \beta_1$  και  $\beta_2$ .

Ας γράψουμε τέλος την ίδια λύση  $u_1(t)$  και  $u_2(t)$  σε μητρική (καλύτερα διανυσματική: με διανύσματα στήλης) μορφή με τη χρήση των δύο ιδιομορφών  $\boldsymbol{\varphi}_1$  και  $\boldsymbol{\varphi}_2$ , τις οποίες προσδιορίσαμε στις σχέσεις (13.3.33), και των ιδιοσυχνοτήτων  $\omega_1$  και  $\omega_2$  στις σχέσεις (13.3.31). Έτσι παίρνουμε

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_1 \varphi_{11} \cos(\omega_1 t - \alpha_1) + H_2 \varphi_{12} \cos(\omega_2 t - \alpha_2) \\ H_1 \varphi_{21} \cos(\omega_1 t - \alpha_1) + H_2 \varphi_{22} \cos(\omega_2 t - \alpha_2) \end{Bmatrix}. \quad (13.3.46)$$

έχοντας επιλέξει  $\varphi_{21} = \varphi_{22} = 1$  με την κανονικοποίηση ( $\alpha$ ) που κάναμε. Κι ακόμη πιο σύντομα:

$$\mathbf{u}(t) = H_1 \boldsymbol{\varphi}_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1) + H_2 \boldsymbol{\varphi}_2 \cos(\omega_2 t - \alpha_2) \quad (13.3.47)$$

ή και σε ημιτονική μορφή (με διαφορετικές γωνίες φάσεως  $\beta_1$  και  $\beta_2$ , αλλά τα ίδια εύρη  $H_1$  και  $H_2$ )

$$\mathbf{u}(t) = H_1 \boldsymbol{\varphi}_1 \sin(\omega_1 t + \beta_1) + H_2 \boldsymbol{\varphi}_2 \sin(\omega_2 t + \beta_2). \quad (13.3.48)$$

Δεν είναι κι άσχημα να έχουμε σύντομες μορφές των λύσεων καταλαβαίνοντας όμως τί γράφουμε! Και πρέπει να τονίσουμε ότι και οι **ιδιοσυχνότητες**  $\omega_1$  και  $\omega_2$  και οι **ιδιομορφές**  $\boldsymbol{\varphi}_1$  και  $\boldsymbol{\varphi}_2$

είναι καθορισμένες από τις σχέσεις (13.3.31) και (13.3.33) αντίστοιχα. Οι αυθαίρετες σταθερές είναι οι  $H_1, H_2, \alpha_1$  και  $\alpha_2$ . Βέβαια οι ιδιομορφές καθορίστηκαν εδώ με μια **κανονικοποίηση** που επιλέξαμε, συγκεκριμένα  $\varphi_{21} = \varphi_{22} = 1$ . Ασφαλώς θα μπορούσαν να είχαν καθορισθεί και με άλλη κανονικοποίηση. Είναι όμως σκόπιμο να είναι καθορισμένες, όχι με αυθαίρετες πολλαπλασιαστικές σταθερές μπροστά τους. Τούτο διευκολύνει τον Πολιτικό Μηχανικό στην εργασία του.

► **Παρατήρηση A13.7:** Είναι προφανές από την πιο πάνω λύση  $\mathbf{u}(t)$  στις σχέσεις (13.3.46) ή (13.3.47) ή (13.3.48) (ισοδύναμες είναι όλες τους ...) πως η συνολική ταλάντωση του ιδεατού κτιρίου (εδώ δώροφου κτιρίου, γενικά πολυώροφου) συνίσταται (αποτελείται) από **υπέρθωση (επαλληλία)** των επιμέρους ταλαντώσεων κάθε ιδιομορφής  $\boldsymbol{\varphi}_k$ , εδώ των ιδιομορφών  $\boldsymbol{\varphi}_1$  και  $\boldsymbol{\varphi}_2$ .

► **Παρατήρηση A13.8:** Ας κάνουμε και μια σημαντική παρατήρηση που προκύπτει από την πιο πάνω λύση  $\mathbf{u}(t)$ . Συγκεκριμένα παρατηρούμε πως οι ταλαντώσεις των δύο πλακών του ιδεατού δώροφου κτιρίου που μελετάμε γίνονται με **συγχρονισμένο** τρόπο και για την ιδιοσυχνότητα  $\omega_1$  και για την ιδιοσυχνότητα  $\omega_2$ . Δηλαδή οι δύο γωνίες φάσεως  $\alpha_1$  (ή  $\beta_1$ ) για την ιδιοσυχνότητα  $\omega_1$  και  $\alpha_2$  (ή  $\beta_2$ ) για την ιδιοσυχνότητα  $\omega_2$  είναι κοινές και στις δύο αρχικά άγνωστες (και τώρα πια γνωστές!) συναρτήσεις  $u_1(t)$  και  $u_2(t)$  των μετατοπίσεων των πλακών. Παρουσιάζεται δηλαδή **συγχρονισμός** (οι ίδιες γωνίες φάσεως) στις ταλαντώσεις των πλακών των ορόφων του κτιρίου για μια συγκεκριμένη ιδιομορφή  $\boldsymbol{\varphi}_k$ . Βέβαια όχι όμως και για διαφορετικές ιδιομορφές (π.χ. εδώ τις  $\boldsymbol{\varphi}_1$  και  $\boldsymbol{\varphi}_2$ ). Αυτές αφορούν συνήθως (αν και όχι πάντοτε) σε διαφορετικές ιδιοσυχνότητες  $\omega_1$  και  $\omega_2$ . Ένας τέτοιος συγχρονισμός (για διαφορετικές ιδιοσυχνότητες) ασφαλώς δεν είναι δυνατός. Αυτή είναι μια γενική παρατήρηση: ισχύει για κάθε πολυώροφο κτίριο. Εντούτοις οι ιδιομορφές του κτιρίου έχουν συνιστώσες που διαφέρουν συχνά κατά το πρόσημο, π.χ. εδώ στην ιδιομορφή  $\boldsymbol{\varphi}_2 = [-0.939081 \quad 1]^T$  με συνιστώσες  $\varphi_{12} = -0.939081$  και  $\varphi_{22} = 1$ ). Εξαιτίας του λόγου αυτού ο συγχρονισμός που προαναφέρθηκε δεν αποκλείει το φαινόμενο μια χρονική στιγμή  $t$  η πλάκα ενός ορόφου να κινείται προς τα αριστερά και ενός άλλου προς τα δεξιά. Μ' άλλα λόγια ο συγχρονισμός των ταλαντώσεων των ορόφων για την ίδια ιδιομορφή  $\boldsymbol{\varphi}_k$  εννοείται εδώ (στα ιδεατά κτίρια) με διαφορά φάσεως είτε ακριβώς 0 είτε ακριβώς  $\pi$  από όροφο σε όροφο ενός πολυώροφου κτιρίου. Δεν είναι όμως δυνατή απολύτως καμία άλλη τιμή αυτής της διαφοράς για την ίδια ιδιομορφή  $\boldsymbol{\varphi}_k$ .

### A13.3.5. Η μέθοδος της τριγωνομετρικής αντικαταστάσεως

Στην προηγούμενη παράγραφο εφαρμόσαμε τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως για την επίλυση του συστήματος των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (13.2.28) του ιδεατού δώροφου κτιρίου διατμήσεως της Εφαρμογής A13.1. Το υπενθυμίζουμε και πάλι (τέταρτη υπενθύμιση)

$$\begin{aligned} 3\ddot{u}_1(t) + 59\omega_0^2 u_1(t) - 32\omega_0^2 u_2(t) &= 0, \\ 2\ddot{u}_2(t) - 32\omega_0^2 u_1(t) + 32\omega_0^2 u_2(t) &= 0. \end{aligned} \quad (13.3.49)$$

Η μέθοδος της εκθετικής αντικαταστάσεως είναι στ' αλήθεια μια γενική, ιδιαίτερα εύχρηστη και ενδιαφέρουσα μέθοδος για την επίλυση συστημάτων ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές (όχι όμως και μη ομογενών συστημάτων).

Ειδικά όμως για το πιο πάνω σύστημα (13.3.49) σε κτίριο χωρίς απόσβεση μπορεί να αντικατασταθεί από την απλούστερη μέθοδο της τριγωνομετρικής αντικαταστάσεως. Την εκθέσαμε ήδη στην Ενότητα A12.8 του προηγούμενου Κεφαλαίου A12 με εφαρμογή της στην Παράγραφο A12.8.2 σε ένα διβάθμιο μηχανικό σύστημα μαζών-ελατηρίων με μαθηματική μοντελοποίηση ανάλογη με το παρόν κτίριο διατμήσεως. Η μέθοδος της τριγωνομετρικής αντικαταστάσεως βασίζεται στο γεγονός ότι σε ελεύθερες ταλαντώσεις ενός μηχανικού συστήματος χωρίς απόσβεση περιμένουμε να έχουμε τριγωνομετρικές λύσεις πάλι χωρίς απόσβεση των ταλαντώσεων. Δηλαδή δεν παρουσιάζεται αρνητικός εκθετικός όρος: παρουσιάζονται μόνο τριγωνομετρικοί όροι. Αυτό είναι λογικό και πραγματικά προέκυψε στην προηγούμενη Παράγραφο A13.3.4 με τη μέθοδο της εκθετικής

αντικαταστάσεως στη λύση (13.3.40) και (13.3.41) και στις επόμενες (και ισοδύναμες) μορφές της ίδιας λύσεως μέχρι και την τελευταία μορφή (13.3.48). Μπορούμε επομένως να κάνουμε την υπόθεση καθαρά τριγωνομετρικής λύσεως από την αρχή. Έτσι δε θα «μπλέξουμε» με συζυγείς φανταστικές ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης και τη χρήση των τύπων του Euler, για να μετατρέψουμε την εκθετική λύση (με μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις) στην τελική τριγωνομετρική μορφή της. Πρέπει να είμαστε όμως προσεκτικοί: μόνο εφόσον δεν υπάρχει απόσβεση (δεν υπάρχουν αποσβεστήρες) στις ελεύθερες ταλαντώσεις (που εξετάζουμε εδώ) του κτιρίου μας.

Κι εδώ, στο παραπάνω σύστημα δύο ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (13.3.49), δεν υπάρχει απόσβεση. Υποθέτουμε επομένως την τριγωνομετρική λύση

$$u_{10}(t) = \varphi_1 \sin(\omega t + \beta) \quad \text{και} \quad u_{20}(t) = \varphi_2 \sin(\omega t + \beta). \quad (13.3.50)$$

Αλλάξαμε λίγο τη μέθοδο χρησιμοποιώντας την ημιτονική συνάρτηση  $\sin(\omega t + \beta)$  αντί για τη συνημιτονική συνάρτηση  $\cos(\omega t - \alpha)$  στην εφαρμογή της Παραγράφου A12.8.2. Θέσαμε επίσης  $\beta$  αντί για  $\alpha$  (και με συν τώρα:  $+\beta$ ) για τη γωνία φάσεως και  $\varphi_1$  και  $\varphi_2$  (σχέσεις (13.3.33)) αντί  $A_1$  και  $A_2$  αντίστοιχα για τους συντελεστές της ημιτονικής συναρτήσεως. Με τον τρόπο αυτό θυμόμαστε και τις **ιδιομορφές ταλαντώσεως** (ή απλούστερα **ιδιομορφές**) του κτιρίου που εισαγάγαμε στην προηγούμενη Παράγραφο A13.3.4 και έχουμε έτσι τώρα μια πρώτη εικόνα τους.

Παραγωγίζουμε τώρα τις δύο αυτές τριγωνομετρικές συναρτήσεις δύο φορές και τις αντικαθιστούμε στο σύστημα των δύο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (13.3.49). Απαλοΐφοντας και τον τριγωνομετρικό παράγοντα  $\sin(\omega t + \beta)$ , καταλήγουμε στο σύστημα των δύο ομογενών γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} (-3\omega^2 + 59\omega_0^2)\varphi_1 - 32\omega_0^2\varphi_2 &= 0, \\ -32\omega_0^2\varphi_1 + (-2\omega^2 + 32\omega_0^2)\varphi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (13.3.51)$$

Εδώ άγνωστοι είναι οι δύο συντελεστές  $\varphi_1$  και  $\varphi_2$  των τριγωνομετρικών αντικαταστάσεων (13.3.50). Πρόκειται ουσιαστικά για το ίδιο σύστημα (13.3.27), στο οποίο είχαμε καταλήξει με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως, εδώ όμως με  $-\omega^2$  αντί για  $\mu^2$ . Καλύτερα έτσι: η ποσότητα  $\omega$  έχει και φυσική σημασία: είναι η συχνότητα που έχουμε υποθέσει στις αντικαταστάσεις (13.3.50).

Γενικά το πιο πάνω σύστημα (13.3.51) έχει τη μηδενική λύση  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ . Αυτή έχει βέβαια την έννοια της πλήρους απουσίας ελεύθερων ταλαντώσεων. Για ειδικές όμως τιμές της συχνότητας  $\omega$ , τις καλούμενες **ιδιοσυχνότητες** ή **φυσικές συχνότητες**, εδώ του κτιρίου μας, μπορεί να υπάρχουν και μη μηδενικές λύσεις. Όπως γνωρίζουμε από τη Γραμμική Άλγεβρα, για να συμβαίνει αυτό (ύπαρξη μη μηδενικών λύσεων σε ένα σύστημα ομογενών γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων), πρέπει οπωσδήποτε η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων (των συνιστωσών  $\varphi_1$  και  $\varphi_2$  της ιδιομορφής  $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1 \ \varphi_2]^T$ ) να είναι μηδενική. Άρα πρέπει να ισχύει η χαρακτηριστική εξίσωση

$$\Delta^*(\omega) = \begin{vmatrix} -3\omega^2 + 59\omega_0^2 & -32\omega_0^2 \\ -32\omega_0^2 & -2\omega^2 + 32\omega_0^2 \end{vmatrix} = 2(3\omega^4 - 107\omega_0^2\omega^2 + 432\omega_0^4) = 0. \quad (13.3.52)$$

Βρίσκουμε ξανά και ξανά την ίδια χαρακτηριστική εξίσωση (εδώ βέβαια ως προς τη συχνότητα  $\omega$ )

$$p_4^*(\omega) = 3\omega^4 - 107\omega_0^2\omega^2 + 432\omega_0^4 = 0 \quad (13.3.53)$$

με εκείνη που είχαμε προσδιορίσει με τις προηγούμενες μεθόδους. (Πρόκειται για την ίδια ακριβώς εξίσωση (13.3.7).) Βέβαια εδώ στη μέθοδο της τριγωνομετρικής αντικαταστάσεως την αποκαλούμε **εξίσωση ιδιοσυχνοτήτων** ή πιο απλά **εξίσωση συχνοτήτων**, αν κι ο πρώτος όρος είναι σαφέστερος.

Ας θυμίσουμε και πάλι τις δύο ιδιοσυχνότητες από τις σχέσεις (13.3.31):  $\omega_1 \approx 2.15438\omega_0$  και  $\omega_2 \approx 5.57004\omega_0$ . Όταν λοιπόν  $\omega = \omega_1$  ή  $\omega = \omega_2$ , τότε το σύστημα των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (13.3.51) έχει μη μηδενική λύση (εννοείται με προσέγγιση σταθεράς  $c$ ). Υποθέτοντας

μοναδιαίο εύρος ταλαντώσεων στην πλάκα του δευτέρου ορόφου:  $\varphi_2 = 1$ , προσδιορίζουμε από τις δύο αυτές εξισώσεις (η μία αρκεί) το εύρος ταλαντώσεων  $\varphi_1$  στην πλάκα του πρώτου ορόφου. Έτσι προκύπτουν οι ιδιομορφές (13.3.33):  $\boldsymbol{\varphi}_1$  (για  $\omega = \omega_1$ ) και  $\boldsymbol{\varphi}_2$  (για  $\omega = \omega_2$ ), τις υπενθυμίζουμε

$$\boldsymbol{\varphi}_1 = \begin{Bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 0.709914 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\varphi}_2 = \begin{Bmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{22} \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} -0.939081 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (13.3.54)$$

Πρόκειται βέβαια για τις ίδιες ακριβώς ιδιομορφές όπως και στη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης στην προηγούμενη παράγραφο. Επομένως η γενική λύση του προβλήματος κτιρίου διατμήσεως της Εφαρμογής A13.1 θα είναι και πάλι της μορφής (13.3.48), την υπενθυμίζουμε

$$\mathbf{u}_1 = H_1 \boldsymbol{\varphi}_1 \sin(\omega_1 t + \beta_1) + H_2 \boldsymbol{\varphi}_2 \sin(\omega_2 t + \beta_2) \quad (13.3.55)$$

(ή κάποιας ισοδύναμης μορφής) με τις σταθερές  $H_1, H_2, \beta_1$  και  $\beta_2$  προς προσδιορισμό. Φυσικά αυτός μπορεί να γίνει, εάν είναι διαθέσιμες οι τέσσερις αρχικές συνθήκες  $u_{10}, v_{10}, u_{20}$  και  $v_{20}$ .

Είναι βέβαια προφανές ότι οι ίδιες ακριβώς ιδιοσυχνότητες  $\omega_k$  και ιδιομορφές  $\boldsymbol{\varphi}_k$  (με  $k = 1, 2$ ) προκύπτουν και εάν χρησιμοποιήσουμε τη συνημιτονική τριγωνομετρική αντικατάσταση (12.8.3) αντί για την παραπάνω ημιτονική τριγωνομετρική αντικατάσταση (13.3.50). Τέλος για το παρόν πρόβλημα των ελεύθερων (όχι εξαναγκασμένων!) ταλαντώσεων χωρίς απόσβεση η μέθοδος της τριγωνομετρικής αντικατάστασης είναι η πιο εύχρηστη υπολογιστικά για τον Πολιτικό Μηχανικό.

## A13.4. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΔΙΑΓΩΝΙΟΠΟΙΗΣΕΩΣ ΣΤΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

### A13.4.1. Το σύστημα των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων

Θεωρούμε πάλι το ιδεατό δώροφο κτίριο διατμήσεως που καθορίσαμε στην Εφαρμογή A13.1 της Παραγράφου A13.2.3 και επιλύσαμε με τέσσερις διαφορετικές μεθόδους στην προηγούμενη Ενότητα A13.3. Στην ενότητα αυτή στόχο μας αποτελεί η επίλυση του ίδιου ακριβώς συστήματος και με την πέμπτη μέθοδο της **διαγωνιοποίησης** (ή **αποσυζεύξεως**). Τη μέθοδο αυτή την αναπτύξαμε ήδη εκτενώς στη Ενότητα A12.9 του προηγούμενου Κεφαλαίου A12, αλλά μόνο για γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως της μορφής (12.9.26). Αντίθετα στις Ταλαντώσεις και στη Δυναμική των Κατασκευών, που ενδιαφέρουν άμεσα τον Πολιτικό Μηχανικό, έχουμε συστήματα διαφορικών εξισώσεων δεύτερας τάξεως λόγω της ισχύος του δευτέρου νόμου του Νεύτωνα. Για ελεύθερες ταλαντώσεις αυτά είναι της μορφής (13.2.19). Την επαναλαμβάνουμε

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad (13.4.1)$$

με  $\mathbf{M}$  το **μητρώο μάζας** (ή **μητρώο αδρανείας**) και  $\mathbf{K}$  το **μητρώο σιβαρότητας** (στα συστήματα μαζών και ελατηρίων), που γενικά καλείται **μητρώο δυσκαμψίας** στα πλαίσια και στα κτίρια. Γενικότερα τώρα με φόρτιση  $\mathbf{p}(t)$  έχουμε την αντίστοιχη (αλλά και δυσκολότερη) μη ομογενή μορφή

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(t). \quad (13.4.2)$$

Αρκετά συχνά έχουμε επιπλέον και απόσβεση, πολλές φορές δεν την αμελεί ο Πολιτικός Μηχανικός. Η επιρροή της στις ταλαντώσεις περιγράφεται με το **μητρώο αποσβέσεως**  $\mathbf{C}$ . Τότε αποδεικνύεται ότι τα αντίστοιχα συστήματα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων είναι τα ακόλουθα:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad (13.4.3)$$

για ελεύθερες ταλαντώσεις (δίχως φόρτιση, χωρίς εξωτερικές δυνάμεις) και

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (13.4.4)$$

για εξαναγκασμένες ταλαντώσεις (με φόρτιση, με εξωτερικές δυνάμεις, σε σεισμούς **αδρανειακές**).

**A13.4.2. Το γενικευμένο ιδιοπρόβλημα της Δυναμικής των Κατασκευών**

Αρχίζουμε με το ομογενές γραμμικό σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (13.4.1) για ελεύθερες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση. Χρησιμοποιούμε την τριγωνομετρική αντικατάσταση

$$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\varphi} \cos(\omega t - \alpha) \quad \text{ή} \quad \mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\varphi} \sin(\omega t + \beta) \quad (13.4.5)$$

ή την εκθετική αντικατάσταση

$$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\varphi} e^{i\omega t} \quad (13.4.6)$$

με το  $\boldsymbol{\varphi}$  άγνωστο διάνυσμα στήλης και το  $\omega$  τη σχετική συχνότητα. Τότε βέβαια έχουμε (και στις τρεις αυτές περιπτώσεις)

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = -\omega^2 \mathbf{u}(t). \quad (13.4.7)$$

Αντικαθιστούμε τώρα το διάνυσμα στήλης των αγνώστων συναρτήσεων  $\mathbf{u}(t)$  και τη δεύτερη αυτή παράγωγο του  $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ , η οποία είναι βέβαια επίσης διάνυσμα στήλης, στο γραμμικό σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (13.4.1). Έτσι παίρνουμε

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad \implies \quad (-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \quad (13.4.8)$$

μετά βέβαια και την απαλοιφή του χρονικού παράγοντα  $\cos(\omega t - \alpha)$  ή  $\sin(\omega t + \beta)$  ή  $e^{i\omega t}$  ανάλογα με το τί έχουμε επιλέξει: ουσιαστικά το ίδιο κάνει!

Έτσι λοιπόν προέκυψε (και με τους τρεις αυτούς τρόπους) ένα ομογενές γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων με αγνώστους το διάνυσμα στήλης  $\boldsymbol{\varphi}$ , αν και ούτε η συχνότητα  $\omega$  δεν είναι ακόμη γνωστή. Ένα τέτοιο σύστημα γενικά έχει τη μηδενική λύση  $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}$ . Αυτή οδηγεί βέβαια με τη χρήση της μιας ή της άλλης τριγωνομετρικής δοκιμαστικής λύσεως (13.4.5) ή της δοκιμαστικής εκθετικής λύσεως (13.4.6) στη μηδενική λύση  $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{0}$ . Καθόλου λοιπόν ταλαντώσεις στο κτίριο προς μεγάλη χαρά του Πολιτικού Μηχανικού. Τα ξέρουμε αυτά ήδη από τις Ενότητες A13.3.4 για την εκθετική αντικατάσταση και A13.3.5 για την τριγωνομετρική αντικατάσταση. Μας είναι γνωστά, άλλο που εδώ τα γράφουμε με τη χρήση μητρώων: μάζας (ή αδρανείας)  $\mathbf{M}$  και δυσκαμψίας  $\mathbf{K}$ .

Μας είναι επίσης εξίσου γνωστό ότι τη μοναδική δυνατότητα για την ύπαρξη μη μηδενικής λύσεως  $\mathbf{u}(t) \neq \mathbf{0}$  αποτελεί ο μηδενισμός της ορίζουσας (determinant) των συντελεστών των αγνώστων σταθερών  $\boldsymbol{\varphi}$  στο ομογενές γραμμικό αλγεβρικό σύστημα της δεύτερης σχέσεως (13.4.8). Επομένως η ύπαρξη μη μηδενικής λύσεως στο σύστημα αυτό,  $\boldsymbol{\varphi} \neq \mathbf{0}$ , απαιτεί να ισχύει η εξίσωση

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad \text{με απόλυτα ισοδύναμη γραφή την} \quad |\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0. \quad (13.4.9)$$

Αν την ίδια σχέση τη γράψαμε με τη χρήση των νέων ιδιοτιμών  $\lambda = \omega^2$ , οπότε  $\omega = \sqrt{\lambda}$ , αυτή θα είχε τη μορφή

$$\det(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) = 0 \quad \text{ισοδύναμα} \quad |\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}| = 0 \quad \text{με} \quad \lambda = \omega^2. \quad (13.4.10)$$

Κάπου αρχίζουμε να πλησιάζουμε. Ας το σκεφθούμε καλύτερα. Ναι, το βρήκαμε: η τελευταία αυτή εξίσωση (ορίζουσα του μητρώου  $\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}$  ίση με το μηδέν) μας θυμίζει καθαρά το **ιδιοπρόβλημα** της Γραμμικής Άλγεβρας, εδώ τον προσδιορισμό των **ιδιοτιμών**  $\lambda$  στις σχέσεις (12.9.4) της Παραγράφου A12.9.2. Ας επαναλάβουμε τη σχετική χαρακτηριστική εξίσωση, εδώ για το μητρώο  $\mathbf{K}$

$$\det(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{I}_n) = 0 \quad \text{ισοδύναμα} \quad |\mathbf{K} - \lambda \mathbf{I}_n| = 0. \quad (13.4.11)$$

Δεν πρέπει να έχουμε παράπονο με τη μνήμη μας. Σωστά κάναμε τη συσχέτιση αυτή. Μόνο που ... Τί; Μόνο που εδώ, στη Δυναμική των Κατασκευών, έχουμε στη χαρακτηριστική μας εξίσωση (13.4.10) το μητρώο μάζας (ή αδρανείας)  $\mathbf{M}$  στη θέση του μοναδιαίου μητρώου  $\mathbf{I}_n$  στην «παλιά» μας εξίσωση (13.4.11) του ιδιοπροβλήματος στη Γραμμική Άλγεβρα. Μητρώο μάζας  $\mathbf{M}$

αντί για μοναδιαίο μητρώο  $\mathbf{I}_n$ . Άρα οι ιδιοτιμές  $\lambda$  του μητρώου δυσκαμψίας  $\mathbf{K}$  στη Δυναμική των Κατασκευών δεν είναι χρήσιμες στον Πολιτικό Μηχανικό, επειδή η χαρακτηριστική του εξίσωση είναι η (13.4.10) και με τα δύο μητρώα  $\mathbf{K}$  (δυσκαμψίας) και  $\mathbf{M}$  (μάζας) μαζί σ' αυτήν. Επομένως:

◆ **Συμπέρασμα:** Το **ιδιοπρόβλημα** (προσδιορισμός **ιδιοτιμών** και **ιδιοδιανυσμάτων**) της Δυναμικής των Κατασκευών αποτελεί γενίκευση του κλασικού ιδιοπρόβληματος της Γραμμικής Άλγεβρας. Σχετίζεται μάλιστα με δύο μητρώα: τα μητρώα μάζας  $\mathbf{M}$  και δυσκαμψίας  $\mathbf{K}$ , όχι μόνο ένα μητρώο. Γι' αυτό στη Δυναμική των Κατασκευών μιλάμε για **γενικευμένο ιδιοπρόβλημα** και όχι απλά για ιδιοπρόβλημα εννοώντας το **κλασικό ιδιοπρόβλημα**. Οι **κλασικές ιδιοτιμές** (με την έννοια της Γραμμικής Άλγεβρας) του μητρώου δυσκαμψίας  $\mathbf{K}$  είναι άχρηστες στον Πολιτικό Μηχανικό. Αυτός επιδιώκει την επίλυση του **γενικευμένου ιδιοπρόβληματος** με **γενικευμένη χαρακτηριστική εξίσωση** τη (13.4.10):  $\det(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}) = 0$  (με  $\lambda = \omega^2$ ) ή καλύτερα τη (13.4.9):  $\det(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = 0$ . Αυτή είναι η **εξίσωση ιδιοσυχνοτήτων** ή απλά **εξίσωση συχνοτήτων** του Πολιτικού Μηχανικού στη Δυναμική των Κατασκευών, αλλά και γενικότερα στις Ταλαντώσεις. Βέβαια στις Ταλαντώσεις, όταν δεν έχουμε κάμψη, μιλάμε απλά για το μητρώο στιβαρότητας  $\mathbf{K}$  αντί για το μητρώο δυσκαμψίας  $\mathbf{K}$ .

Τώρα στη Δυναμική των Κατασκευών για μια κατασκευή με  $n$  βαθμούς ελευθερίας είναι προφανές ότι η εξίσωση ιδιοσυχνοτήτων (13.4.9) θα είναι ένα πολυώνυμο βαθμού  $n$  ως προς  $\lambda = \omega^2$ . Αυτό θα έχει γενικά  $n$  ρίζες  $\lambda_k = \omega_k^2$  συνήθως απλές, καμιά φορά και πολλαπλές, όμως  $n$  συνολικά μαζί την πολλαπλότητα  $\rho_k$  της καθεμιάς τους. (Για απλές ρίζες  $\lambda_k = \omega_k^2$  ισχύει βέβαια ότι  $\rho_k = 1$ .)

Επιπλέον από το πρώτο θεώρημα της Παραγράφου A12.9.4 του προηγούμενου Κεφαλαίου A12 γνωρίζουμε ότι στο κλασικό ιδιοπρόβλημα της Γραμμικής Άλγεβρας οι ιδιοτιμές  $\lambda_k$  ενός πραγματικού συμμετρικού μητρώου  $\mathbf{A}_s$  είναι όλες τους πραγματικές. Επίσης ότι δύο ιδιοδιανύσματα  $\mathbf{d}_r$  και  $\mathbf{d}_s$  που αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικές ιδιοτιμές του κλασικού ιδιοπρόβληματος είναι ορθογώνια.

Στη Δυναμική των Κατασκευών αποδεικνύεται ότι τα μητρώα μάζας (ή αδρανείας)  $\mathbf{M}$  και δυσκαμψίας  $\mathbf{K}$  είναι όχι μόνο πραγματικά (είναι προφανές αυτό ...), αλλά και συμμετρικά και **θετικά ορισμένα**, δηλαδή  $\mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v} > 0$  και  $\mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} > 0$  για κάθε διάνυσμα στήλης  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ . (Το τελευταίο ισχύει μόνο για στερεωμένες κατασκευές, με περιορισμούς κινήσεως, όπως είναι όλες οι συνηθισμένες κατασκευές του Πολιτικού Μηχανικού.) Υπ' αυτές τις συνθήκες μπορεί να αποδειχθεί το θεώρημα:

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ: Ιδιοσυχνότητες:** Η εξίσωση ιδιοσυχνοτήτων  $\det(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = 0$  στο γενικευμένο ιδιοπρόβλημα του Πολιτικού Μηχανικού στη Δυναμική των Κατασκευών έχει  $n$  πραγματικές και μάλιστα θετικές ρίζες  $\lambda = \omega^2$ . (Αυτές είναι συνήθως απλές και σπάνια πολλαπλές.) Με άλλα λόγια το σχετικό γενικευμένο ιδιοπρόβλημα έχει  $n$  πραγματικές και θετικές ιδιοτιμές  $\lambda = \omega^2$ .

Πάρα πολύ ωραίο και χρήσιμο το θεώρημα αυτό. Μας βγάζει μάλιστα από πολλούς «μπελάδες» με τη βεβαιότητα των  $n$  θετικών γενικευμένων ιδιοτιμών  $\lambda = \omega^2$ , δηλαδή και  $n$  θετικών αντίστοιχων ιδιοσυχνοτήτων  $\omega = \sqrt{\lambda}$ . Γενικεύει σημαντικά το αντίστοιχο θεώρημα στο κλασικό ιδιοπρόβλημα της Γραμμικής Άλγεβρας. Δε θα το αποδείξουμε όμως. Προχωράμε παρακάτω.

Επομένως τώρα με τη σιγουριά των  $n$  θετικών ιδιοσυχνοτήτων  $\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$  (με  $k = 1, 2, \dots, n$ ) μπορούμε θαυμάσια να λύσουμε το ομογενές γραμμικό σύστημα των  $n$  αλγεβρικών εξισώσεων δεξιά στις σχέσεις (13.4.8) ως προς το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα (ιδιομορφή)  $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \dots \ \varphi_n]^T$ . Φυσικά ο προσδιορισμός της ιδιομορφής γίνεται με προσέγγιση σταθεράς  $c$ , ακριβώς όπως συμβαίνει και στη Γραμμική Άλγεβρα για ένα κλασικό ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{d}$ . Ακολουθεί συνήθως κάποια **κανονικοποίηση**, π.χ. η  $\varphi_n = 1$ : μοναδιαίο εύρος ταλαντώσεων στον τελευταίο όροφο: στον  $n$ -στό όροφο. Αυτήν υιοθετούμε εδώ και είναι μια συνηθισμένη επιλογή του Πολιτικού Μηχανικού.

► **Παρατήρηση A13.9:** Μπορεί να αποδειχθεί μαθηματικά πως σε κάθε πολλαπλή ιδιοσυχνότητα  $\omega_k$  πολλαπλότητας  $\rho_k$ , π.χ.  $\rho_k = 2$  για διπλή ιδιοσυχνότητα, αντιστοιχούν  $\rho_k$  γραμμικά ανεξάρτητες ιδιομορφές. (Πρόκειται για κάπως σπάνια περίπτωση, αλλά μπορεί να συμβεί κι αυτή!) Δε θα ασχοληθούμε όμως με την απόδειξη αυτής της ενδιαφέρουσας ιδιότητας των ιδιομορφών.



**A13.4.3. Ορθογωνιότητα των ιδιομορφών ταλαντώσεως**

Και τί άλλο ξέρουμε από το κλασικό ιδιοπρόβλημα της Γραμμικής Άλγεβρας; Μα ότι δύο ιδιοδιανύσματα  $\delta_r$  και  $\delta_s$  ενός συμμετρικού μητρώου  $\mathbf{A}_s$  που αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικές (όχι ίδιες) ιδιοτιμές  $\lambda_r$  και  $\lambda_s$  του ίδιου μητρώου  $\mathbf{A}_s$  είναι **ορθογώνια** (ή **ορθογωνικά**), δηλαδή ότι ισχύει η σχέση

$$\delta_r^T \delta_s = 0, \quad \text{εφόσον } r \neq s. \quad (13.4.12)$$

Κι εδώ στο γενικευμένο ιδιοπρόβλημα της Δυναμικής των Κατασκευών, όπου το ρόλο των ιδιοδιανυσμάτων  $\delta_k$  τον παίζουν οι ιδιομορφές  $\phi_k$ , μπορούμε να αποδείξουμε κάτι ανάλογο, πιο γενικευμένο όμως. Συγκεκριμένα ισχύει το θεώρημα:

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ: Ορθογωνιότητα των ιδιομορφών ταλαντώσεως ως προς τα μητρώα μάζας  $\mathbf{M}$  και δυσκαμψίας  $\mathbf{K}$ :** Στο γενικευμένο ιδιοπρόβλημα της Δυναμικής των Κατασκευών δύο διαφορετικές ιδιομορφές  $\phi_r$  και  $\phi_s$  που αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικές ιδιοσυχνότητες  $\omega_r$  και  $\omega_s$  (δηλαδή με  $\omega_r \neq \omega_s$ ) είναι ορθογώνιες (α) ως προς το μητρώο μάζας  $\mathbf{M}$  και (β) ως προς το μητρώο δυσκαμψίας  $\mathbf{K}$ . Δηλαδή ισχύουν ταυτόχρονα και οι δύο σχέσεις

$$\phi_r^T \mathbf{M} \phi_s = 0 \quad \text{και επίσης} \quad \phi_r^T \mathbf{K} \phi_s = 0, \quad \text{εφόσον } \omega_r \neq \omega_s. \quad (13.4.13)$$

**Απόδειξη:** Έχει ήδη αρχίσει να παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τον Πολιτικό Μηχανικό το **γενικευμένο ιδιοπρόβλημα** της Δυναμικής των Κατασκευών. Προχωράμε στην απόδειξη τώρα.

Αρχίζουμε με την υπενθύμιση του γενικευμένου ιδιοπρόβληματος της Δυναμικής των Κατασκευών, που έχει τη δεύτερη μορφή (13.4.8). Την ξαναγράφουμε απόλυτα ισοδύναμα σαν

$$\mathbf{K}\phi = \omega^2 \mathbf{M}\phi. \quad (13.4.14)$$

(Το κλασικό ιδιοπρόβλημα της Γραμμικής Άλγεβρας είναι λίγο πιο απλό:  $\mathbf{K}\delta = \lambda\delta$ .) Σε μας τώρα εφαρμόζουμε τη σχέση (13.4.14) για  $\omega = \omega_s$  και  $\phi = \phi_s$ : ιδιοσυχνότητα  $\omega_s$  και μια αντίστοιχη ιδιομορφή  $\phi_s$ . Έτσι παίρνουμε

$$\mathbf{K}\phi_s = \omega_s^2 \mathbf{M}\phi_s. \quad (13.4.15)$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε τη σχέση (13.4.15) από αριστερά (την προπολλαπλασιάζουμε) επί το ανάστροφο μητρώο  $\phi_r^T$  (το οποίο είναι διάνυσμα γραμμής, όχι πια στήλης) της πρώτης ιδιομορφής  $\phi_r$  που έχουμε στη σχέση ορθογωνιότητας (13.4.13). Προκύπτει αμέσως

$$\phi_r^T \mathbf{K} \phi_s = \omega_s^2 \phi_r^T \mathbf{M} \phi_s. \quad (13.4.16)$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο (ή απλά αντιστρέφοντας τους δείκτες  $r$  και  $s$ ) παίρνουμε την εντελώς ανάλογη σχέση

$$\phi_s^T \mathbf{K} \phi_r = \omega_r^2 \phi_s^T \mathbf{M} \phi_r. \quad (13.4.17)$$

Δύο σχέσεις λοιπόν: η (13.4.16) και η (13.4.17). Και οι δύο δείκτες  $r$  και  $s$  στις ιδιομορφές στα αριστερά μέλη με αντίθετη σειρά. Κάτι δεν πάει τόσο καλά και δε «βγαίνει» ακόμη η απόδειξη! Θα επανορθώσουμε όμως αμέσως αναστρέφοντας (παίρνοντας ανάστροφα μητρώα) είτε την πρώτη σχέση μας (13.4.16) είτε τη δεύτερη (13.4.17). Ας πούμε τη δεύτερη: τη σχέση (13.4.17). Από τη Γραμμική Άλγεβρα γνωρίζουμε τη βασική ιδιότητα για την αναστροφή γινομένου μητρώων  $\mathbf{AB}$  ότι

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T. \quad (13.4.18)$$

Δηλαδή με την αναστροφή γινομένου μητρώων  $\mathbf{AB}$  αντιστρέφεται και η σειρά τους στο γινόμενο.

Εφαρμόζοντας τη σημαντική αυτή ιδιότητα στη δεύτερη σχέση (13.4.17), φθάνουμε στη σχέση

$$\phi_r^T \mathbf{K}^T \phi_s = \omega_r^2 \phi_r^T \mathbf{M}^T \phi_s. \quad (13.4.19)$$

Βρισκόμαστε σε πολύ καλύτερη θέση τώρα: τα αριστερά μέλη των δύο σχέσεων (13.4.16) (πρώτη σχέση μας) και (13.4.19) (τροποποιημένη με αναστροφή δεύτερη σχέση μας) σχεδόν συμπίπτουν. Ελάχιστη σκέψη χρειάζεται ακόμη. Στ' αλήθεια τα μητρώα μάζας  $\mathbf{M}$  και δυσκαμψίας  $\mathbf{K}$  εκτός από το προφανές γεγονός ότι είναι πραγματικά είναι και συμμετρικά. Άρα

$$\mathbf{M}^T = \mathbf{M} \quad \text{και} \quad \mathbf{K}^T = \mathbf{K}. \quad (13.4.20)$$

Πολύ ωραία! Τώρα η τροποποιημένη δεύτερη σχέση (13.4.19) γράφεται στην τελική της μορφή

$$\boldsymbol{\varphi}_r^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_s = \omega_r^2 \boldsymbol{\varphi}_r^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_s \quad (13.4.21)$$

εδώ με τα μητρώα  $\mathbf{K}$  και  $\mathbf{M}$  χωρίς πια την ένδειξη  $T$  της αναστροφής μητρώου.

Δε μας απομένει παρά η αφαίρεση κατά μέλη των δύο σχέσεων (13.4.16) και (13.4.21). Όμως τα αριστερά τους μέλη είναι ίσα:  $\boldsymbol{\varphi}_r^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_s$  και τα δύο. Επομένως

$$0 = \omega_s^2 \boldsymbol{\varphi}_r^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_s - \omega_r^2 \boldsymbol{\varphi}_r^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_s \quad \text{και με απλοποίηση} \quad (\omega_r^2 - \omega_s^2) \boldsymbol{\varphi}_r^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_s = 0. \quad (13.4.22)$$

Τέλος, αφού υποθέσαμε στην εκφώνηση του θεωρήματος διαφορετικές ιδιοσυχνότητες  $\omega_r$  και  $\omega_s$ , δηλαδή ότι  $\omega_r \neq \omega_s$ , θα έχουμε  $\omega_r^2 - \omega_s^2 \neq 0$ . Κατά συνέπεια η δεύτερη παραπάνω σχέση (13.4.22) απλοποιείται στη μορφή

$$\boldsymbol{\varphi}_r^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_s = 0, \quad (13.4.23)$$

που συμπίπτει με την πρώτη ιδιότητα ορθογωνιότητας (13.4.13). Έτσι τελείωσε επιτυχώς η απόδειξη της ορθογωνιότητας των δύο ιδιομορφών  $\boldsymbol{\varphi}_r$  και  $\boldsymbol{\varphi}_s$  (με  $\boldsymbol{\varphi}_r \neq \boldsymbol{\varphi}_s$ ) ως προς το μητρώο μάζας  $\mathbf{M}$ .

Για την ορθογωνιότητα των ίδιων δύο ιδιομορφών  $\boldsymbol{\varphi}_r$  και  $\boldsymbol{\varphi}_s$  ως προς το μητρώο δυσκαμψίας  $\mathbf{K}$  τώρα. Από τη σχέση (13.4.16), αφού αποδείξαμε ότι το δεξιό μέλος της  $\omega_s^2 \boldsymbol{\varphi}_r^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_s$  είναι μηδέν, μια που ισχύει η πιο πάνω σχέση ορθογωνιότητας (13.4.23), το ίδιο θα συμβαίνει και με το αριστερό μέλος της. Επομένως

$$\boldsymbol{\varphi}_r^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_s = 0 \quad (13.4.24)$$

κι αποδείχθηκε η ιδιότητα της ορθογωνιότητας των ιδιομορφών  $\boldsymbol{\varphi}_r$  και  $\boldsymbol{\varphi}_s$  και ως προς το μητρώο δυσκαμψίας  $\mathbf{K}$ . Τελείωσε έτσι η κλασική αυτή απόδειξη για την ορθογωνιότητα των ιδιομορφών.  $\square$

► **Παρατήρηση A13.10:** Καμιά φορά (όχι πολύ συχνά) στη Δυναμική των Κατασκευών παρουσιάζεται και δεύτερη απόδειξη που βασίζεται στο **θεώρημα της αμοιβαιότητας** των Betti–Maxwell. Αυτή είναι πιο κοντά στον Πολιτικό Μηχανικό, επειδή στηρίζεται σε έργα δυνάμεων. Είναι επίσης μαθηματικά πιο απλή στους υπολογισμούς που απαιτεί. Δυστυχώς όμως, παρά την κομψότητά της, επειδή κάνει χρήση του έργου αδρανειακών δυνάμεων, είναι κάπως δυσνόητη από φυσικής απόψεως ακόμη και στον Πολιτικό Μηχανικό. Τείνει έτσι να υποβαθμισθεί υπέρ της πιο πάνω κλασικής αποδείξεως. Κι αυτή όμως δεν είναι δα και τόσο δύσκολη. Δεν είναι έτσι; Και ταιριάζει και πιο πολύ στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά χωρίς να απαιτεί γνώσεις Τεχνικής Μηχανικής. Καλώς!

► **Παρατήρηση A13.11:** Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι μπορεί να αποδειχθεί πως και οι  $\rho_k$  ιδιομορφές  $\boldsymbol{\varphi}_{km}$  (με  $m = 1, 2, \dots, \rho_k$ ) που αντιστοιχούν σε πολλαπλές ιδιοσυχνότητες  $\omega_k$  (με πολλαπλότητες  $\rho_k$ ) μπορούν κι αυτές να επιλεγούν, έτσι ώστε να είναι ορθογώνιες μεταξύ τους. Να είναι επίσης ορθογώνιες και ως προς κάθε άλλη ιδιομορφή  $\boldsymbol{\varphi}_r$  της κατασκευής που εξετάζεται. Δηλαδή να «συμμετέχουν» πλήρως κι αυτές οι ιδιομορφές στο προηγούμενο σημαντικό θεώρημα, αν επιλεγούν κατάλληλα. Εννοείται ότι αυτή η περίπτωση χρειάζεται ειδική απόδειξη, που θα παραλειφθεί εντελώς. Τελικά βέβαια διαθέτουμε έτσι  $n$  συνολικά ιδιομορφές  $\boldsymbol{\varphi}_k$  που είναι όλες τους ανά δύο ορθογώνιες τόσο ως προς το μητρώο μάζας  $\mathbf{M}$  όσο και ως προς το μητρώο αδρανείας  $\mathbf{K}$ .

Όλες μαζί (και οι  $n$ ) ιδιομορφές  $\boldsymbol{\varphi}_k$ , οι οποίες είναι μάλιστα (όπως τις επιλέξαμε) **ορθογώνιες** (ή **ορθογωνικές**) ανά δύο μεταξύ τους, σχηματίζουν ένα τετραγωνικό μητρώο  $\Phi$  διαστάσεων  $n \times n$ . Το διάσημο **μητρώο των ιδιομορφών ταλαντώσεων**:  $\Phi = [\boldsymbol{\varphi}_1 \ \boldsymbol{\varphi}_2 \ \dots \ \boldsymbol{\varphi}_n]$  της κατασκευής. Τέλεια!

**A13.4.4. Γενικευμένες μάζες και δυσκαμψίες**

Ας ξαναγράψουμε καταρχήν το **μητρώο των ιδιομορφών ταλαντώσεων**, που μόλις ορίσαμε και που μπορούμε να το καλούμε λίγο απλούστερα **μητρώο ιδιομορφών**, στην αναλυτική του μορφή

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \dots & \varphi_{nn} \end{pmatrix}. \tag{13.4.25}$$

Για ένα μηχανικό σύστημα (εδώ κατασκευή: ιδεατό κτίριο διατμήσεως) με  $n$  βαθμούς ελευθερίας πρόκειται βέβαια για πραγματικό τετραγωνικό μητρώο διαστάσεων  $n \times n$ . Όμως αντίθετα από το μητρώο μάζας (ή αδρανείας)  $\mathbf{M}$  και δυσκαμψίας  $\mathbf{K}$  το μητρώο ιδιομορφών  $\Phi$  δεν είναι συμμετρικό μητρώο. Στις στήλες του έχουμε βέβαια τις  $n$  ιδιομορφές ταλαντώσεων, απλούστερα ιδιομορφές

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \\ \vdots \\ \varphi_{n1} \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{22} \\ \vdots \\ \varphi_{n2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \varphi_n = \begin{pmatrix} \varphi_{1n} \\ \varphi_{2n} \\ \vdots \\ \varphi_{nn} \end{pmatrix}. \tag{13.4.26}$$

(Χρειάζεται λίγη προσοχή στη σειρά των δεικτών!) Όλες οι ιδιομορφές είναι διανύσματα στήλης με  $n$  συνιστώσες η καθεμία. Επίσης σύμφωνα με το θεώρημα της προηγούμενης Παραγράφου A13.4.3 όλες τους είναι ορθογώνιες η μία με την άλλη τόσο ως προς το μητρώο μάζας  $\mathbf{M}$  όσο και ως προς το μητρώο δυσκαμψίας  $\mathbf{K}$ : σχέσεις (13.4.13). Επαναλαμβάνουμε τις σχέσεις αυτές ορθογωνιότητας

$$\varphi_r^T \mathbf{M} \varphi_s = 0 \quad \text{και επίσης} \quad \varphi_r^T \mathbf{K} \varphi_s = 0 \quad \text{για} \quad r \neq s \quad \text{και με} \quad r, s = 1, 2, \dots, n. \tag{13.4.27}$$

Υπενθυμίζουμε επίσης πως οι σχέσεις αυτές ορθογωνιότητας των ιδιομορφών ισχύουν και για τις ιδιομορφές που αφορούν σε πολλαπλές ιδιοσυχνότητες  $\omega_k$ . Αρκεί βέβαια αυτές οι τελευταίες ιδιομορφές να έχουν επιλεγεί κατάλληλα: να είναι και αυτές ορθογώνιες μεταξύ τους. (Αυτό δεν το έχουμε αποδείξει, αλλά μπορεί να αποδειχθεί και ισχύει. Δεχόμαστε ότι έτσι πραγματικά είναι η κατάσταση με τις πιο πάνω ιδιομορφές.)

Εύκολα μπορεί τώρα να διαπιστώσει κανείς ότι το μητρώο  $\mathbf{M}_d$  που ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{M}_d := \Phi^T \mathbf{M} \Phi \tag{13.4.28}$$

είναι ένα διαγώνιο μητρώο. Αυτό συμβαίνει, γιατί τα μη διαγώνια στοιχεία του είναι μηδενικά λόγω των σχέσεων ορθογωνιότητας (13.4.27) για τις ιδιομορφές. Αντίθετα τα διαγώνια στοιχεία του

$$M_r = \varphi_r^T \mathbf{M} \varphi_r \quad \text{με} \quad r = 1, 2, \dots, n \tag{13.4.29}$$

είναι διάφορα του μηδενός. Τις ποσότητες αυτές  $M_r$  τις αποκαλούμε **γενικευμένες μάζες** του πολυβάθμιου (εδώ  $n$ -βάθμιου) μηχανικού συστήματός μας, της κατασκευής μας, του  $n$ -ώροφου ιδεατού κτιρίου διατμήσεως που εξετάζουμε στη Δυναμική των Κατασκευών.

Εξαιτίας και των δεύτερων σχέσεων ορθογωνιότητας (ή ορθογωνικότητας) (13.4.27), αυτές ως προς το μητρώο δυσκαμψίας  $\mathbf{K}$ , εντελώς ανάλογα ισχύουν και για το μητρώο

$$\mathbf{K}_d := \Phi^T \mathbf{K} \Phi. \tag{13.4.30}$$

Οι ποσότητες

$$K_r = \varphi_r^T \mathbf{K} \varphi_r \quad \text{με} \quad r = 1, 2, \dots, n \tag{13.4.31}$$

καλούνται ανάλογα **γενικευμένες δυσκαμψίες** του ίδιου πολυβάθμιου μηχανικού συστήματος.

Το διαγώνιο **μητρώο γενικευμένων μαζών**  $\mathbf{M}_d$  και το επίσης διαγώνιο **μητρώο γενικευμένων δυσκαμψιών**  $\mathbf{K}_d$  θα αποδειχθούν παρακάτω πάρα πολύ χρήσιμα για τον Πολιτικό Μηχανικό. Και μια που είναι διαγώνια (diagonal), τα ξαναγράφουμε και στις ισοδύναμες μορφές τους

$$\mathbf{M}_d = \text{diag} (M_1, M_2, \dots, M_n), \quad (13.4.32)$$

$$\mathbf{K}_d = \text{diag} (K_1, K_2, \dots, K_n). \quad (13.4.33)$$

Για κάποια διευκόλυνσή μας παρακάτω μπορούμε, αν θέλουμε, να ορίσουμε και το διαγώνιο **μητρώο ιδιοσυχνοτήτων**  $\mathbf{\Omega}$  ως εξής:

$$\mathbf{\Omega} := \text{diag} (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n \end{bmatrix}. \quad (13.4.34)$$

Φυσικά σαν διαγώνια στοιχεία έχουμε τις  $n$  ιδιοσυχνότητες  $\omega_r$ . Δεν είναι μάλιστα καθόλου δύσκολο να αποδείξουμε για το διαγώνιο αυτό μητρώο ιδιοσυχνοτήτων  $\mathbf{\Omega}$  ότι

$$\mathbf{\Omega}^2 := \mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega} = \text{diag} (\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2) = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix}. \quad (13.4.35)$$

Ισχύει επίσης και το ακόλουθο απλό σχετικό θεώρημα:

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ:** Σε ένα πολυβάθμιο μηχανικό σύστημα (εδώ κτίριο διατμήσεως) οι γενικευμένες μαζές  $M_r$ , οι γενικευμένες δυσκαμψίες  $K_r$  και οι ιδιοσυχνότητες  $\omega_r$  συνδέονται με τις σχέσεις

$$K_r = \omega_r^2 M_r \quad \text{για } r = 1, 2, \dots, n \quad \text{και σε μορφή με μητρώα } \mathbf{K}_d = \mathbf{\Omega}^2 \mathbf{M}_d. \quad (13.4.36)$$

**Απόδειξη:** Αφού τα τρία μητρώα  $\mathbf{M}_d$ ,  $\mathbf{K}_d$  και  $\mathbf{\Omega}$  είναι διαγώνια, η μορφή με μητρώα (μητρική μορφή)  $\mathbf{K}_d = \mathbf{\Omega}^2 \mathbf{M}_d$  του απλού θεωρήματός μας έπεται αμέσως από τη συνηθισμένη μορφή (με δείκτες  $r$ )  $K_r = \omega_r^2 M_r$  του ίδιου θεωρήματος. Αυτή όμως δεν είναι απόλυτα προφανής στον Πολιτικό Μηχανικό και πρέπει να την αποδείξουμε στ' αλήθεια. Αυτό και θα κάνουμε τώρα αμέσως.

Χρησιμοποιούμε τη σχέση (13.4.31) για τις γενικευμένες δυσκαμψίες  $K_r$ . Την υπενθυμίζουμε

$$K_r = \boldsymbol{\varphi}_r^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_r \quad \text{με } r = 1, 2, \dots, n. \quad (13.4.37)$$

Γνωρίζουμε όμως επίσης από τη σχέση (13.4.15) (εδώ με  $r$  αντί  $s$ , το ίδιο κάνει!) ότι

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_r = \omega_r^2 \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_r. \quad (13.4.38)$$

Αντικαθιστούμε λοιπόν άμεσα την ποσότητα  $\mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_r$  από τη σχέση (13.4.38) στην προηγούμενη της σχέση (13.4.37). Με την απλή αυτή αντικατάσταση βρίσκουμε ότι

$$K_r = \boldsymbol{\varphi}_r^T (\omega_r^2 \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_r) = \omega_r^2 (\boldsymbol{\varphi}_r^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_r) = \omega_r^2 M_r \quad (13.4.39)$$

εξαιτίας και των σχέσεων (13.4.29). Κυρίως για λόγους δικαιοσύνης μεταξύ των γενικευμένων δυσκαμψιών  $K_r$  και των γενικευμένων μαζών  $M_r$  υπενθυμίζουμε και τις σχέσεις αυτές (13.4.29):

$$M_r = \boldsymbol{\varphi}_r^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_r \quad \text{με } r = 1, 2, \dots, n. \quad (13.4.40)$$

Προφανώς το δεξιό μέλος της σχέσεως (13.4.39) δηλώνει την απόδειξη του θεωρήματος, δηλαδή της σχέσεως (13.4.36):  $K_r = \omega_r^2 M_r$  στην πρώτη της μορφή χωρίς μητρώα. Πάει λοιπόν κι αυτό το ενδιαφέρον για τον Πολιτικό Μηχανικό θεώρημα. Κι ευχαριστημένοι προχωράμε κι άλλο ... □

**A13.4.5. Αποσύζευξη του συστήματος των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων**

Είναι αλήθεια: κοπιάσαμε, αλλά φθάνουμε στο τέλος της πορείας μας, στην ελεύθερη έξοδο του μικρού «τούνελ» μας. Είμαστε έτοιμοι για τη διαγωνιοποίηση, την αποσύζευξη του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (13.4.2) για εξαναγκασμένες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση του μηχανικού μας συστήματος: στις Ταλαντώσεις του πολυβάθμιου ταλαντωτή μας: εδώ στη Δυναμική των Κατασκευών του ιδεατού κτιρίου διατμήσεως που εξετάζουμε. Επαναλαμβάνουμε το θεμελιώδες αυτό σύστημα διαφορικών εξισώσεων του Πολιτικού Μηχανικού ξανά στη μητρική γραφή του

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(t). \quad (13.4.41)$$

Και τώρα ας ρίξουμε μια μικρή ματιά (μια «φιλοματιά») πίσω μας: στις Παραγράφους A12.9.4 και A12.9.5 της Ενότητας A12.9 για τη μέθοδο της διαγωνιοποίησης (ή αποσυσζεύξεως) γραμμικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως και με σταθερούς συντελεστές. Τί κάνουμε εδώ; Μα ετοιμαζόμαστε να εφαρμόσουμε την ίδια ακριβώς μέθοδο (ψέματα: εδώ λίγο γενικευμένη) στο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξεως (13.4.41) των Ταλαντώσεων και της Δυναμικής των Κατασκευών: το ίδιο σύστημα είναι! Γενικεύουμε δηλαδή τη μέθοδο της διαγωνιοποίησης (ή αποσυσζεύξεως) από συστήματα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως σε αντίστοιχα συστήματα δευτέρας τάξεως, συγκεκριμένα εδώ στο σύστημα (13.4.41).

Και πώς γίνεται αυτό; Πρώτα-πρώτα η σχέση (12.9.18)

$$\mathbf{T}^T \mathbf{A}_s \mathbf{T} = \mathbf{A}_d \quad \text{με} \quad \mathbf{T} = [\boldsymbol{\delta}_1 \quad \boldsymbol{\delta}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{\delta}_n] \quad (13.4.42)$$

μας είχε επιτρέψει (παρελθόν, υπερσυντέλικος ...) να μετατρέψουμε ένα πραγματικό συμμετρικό μητρώο  $\mathbf{A}_s$  σε ένα διαγώνιο μητρώο  $\mathbf{A}_d$ . Και για το σκοπό αυτό είχαμε χρησιμοποιήσει το μητρώο  $\mathbf{T}$  των ιδιοδιανυσμάτων  $\boldsymbol{\delta}_r$  του πραγματικού συμμετρικού μητρώου  $\mathbf{A}_s$ . Κι εδώ τί γίνεται;

Τα ίδια, μάλλον ανάλογα, όχι ακριβώς τα ίδια. Εδώ το ρόλο του πραγματικού συμμετρικού μητρώου  $\mathbf{A}_s$  στη Γραμμική Άλγεβρα τον παίζουν τα δύο μητρώα μάζας (ή αδρανείας)  $\mathbf{M}$  και δυσκαμψίας (στιβαρότητας στους ταλαντωτές μαζών-ελατηρίων)  $\mathbf{K}$ . Δύο μητρώα δηλαδή εδώ, τα μητρώα  $\mathbf{M}$  και  $\mathbf{K}$ , αντί για ένα μόνο, το μητρώο  $\mathbf{A}_s$ . Ναι, έτσι είναι εδώ η κατάσταση. Πάει καλά! Και τα δικά μας μητρώα  $\mathbf{M}$  και  $\mathbf{K}$  είναι όμως και πραγματικά και συμμετρικά. Το ξέρουμε αυτό. Και ξέρουμε και τον τρόπο που διαγωνιοποιούνται κι αυτά. Είναι οι δύο σχέσεις ορθογωνιότητας (ή ορθογωνικότητας) (13.4.28) και (13.4.30). Να τες μαζί ξανά (σε ελάχιστα διαφορετική μορφή):

$$\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{M}_d \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{K}_d \quad \text{με} \quad \boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\varphi}_1 \quad \boldsymbol{\varphi}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{\varphi}_n] \quad (13.4.43)$$

το μητρώο των ιδιομορφών ταλαντώσεων  $\boldsymbol{\varphi}_r$ .

Τώρα αρχίζει και «κολλάει» η κατάσταση. Ναι, οι σχέσεις ορθογωνιότητας (13.4.43) γενικεύουν για τον Πολιτικό Μηχανικό στη Δυναμική των Κατασκευών τη μία σχέση ορθογωνιότητας (13.4.42) στην κλασική μέθοδο της διαγωνιοποίησης (για συστήματα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως). Στη σχέση (12.9.28) είχαμε εισαγάγει τις νέες άγνωστες συναρτήσεις  $\mathbf{v}(t)$  (αντί για τις  $\mathbf{u}(t)$ ):

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{T}\mathbf{v}(t), \quad \text{οπότε} \quad \dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{T}\dot{\mathbf{v}}(t). \quad (13.4.44)$$

Απόλυτα ανάλογα κι εδώ εισάγουμε τις νέες άγνωστες συναρτήσεις  $\mathbf{q}(t)$  με τη σχέση

$$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{q}(t), \quad \text{οπότε} \quad \ddot{\mathbf{u}}(t) = \boldsymbol{\Phi}\ddot{\mathbf{q}}(t) \quad (13.4.45)$$

φυσικά με τη χρήση του μητρώου των ιδιομορφών  $\boldsymbol{\Phi}$  αντί για το μητρώο των ιδιοδιανυσμάτων  $\mathbf{T}$ . Πολύ ωραία λοιπόν, σχεδόν απόλυτη η αναλογία! Παρακάτω ...

Παρακάτω είναι απλά το τέλος της πορείας μας: ακριβώς όπως στην Παράγραφο A12.9.5 για την κλασική μέθοδο της αποσυσζεύξεως συστημάτων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως.

Συγκεκριμένα αντικαθιστούμε τώρα τις σχέσεις (13.4.45) στο σύστημα των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (13.4.41) παίρνοντας

$$\mathbf{M}\Phi\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\Phi\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (13.4.46)$$

με τις νέες άγνωστες συναρτήσεις μας  $\mathbf{q}(t)$ . Σημειώνουμε ότι τις νέες συναρτήσεις αυτές  $\mathbf{q}(t)$  ο Πολιτικός Μηχανικός τις αποκαλεί συνήθως στην κατασκευή του (εδώ ένα ιδεατό κτίριο διατμήσεως) **κανονικές συντεταγμένες** (normal coordinates). Σπάνια τις αποκαλεί **γενικευμένες συντεταγμένες** (generalized coordinates) και ακόμη πιο σπάνια **ιδιομορφικές συντεταγμένες** (modal coordinates). Σημειώνουμε επίσης ότι ο τελευταίος αυτός όρος είναι εύχρηστος στα Αγγλικά, όχι όμως και στα Ελληνικά λόγω δυσκολίας αποδόσεώς του στη μετάφραση.

Δε μας απομένει τώρα παρά να εκμεταλλευθούμε και τις σχέσεις διαγωνιοποίησης (13.4.43) πολλαπλασιάζοντας το τροποποιημένο (με νέες άγνωστες συναρτήσεις τις κανονικές συντεταγμένες  $\mathbf{q}(t)$ ) σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (13.4.46) από αριστερά επί το ανάστροφο μητρώο των ιδιομορφών  $\Phi^T$ . Έτσι παίρνουμε

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{q}}(t) + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{q}(t) = \hat{\mathbf{p}}(t) \quad \text{με} \quad \hat{\mathbf{p}}(t) := \Phi^T \mathbf{p}(t) \quad (13.4.47)$$

το νέο διάνυσμα των καλούμενων **γενικευμένων φορτίσεων**  $\hat{\mathbf{p}}_k(t)$ . (Γενικευμένες μάζες, δυσκαμψίες και φορτίσεις λοιπόν.) Με τη χρήση και των σχέσεων διαγωνιοποίησης (13.4.43):  $\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{M}_d$  και  $\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \mathbf{K}_d$  καταλήγουμε επιτέλους στο αποσυσζευγμένο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων

$$\mathbf{M}_d \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}_d \mathbf{q}(t) = \hat{\mathbf{p}}(t). \quad (13.4.48)$$

Σ' αυτό υπεισέρχονται τα μητρώα γενικευμένων μαζών  $\mathbf{M}_d$  και δυσκαμψιών  $\mathbf{K}_d$ . (Εργασθήκαμε δηλαδή ανάλογα με την Παράγραφο A12.9.5 του Κεφαλαίου A12, εδώ όμως για ένα συζευγμένο σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δευτέρας και όχι πρώτης τάξεως.)

Αν ίσως μας έχει απομείνει κάποιο ίχνος αμφιβολίας για την αποσύζευξη αυτή, ας γράψουμε το σύστημα των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (13.4.48) στην πολύ αναλυτικότερη μορφή του

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{q}_n(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{p}_1(t) \\ \hat{p}_2(t) \\ \vdots \\ \hat{p}_n(t) \end{Bmatrix}. \quad (13.4.49)$$

Τώρα οι πολλαπλασιασμοί των μητρώων (μητρώο επί διάνυσμα στήλης) είναι πλέον εμφανείς και μας οδηγούν, όπως βλέπουμε, στο σύστημα των ασύζευκτων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{q}_1(t) + K_1 q_1(t) &= \hat{p}_1(t), \\ M_2 \ddot{q}_2(t) + K_2 q_2(t) &= \hat{p}_2(t), \\ &\vdots \\ M_n \ddot{q}_n(t) + K_n q_n(t) &= \hat{p}_n(t), \end{aligned} \quad (13.4.50)$$

με συνοπτικότερη γραφή

$$M_k \ddot{q}_k(t) + K_k q_k(t) = \hat{p}_k(t) \quad \text{με} \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (13.4.51)$$

Ίσως ακόμη καταλληλότερη μορφή για τον Πολιτικό Μηχανικό να είναι η ακόλουθη:

$$\ddot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = \hat{p}_k^*(t) \quad \text{με} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad \text{και} \quad \omega_k = \sqrt{\frac{K_k}{M_k}} \quad (13.4.52)$$

από τη σχέση (13.4.36). Επίσης ορίσαμε

$$\hat{p}_k^*(t) := \frac{\hat{p}_k(t)}{M_k}. \quad (13.4.53)$$

Άρα καταλήξαμε σε ένα διαγωνιοποιημένο, ασύζευκτο σύστημα  $n$  γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές: τις γενικευμένες μάζες  $M_k$  και τις γενικευμένες δυσκαμψίες  $K_k$ . Στη Δυναμική των Κατασκευών είναι τώρα σαν να είχαμε (ασφαλώς δεν έχουμε!)  $n$  ξεχωριστά μονώροφα ιδεατά κτίρια διατημήσεως. Ή στις Ταλαντώσεις μηχανικών συστημάτων μαζών-ελατηρίων σαν να είχαμε  $n$  ξεχωριστούς μονοβάθμιους ταλαντωτές μόνο με μία μάζα (τη γενικευμένη μάζα  $M_k$ ) και ένα ελατήριο (με σταθερά  $K_k$ ) τον καθένα. Σίγουρα δεν είναι αυτή η πραγματικότητα! Η αποσύζευξη (13.4.51) των διαφορικών εξισώσεων είναι κυρίως ένα μαθηματικό τέχνασμα. Δεν αποκόπηκε βέβαια ο ένας όροφος του κτιρίου από τον άλλο. Αλίμονό μας, αν δεχόμασταν κάτι τέτοιο: πάει, έπεσε το κτίριο, ευτυχώς μόνο στα χαρτιά, υπολογιστικά, όχι στ' αλήθεια! Προφανώς οι φυσικές άγνωστες συναρτήσεις συνεχίζουν να είναι οι οριζόντιες μετατοπίσεις  $u_k(t)$  των  $n$  πλακών και έχουν και φυσική σημασία. Αντίθετα οι  $n$  κανονικές συντεταγμένες  $q_k(t)$  δεν έχουν φυσική σημασία πέρα από αυτή που έμμεσα τους αποδίδει η σχέση ορισμού τους: πρώτη σχέση (13.4.45):

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{\Phi}\mathbf{q}(t) \quad \text{και αντιστρέφοντας} \quad \mathbf{q}(t) = \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{u}(t). \quad (13.4.54)$$

Με τις ιδιομορφές  $\mathbf{\Phi}_k$  ορθογώνιες μεταξύ τους αποδεικνύεται ότι υπάρχει το αντίστροφο αυτό μητρώο  $\mathbf{\Phi}^{-1}$  του μητρώου ιδιομορφών  $\mathbf{\Phi}$ . Επ' ευκαιρία υπενθυμίζεται ότι το μητρώο ιδιομορφών  $\mathbf{\Phi}$  δεν είναι συμμετρικό μητρώο. Αντίθετα τα μητρώα μάζας  $\mathbf{M}$  και δυσκαμψίας  $\mathbf{K}$  είναι συμμετρικά μητρώα. Το μητρώο μάζας  $\mathbf{M}$  είναι αρκετές φορές, όχι όμως πάντα, επιπλέον και διαγώνιο μητρώο.

► **Παρατήρηση A13.12:** Παρά τα παραπάνω κάπως αρνητικά σχόλιά μας για τις κανονικές συντεταγμένες  $q_k(t)$ , πρέπει εντούτοις να σημειώσουμε ότι γενικά η καθεμιά τους αντιστοιχεί σε διαφορετική ιδιοσυχνότητα  $\omega_k$  του κτιρίου. Με τη έννοια αυτή η σχέση αλλαγής αγνώστων συναρτήσεων (13.4.45):  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{\Phi}\mathbf{q}(t)$  εκφράζει μια **υπέρθωση** (ή **επαλληλία**) της συνολικής αποκρίσεως του κτιρίου  $\mathbf{u}(t)$  μέσω των επιμέρους αποκρίσεων  $q_k(t)$  για κάθε ιδιοσυχνότητά του  $\omega_k$  χωριστά. Κι αυτή η ανάλυση σε ιδιοσυχνότητες  $\omega_k$  είναι αρκετά ενδιαφέρουσα για τον Πολιτικό Μηχανικό.

Είναι τώρα πια προφανές ότι πρέπει απλά να λύσουμε τις αποσυσζευγμένες διαφορικές εξισώσεις (13.4.52) ως προς τις κανονικές συντεταγμένες  $q_k(t)$ . Πρόκειται απλά για μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως και με σταθερούς συντελεστές. Είναι μάλιστα όλες τους ίδιες. Ευτυχώς! Άρα οι λύσεις που επιδιώκουμε να βρούμε μας είναι γνωστές από την Ενότητα A11.6: λύση (11.6.11): ολοκληρωτικός τύπος του Duhamel και παίρνουν εδώ τη μορφή

$$q_k(t) = q_k(0) \cos \omega_k t + \frac{\dot{q}_k(0)}{\omega_k} \sin \omega_k t + \frac{1}{\omega_k} \int_0^t \hat{p}_k^*(\tau) \sin[\omega_k(t-\tau)] d\tau \quad \text{με} \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (13.4.55)$$

Σημειώνουμε ότι οι σταθερές  $q_k(0)$  και  $\dot{q}_k(0)$  μπορούν να υπολογισθούν από τις αρχικές συνθήκες, εφόσον αυτές είναι διαθέσιμες. Επίσης ότι για ελεύθερες ταλαντώσεις ο ολοκληρωτικός όρος στη λύση, το ολοκλήρωμα Duhamel (που είναι ένα συνελικτικό ολοκλήρωμα) προφανώς απουσιάζει. Τελειώσαμε λοιπόν και την παράγραφο αυτή. Και απόσβεση τώρα!

#### A13.4.6. Η γενική περίπτωση με απόσβεση

Σε τούτη την παράγραφο αναφερόμαστε στο γενικό σύστημα των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (13.4.4) των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων του ιδεατού κτιρίου μας (και γενικότερα ενός πολυβάθμιου μηχανικού συστήματος με  $n$  βαθμούς ελευθερίας). Το επαναλαμβάνουμε κι εδώ:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(t). \quad (13.4.56)$$

Τώρα βέβαια έχει παρουσιασθεί και ο όρος αποσβέσεως  $\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t)$  με το μητρώο αποσβέσεως  $\mathbf{C}$ . Κι αυτός είναι που πολύ συχνά δημιουργεί στον Πολιτικό Μηχανικό σοβαρότατο πρόβλημα στην αποσύζευξη του παραπάνω συστήματος διαφορικών εξισώσεων.

Για να το δούμε όμως καλύτερα αυτό. Εφαρμόζουμε και στην παρούσα περίπτωση τη μέθοδο της διαγωνιοποίησης (ή αποσυσζεύξεως) ακριβώς όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, εκεί με  $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ . Και το κάνουμε αυτό με τη χρήση των κανονικών συντεταγμένων  $\mathbf{q}(t)$ :  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{\Phi}\mathbf{q}(t)$ , σχέση (13.4.45), με  $\mathbf{\Phi}$  το μητρώο των ιδιομορφών. Και με τις νέες αυτές άγνωστες συναρτήσεις (τις κανονικές συντεταγμένες  $q_k(t)$ ) το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (13.4.56) μετασχηματίζεται αμέσως στη μορφή

$$\mathbf{M}\mathbf{\Phi}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\mathbf{\Phi}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{\Phi}\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (13.4.57)$$

εντελώς ανάλογα με το σύστημα (13.4.46), σ' εκείνο όμως με  $\mathbf{C} = \mathbf{0}$  (χωρίς απόσβεση).

Και ακολουθεί, όπως και πριν, ο πολλαπλασιασμός από αριστερά επί το ανάστροφο μητρώο  $\mathbf{\Phi}^T$  του μητρώου των ιδιομορφών  $\mathbf{\Phi}$ . Έτσι προκύπτει τώρα το νέο σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{\Phi}^T\mathbf{C}\mathbf{\Phi}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{\Phi}^T\mathbf{K}\mathbf{\Phi}\mathbf{q}(t) = \hat{\mathbf{p}}(t) \quad \text{με} \quad \hat{\mathbf{p}}(t) := \mathbf{\Phi}^T\mathbf{p}(t). \quad (13.4.58)$$

Στο σημείο αυτό χρησιμοποιούμε και τις σχέσεις διαγωνιοποίησης (13.4.43), τις ξαναγράφουμε

$$\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi} = \mathbf{M}_d \quad \text{και} \quad \mathbf{\Phi}^T\mathbf{K}\mathbf{\Phi} = \mathbf{K}_d \quad \text{με} \quad \mathbf{\Phi} = [\boldsymbol{\varphi}_1 \ \boldsymbol{\varphi}_2 \ \dots \ \boldsymbol{\varphi}_n], \quad (13.4.59)$$

παίρνοντας

$$\mathbf{M}_d\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{\Phi}^T\mathbf{C}\mathbf{\Phi})\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}_d\mathbf{q}(t) = \hat{\mathbf{p}}(t). \quad (13.4.60)$$

Κάτι δεν πάει καλά; Ναι, δυστυχώς! Οι σχέσεις διαγωνιοποίησης (13.4.59) αφορούν μόνο στα μητρώα μάζας  $\mathbf{M}$  και δυσκαμψίας  $\mathbf{K}$ , όχι και στο μητρώο αποσβέσεως  $\mathbf{C}$ , που εμφανίζεται στις Ταλαντώσεις με απόσβεση. Δεν υπάρχει κανένας νόμος στη Μηχανική που να αποδεικνύει ότι και το μητρώο  $\mathbf{\Phi}^T\mathbf{C}\mathbf{\Phi}$  στην παρένθεση του τελευταίου συστήματος είναι ένα διαγώνιο μητρώο  $\mathbf{C}_d$ . Δυστυχώς για τον Πολιτικό Μηχανικό γενικά δεν είναι διαγώνιο μητρώο. Και πώς γενικεύουμε τώρα εδώ τη μέθοδο της διαγωνιοποίησης (ή αποσυσζεύξεως); Εάν ισχύει η διαγωνιοποίηση

$$\mathbf{\Phi}^T\mathbf{C}\mathbf{\Phi} = \mathbf{C}_d \quad \text{με το } \mathbf{C}_d \text{ διαγώνιο μητρώο} \quad (13.4.61)$$

έστω και προσεγγιστικά, ε τότε ναι, το σύστημα (13.4.60) έχει την αποσυσζευγμένη μορφή

$$\mathbf{M}_d\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}_d\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}_d\mathbf{q}(t) = \hat{\mathbf{p}}(t). \quad (13.4.62)$$

Η περίπτωση ισχύος της παραπάνω σχέσεως διαγωνιοποίησης (13.4.61) παρέα με τις δύο ανάλογες σχέσεις (13.4.59) είναι η πολύ ευνοϊκή περίπτωση για τον Πολιτικό Μηχανικό. Καλείται **κλασική απόσβεση** και η αποσυσζευξη των διαφορικών εξισώσεων (13.4.56) έχει πετύχει.

Αρκετά συχνά ο Πολιτικός Μηχανικός δέχεται προσεγγιστικά ότι το μητρώο αποσβέσεως  $\mathbf{C}$  είναι γραμμικός συνδυασμός των δύο «καλών» μητρώων μάζας  $\mathbf{M}$  και δυσκαμψίας  $\mathbf{K}$  (με γνωστούς συντελεστές  $\alpha$  και  $\beta$ ). Με την παραδοχή αυτή για την απόσβεση, που καλείται στη Δυναμική των Κατασκευών **απόσβεση Rayleigh** (καμία σχέση με το πηλίκο Rayleigh!), ισχύει η μητρωική σχέση

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}. \quad (13.4.63)$$

Ε τότε βέβαια

$$\mathbf{\Phi}^T\mathbf{C}\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}^T(\alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K})\mathbf{\Phi} = \alpha\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi} + \beta\mathbf{\Phi}^T\mathbf{K}\mathbf{\Phi} = \alpha\mathbf{M}_d + \beta\mathbf{K}_d \quad (13.4.64)$$

ή πολύ καλύτερα

$$\mathbf{\Phi}^T\mathbf{C}\mathbf{\Phi} = \mathbf{C}_d \quad \text{με} \quad \mathbf{C}_d := \alpha\mathbf{M}_d + \beta\mathbf{K}_d \quad (13.4.65)$$

το διαγώνιο αυτό μητρώο. Κι έτσι, με την παραδοχή αποσβέσεως Rayleigh, το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (13.4.60) είναι πια αποσυσζευγμένο:  $n$  ανεξάρτητες διαφορικές εξισώσεις.

Μπορούμε μάλιστα εύκολα να γράψουμε τις διαφορικές αυτές εξισώσεις (13.4.62) στις μορφές

$$\ddot{q}_k(t) + 2\xi_k\omega_k\dot{q}_k(t) + \omega_k^2q_k(t) = \hat{p}_k^*(t) \quad \text{φυσικά με} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad \text{και} \quad \hat{p}_k^*(t) := \frac{\hat{p}_k(t)}{M_k}. \quad (13.4.66)$$



Σ' αυτές τις μορφές ορίσαμε τους γενικευμένους λόγους αποσβέσεως  $\xi_k$  μέσω των σχέσεων

$$C_k = 2\xi_k M_k \omega_k \implies \xi_k = \frac{C_k}{2M_k \omega_k} \quad (13.4.67)$$

με  $C_k$  τα  $n$  διαγώνια στοιχεία του διαγώνιου μητρώου γενικευμένων αποσβέσεων  $\mathbf{C}_d = \alpha \mathbf{M}_d + \beta \mathbf{K}_d$  της δεύτερης σχέσεως (13.4.65):  $\mathbf{C}_d = \text{diag}(C_1, C_2, \dots, C_n)$ . Σημειώνουμε ότι οι ορισμοί (13.4.67) βρίσκονται σε πλήρη συμφωνία με τη γνωστή μας σχέση (6.1.7) του Κεφαλαίου A6:  $\xi = c/(2m\omega_0)$ .

Γνωρίζουμε επίσης και τις λύσεις των πιο πάνω αποσυσζευγμένων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (13.4.66). Στην πολύ συνηθισμένη για τον Πολιτικό Μηχανικό περίπτωση της ασθενούς αποσβέσεως (όπου  $0 < \xi_k < 1$ ) με τη χρήση των τύπων (11.7.16) και (11.8.11) του Κεφαλαίου A11 για τις εφαρμογές του μετασχηματισμού Laplace έχουμε τις λύσεις

$$q_k(t) = e^{-\xi_k \omega_k t} \left[ q_k(0) \cos \omega_{kD} t + \frac{\dot{q}_k(0) + \xi_k \omega_{kD} q_k(0)}{\omega_{kD}} \sin \omega_{kD} t \right] + \frac{1}{\omega_{kD}} \int_0^t \hat{p}_k^*(\tau) e^{-\xi_k \omega_k (t-\tau)} \sin[\omega_{kD}(t-\tau)] d\tau \quad \text{με } k = 1, 2, \dots, n. \quad (13.4.68)$$

Φυσικά οι συχνότητες  $\omega_{kD}$  των ταλαντώσεων με ασθενή απόσβεση που έχουμε θα είναι

$$\omega_{kD} = \omega_k \sqrt{1 - \xi_k^2} \quad (13.4.69)$$

σε πλήρη αναλογία με τον τύπο (6.1.15):  $\omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$  του Κεφαλαίου A6 για το αντίστοιχο μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα: ας πούμε εδώ για ένα ιδεατό μονώροφο κτίριο διατμήσεως. Ασφαλώς για  $\mathbf{C} = \mathbf{0}$  (μηδενικό μητρώο αποσβέσεως), οπότε  $\mathbf{C}_d = \mathbf{0}$  και  $\xi_k = 0$  (μηδενικοί γενικευμένοι λόγοι αποσβέσεως), οι λύσεις (13.4.68) μεταπίπτουν στις απλούστερες λύσεις (13.4.55). Τέλος σημειώνουμε πως και στο παρόν γενικευμένο πρόβλημα οι λύσεις (13.4.68) είναι **ολοκληρωτικοί τύποι Duhamel** ακριβώς όπως και στην Ενότητα A11.8 του Κεφαλαίου A11. Εκεί όμως είχαμε απλά ένα μονοβάθμιο (όχι πολυβάθμιο) ταλαντωτή σε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με ασθενή απόσβεση.

Τελειώνοντας το κεφάλαιο αυτό, θα εξετάσουμε τώρα μια σημαντική δυνατότητα. Αυτή είναι πολύ ενδιαφέρουσα τουλάχιστον από θεωρητικής σκοπιάς. Πρακτικά δεν είναι τόσο σημαντική.

#### A13.4.7. Από το πρόβλημα της Δυναμικής των Κατασκευών στο πρόβλημα της Γραμμικής Άλγεβρας

Στην παρούσα Ενότητα A13.4, συγκεκριμένα στην Παράγραφο A13.4.2 αναφερθήκαμε στο **γενικευμένο ιδιοπρόβλημα** της Δυναμικής των Κατασκευών (13.4.8). Αυτό είναι το ιδιοπρόβλημα

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \quad \text{και ισοδύναμα} \quad \mathbf{K}\boldsymbol{\varphi} = \omega^2 \mathbf{M}\boldsymbol{\varphi} \quad (13.4.70)$$

(σχέση (13.4.14)). Θέτοντας  $\omega^2 = \lambda$ , το ξαναγράφουμε και στη λίγο πιο απλή μορφή

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \quad \text{και ισοδύναμα} \quad \mathbf{K}\boldsymbol{\varphi} = \lambda \mathbf{M}\boldsymbol{\varphi} \quad \text{με } \lambda = \omega^2. \quad (13.4.71)$$

Πρέπει να προσδιορισθούν οι  $n$  ιδιοτιμές  $\lambda_k = \omega_k^2$  (ισοδύναμα οι  $n$  ιδιοσυχνότητες  $\omega_k$ ). Αυτό το πετυχαίνουμε μέσω της εξίσωσης (13.4.10). Στη συνέχεια προσδιορίζουμε και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, εδώ τις ιδιομορφές ταλαντώσεων (απλούστερα ιδιομορφές)  $\boldsymbol{\varphi}_k$  μέσω του ομογενούς γραμμικού αλγεβρικού συστήματος (13.4.70). Είμαστε ευχαριστημένοι λοιπόν. Γενικεύσαμε το κλασικό ιδιοπρόβλημα της Γραμμικής Άλγεβρας (προσδιορισμός ιδιοτιμών  $\lambda_k$  και ιδιοδιανυσμάτων  $\delta_k$  ενός μητρώου  $\mathbf{A}$ ) στο πρόβλημα του πολυβάθμιου ταλαντωτή (εδώ κτιρίου) με δύο μητρώα: τα μητρώα μάζας  $\mathbf{M}$  και δυσκαμψίας  $\mathbf{K}$  (προσδιορισμός ιδιοσυχνοτήτων και ιδιομορφών). Ωραία!

Περισσότερο για να κάνουμε μια καλύτερη σύγκριση των δύο αυτών ιδιοπροβλημάτων (της Γραμμικής Άλγεβρας και της Δυναμικής των Κατασκευών) παρά για πρακτικούς λόγους θα αναφερθούμε στη σύντομη αυτή παράγραφο και σε μια άλλη δυνατότητα. Στη δυνατότητα κατευθείαν αναγωγής του γενικευμένου ιδιοπροβλήματος της Δυναμικής των Κατασκευών στο αντίστοιχο ιδιοπρόβλημα της Γραμμικής Άλγεβρας. Για να δούμε τώρα πώς θα μπορούσε να γίνει κι αυτό ...

Απλά, φοβερά απλά, απίστευτα απλά! Είναι αρκετό να πολλαπλασιάσουμε από αριστερά τη σχέση (13.4.71) επί το αντίστροφο μητρώο  $\mathbf{M}^{-1}$ . Φυσικά τότε, επειδή  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{I}_n$ , προκύπτει ότι

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \quad \text{και ισοδύναμα} \quad \mathbf{A}\boldsymbol{\varphi} = \lambda\boldsymbol{\varphi} \quad \text{με} \quad \lambda = \omega^2 \quad \text{και} \quad \mathbf{A} := \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}. \quad (13.4.72)$$

Επομένως οδηγηθήκαμε στο κλασικό ιδιοπρόβλημα της Γραμμικής Άλγεβρας για το καινούργιο μητρώο  $\mathbf{A} := \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ , που δεν είναι βέβαια συμμετρικό μητρώο. Οι ιδιοτιμές  $\lambda_k$  του ιδιοπρόβληματος αυτού μας επιτρέπουν τον υπολογισμό των ιδιοσυχνοτήτων  $\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$ . Επίσης τα ιδιοδιανύσματα  $\boldsymbol{\varphi}_k$  του ίδιου ιδιοπρόβληματος της Γραμμικής Άλγεβρας είναι προφανώς οι ιδιομορφές του αντίστοιχου ιδιοπρόβληματος της Δυναμικής των Κατασκευών. Κατά συνέπεια οι υπολογιστικές μέθοδοι, οι αλγόριθμοι και τα διαθέσιμα προγράμματα της Γραμμικής Άλγεβρας για το κλασικό ιδιοπρόβλημα είναι αμέσως εφαρμόσιμα και στο γενικευμένο ιδιοπρόβλημα της Δυναμικής των Κατασκευών. Όμως αυτή είναι μια θεωρητική δυνατότητα και δε χρησιμοποιείται συχνά στην πράξη.

Υπάρχει και δεύτερος τρόπος για την ίδια αναγωγή: από το γενικευμένο ιδιοπρόβλημα της Δυναμικής των Κατασκευών στο κλασικό ιδιοπρόβλημα της Γραμμικής Άλγεβρας. Με τον τρόπο αυτό πολλαπλασιάζουμε τώρα από αριστερά τη σχέση (13.4.71) επί το **μητρώο ευκαμψίας**  $\mathbf{F} := \mathbf{K}^{-1}$ . Αυτό είναι το αντίστροφο μητρώο  $\mathbf{K}^{-1}$  του **μητρώου δυσκαμψίας**  $\mathbf{K}$ . Έτσι διαπιστώνουμε ότι

$$(\mathbf{B} - \lambda^* \mathbf{I}_n)\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \quad \text{και ισοδύναμα} \quad \mathbf{B}\boldsymbol{\varphi} = \lambda^* \boldsymbol{\varphi} \quad \text{με} \quad \lambda^* = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\omega^2} \quad \text{και} \quad \mathbf{B} := \mathbf{K}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{F}\mathbf{M}. \quad (13.4.73)$$

Τώρα, αφού προσδιορισθούν οι ιδιοτιμές  $\lambda_k^*$  στο κλασικό αυτό ιδιοπρόβλημα, οι αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες  $\omega_k$  προσδιορίζονται και αυτές από τις σχέσεις  $\omega_k = 1/\sqrt{\lambda_k^*}$ . Επίσης τα ιδιοδιανύσματα  $\boldsymbol{\varphi}_k$  του κλασικού ιδιοπρόβληματος είναι οι ζητούμενες ιδιομορφές ταλαντώσεων (ή απλά ιδιομορφές).

Μετά την επίλυση του γενικευμένου ιδιοπρόβληματος της Δυναμικής των Κατασκευών μέσω της αναγωγής του στο κλασικό ιδιοπρόβλημα της Γραμμικής Άλγεβρας η αποσύζευξη του συστήματος των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων είναι και αυτή απόλυτα εφικτή. Η σχετική μέθοδος έχει περιγραφεί αναλυτικά στην Παράγραφο A12.9.5 του προηγούμενου Κεφαλαίου A12.

Σαν τελευταία σχετική δυνατότητα θα αναγάγουμε το γενικό σύστημα των διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξεως (13.4.56) του πολυβάθμιου ταλαντωτή (εδώ κτιρίου) σε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με απόσβεση στο αντίστοιχο πρόβλημα συστήματος διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως (12.9.26). Για το δεύτερο αυτό πρόβλημα η μέθοδος της διαγωνιοποίησης (ή αποσυσζεύξεως) έχει ήδη εφαρμοσθεί επιτυχώς στην Παράγραφο A12.9.5 του προηγούμενου Κεφαλαίου A12.

Προς το σκοπό αυτό απλά εισάγουμε και τις  $n$  συνιστώσες των οριζόντιων ταχυτήτων των πλακών των ορόφων  $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{u}}(t)$  σαν  $n$  πρόσθετες άγνωστες συναρτήσεις πέρα από τις  $n$  αρχικές άγνωστες συναρτήσεις  $\mathbf{u}(t)$ . Έτσι έχουμε συνολικά τις  $2n$  άγνωστες συναρτήσεις  $\mathbf{w}(t) = [\mathbf{u}^T(t) \quad \mathbf{v}^T(t)]^T$ . Με  $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{u}}(t)$ , αφού ισχύει και το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (13.4.56), παίρνουμε τελικά

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{v}(t) \quad \text{και} \quad \dot{\mathbf{v}}(t) = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{u}(t) - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{v}(t) + \mathbf{p}^*(t) \quad \text{με} \quad \mathbf{p}^*(t) := \mathbf{M}^{-1}\mathbf{p}(t) \quad (13.4.74)$$

έχοντας ήδη πολλαπλασιάσει τις δεύτερες διαφορικές εξισώσεις επί το αντίστροφο μητρώο  $\mathbf{M}^{-1}$ .

Στο σημείο αυτό εισάγουμε και το καινούργιο μητρώο  $\mathbf{\Gamma}$  διαστάσεων  $2n \times 2n$  σαν το μητρώο

$$\mathbf{\Gamma} := \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}. \quad (13.4.75)$$

Μπορούμε τώρα να δούμε εύκολα ότι με τη χρήση του το σύστημα των  $2n$  γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (13.4.74) καταλήγει στην ενιαία μορφή

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{\Gamma}\mathbf{w}(t) + \mathbf{g}^*(t) \quad \text{με} \quad \mathbf{g}^*(t) := \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p}^*(t) \end{Bmatrix}. \quad (13.4.76)$$

Πρόκειται για τη μορφή του συστήματος διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως (12.9.26). Αυτήν ξέρουμε να τη λύνουμε με τη μέθοδο της αποσυσζεύξεως. Δυστυχώς όμως ο αριθμός τους είναι  $2n$ . Αυτό ήταν το κόστος της μείωσης της τάξεώς τους από δεύτερας τάξεως σε πρώτης. Έτσι είναι!

---

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ *A14*

## Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΩΝ

---

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Με διαθέσιμη μια διαφορική εξίσωση είναι πάντοτε επιθυμητό να μπορούμε να την επιλύσουμε με εύκολο τρόπο προσδιορίζοντας τη γενική λύση της. Αν έχουμε και αρχικές ή συνοριακές συνθήκες, ζητάμε να βρούμε τη μερική λύση της που αντιστοιχεί στις συνθήκες αυτές. Θέλουμε επίσης η λύση αυτή να προσδιορίζεται με τη χρήση όσο το δυνατόν απλούστερων συναρτήσεων, όπως είναι τα πολυώνυμα και παραπέρα η εκθετική συνάρτηση, οι τριγωνομετρικές και οι υπερβολικές συναρτήσεις, κλπ. Από απόψεως μεθοδολογίας μας ενδιαφέρει η δυνατότητα χρήσεως μιας απλής μεθόδου, όπως είναι η μέθοδος της εκθετικής αντικαταστάσεως για τις ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές ή ακόμη και η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace. Δυστυχώς όμως στην πράξη πολλές διαφορικές εξισώσεις δεν επιδέχονται αναλυτική λύση με τη χρήση γνωστών συναρτήσεων, ενώ άλλες φορές η επίλυσή τους είναι εξαιρετικά δύσκολη.

Στο Κεφάλαιο αυτό A14 θα αναφερθούμε σύντομα σε μια αρκετά γενική μέθοδο επίλυσεως ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με τη χρήση δυναμοσειρών, δηλαδή σειρών δυνάμεων της ανεξάρτητης μεταβλητής. Με τη μέθοδο αυτή η λύση της διαφορικής εξισώσεως εκφράζεται στη μορφή δυναμοσειράς με τους συντελεστές της  $a_n$  να προσδιορίζονται με τη χρήση αναδρομικού τύπου ή αναδρομικών τύπων, δηλαδή τύπου ή τύπων που δίνουν ένα συντελεστή συναρτήσεως προηγούμενων του συντελεστών. Τελικά η γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως, ασφαλώς στη μορφή της δυναμοσειράς που υιοθετήθηκε, θα περιέχει τόσες αυθαίρετες σταθερές (συγκεκριμένα τους πρώτους συντελεστές της δυναμοσειράς) όση είναι και η τάξη της διαφορικής εξισώσεως. Οι σταθερές αυτές μπορούν να προσδιορισθούν με τη βοήθεια αρχικών ή συνοριακών συνθηκών.

Στο παρόν Κεφάλαιο A14 θα περιορίσουμε την προσοχή μας σε ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Εντούτοις η μέθοδος των δυναμοσειρών είναι γενικεύσιμη και σε ορισμένες περιπτώσεις μη ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Για την καλύτερη κατανόηση της μεθόδου θα κάνουμε τρεις άμεσες εφαρμογές της: (α) Σε μια απλή ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως: στην εξίσωση του κλασικού μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα σε ελεύθερες ταλαντώσεις. (β) Σε μια ανάλογη εξίσωση, αλλά τετάρτης τάξεως: στην εξίσωση των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων δοκού και (γ) Σε μια ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως, αλλά τώρα με μη σταθερούς συντελεστές: σε εξίσωση που αφορά στη συμμετρική παραμόρφωση ελαστικού κυλίνδρου. Η τρίτη αυτή εφαρμογή οδηγεί μάλιστα σε μια απλή συνάρτηση Bessel. Σημειώνουμε επίσης ότι σε ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές η μέθοδος των δυναμοσειρών αποτελεί απλά μια εναλλακτική δυνατότητα σε σύγκριση με τις μεθόδους: (α) της εκθετικής αντικαταστάσεως και (β) του μετασχηματισμού Laplace. Αντίθετα όμως σε κάπως δυσκολότερες ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, κυρίως με μη σταθερούς συντελεστές, η μέθοδος των δυναμοσειρών αποτελεί συνήθως την καλύτερη διαθέσιμη δυνατότητα επίλυσής τους, πριν να καταφύγουμε σε αριθμητικές μεθόδους για διαφορικές εξισώσεις.

---

**A14.1. ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ**

Οι δυναμοσειρές, τις οποίες αποκλειστικά θα χρησιμοποιήσουμε στο Κεφάλαιο αυτό A14 για την επίλυση ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, αποτελούν κατά κάποιον τρόπο γενίκευση των πολυωνύμων σε περίπτωση απείρων όρων σ' αυτά (απειρού βαθμού). Παραδείγματος χάρη, η συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \equiv 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \dots \quad (14.1.1)$$

αποτελεί μια δυναμοσειρά, δηλαδή μια σειρά δυνάμεων. Εδώ ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το  $x$ , θα μπορούσε όμως να είναι το  $t$ , κλπ. Σημειώνουμε βέβαια ότι η παραπάνω δυναμοσειρά είναι απλά η σειρά Maclaurin της εκθετικής συναρτήσεως, δηλαδή  $f(x) = e^x \equiv \exp x$ . Επίσης προτιμάμε **έντονα** τη γραφή μιας δυναμοσειράς με το σύμβολο της αθροίσεως  $\sum$  αντί όρο προς όρο. Αυτό το κάνουμε, επειδή η χρήση του συμβόλου της αθροίσεως  $\sum$  οδηγεί σε πολύ συντομότερη εμφάνιση των δυναμοσειρών. Οδηγεί επίσης με πολύ σαφέστερο τρόπο στους αναδρομικούς τύπους που ζητάμε να βρούμε για τους συντελεστές τους, όταν έχουμε προς επίλυση μια διαφορική εξίσωση.

Εμείς θα θεωρήσουμε εδώ μια ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση  $m$ -τάξεως της μορφής

$$y^{(m)}(x) + b_{m-1}(x)y^{(m-1)}(x) + \dots + b_1(x)y'(x) + b_0(x)y(x) = 0. \quad (14.1.2)$$

Επιδιώκουμε να βρούμε τη γενική λύση  $y(x)$  της διαφορικής αυτής εξισώσεως. Υποθέτουμε μάλιστα συνεχώς μη μηδενικό το συντελεστή της  $m$ -στής παραγώγου  $y^{(m)}(x)$  και ότι έχουμε ήδη διαιρέσει με αυτόν ολόκληρη τη διαφορική εξίσωση. Χάρη γενικότητας υποθέτουμε επίσης τους συντελεστές της πιο πάνω διαφορικής εξισώσεως  $b_k(x)$  ότι είναι γενικά μεταβλητοί, δηλαδή ότι γενικά εξαρτώνται από την ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$ .

Για την επίλυση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως (14.1.2) θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των δυναμοσειρών με βάση το σημείο  $x_0 = 0$ . Έτσι θα προσπαθήσουμε να βρούμε γενική λύση  $y(x)$  της μορφής

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots \quad (14.1.3)$$

Πρόκειται ουσιαστικά για τη σειρά Maclaurin της άγνωστης συναρτήσεως  $y(x)$ , της γενικής λύσεως της διαφορικής εξισώσεως (14.1.2). Έχοντας γράψει μάλιστα τη λύση αυτή (14.1.3) σε μορφή δυναμοσειράς, έχουμε στην ουσία υποθέσει τη σειρά Maclaurin ότι υπάρχει και επίσης ότι συγκλίνει στην άγνωστη συνάρτηση  $y(x)$  σε κάποιο διάστημα συγκλίσεως  $(-R, R)$  γύρω από το σημείο  $x_0 = 0$ , το βασικό σημείο που επιλέξαμε.

Οπωσδήποτε θα μπορούσαμε θαυμάσια να υποθέσουμε και λύση της γενικότερης μορφής

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \equiv a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + a_3 (x - x_0)^3 + a_4 (x - x_0)^4 + \dots \quad (14.1.4)$$

Συνήθως όμως αποφεύγουμε αυτήν τη γενικότερη μορφή, που ουσιαστικά αποτελεί τη σειρά Taylor της άγνωστης συναρτήσεως  $y(x)$  στο σημείο  $x_0$ . Αυτό το κάνουμε, απλά γιατί η αλλαγή ανεξάρτητης μεταβλητής  $\xi = x - x_0$ , που γίνεται τόσο εύκολα στη διαφορική εξίσωση (14.1.2), επιτρέπει την αναγωγή της δυναμοσειράς (14.1.4) στη δυναμοσειρά (14.1.3), βέβαια τώρα με  $\xi = x - x_0$  στη θέση του  $x$ . Αυτό όμως δεν έχει και μεγάλη σημασία. Έτσι δε θα διστάζουμε να θεωρούμε δυναμοσειρές της απλής μορφής (14.1.3) σαν λύσεις διαφορικών εξισώσεων υποθέτοντας ότι, εάν χρειάζεται, έχει προηγηθεί η στοιχειώδης αλλαγή μεταβλητής  $\xi = x - x_0$ . Με τον τρόπο αυτό σαν βασικό σημείο θα χρησιμοποιούμε το σημείο  $x_0 = 0$  (ιδίως στο χώρο),  $t_0 = 0$  (ιδίως στο χρόνο), κλπ. Έτσι ουσιαστικά θα έχουμε πάντοτε προς προσδιορισμό τη σειρά Maclaurin της άγνωστης συναρτήσεως  $y(x)$ , δυστυχώς με άγνωστους τους συντελεστές της  $a_n$  στη δυναμοσειρά (14.1.3).

Και θέλουμε να τους προσδιορίσουμε τους συντελεστές αυτούς. Και να συγκλίνει μάλιστα η δυναμοσειρά (14.1.3) στη σωστή λύση  $y(x)$  της διαφορικής εξίσωσης (14.1.2) σε κάποιο διάστημα συγκλίσεως  $(-R, R)$  γύρω από το σημείο  $x_0 = 0$ .

Τη σημαντική (και μη αρνητική βέβαια) ποσότητα  $R$  στο διάστημα αυτό  $(-R, R)$ , όπου συγκλίνει μια δυναμοσειρά, π.χ. η δυναμοσειρά (14.1.3), την αποκαλούμε ακτίνα συγκλίσεως της δυναμοσειράς και εύλογα μας ενδιαφέρει να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερη. Αν είναι μάλιστα δυνατόν, να είναι άπειρη,  $R = \infty$ , έτσι ώστε η δυναμοσειρά (14.1.3) να συγκλίνει για κάθε τιμή του  $x$ . Αυτό (άπειρη ακτίνα συγκλίσεως:  $R = \infty$ ) ισχύει για παράδειγμα στη δυναμοσειρά (14.1.1) που, όπως αναφέραμε, αποτελεί τη δυναμοσειρά της εκθετικής συναρτήσεως  $e^x$  στο σημείο  $x = 0$ . Πολλές φορές όμως είμαστε ευχαριστημένοι και με πεπερασμένες ακτίνες συγκλίσεως  $R$ , ιδίως μάλιστα αν το διάστημα συγκλίσεως της δυναμοσειράς  $(-R, R)$  είναι αρκετό για μας στο φυσικό πρόβλημα που εξετάζουμε.

### A14.2. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟ ΜΗΧΑΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΑΖΑΣ-ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ-ΑΠΟΣΒΕΣΤΗΡΑ

Στην ενότητα αυτή θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο των δυναμοσειρών στην απλή διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως που διέπει το μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα στις Ταλαντώσεις, εδώ σε ελεύθερες ταλαντώσεις. (Φυσικά ανάλογα ισχύουν και για το απλό πλαίσιο που προσεγγίζει ένα μονώροφο ιδεατό κτίριο διατμήσεως στη Δυναμική των Κατασκευών επίσης σε ελεύθερες ταλαντώσεις.) Πρόκειται για την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0\dot{u}(t) + \omega_0^2u(t) = 0, \tag{14.2.1}$$

η οποία μας είναι τόσο μα τόσο γνωστή από το Κεφάλαιο Α6, όπου και παραπέμπουμε, που δε θα δώσουμε καμία απολύτως διευκρίνιση. Σημειώνουμε μόνο ότι έχει σταθερούς συντελεστές: τους τρεις συντελεστές  $1, 2\xi\omega_0$  και  $\omega_0^2$ . Αυτό θα κάνει τη δουλειά μας πιο εύκολη στην παρούσα μέθοδο των δυναμοσειρών για την επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, εδώ δευτέρας τάξεως.

Εντούτοις, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η μέθοδος των δυναμοσειρών είναι γενικά εφαρμόσιμη και σε περίπτωση μη σταθερών συντελεστών, ιδίως μάλιστα αν το σημείο  $x_0 = 0$  είναι ομαλό σημείο της διαφορικής εξίσωσης. Παρουσιάζει μάλιστα και ιδιαίτερο ενδιαφέρον σαν βασική μέθοδος επίλυσεως των σχετικών διαφορικών εξισώσεων. Τέτοιες διαφορικές εξισώσεις, με μη σταθερούς (με μεταβλητούς) συντελεστές, είναι οι διαφορικές εξισώσεις των γνωστών πολυωνύμων Legendre και των ακόμη πιο διάσημων συναρτήσεων Bessel. Αυτές θα τις αναφέρουμε σύντομα στο επόμενο Κεφάλαιο Α15. Στην εφαρμογή αυτή θα αναφερθούμε στη διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές (14.2.1), η οποία είναι μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως.

Ξεκινάμε με βάση τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$ . Εδώ υποθέτουμε τη γενική λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (14.2.1) σε μορφή δυναμοσειράς του χρόνου  $t$ , συγκεκριμένα

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \equiv a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots \tag{14.2.2}$$

με άγνωστους τους συντελεστές  $a_n$ . Φυσικά μας είναι άγνωστοι οι συντελεστές αυτοί  $a_n$ , αφού την άγνωστη συνάρτηση, τη μετατόπιση  $u(t)$  του υλικού σημείου ζητάμε να προσδιορίσουμε! Επίσης για εκπαιδευτικούς λόγους γράψαμε τη δυναμοσειρά αυτή και με τους πρώτους όρους της. Εντούτοις προτιμάμε **έντονα, πάρα πολύ έντονα**, την πρώτη γραφή της δυναμοσειράς, αυτή με το σύμβολο της αθροίσεως  $\sum$ .

Βέβαια τώρα πρέπει να αντικαταστήσουμε τη δυναμοσειρά (14.2.2) που υποθέσαμε για την άγνωστη συνάρτηση  $u(t)$  στην ίδια τη διαφορική εξίσωση (14.2.1). Προς το σκοπό αυτό πρέπει να παραγωγίσουμε δύο φορές τη δυναμοσειρά αυτή, αφού η διαφορική εξίσωση (14.2.1) είναι δευτέρας τάξεως. Η παραγωγή αυτή μπορεί να γίνει όρο προς όρο και μάλιστα, όπως αποδεικνύεται

στις Δυναμοσειρές, αφήνει αμετάβλητη την ακτίνα συγκλίσεως  $R$  στο διάστημα συγκλίσεως  $(-R, R)$ . Οι δύο αυτές παραγωγίσεις μας δίνουν

$$\dot{u}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} \equiv a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + \dots, \quad (14.2.3)$$

$$\ddot{u}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} \equiv 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + \dots. \quad (14.2.4)$$

Είναι προφανές στην πρώτη παράγωγο  $\dot{u}(t)$  ότι η παράγωγος του σταθερού όρου  $a_0$  μηδενίζεται. Άρα στο σύμβολο του αθροίσματος ο δείκτης  $n$  μπορεί να θεωρηθεί ότι ξεκινάει από το ένα, όπως φαίνεται στη δεύτερη μορφή της σχετικής δυναμοσειράς. Εξάλλου για  $n = 0$  ο πρώτος όρος της πρώτης δυναμοσειράς μηδενίζεται, επειδή είναι πολλαπλασιασμένος επί  $n$ : στον πρώτο αυτό όρο επί  $n = 0$ . Είναι προφανές ότι ο γενικός όρος  $a_n t^n$  στη δυναμοσειρά (14.2.2) που υιοθετήθηκε για την άγνωστη συνάρτηση  $u(t)$  της διαφορικής εξίσωσης (14.2.1) έχει πρώτη παράγωγο  $n a_n t^{n-1}$  και δεύτερη παράγωγο  $n(n-1) a_n t^{n-2}$ . Όπως μάλιστα η δυναμοσειρά στην πρώτη παράγωγο (14.2.3) ξεκινάει ουσιαστικά από  $n = 1$  (λόγω του παράγοντα  $n$ ), έτσι με ανάλογο τρόπο και η δυναμοσειρά στη δεύτερη παράγωγο (14.2.4) ξεκινάει από  $n = 2$  (λόγω του παράγοντα  $n(n-1)$ ). Αυτά φαίνονται και από τις δεξιά αναλυτικές γραφές (14.2.3) και (14.2.4) των σχετικών δυναμοσειρών για την πρώτη παράγωγο  $\dot{u}(t)$  και τη δεύτερη παράγωγο  $\ddot{u}(t)$  αντίστοιχα.

Τώρα πια μπορούμε να προχωρήσουμε στην αντικατάσταση της δυναμοσειράς (14.2.2) για την άγνωστη συνάρτηση (τη μετατόπιση)  $u(t)$  και των δυναμοσειρών (14.2.3) και (14.2.4) για τις δύο πρώτες παραγωγούς της  $\dot{u}(t)$  και  $\ddot{u}(t)$  αντίστοιχα στη διαφορική μας εξίσωση (14.2.1). Με τον τρόπο αυτό προκύπτει εύκολα ότι

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} + 2\xi\omega_0 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} + \omega_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0. \quad (14.2.5)$$

Αναλυτικότερα, χρησιμοποιώντας τις δεξιές εκφράσεις των δυναμοσειρών (14.2.2), (14.2.3) και (14.2.4) στη διαφορική εξίσωση (14.2.1), έχουμε τον απόλυτα ισοδύναμο αναλυτικότερο τρόπο γραφής της εξίσωσης (14.2.5)

$$(2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + \dots) + 2\xi\omega_0(a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + \dots) + \omega_0^2(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots) = 0. \quad (14.2.6)$$

Συγκεντρώνουμε τώρα όλους τους όρους που αφορούν σε μια συγκεκριμένη δύναμη του  $t$  και έτσι παίρνουμε

$$(2a_2 + 2\xi\omega_0 a_1 + \omega_0^2 a_0) + (6a_3 + 4\xi\omega_0 a_2 + \omega_0^2 a_1)t + (12a_4 + 6\xi\omega_0 a_3 + \omega_0^2 a_2)t^2 + \dots = 0. \quad (14.2.7)$$

Επιστρέφοντας στο συμβολισμό με αθροίσματα (14.2.5), παρατηρούμε πως μας δυσχεραίνει η εμφάνιση της δυνάμεως  $t^{n-2}$  στον πρώτο όρο και η εμφάνιση της δυνάμεως  $t^{n-1}$  στο δεύτερο σε σύγκριση με τη δύναμη  $t^n$  στον τρίτο. Για να το αποφύγουμε αυτό, αλλάζουμε στον πρώτο όρο το δείκτη  $n$  θέτοντας  $j = n - 2$  (με  $j$  το νέο δείκτη), οπότε  $n = j + 2$ . Επίσης στο δεύτερο όρο αλλάζουμε το δείκτη από  $n$  σε  $k = n - 1$  (με  $k$  το νέο δείκτη), οπότε  $n = k + 1$ . Με τον τρόπο αυτό γράφουμε την εξίσωση (14.2.5) πάλι με τη χρήση του συμβόλου της αθροίσεως  $\sum$ , αλλά τώρα στην τροποποιημένη μορφή

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j+1)(j+2) a_{j+2} t^j + 2\xi\omega_0 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} t^k + \omega_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0. \quad (14.2.8)$$

Σημειώνουμε τώρα ότι ακριβώς όπως σε ένα ορισμένο ολοκλήρωμα δεν έχει καμία σημασία αν η μεταβλητή ολοκληρώσεως αποκληθεί  $x$  ή  $y$ , κλπ., ανάλογα και σε μία σειρά δεν έχει καμία σημασία αν ο δείκτης στο άθροισμα συμβολισθεί με  $m$  ή με  $n$ , κλπ. Συγκεκριμένα

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy \quad \text{και επίσης} \quad \sum_{m=0}^{\infty} f(m) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + \dots \quad (14.2.9)$$

ανεξάρτητα αν ο δείκτης είναι το  $m$  ή το  $n$  ή κάποιο άλλο σύμβολο.

Με την επεξήγηση αυτή στην εξίσωση δυναμοσειρών (14.2.8) δηλώνουμε το δείκτη στην πρώτη δυναμοσειρά με  $n$  (αντί  $j$ ) και στη δεύτερη δυναμοσειρά πάλι με  $n$  (αντί  $k$ ). Με τον τρόπο αυτό ξαναγράφουμε την ίδια εξίσωση (14.2.8) στη μορφή

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}t^n + 2\xi\omega_0 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}t^n + \omega_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0. \quad (14.2.10)$$

Υποθέτουμε ότι και οι τρεις αυτές δυναμοσειρές συγκλίνουν μέσα σε ένα συγκεκριμένο διάστημα συγκλίσεως  $(-R, R)$  με ακτίνα συγκλίσεως  $R$ . Τότε μπορούμε να γράψουμε μέσα στο ίδιο διάστημα συγκλίσεως  $(-R, R)$  το άθροισμα των δυναμοσειρών αυτών στη μορφή μιας μόνο δυναμοσειράς ως εξής:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2)a_{n+2} + 2\xi\omega_0(n+1)a_{n+1} + \omega_0^2 a_n] t^n = 0. \quad (14.2.11)$$

Για να είναι εκ ταυτότητος ίση με το μηδέν η δυναμοσειρά του αριστερού μέλους της εξισώσεως αυτής (όπως πρέπει πράγματι να συμβαίνει), αναγκαστικά θα πρέπει οι συντελεστές όλων των όρων της να είναι ίσοι με το μηδέν. Θα πρέπει δηλαδή να ισχύει ο τύπος

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + 2\xi\omega_0(n+1)a_{n+1} + \omega_0^2 a_n = 0 \quad \text{με} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (14.2.12)$$

Θεωρώντας τους συντελεστές  $a_n$  και  $a_{n+1}$  γνωστούς, μπορούμε έτσι να υπολογίσουμε το συντελεστή  $a_{n+2}$  απλά λύνοντας την εξίσωση (14.2.12) ως προς  $a_{n+2}$ . Με τον τρόπο αυτό προκύπτει ο αναδρομικός τύπος

$$a_{n+2} = - \frac{\omega_0^2 a_n + 2\xi\omega_0(n+1)a_{n+1}}{(n+1)(n+2)} \quad \text{με} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (14.2.13)$$

Προφανώς οι δύο πρώτοι συντελεστές  $a_0$  και  $a_1$  δε μπορούν να υπολογισθούν από αυτόν τον αναδρομικό τύπο (14.2.13). Εντούτοις μπορούν να υπολογισθούν όλοι οι επόμενοι τους συντελεστές:  $a_2, a_3, a_4$ , κλπ. Οι δύο πρώτοι συντελεστές  $a_0$  και  $a_1$  μπορούν φυσικά να προσδιορισθούν και αυτοί, εάν είναι γνωστές οι αρχικές συνθήκες, π.χ.

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0, \quad \text{οπότε} \quad a_0 = u_0, \quad a_1 = v_0, \quad (14.2.14)$$

όπως εύκολα διαπιστώνεται από τη δυναμοσειρά (14.2.2). Τότε ο επόμενος συντελεστής  $a_2$  μπορεί να προσδιορισθεί από τον αναδρομικό τύπο (14.2.13) θέτοντας σ' αυτόν  $n = 0$ , οπότε

$$a_2 = - \frac{\omega_0^2 a_0 + 2\xi\omega_0 a_1}{2} = - \frac{\omega_0^2 u_0 + 2\xi\omega_0 v_0}{2} \quad (14.2.15)$$

έχοντας πάρει υπόψη μας και τις προαναφερθείσες αρχικές συνθήκες (14.2.14). Ανάλογα ο ίδιος αναδρομικός τύπος (14.2.13) μας δίνει για το συντελεστή  $a_3$  (τώρα με  $n = 1$ )

$$a_3 = - \frac{\omega_0^2 a_1 + 4\xi\omega_0 a_2}{6}. \quad (14.2.16)$$

Όμως οι συντελεστές  $a_1$  και  $a_2$  είναι ήδη γνωστοί: ο  $a_1$  είναι γνωστός από τη δεύτερη αρχική συνθήκη (14.2.14), ενώ ο  $a_2$  από την προηγούμενη εφαρμογή (14.2.15) του ίδιου αναδρομικού τύπου (14.2.13). Έτσι ο  $a_3$  πράγματι προσδιορίζεται από τη σχέση (14.2.16). Ανάλογα ισχύουν και

για όλους τους επόμενους συντελεστές  $a_{n+2}$  χρησιμοποιώντας τον ίδιο αναδρομικό τύπο (14.2.13). Έτσι τελικά όλοι οι συντελεστές  $a_n$  θα έχουν προσδιορισθεί στη λύση  $u(t)$  του παρόντος προβλήματος με τη χρήση της δυναμοσειράς (14.2.2). Με αυθαίρετες σταθερές τους δύο πρώτους συντελεστές  $a_0$  και  $a_1$  παίρνουμε έτσι τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (14.2.1). Αντίθετα με γνωστές αρχικές συνθήκες, οπότε  $a_0 = u_0$  και  $a_1 = v_0$ , όπως ήδη είδαμε στις δύο τελευταίες σχέσεις (14.2.14), παίρνουμε τη μερική λύση που αντιστοιχεί στις δύο αυτές αρχικές συνθήκες.

### A14.3. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΙΣ ΚΑΜΠΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΔΟΚΟΥ

Στην ενότητα αυτή θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των δυναμοσειρών για την επίλυση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης τετάρτης τάξεως

$$X''''(x) - \beta^4 X(x) = 0 \quad \text{με} \quad 0 < x < L. \quad (14.3.1)$$

Αυτή αφορά στην καμπτικά ιδιοταλαντούμενη συνήθη δοκό. Το σύμβολο  $L$  δηλώνει το μήκος της δοκού, ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η θέση  $x$  κατά μήκος της δοκού (με  $0 < x < L$ ) και άγνωστη συνάρτηση είναι το προσημασμένο εύρος  $X(x)$  των ιδιοταλαντώσεων της δοκού. Τέλος το σύμβολο  $\beta$  δηλώνει μια θετική σταθερά του προβλήματος αυτού. Η σταθερά αυτή  $\beta$  έχει ήδη οριστεί στον τύπο (9.2.2) του Κεφαλαίου A9 μέσω των βασικών σταθερών του ίδιου προβλήματος. Εδώ θα θεωρείται απλά μια γνωστή σταθερά. Τη διαφορική αυτή εξίσωση (14.3.1) τη μελετήσαμε ήδη εκτενώς στην Ενότητα A9.2 στο σχετικό πρόβλημα συνωριακών τιμών και ιδιοτιμών. Η εύρεση της γενικής λύσεώς της έγινε εκεί με τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης. Αντίθετα εδώ θα γίνει με τη μέθοδο των δυναμοσειρών. Τούτο θα μας επιτρέψει να επιδείξουμε τη μέθοδο των δυναμοσειρών στην επίλυση μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης τετάρτης τάξεως (των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων δοκού) σε αντίθεση με τη διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως (του μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα) της προηγούμενης Ενότητας A14.2.

Για την επίλυση με τη μέθοδο των δυναμοσειρών της διαφορικής εξίσωσης (14.3.1) δεχόμαστε απλά τη γενική λύση της  $X(x)$  στη μορφή

$$X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (14.3.2)$$

με βάση το σημείο  $x_0 = 0$  της δοκού, συνήθως το αριστερό της άκρο. Κάνουμε βέβαια την υπόθεση ότι η δυναμοσειρά αυτή  $X(x)$ , αφού προσδιορισθεί, θα συγκλίνει σε ένα διάστημα συγκλίσεως  $(-R, R)$  με ακτίνα συγκλίσεως  $R \geq L$  με  $L$  το μήκος της δοκού.

Φυσικά, αφού στη διαφορική εξίσωση (14.3.1) εμφανίζεται όχι μόνο η άγνωστη συνάρτηση  $X(x)$  (εδώ το προσημασμένο εύρος των ιδιοταλαντώσεων της δοκού), αλλά και η τέταρτη παράγωγός της  $X''''(x)$ , απαιτείται προφανώς ο υπολογισμός και της τέταρτης αυτής παραγωγής  $X''''(x)$ . Αυτό είναι πολύ εύκολο με τέσσερις διαδοχικές παραγωγίσεις της δυναμοσειράς (14.3.2).

Γνωρίζουμε βέβαια άριστα τον απλούστατο τύπο παραγωγίσεως

$$\frac{dx^j}{dx} \equiv (x^j)' = jx^{j-1} \quad \text{με} \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (14.3.3)$$

καθώς και το γεγονός ότι μια συγκλίνουσα δυναμοσειρά  $X(x)$  μπορεί να παραγωγισθεί όρο προς όρο μέσα στο διάστημα συγκλίσεώς της  $(-R, R)$  με διατήρηση μάλιστα της ακτίνας συγκλίσεώς της  $R$ . Έτσι παίρνουμε διαδοχικά από τη δυναμοσειρά (14.3.2)

$$X'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad (14.3.4)$$

$$X''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}, \quad (14.3.5)$$



$$X'''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3}, \quad (14.3.6)$$

$$X''''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3)a_n x^{n-4} = \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3)a_n x^{n-4}. \quad (14.3.7)$$

Στους τύπους αυτούς πήραμε επίσης υπόψη μας το μηδενισμό του πρώτου ή και των αμέσως επόμενων όρων. Αυτό το κάναμε στα δεξιά μέλη, δηλαδή μετά τα δεύτερα ίσον. Παραδείγματος χάρη, στη σχέση (14.3.7) για την τέταρτη παράγωγο  $X''''(x)$  (αυτή που χρειαζόμαστε εδώ!), λάβαμε υπόψη μας ότι το γινόμενο  $n(n-1)(n-2)(n-3)$  μηδενίζεται για  $n = 0, n = 1, n = 2$  και  $n = 3$ . Τούτο είναι απόλυτα προφανές. Έτσι ο δείκτης  $n$  μπορεί να ξεκινήσει όχι μόνο από  $n = 0$ , αλλά και από  $n = 4$ . Αυτό ισχύει, επειδή οι τέσσερις πρώτοι όροι της αρχικής δυναμοσειράς της τέταρτης παραγωγής  $X''''(x)$  (αυτοί που αντιστοιχούν σε  $n = 0, n = 1, n = 2$  και  $n = 3$ ) μηδενίζονται λόγω του γινομένου  $n(n-1)(n-2)(n-3)$ , όπως ήδη εξηγήσαμε.

Για να γίνει μάλιστα ακόμη πιο κατανοητό αυτό το ενδιαφέρον γεγονός, γράφουμε αναλυτικότερα την αρχική δυναμοσειρά (14.3.2) για την άγνωστη συνάρτησή μας  $X(x)$  με τους επτά πρώτους όρους της (για  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  και  $6$ ) και το γενικό όρο της (για οποιοδήποτε  $n$ ) ως εξής:

$$X(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (14.3.8)$$

Παραγωγίζοντας τώρα τέσσερις φορές ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$  (εδώ τη θέση κατά μήκος της δοκού), παρατηρούμε εύκολα ότι η τέταρτη παράγωγος των τεσσάρων πρώτων όρων, συγκεκριμένα του τριτοβάθμιου πολυωνύμου  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ , είναι ίση με το μηδέν. Έτσι βρίσκουμε ότι τελικά

$$X''''(x) = 24a_4 + 120a_5x + 360a_6x^2 + \dots + n(n-1)(n-2)(n-3)a_nx^{n-4} + \dots \quad (14.3.9)$$

Ασφαλώς ο γενικός όρος  $n(n-1)(n-2)(n-3)a_nx^{n-4}$  στην αρκετά αναλυτικά γραμμένη αυτή δυναμοσειρά (14.3.9) συμπίπτει πλήρως με τον αντίστοιχο γενικό όρο στη δυναμοσειρά (14.3.7), όπου είχαμε κάνει χρήση του συμβόλου της αθροίσεως  $\sum$ .

Το επόμενο βήμα μας είναι να ξαναγράψουμε τη δυναμοσειρά (14.3.7) με την αλλαγή δείκτη

$$k = n - 4 \quad \iff \quad n = k + 4. \quad (14.3.10)$$

Αυτό το κάνουμε, έτσι ώστε να έχουμε τις δυνάμεις  $x^{n-4}$  γραμμένες στη μορφή  $x^k$ , αφού  $n - 4 = k$ , οπότε  $x^{n-4} = x^k$ . Η μορφή αυτή θα μας διευκολύνει κατά τον προσδιορισμό των συντελεστών  $a_n$  μέσω του σχετικού αναδρομικού τύπου, στον οποίο θα καταλήξουμε παρακάτω. Λαμβάνουμε επίσης υπόψη ότι, αφού  $k = n - 4$ , για  $n = 4$  έχουμε  $k = 0$ . Άρα η δεύτερη δυναμοσειρά (14.3.7), την επαναλαμβάνουμε

$$X''''(x) = \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3)a_n x^{n-4} \quad (14.3.11)$$

μπορεί να γραφεί και στην ακόλουθη ισοδύναμη μορφή (επειδή  $n = k + 4$ , άρα και  $n - 4 = k$ ):

$$X''''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+4)(k+3)(k+2)(k+1)a_{k+4}x^k. \quad (14.3.12)$$

Από απόψεως εμφανίσεως λίγο καλύτερη είναι η ισοδύναμη μορφή

$$X''''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)a_{k+4}x^k, \quad (14.3.13)$$

που προκύπτει άμεσα, αφού στον πολλαπλασιασμό ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, οπότε

$$(k+4)(k+3)(k+2)(k+1) = (k+1)(k+2)(k+3)(k+4). \quad (14.3.14)$$

Η αναλυτική μορφή της δυναμοσειράς (14.3.12) ή καλύτερα (14.3.13) είναι η ακόλουθη:

$$X''''(x) = 24a_4 + 120a_5x + 360a_6x^2 + \dots + (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)a_{k+4}x^k + \dots, \quad (14.3.15)$$

η οποία βέβαια στην ουσία συμπίπτει με τη δυναμοσειρά (14.3.9).

Όπως ήδη παρατηρήσαμε και στην προηγούμενη Ενότητα Α14.2, δεν έχει καμία απολύτως σημασία το σύμβολο που θα χρησιμοποιήσουμε σαν δείκτη σε μια δυναμοσειρά. Έτσι έχουμε το δικαίωμα να θέσουμε  $n$  αντί  $k$  στη δυναμοσειρά (14.3.13) ή/και στην πλήρως ισοδύναμη της δυναμοσειρά (14.3.15). Με τον τρόπο αυτό η δυναμοσειρά (14.3.13) ξαναγράφεται στην απόλυτα ισοδύναμη μορφή της

$$X''''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)a_{n+4}x^n. \quad (14.3.16)$$

Έτσι επιστρέψαμε στον αρχικό δείκτη μας  $n$  στο άθροισμα της δυναμοσειράς αυτής, δηλαδή στον ίδιο δείκτη που έχουμε στη βασική δυναμοσειρά (14.3.2) για την άγνωστη συνάρτηση  $X(x)$  της διαφορικής εξίσωσης (14.3.1). Επαναλαμβάνουμε και εδώ τη βασική αυτή δυναμοσειρά:

$$X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (14.3.17)$$

Είμαστε τώρα καθόλα έτοιμοι να αντικαταστήσουμε τόσο την άγνωστη συνάρτηση  $X(x)$  όσο και την τέταρτη παράγωγό της  $X''''(x)$ , που έχουν ήδη εκφρασθεί με τις δυναμοσειρές τους (14.3.17) και (14.3.16) αντίστοιχα, στη διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως (14.3.1). Έτσι προκύπτει ότι

$$X''''(x) - \beta^4 X(x) = 0 \implies \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)a_{n+4}x^n - \beta^4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0. \quad (14.3.18)$$

Έχουμε υποθέσει βέβαια (και το επαναλαμβάνουμε) ότι οι δυναμοσειρές αυτές συγκλίνουν τουλάχιστον κατά μήκος της δοκού, δηλαδή έχουν ακτίνα συγκλίσεως  $R \geq L$  με  $L$  το μήκος της δοκού.

Τώρα πια η διαφορική μας εξίσωση  $X''''(x) - \beta^4 X(x) = 0$  είναι γραμμένη με δυναμοσειρές στη μορφή της (14.3.18). Δυστυχώς όμως οι συντελεστές  $a_n$  σ' αυτήν είναι προς το παρόν άγνωστοι. Η μορφή (14.3.18) της διαφορικής εξίσωσής μας μπορεί φυσικά να ξαναγραφεί και σαν μία μόνο δυναμοσειρά ως εξής:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)a_{n+4} - \beta^4 a_n] x^n = 0 \quad (14.3.19)$$

Βέβαια, όταν μιλάμε για διαφορικές εξισώσεις, εννοούμε την εκ ταυτότητος ισχύ τους στο διάστημα που μας ενδιαφέρει (εδώ κατά μήκος της καμπτικά ιδιοταλαντούμενης δοκού μας). Ασφαλώς δεν εννοούμε την ισχύ τους σε μερικά μόνο σημεία. (Θα ήταν ίσως κάπως καλύτερα να χρησιμοποιούμε το σύμβολο  $\equiv$  αντί για το  $=$  στις διαφορικές εξισώσεις, αλλ' αυτό δε συνηθίζεται, επειδή θεωρείται προφανές.) Αυτό που θέλουμε να πούμε εδώ είναι ότι και η ισοδύναμη δυναμοσειρά (14.3.19) πρέπει και αυτή να είναι εκ ταυτότητος μηδενική κατά μήκος της δοκού, όχι μόνο σε μερικά σημεία της. Και για να κατορθωθεί αυτό, ένας μόνο τρόπος υπάρχει: ο μηδενισμός όλων ανεξαιρέτως των συντελεστών της, ακριβώς όπως κάναμε και στην προηγούμενη Ενότητα Α14.2. Επομένως στην εξίσωση (ή μάλλον στην ταυτότητα) (14.3.19) θα πρέπει όλοι οι συντελεστές της δυναμοσειράς στο αριστερό μέλος να είναι ίσοι με το μηδέν. Άρα θα πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις

$$(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)a_{n+4} - \beta^4 a_n = 0 \quad \mu\epsilon \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (14.3.20)$$

Λύνοντας τώρα ως προς το συντελεστή  $a_{n+4}$ , διαπιστώνουμε αμέσως ότι

$$a_{n+4} = \frac{\beta^4 a_n}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \quad \text{με } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (14.3.21)$$

και ισοδύναμα (με  $n$  αντί  $n+4$ )

$$a_n = \frac{\beta^4 a_{n-4}}{n(n-1)(n-2)(n-3)}, \quad \text{τώρα όμως με } n = 4, 5, 6, 7, \dots \quad (14.3.22)$$

Αυτός είναι ο τελικός αναδρομικός τύπος που μας επιτρέπει τον προσδιορισμό των συντελεστών  $a_4, a_5, a_6$  και γενικά  $a_n$  τον καθένα τους από τον αντίστοιχο συντελεστή με δείκτη μικρότερο κατά τέσσερα, π.χ. το συντελεστή  $a_n$  από το συντελεστή  $a_{n-4}$ . Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να υπολογίσουμε όλους τους συντελεστές στην αρχική δυναμοσειρά  $X_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  εκτός από τους τέσσερις πρώτους, δηλαδή εκτός από τους συντελεστές  $a_0, a_1, a_2$  και  $a_3$ . Ειδικά γι' αυτούς τους τέσσερις συντελεστές δε μπορούμε (δεν έχει έννοια, δεν επιτρέπεται) να χρησιμοποιήσουμε τον αναδρομικό τύπο (14.3.22). Και γιατί άραγε συμβαίνει αυτό; Μήπως έγινε πιο πάνω κάποιο υπολογιστικό λάθος στη χρήση της μεθόδου των δυναμοσειρών;

Ας ερμηνευθούν σαν αστεία οι ερωτήσεις αυτές. Απλά θέλαμε να τονίσουμε το γεγονός πως η διαφορική μας εξίσωση (14.3.1), δηλαδή η διαφορική εξίσωση  $X''''(x) - \beta^4 X(x) = 0$ , σαν διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως που είναι πρέπει να έχει στη γενική λύση της τέσσερις αυθαίρετες σταθερές: ούτε λιγότερες αλλ' ούτε και περισσότερες. Και αυτό πραγματικά έχει συμβεί εδώ. Συγκεκριμένα ο πρώτος συντελεστής  $a_0$  είναι αυθαίρετος, δε μπορεί φυσικά να υπολογισθεί από τον αναδρομικό τύπο (14.3.22). Όμως ο αναδρομικός αυτός τύπος μπορεί θαυμάσια να μας δώσει όλους τους συντελεστές  $a_{4m}$  (με  $m = 1, 2, 3, \dots$ ), δηλαδή τους συντελεστές  $a_4, a_8, a_{12}$ , κλπ., γενικά όλους τους συντελεστές  $a_{4m}$  με τη βοήθεια του συντελεστή  $a_0$ . Άρα ο απροσδιόριστος αυτός συντελεστής  $a_0$  παίζει το ρόλο μιας αυθαίρετης σταθεράς στη γενική λύση (εδώ σε μορφή δυναμοσειράς) της διαφορικής μας εξίσώσεως  $X''''(x) - \beta^4 X(x) = 0$ . Με ανάλογες σκέψεις ο απροσδιόριστος συντελεστής  $a_1$  μας επιτρέπει (και πάλι μέσω του ίδιου αναδρομικού τύπου (14.3.22)) τον υπολογισμό όλων των συντελεστών  $a_5, a_9$  και γενικά  $a_{4m+1}$ . Με όμοιο τρόπο ο απροσδιόριστος συντελεστής  $a_2$  μας επιτρέπει τον υπολογισμό των συντελεστών  $a_6, a_{10}$  και γενικά  $a_{4m+2}$ . Τέλος ο απροσδιόριστος συντελεστής  $a_3$  μας επιτρέπει τον υπολογισμό των συντελεστών  $a_7, a_{11}$  και γενικά  $a_{4m+3}$ . Ας το δείξουμε και λίγο πιο παραστατικά, πιο συνοπτικά στο παρόν πρόβλημα:

Ο συντελεστής	$a_0$	δίνει τους συντελεστές	$a_4, a_8$	και γενικά	$a_{4m}$ .
Ο συντελεστής	$a_1$	δίνει τους συντελεστές	$a_5, a_9$	και γενικά	$a_{4m+1}$ .
Ο συντελεστής	$a_2$	δίνει τους συντελεστές	$a_6, a_{10}$	και γενικά	$a_{4m+2}$ .
Ο συντελεστής	$a_3$	δίνει τους συντελεστές	$a_7, a_{11}$	και γενικά	$a_{4m+3}$ .

(14.3.23)

Προφανώς σε όλες τις περιπτώσεις έχουμε  $m = 1, 2, \dots$  και κάνουμε χρήση του αναδρομικού μας τύπου (14.3.22).

Σαν συμπέρασμα μόνο οι τέσσερις συντελεστές  $a_0, a_1, a_2$  και  $a_3$  θα παραμείνουν απροσδιόριστοι στη γενική λύση  $X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  σε μορφή δυναμοσειράς. Έτσι η λύση αυτή έχει τελικά τη μορφή

$$X(x) = a_0 F_0(x) + a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x) + a_3 F_3(x) \quad (14.3.24)$$

με τις συναρτήσεις  $F_0(x), F_1(x), F_2(x)$  και  $F_3(x)$  γνωστές. Επαναλαμβάνουμε ότι μόνο οι τέσσερις συντελεστές  $a_0, a_1, a_2$  και  $a_3$  παραμένουν απροσδιόριστοι. Αυτοί μπορούν και πρέπει τελικά να προσδιορισθούν με χρήση τεσσάρων αρχικών ή συνοριακών συνθηκών στην ταλαντούμενη δοκό.

Για παράδειγμα σε έναν πρόβολο μήκους  $L$  και δυσκαμψίας  $EI$  με στήριξη στο αριστερό άκρο του  $x = 0$  οι τέσσερις αρχικές συνθήκες θα αφορούν στο μηδενικό βέλος κάμψεως και στη μηδενική κλίση στο άκρο αυτό καθώς και σε δύο ακόμη αρχικές συνθήκες οι οποίες έχουν σχέση με τα εύρη

της καμπτικής ροπής  $M_0$  και της τέμνουσας δύναμης  $Q_0$  (διηρημένα με τη δυσκαμψία  $EI$ ) στο ίδιο άκρο  $x = 0$  του προβόλου. Εναλλακτική δυνατότητα αποτελεί η χρήση συννοριακών συνθηκών.

#### A14.4. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ

Θεωρούμε τώρα το πρόβλημα της συμμετρικής παραμόρφωσης ελαστικού κυκλικού κυλίνδρου στην Ελαστικότητα. Η συμμετρία νοείται βέβαια ως προς τον άξονα του κυλίνδρου: είναι αξονική (ή κυκλική) συμμετρία. Το πρόβλημα αυτό εξετάζεται στο κλασικό σύγγραμμα των Timoshenko and Goodier, *Theory of Elasticity*, 3η Έκδοση, 1970, Ενότητα 143, σσ. 422–425, όπου αναφέρεται και σχετική παλαιότερη βιβλιογραφία από το έτος 1876 και μετά. Εμείς θα περιορίσουμε την προσοχή μας στη σχετική ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως. Αυτή έχει τη μορφή

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - \lambda^2 f(r) = 0 \quad (14.4.1)$$

με άγνωστη συνάρτηση την  $f(r)$  και το  $\lambda$  σταθερή παράμετρο. Η ανεξάρτητη μεταβλητή  $r$  αφορά στην πολική ακτίνα ως προς τον άξονα  $r = 0$  του κυλίνδρου σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Λόγω της αξονικής (ή κυκλικής) συμμετρίας η πολική γωνία  $\theta$  δεν υπεισέρχεται στη διαφορική αυτή εξίσωση.

Πρόκειται για μια ακόμη διαφορική εξίσωση που αφορά σε πρόβλημα του Πολιτικού Μηχανικού. (Παραδείγματος χάρη, τη μορφή κυκλικού κυλίνδρου έχει ένας κυκλικός στύλος ή υποστύλωμα ή κολώνα.) Στο σημείο αυτό πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι στην προπροηγούμενη Ενότητα A14.2 αναφερθήκαμε σε μια ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως με σταθερούς συντελεστές: τη διαφορική εξίσωση (14.2.1) του κλασικού μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα και βρήκαμε τη γενική λύση της με τη μέθοδο των δυναμοσειρών. Ανάλογα ενεργήσαμε και στην προηγούμενη Ενότητα A14.3, εκεί όμως για μια διαφορική εξίσωση που ήταν τετάρτης τάξεως (όχι δευτέρας): τη διαφορική εξίσωση (14.3.1) των καμπτικών ιδιοσταλαντώσεων δοκού. Έτσι δείξαμε τη χρησιμότητα της μεθόδου των δυναμοσειρών στην επίλυση ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων τάξεως ανώτερης της δευτέρας.

Στην παρούσα Ενότητα A14.4 έχουμε πάλι μια ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση: την παραπάνω εξίσωση (14.4.1), αλλά τώρα χωρίς σταθερούς συντελεστές. Πράγματι ο συντελεστής  $1/r$  της παραγώγου  $f'(r)$  είναι μεταβλητός. Αυτό όμως είναι το σημαντικό σημείο με τη διαφορική αυτή εξίσωση (14.4.1). Επομένως θα δείξουμε τη χρησιμότητα της μεθόδου των δυναμοσειρών στην επίλυση ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μη σταθερούς (μεταβλητούς) συντελεστές. Πρέπει μάλιστα να σημειωθεί **με έμφαση** ότι σε περιπτώσεις μη σταθερών συντελεστών δεν υπάρχει καμία δυνατότητα χρήσεως της μεθόδου της εκθετικής αντικατάστασης ούτε και της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace. Άρα μόνη δυνατότητα επίλυσης μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως με μη σταθερούς συντελεστές αποτελεί η μέθοδος των δυναμοσειρών με εξαίρεση την ειδική περίπτωση των εξισώσεων Euler (ή Cauchy–Euler). Αυτήν τη δυνατότητα θα την επιδείξουμε αμέσως παρακάτω στηριζόμενοι στην παραπάνω διαφορική εξίσωση (14.4.1).

Όπως κάναμε και στις δύο προηγούμενες Ενότητες A14.2 και A14.3, θα αναζητήσουμε βέβαια και εδώ τη λύση  $f(r)$  της διαφορικής εξισώσεως (14.4.1) στη μορφή δυναμοσειράς. Εξαιτίας της αξονικής (ή κυκλικής) συμμετρίας η άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή)  $f(r)$  πρέπει οπωσδήποτε να είναι άρτια. Επομένως η δυναμοσειρά της που υποθέτουμε πρέπει να έχει μόνο άρτιες δυνάμεις  $r^{2n}$  της ανεξάρτητης μεταβλητής  $r$ . Άρα θα έχει τη μορφή

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{2n} = a_0 + a_1 r^2 + a_2 r^4 + a_3 r^6 + \dots, \quad (14.4.2)$$

όπου, για να είμαστε κάπως σαφέστεροι, γράψαμε αναλυτικά και τους τέσσερις πρώτους όρους της δυναμοσειράς αυτής, την οποία υποθέτουμε για λύση της διαφορικής εξισώσεως (14.4.1).

Προφανώς όλοι οι συντελεστές  $a_n$  (με την εξαίρεση του πρώτου  $a_0$ ) στην αμέσως πιο πάνω δυναμοσειρά (14.4.2) είναι προς το παρόν άγνωστοι και πρέπει επομένως να προσδιορισθούν. Αυτό θα γίνει με αντικατάσταση της δυναμοσειράς αυτής  $f(r)$ , αλλά και των δύο πρώτων παραγώγων της

$$f'(r) = \sum_{n=0}^{\infty} 2na_n r^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n r^{2n-1} = 2a_1 r + 4a_2 r^3 + 6a_3 r^5 + \dots, \quad (14.4.3)$$

$$f''(r) = \sum_{n=0}^{\infty} 2n(2n-1)a_n r^{2n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} 2n(2n-1)a_n r^{2n-2} = 2a_1 + 12a_2 r^2 + 30a_3 r^4 + \dots \quad (14.4.4)$$

στην ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με μη σταθερούς συντελεστές (14.4.1).

Με την αντικατάσταση αυτή η διαφορική εξίσωση (14.4.1) παίρνει τη μορφή μιας εξισώσεως με δυναμοσειρές, συγκεκριμένα τη μορφή

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n(2n-1)a_n r^{2n-2} + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n r^{2n-1} - \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{2n} = 0. \quad (14.4.5)$$

Εισάγοντας μάλιστα το μη σταθερό (μεταβλητό) συντελεστή  $1/r$  της πρώτης παραγώγου  $f'(r)$  μέσα στη δεύτερη δυναμοσειρά, ξαναγράφουμε την πιο πάνω εξίσωση στη λίγο απλούστερη μορφή

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n(2n-1)a_n r^{2n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n r^{2n-2} - \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{2n} = 0 \quad (14.4.6)$$

χωρίς πια το κλάσμα  $1/r$ . Δεν υπάρχει όμως ακόμη ομοιομορφία στις δυνάμεις του  $r$ . Συγκεκριμένα στους δύο πρώτους όρους έχουμε τη δύναμη  $r^{2n-2}$ , ενώ στον τρίτο τη δύναμη  $r^{2n}$ . Η κατάσταση αυτή πρέπει και μπορεί να αλλάξει χρησιμοποιώντας στους δύο πρώτους όρους (στις δύο πρώτες δυναμοσειρές) το νέο δείκτη

$$k = n - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad n = k + 1. \quad (14.4.7)$$

Έτσι παίρνουμε τη δυναμοσειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2(k+1)(2k+1)a_{k+1} r^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} 2(k+1)a_{k+1} r^{2k} - \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{2n} = 0. \quad (14.4.8)$$

Τώρα παρατηρούμε επίσης ότι και οι τρεις δυναμοσειρές αρχίζουν από την τιμή μηδέν των δεικτών τους  $k$  (στις δύο πρώτες) και  $n$  (στην τρίτη).

Ένα ακόμη αναγκαίο βήμα αποτελεί η αλλαγή του συμβόλου του δείκτη από  $n$  σε  $k$  στην τρίτη δυναμοσειρά της πιο πάνω εξισώσεως δυναμοσειρών (14.4.8). Βέβαια αυτό δεν αλλάζει σε τίποτε την τιμή της τρίτης αυτής δυναμοσειράς στην εξίσωση (14.4.8) και εξυπηρετεί τα συμφέροντά μας της απλοποίησης της ίδιας εξισώσεως (14.4.8). Έτσι ξαναγράφουμε την εξίσωση αυτή (με  $k$  αντί για  $n$  στην τρίτη δυναμοσειρά) στη μορφή

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2(k+1)(2k+1)a_{k+1} r^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} 2(k+1)a_{k+1} r^{2k} - \lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^{2k} = 0 \quad (14.4.9)$$

και στη συνέχεια στην απλούστερη μορφή μιας μόνο δυναμοσειράς

$$\sum_{k=0}^{\infty} [2(k+1)(2k+1)a_{k+1} + 2(k+1)a_{k+1} - \lambda^2 a_k] r^{2k} = 0. \quad (14.4.10)$$

Τώρα, για να ισχύει η εξίσωση αυτή με δυναμοσειρές (14.4.10) εκ ταυτότητος, ακριβώς όπως ισχύει και η διαφορική εξίσωση (14.4.1), θα πρέπει φυσικά όλοι ανεξαιρέτως οι συντελεστές των δυνάμεων του  $r$  να είναι ίσοι με το μηδέν. Επομένως θα πρέπει να ισχύει ο τύπος

$$2(k+1)(2k+1)a_{k+1} + 2(k+1)a_{k+1} - \lambda^2 a_k = 0 \quad \text{με} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (14.4.11)$$

και έπειτα από την αλγεβρική απλοποίησή του

$$2(k+1)(2k+1)a_{k+1} - \lambda^2 a_k = 0 \implies 4(k+1)^2 a_{k+1} - \lambda^2 a_k = 0 \quad \text{με } k = 0, 1, 2, \dots \quad (14.4.12)$$

Είναι μάλλον προτιμότερο να επιστρέψουμε τώρα στον αρχικό δείκτη  $n = k + 1$ . Με τον τρόπο αυτό (με  $n = k + 1$ , άρα και  $k = n - 1$ ) οι αμέσως πιο πάνω σχέσεις γράφονται ως εξής:

$$4n^2 a_n - \lambda^2 a_{n-1} = 0 \quad \text{με } n = 1, 2, 3, \dots \quad (14.4.13)$$

Στη συνέχεια, λύνοντας ως προς  $a_n$ , καταλήγουμε στον τελικό αναδρομικό τύπο

$$a_n = \frac{\lambda^2 a_{n-1}}{4n^2} = \frac{\lambda^2 a_{n-1}}{(2n)^2} \quad \text{με } n = 1, 2, 3, \dots \quad (14.4.14)$$

Από τον αναδρομικό αυτό τύπο μπορούμε να υπολογίσουμε όλους τους συντελεστές  $a_1, a_2, a_3$ , κλπ. με τη βοήθεια του συντελεστή  $a_0$ . Έτσι πολύ εύκολα βρίσκουμε ότι

$$a_1 = \frac{\lambda^2 a_0}{2^2} = \frac{\lambda^2 a_0}{4} \quad \text{για } n = 1, \quad (14.4.15)$$

$$a_2 = \frac{\lambda^2 a_1}{4^2} = \frac{\lambda^2 a_1}{16} = \frac{\lambda^4 a_0}{64} \quad \text{για } n = 2, \quad (14.4.16)$$

$$a_3 = \frac{\lambda^2 a_2}{6^2} = \frac{\lambda^2 a_2}{36} = \frac{\lambda^6 a_0}{2304} \quad \text{για } n = 3 \quad (14.4.17)$$

και συνεχίζουμε με όμοιο τρόπο.

Τελικά η δυναμοσειρά (14.4.2) για την άγνωστη συνάρτηση  $f(r)$  στη διαφορική εξίσωση (14.4.1) παίρνει τη μορφή

$$f(r) = a_0 \left[ 1 + \frac{(\lambda r)^2}{4} + \frac{(\lambda r)^4}{64} + \frac{(\lambda r)^6}{2304} + \frac{(\lambda r)^8}{147456} + \frac{(\lambda r)^{10}}{14745600} + \frac{(\lambda r)^{12}}{2123366400} + \dots \right]. \quad (14.4.18)$$

Η δυναμοσειρά αυτή (χωρίς το συντελεστή  $a_0$ ) είναι στην πραγματικότητα η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel πρώτου είδους και μηδενικής τάξεως  $I_0(\lambda r)$ . Επομένως η λύση  $f(r)$  της διαφορικής εξίσωσής μας (14.4.1) είναι η εξής:

$$f(r) = a_0 I_0(\lambda r), \quad (14.4.19)$$

όπου το  $\lambda$  είναι η σταθερά παράμετρος που υπεισέρχεται στην ίδια διαφορική εξίσωση (14.4.1) και το  $a_0$  μια αυθαίρετη σταθερά.

Από μαθηματικής απόψεως πρέπει να είμαστε απόλυτα ευχαριστημένοι, επειδή ουσιαστικά κατασκευάσαμε τη δυναμοσειρά της συναρτήσεως Bessel  $I_0(\lambda r)$ . Προσθέτουμε μάλιστα ότι οι συναρτήσεις Bessel ορίζονται μέσω των δυναμοσειρών τους που προκύπτουν κατά την επίλυση των αντίστοιχων διαφορικών εξισώσεων Bessel. Επίσης ότι η διαφορική εξίσωση (14.4.1) είναι στην ουσία μια τροποποιημένη διαφορική εξίσωση Bessel, βέβαια όχι στην πλήρως κλασική μορφή της.

Από της απόψεως του Πολιτικού Μηχανικού θα ήταν σημαντικότερη παράλειψη να μη σημειωθεί ότι στην πιο πάνω τελική λύση (14.4.18) ή ισοδύναμα (14.4.19) λάβαμε υπόψη μας ότι, επειδή ο κύλινδρός μας είναι συμπαγής (δηλαδή δεν είναι σωλήνας), δεν επιτρέπεται με τίποτε η άγνωστη συνάρτηση  $f(r)$  να απειρίζεται στον άξονά του  $r = 0$ . Δηλαδή πρέπει οπωσδήποτε η τιμή  $f(0)$  (πάνω στον άξονα  $r = 0$  του κυλίνδρου) να είναι πεπερασμένη. Τούτο αποτελεί μια απόλυτα αναγκαία φυσική (όχι μαθηματική) συνθήκη και δεν ισχύει για σωλήνα. Η φυσική αυτή συνθήκη λήφθηκε από την αρχή υπόψη με το να μην έχουμε επιτρέψει τον απειρισμό του  $f(0)$ , με άλλα λόγια με το να έχουμε υιοθετήσει τη σίγουρα φραγμένη (για  $r = 0$ ) δυναμοσειρά (14.4.2) για την άγνωστη συνάρτηση  $f(r)$ . Η συνέπεια όμως της φυσικής αυτής συνθήκης είναι ότι η τελική μας λύση περιέχει μία μόνο αυθαίρετη σταθερά, το συντελεστή  $a_0$ , αντί για δύο, όπως θα ταίριαζε σε μια διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως και τέτοια είναι η διαφορική εξίσωση (14.4.1). Ελπίζεται ότι η διασαφήνιση αυτή ως προς την έμμεσα ληφθείσα υπόψη φυσική συνθήκη στον άξονα του κυλίνδρου (όπου  $r = 0$ ) έγινε κάπως κατανοητή και δε θα υπεισέλθουμε και σ' άλλες λεπτομέρειες.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ *A15*

## ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ LEGENDRE ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ BESSEL

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Μέχρι τώρα έχουμε αποκτήσει μια πάρα πολύ καλή γνώση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, π.χ. των  $\sin x$ ,  $\cos x$  και  $\tan x$  και των αντιστρόφων τους  $\sin^{-1} x$ ,  $\cos^{-1} x$  και  $\tan^{-1} x$ . Επίσης γνωρίζουμε αρκετά καλά τις υπερβολικές συναρτήσεις, π.χ. τις  $\sinh x$ ,  $\cosh x$  και  $\tanh x$  και τις αντίστροφές τους  $\sinh^{-1} x$ ,  $\cosh^{-1} x$  και  $\tanh^{-1} x$ . Τέλος ξέρουμε επίσης καλά την εκθετική συνάρτηση  $e^x$  και την αντίστροφή της λογαριθμική συνάρτηση  $\ln x$  καθώς και ορισμένες ακόμη συναρτήσεις.

Υπάρχουν όμως και πάρα πολλές επιπλέον συναρτήσεις με πρακτικό ενδιαφέρον, αλλά λιγότερο γνωστές από τις προηγούμενες. Αυτές καλούνται γενικά ειδικές συναρτήσεις. Στο κεφάλαιο αυτό θα περιορίσουμε την προσοχή μας σε δύο μόνο κατηγορίες ειδικών συναρτήσεων: (α) στα πολυώνυμα Legendre (στην Ενότητα A15.1) και (β) στις συναρτήσεις Bessel (στην Ενότητα A15.2). Εντούτοις αναμφίβολα και πάρα πολλές ακόμη ειδικές συναρτήσεις παρουσιάζονται σε προβλήματα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και ειδικότερα σε πρακτικά προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού.

Τα πολυώνυμα Legendre αποτελούν πολυωνυμικές λύσεις της εξίσωσης Legendre. Αυτή είναι μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερας τάξεως με μη σταθερούς συντελεστές και η επίλυσή της γίνεται με τη μέθοδο των δυναμοσειρών. Αυτήν είχαμε την ευκαιρία να τη μελετήσουμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο A14. Εδώ θα παραθέσουμε μερικές ιδιότητες των πολυωνύμων Legendre με έμφαση στην ορθογωνιότητά τους. Τα πολυώνυμα Legendre είναι χρήσιμα σε ορισμένες διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους που αφορούν σε προβλήματα σε σφαιρικές συντεταγμένες. Εδώ όμως θα εστιάσουμε την προσοχή μας στα αναπτύγματα συναρτήσεων σε σειρές πολυωνύμων Legendre και ακόμη περισσότερο στην αριθμητική ολοκλήρωση Gauss-Legendre, που έχει κόμβους τις ρίζες των πολυωνύμων Legendre. Αυτή είναι πολύ χρήσιμη στον Πολιτικό Μηχανικό ιδίως στη δημοφιλή μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων κυρίως για ισοπαραμετρικά στοιχεία.

Ακόμη πιο γνωστές και συχνά εμφανιζόμενες ειδικές συναρτήσεις είναι οι συναρτήσεις Bessel. Αυτές επαληθεύουν την εξίσωση Bessel, η οποία είναι κι αυτή, όπως και η εξίσωση Legendre, μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερας τάξεως με μη σταθερούς συντελεστές. Η επίλυσή της γίνεται με μια γενικευμένη μέθοδο δυναμοσειρών. Οι συναρτήσεις Bessel εμφανίζονται με φυσικό τρόπο σε προβλήματα αρμονικών συναρτήσεων σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Επίσης σε προβλήματα διαχύσεως και ταλαντώσεων μέσων με κυκλική (ή αξονική) συμμετρία, όπως είναι μια κυκλική πλάκα ή μια δακτυλιοειδής πλάκα. Θα αναφερθούμε στις συνήθεις συναρτήσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδους και στις αντίστοιχες τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel, που επαληθεύουν την τροποποιημένη εξίσωση Bessel. Θα αναφέρουμε μερικές ιδιότητες των συναρτήσεων Bessel περιλαμβάνοντας και τις ρίζες τους. Αυτές θα μας χρησιμεύσουν στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους. Θα αναφερθούμε τέλος σε τέσσερις εφαρμογές τους στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Απ' αυτές θα δώσουμε έμφαση στο ενδιαφέρον και κλασικό πρόβλημα του λυγισμού στύλου υπό την επίδραση του βάρους του.

### A15.1. ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ LEGENDRE

#### A15.1.1. Η εξίσωση Legendre και τα πολυώνυμα Legendre

Η εξίσωση Legendre (ή διαφορική εξίσωση του Legendre) είναι η γνωστή διαφορική εξίσωση

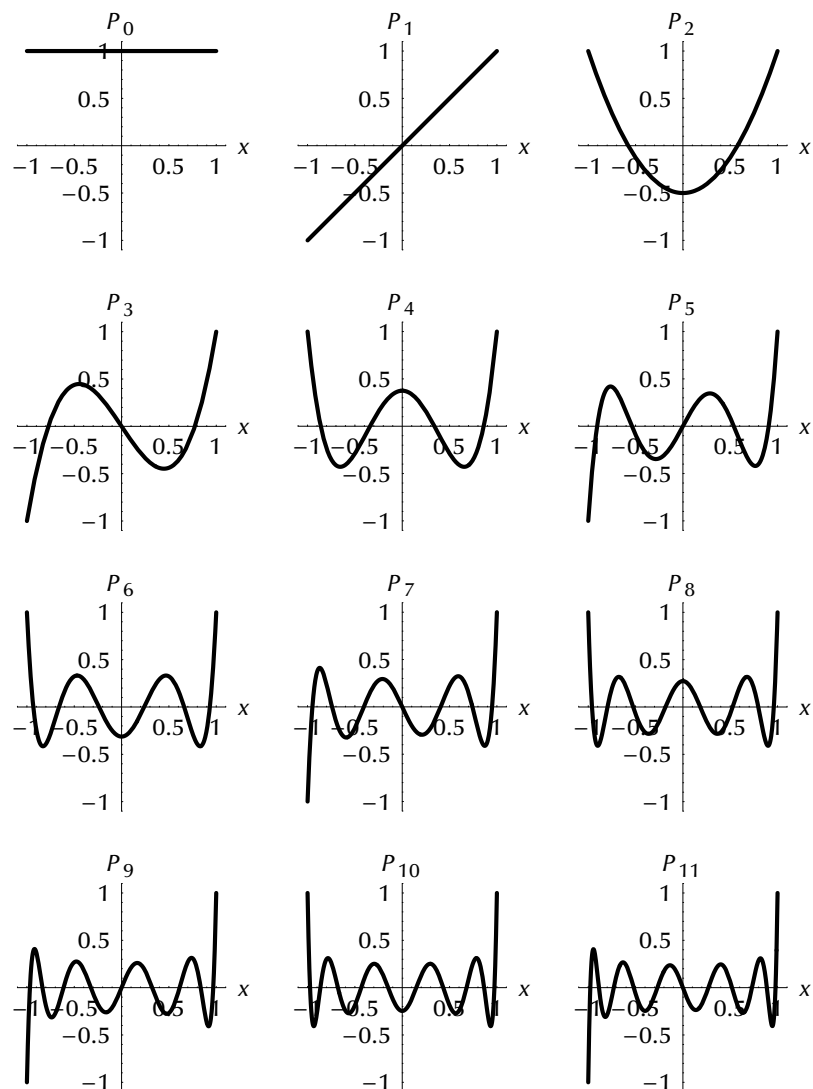
$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + v(v + 1)y(x) = 0. \tag{15.1.1}$$

Προφανώς χαρακτηρίζεται σαν ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως και με μη σταθερούς (μεταβλητούς) συντελεστές, επειδή οι δύο πρώτοι συντελεστές της: οι  $1 - x^2$  και  $-2x$  δεν είναι σταθεροί: περιέχουν την ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$ . Σαν παράμετρο η εξίσωση Legendre έχει τη σταθερή ποσότητα  $v$  στον τρίτο συντελεστή της: το  $v(v + 1)$ .

Με τη μέθοδο των δυναμοσειρών του προηγούμενου Κεφαλαίου A14 μπορεί να αποδειχθεί ότι στην ειδική περίπτωση μη αρνητικών ακέραιων τιμών της παραμέτρου  $v$ :  $v = n$  με  $n = 0, 1, 2, \dots$  η παραπάνω εξίσωση Legendre έχει σαν λύσεις της και τα καλούμενα πολυώνυμα Legendre  $P_n(x)$ . Ο δείκτης  $n$  στο πολυώνυμο Legendre  $P_n(x)$  καθορίζει το βαθμό του και είναι φυσικά ίσος με την παράμετρο  $v = n$  στην πιο πάνω εξίσωση Legendre (15.1.1). Με την κλασική και γνωστή μας μέθοδο των δυναμοσειρών προκύπτουν τα εξής πέντε πρώτα πολυώνυμα Legendre για  $n = 0, 1, 2, 3$  και 4:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3). \tag{15.1.2}$$

**Σχήμα A15.1:** Τα δώδεκα αυτά σχήματα εδώ δεξιά είναι οι γραφικές παραστάσεις των δώδεκα πρώτων πολυωνύμων Legendre  $P_n(x)$  για  $n = 0, 1, 2, \dots, 11$  στο διάστημα  $[-1, 1]$ . Παρατηρούμε ότι το  $n$ -στό πολυώνυμο Legendre  $P_n(x)$  με  $n > 0$  έχει ακριβώς  $n$  απλές ρίζες στο ανοικτό διάστημα  $(-1, 1)$ . Παρατηρούμε επίσης ότι αυτό παίρνει τις δύο τιμές  $P_n(1) = 1$  και  $P_n(-1) = (-1)^n$  εντούτοις με απόλυτα μικρότερες του 1 τιμές,  $|P_n(x)| < 1$ , στο εσωτερικό του διαστήματος  $(-1, 1)$  για  $n > 0$ . Το σχήμα αυτό δημιουργήθηκε με τη χρήση της *Mathematica* και δίνει σ' εμάς μια πρώτη εικόνα της συμπεριφοράς των πολυωνύμων Legendre στο διάστημα  $[-1, 1]$ . Αυτό είναι βέβαια και το διάστημα της ορθογωνιότητάς τους:  $[-1, 1]$ .





Τα πολυώνυμα Legendre  $P_n(x)$  έχουν μάλιστα κανονικοποιηθεί, έτσι ώστε

$$P_n(1) = 1 \quad \text{και} \quad P_n(-1) = (-1)^n. \quad (15.1.3)$$

Πρακτικά ο υπολογισμός ενός πολυωνύμου Legendre  $P_n(x)$  (π.χ. για  $n = 5$  ή  $n = 10$ ) μέσω της επιλύσεως της εξισώσεως Legendre (15.1.1) είναι πολύ δύσχρηστος. Ένας ευκολότερος τρόπος είναι με τη χρήση του καλούμενου τύπου του Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]. \quad (15.1.4)$$

Έτσι το πολυώνυμο Legendre  $P_n(x)$  υπολογίζεται με την  $n$ -στή παράγωγο του πολυωνύμου  $(x^2 - 1)^n$ .

Υπάρχει κι ένας ακόμη καλύτερος τρόπος υπολογισμού των πολυωνύμων Legendre  $P_n(x)$ . Αυτός συνίσταται στη χρήση του αναδρομικού τύπου (ή αναγωγικού τύπου)

$$nP_n(x) - (2n - 1)xP_{n-1}(x) + (n - 1)P_{n-2}(x) = 0 \quad \text{με} \quad n = 2, 3, \dots, \quad (15.1.5)$$

οπότε

$$P_n(x) = \frac{1}{n} [(2n - 1)xP_{n-1}(x) - (n - 1)P_{n-2}(x)] \quad \text{με} \quad n = 2, 3, \dots \quad (15.1.6)$$

Παραδείγματος χάρη, ο τύπος αυτός με  $n = 2$  και με  $P_0(x) = 1$  και  $P_1(x) = x$  μας δίνει

$$P_2(x) = \frac{1}{2} [(2 \cdot 2 - 1)xP_1(x) - (2 - 1)P_0(x)] = \frac{1}{2} (3 \cdot x \cdot x - 1 \cdot 1) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1) \quad (15.1.7)$$

σε πλήρη συμφωνία με την τρίτη σχέση (15.1.2) για το πολυώνυμο Legendre δευτέρου βαθμού  $P_2(x)$ . Για οικονομία χώρου (και υπολογισμών φυσικά ...) δε θα αποδείξουμε εδώ ούτε τον τύπο του Rodrigues (15.1.4), αλλ' ούτε και τον αναδρομικό τύπο (15.1.6) για τα πολυώνυμα Legendre  $P_n(x)$ .

### A15.1.2. Χρησιμότητα των πολυωνύμων Legendre

Τα πολυώνυμα Legendre  $P_n(x)$  είναι αρκετά χρήσιμα στον Πολιτικό Μηχανικό. Συγκεκριμένα είναι χρήσιμα στις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους και ειδικότερα στην εξίσωση του Laplace, στην οποία θα αναφερθούμε στο επόμενο μάθημα: στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III. Εκεί θα δούμε ότι παρουσιάζονται σε προβλήματα σε σφαιρικές συντεταγμένες για την εξίσωση Laplace.

Επίσης τα πολυώνυμα Legendre  $P_n(x)$  είναι κάπως χρήσιμα (δυστυχώς όμως όχι ιδιαίτερα ...) στην προσέγγιση γνωστής συναρτήσεως  $f(x)$  με τη χρήση αναπτύγματός της στα πολυώνυμα αυτά  $P_n(x)$ . Κι' ακόμη είναι πάρα πολύ, εξαιρετικά χρήσιμα στην αριθμητική ολοκλήρωση Gauss.

Αυτά τα δύο συμβαίνουν, επειδή τα πολυώνυμα Legendre  $P_n(x)$  έχουν μια εξαιρετικά ενδιαφέρουσα ιδιότητα: την **ορθογωνιότητα** (ή **ορθογωνικότητα**). Συγκεκριμένα μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx = 0, \quad \text{εάν} \quad m \neq n \quad \text{με} \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (15.1.8)$$

Ασφαλώς αυτή η ορθογωνιότητα δεν έχει νόημα, με κανέναν τρόπο δεν ισχύει, εάν  $m = n$ . Στην περίπτωση αυτή  $m = n$  ισχύει απλά η σχέση

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx = \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n + 1}, \quad \text{εάν} \quad m = n = 0, 1, 2, \dots \quad (15.1.9)$$

Στις δύο πιο πάνω χρήσεις των πολυωνύμων Legendre αφιερώνουμε τις επόμενες παραγράφους.

### A15.1.3. Προσέγγιση συναρτήσεως με πολυώνυμα Legendre

Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση  $f(x)$  στο διάστημα  $[-1, 1]$  και την υποθέτουμε ότι μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά πολυωνύμων Legendre  $P_n(x)$ . Τότε θα έχουμε

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x). \quad (15.1.10)$$

Φυσικά πρέπει να προσδιορίσουμε τους συντελεστές  $a_n$  της σειράς αυτής, που είναι προς το παρόν άγνωστοι. Προς το σκοπό αυτό πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της σχέσεως αυτής επί το πολυώνυμο Legendre  $P_m(x)$  (για κάποιο συγκεκριμένο  $m = 0, 1, 2, \dots$ ). Έτσι παίρνουμε

$$P_m(x)f(x) \equiv f(x)P_m(x) = P_m(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_m(x)P_n(x). \quad (15.1.11)$$

Τώρα ολοκληρώνουμε στο διάστημα ορθογωνιότητας  $[-1, 1]$  των πολυωνύμων Legendre  $P_n(x)$  στη σχέση (15.1.8): στο διάστημα ολοκληρώσεως  $[-1, 1]$ . Με τον τρόπο αυτό διαπιστώνουμε ότι

$$\int_{-1}^1 f(x)P_m(x) dx = \int_{-1}^1 \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_m(x)P_n(x) \right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[ \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx \right]. \quad (15.1.12)$$

Στο δεξιό μέλος έχουμε υποθέσει ότι το ολοκλήρωμα της σειράς (του άπειρου αθροίσματος) είναι ίσο με το άθροισμα των επιμέρους ολοκληρωμάτων: εναλλαγή ολοκληρώσεως και αθροίσεως.

Στο σημείο αυτό λαμβάνουμε υπόψη τη σχέση ορθογωνιότητας (15.1.8) των πολυωνύμων Legendre. Ναι, καθώς ο δείκτης  $n$  στη σειρά του δεξιού μέλους της σχέσεως (15.1.12) «κινείται» από το μηδέν προς το άπειρο, όλοι οι όροι  $\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx$  μηδενίζονται εξαιτίας της σχέσεως ορθογωνιότητας (15.1.8). Για την ακρίβεια όχι όλοι: σχεδόν όλοι. Ο ειδικός όρος όπου  $n = m$  (με  $P_m(x)$  το συγκεκριμένο πολυώνυμο Legendre, με το οποίο πολλαπλασιάσαμε στη σχέση (15.1.11)) μας έχει ξεφύγει: δε μηδενίζεται. Ο όρος αυτός με  $n = m$  επαναλαμβάνουμε παραμένει, επειδή ισχύει η σχέση (15.1.9). Το αποτέλεσμα είναι  $2/(2n+1) = 2/(2m+1)$ , αφού για τον όρο αυτό  $n = m$ . Άρα τελικά ένας μόνο όρος απομένει στο δεξιό μέλος της σχέσεως (15.1.12): αυτός με  $n = m$ . Κι έτσι η σχέση αυτή απλοποιείται φοβερά παίρνοντας την τελική της προφανή μορφή

$$\int_{-1}^1 f(x)P_m(x) dx = a_m \frac{2}{2m+1} \equiv \frac{2}{2m+1} a_m. \quad (15.1.13)$$

Λύνοντάς την μάλιστα ως προς  $a_m$  (μια πάρα πολύ εύκολη εργασία ...), διαπιστώνουμε ότι

$$a_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^1 f(x)P_m(x) dx \quad \text{ή με } n \text{ αντί } m \text{ σαν δείκτη} \quad a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x)P_n(x) dx. \quad (15.1.14)$$

Με τον τρόπο αυτό προσδιορίστηκαν οι συντελεστές  $a_n$  του αναπτύγματος (15.1.10) μιας γνωστής συναρτήσεως  $f(x)$  σε σειρά πολυωνύμων Legendre  $P_n(x)$  στο διάστημα  $[-1, 1]$ .

Δε θα ασχοληθούμε εδώ με το θέμα της συγκλίσεως της σειράς (15.1.10). Σημειώνουμε όμως ότι συχνά μπορούμε να περιορισθούμε σε  $N$  μόνο όρους παίρνοντας την προσέγγιση  $f_N(x)$ , έτσι ώστε

$$f(x) \approx f_N(x) := \sum_{n=0}^N a_n P_n(x), \quad (15.1.15)$$

που είναι πρακτικά πιο χρήσιμη. Φυσικά οι συντελεστές  $a_n$  υπολογίζονται από τη σχέση (15.1.14).

Στο επόμενο Κεφάλαιο A16 θα αναφερθούμε σε πιο χρήσιμα αναπτύγματα συναρτήσεως  $f(x)$ : σε τριγωνομετρικές σειρές. Αυτές καλούνται σειρές Fourier. Σε αναλογία όμως με τις σειρές Fourier η σειρά (15.1.10) ή (15.1.15) καλείται σειρά Fourier-Legendre. Για να είμαστε όμως απόλυτα ειλικρινείς, ακόμη καλύτερη από την παρούσα σειρά Fourier-Legendre είναι η εντελώς αντίστοιχη σειρά που βασίζεται όμως στα πολυώνυμα Chebyshev πρώτου είδους  $T_n(x)$  αντί για τα πολυώνυμα Legendre  $P_n(x)$ . Τα καινούργια αυτά πολυώνυμα  $T_n(x)$  αποτελούν λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$(1-x^2)y''(x) - xy'(x) + n^2y(x) = 0 \quad (15.1.16)$$

και έχουν σχέσεις ορθογωνιότητας τις σχέσεις (16.1.6) στο επόμενο Κεφάλαιο A16. Δε θεωρούμε όμως σκόπιμο να προχωρήσουμε σε περισσότερες λεπτομέρειες, που «μπαίνουν στα χωράφια» της Θεωρίας Προσεγγίσεως και δεν αφορούν άμεσα στο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II.

**Πίνακας A15.1:** Κόμβοι (σημεία, τετμημένες)  $t_{in}$  και αντίστοιχα βάρη  $w_{in}$  στον κανόνα αριθμητικής ολοκληρώσεως Gauss–Legendre (15.1.18) για  $n = 4$  σημεία ολοκληρώσεως.

$i$	$t_{in}$	$w_{in}$
1	−0.86113 63115 94052 57522	+0.34785 48451 37453 85737
2	−0.33998 10435 84856 26480	+0.65214 51548 62546 14263
3	+0.33998 10435 84856 26480	+0.65214 51548 62546 14263
4	+0.86113 63115 94052 57522	+0.34785 48451 37453 85737

**A15.1.4. Αριθμητική ολοκλήρωση Gauss–Legendre**

Για τον Πολιτικό Μηχανικό σίγουρα η πιο σημαντική χρησιμότητα των πολυωνύμων Legendre είναι στην **αριθμητική ολοκλήρωση**. Η φράση αυτή δηλώνει την προσέγγιση ενός ολοκληρώματος που συνήθως είναι δύσκολο ή αδύνατο να υπολογισθεί αναλυτικά με πεπερασμένο άθροισμα. Γενικά έχουμε τον τύπο αριθμητικής ολοκληρώσεως μιας συναρτήσεως  $g(t)$  στο διάστημα  $[a, b]$

$$\int_a^b g(t) dt \approx \sum_{i=1}^n w_{in} g(t_{in}), \tag{15.1.17}$$

όπου παραλείψαμε τον όρο σφάλματος  $E_n[g]$ . Σε έναν τέτοιο τύπο αριθμητικής ολοκληρώσεως τα  $n$  σημεία  $t_{in}$  καλούνται συνήθως **κόμβοι** ή **σημεία** ή **τετμημένες**, ενώ οι  $n$  συντελεστές  $w_{in}$  καλούνται **βάρη**. Ολόκληρος ο τύπος (15.1.17) καλείται συνήθως **κανόνας αριθμητικής ολοκληρώσεως**.

Πολύ χρήσιμος στην πράξη είναι ο κανόνας αριθμητικής ολοκληρώσεως Gauss–Legendre. Αυτός έχει σαν διάστημα ολοκληρώσεως  $[a, b]$  το διάστημα  $[-1, 1]$  ορθογωνιότητας των πολυωνύμων Legendre στη σχέση (15.1.8), στην οποία και βασίζεται. Προφανώς έχει τη μορφή

$$\int_{-1}^1 g(t) dt \approx \sum_{i=1}^n w_{in} g(t_{in}), \tag{15.1.18}$$

όπου για διευκόλυνση διατηρήσαμε τα σύμβολα  $t_{in}$  και  $w_{in}$  για τους κόμβους και τα βάρη αντίστοιχα. Αποδεικνύεται στην Αριθμητική Ανάλυση ότι οι  $n$  κόμβοι  $t_{in}$  είναι απλά οι  $n$  ρίζες του πολυωνύμου Legendre  $P_n(x)$  ή  $P_n(t)$  (το ίδιο κάνει!) με  $n$  τον αριθμό των όρων στο άθροισμα του δεξιού μέλους του κανόνα αριθμητικής ολοκληρώσεως (15.1.18). Αποδεικνύεται επίσης ότι όλες αυτές οι ρίζες  $t_{in}$  (εδώ οι κόμβοι) του πολυωνύμου Legendre  $P_n(x)$  βρίσκονται μέσα στο ανοικτό διάστημα  $(-1, 1)$ . Τέλος όσον αφορά στα βάρη  $w_{in}$ , αυτά μπορούν να υπολογισθούν μέσω του αρκετά απλού τύπου

$$w_{in} = \frac{2(1 - t_{in}^2)}{n^2 P_{n-1}^2(t_{in})} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad w_{in} = \frac{2(1 - t_{in}^2)}{(n + 1)^2 P_{n+1}^2(t_{in})} \quad \text{με } i = 1, 2, \dots, n. \tag{15.1.19}$$

► **Παρατήρηση A15.1:** Με τη χρήση ενός προγράμματος συμβολικών και αριθμητικών υπολογισμών (όπως είναι η *Mathematica*) οι κόμβοι  $t_{in}$  και τα βάρη  $w_{in}$  του κανόνα αριθμητικής ολοκληρώσεως Gauss–Legendre (15.1.18) (και πολλών άλλων ανάλογων κανόνων) μπορούν να υπολογισθούν κυριολεκτικά (δεν είναι υπερβολή!) με μία μόνο γραμμή κώδικα. Βέβαια τα προγράμματα αυτά έχουν από την αρχή διαθέσιμα στο χρήστη τα πολυώνυμα Legendre, όπως και τα πολυώνυμα Chebyshev, τις συναρτήσεις Bessel της επόμενης ενότητας και τόσες άλλες ειδικές συναρτήσεις!

Παρόλο που είναι μάλλον κουτό να δίνουμε εμείς στον υπολογιστή τους κόμβους  $t_{in}$  και τα αντίστοιχα βάρη  $w_{in}$  στον κανόνα αριθμητικής ολοκληρώσεως Gauss–Legendre (15.1.18), είναι εντούτοις εκπαιδευτικά χρήσιμο να έχουμε μια εικόνα για τους κόμβους  $t_{in}$  και τα βάρη  $w_{in}$ . Για το λόγο αυτό παραθέσαμε στον πιο πάνω Πίνακα A15.1 τις τιμές των κόμβων  $t_{in}$  και των βαρών  $w_{in}$  για  $n = 4$  σημεία ολοκληρώσεως. Στο επόμενο μάθημα, στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III, συγκεκριμένα

στην Ενότητα Γ2.5 του Μέρους Γ (για τις Ολοκληρωτικές Εξισώσεις), θα επαναλάβουμε (με κάπως περισσότερες λεπτομέρειες) τον κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss–Legendre (15.1.18). Στη συνέχεια θα το χρησιμοποιήσουμε για την αριθμητική επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων. Εκεί θα δώσουμε και πίνακα κόμβων  $t_{in}$  και βαρών  $w_{in}$  για  $n = 10$  σημεία ολοκλήρωσης.

► **Παρατήρηση A15.2:** Στο σημείο αυτό μπορούμε να υποδείξουμε μια σημαντική γενίκευση. Υποθέτουμε πως το διάστημα ολοκλήρωσης είναι το γενικότερο πεπερασμένο διάστημα  $[a, b]$  αντί για το βασικό διάστημα  $[-1, 1]$ , το οποίο ισχύει για τον κανόνα Gauss–Legendre (15.1.18). Στην περίπτωση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί η απλή αλλαγή μεταβλητής ολοκλήρωσης

$$t = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}s \quad (15.1.20)$$

για την αναγωγή του στο διάστημα  $[-1, 1]$ . Τώρα όμως έχουμε τη νέα μεταβλητή ολοκλήρωσης  $s$ .

▼ **Παράδειγμα A15.1:** Πρόκειται για ένα πάρα πολύ απλό παράδειγμα: Με τη χρήση του κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss–Legendre με  $n = 4$  κόμβους να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^1 e^t dt = e^t \Big|_{-1}^1 = e^1 - e^{-1} = 2 \frac{e^1 - e^{-1}}{2} = 2 \sinh 1. \quad (15.1.21)$$

**Λύση:** Με τη χρήση της *Mathematica* βρίσκουμε τη ζητούμενη προσέγγιση  $I_4$  με  $n = 4$  κόμβους

$$I_4 = 2.35040\ 20922 \quad \text{έναντι} \quad I_{\text{exact}} = 2 \sinh 1 \approx 2.35040\ 23873 \quad (15.1.22)$$

με σωστά επτά σημαντικά ψηφία (έξι δεκαδικά ψηφία) και σφάλμα  $|E_4| \approx 2.95 \times 10^{-7}$ . Φυσικά η ακρίβεια αυτή (εδώ επτά σημαντικά ψηφία) γενικά αυξάνεται όσο αυξάνεται ο αριθμός  $n$  των κόμβων. Επίσης συνήθως η ίδια ακρίβεια είναι μεγαλύτερη όσο η συνάρτηση  $g(t)$  που ολοκληρώνεται αριθμητικά είναι καλύτερη με την έννοια ότι διαθέτει περισσότερες παραγωγούς. ▲

► **Παρατήρηση A15.3:** Όσον αφορά τέλος στον Πολιτικό Μηχανικό, η χρήση του κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss–Legendre απαιτείται κυρίως στα **πεπερασμένα στοιχεία**. Πρόκειται για μια υψηλής γενικότητας και χρησιμότητας μέθοδο αριθμητικής επίλυσης ποικίλων προβλημάτων της Μηχανικής των Στερεών και των Ρευστών, της Εδαφομηχανικής, κλπ. Σ' αυτά γίνεται **διακριτοποίηση** (ή **διακεκριμενοποίηση**) του μέσου με πεπερασμένα στοιχεία στη μία, δύο ή τρεις διαστάσεις. Στα στοιχεία αυτά απαιτείται ο υπολογισμός ολοκληρωμάτων και συχνά αυτό μπορεί να γίνει μόνο με αριθμητική ολοκλήρωση. Τούτο συμβαίνει ειδικότερα στα **ισοπαραμετρικά** στοιχεία, αλλά και σε άλλα πεπερασμένα στοιχεία με δύσκολες ή αδύνατες αναλυτικές ολοκληρώσεις.

## A15.2. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ BESSEL

### A15.2.1. Η εξίσωση Bessel και οι συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους

Εκτός από τα πολυώνυμα Legendre υπάρχουν και πολλές άλλες ειδικές συναρτήσεις που είναι χρήσιμες στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά και επαληθεύουν διαφορικές εξισώσεις συνήθως δευτέρας τάξεως. Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε στις **συναρτήσεις Bessel**. Αυτές είναι εξίσου χρήσιμες στον Πολιτικό Μηχανικό με τα πολυώνυμα Legendre  $P_n(x)$  ίσως και ακόμη πιο χρήσιμες.

Ξεκινάμε με την **εξίσωση Bessel** (αναλυτικότερα τη διαφορική εξίσωση του Bessel). Αυτή έχει τη λίγο-πολύ απλή μορφή

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0. \quad (15.2.1)$$

Πρόκειται για μια ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως και με μη σταθερούς (μεταβλητούς) συντελεστές, ακριβώς όπως συνέβαινε και με την εξίσωση Legendre (15.1.1) στην προηγούμενη Ενότητα A15.1. Εδώ στην εξίσωση Bessel (15.2.1) παράμετρος είναι η ποσότητα  $\nu$ .

Την καλούμε κι αυτή **τάξη** της εξισώσεως Bessel. Επειδή είναι υψωμένη στο τετράγωνο:  $v^2$ , θα μπορούσαμε ίσως να τη θεωρούμε μη αρνητική:  $v \geq 0$ . Υποθέτουμε επίσης ότι  $x > 0$ . Αν θέλουμε, διαιρώντας με  $x^2$  (με  $x > 0$ ), γράφουμε την εξίσωση Bessel (15.2.1) και στην ισοδύναμη μορφή της

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + \left(1 - \frac{v^2}{x^2}\right)y(x) = 0. \tag{15.2.2}$$

Στην Ενότητα A14.4 του προηγούμενου Κεφαλαίου A14 είχαμε την ευκαιρία να επιλύσουμε τη διαφορική εξίσωση (14.4.1), την επαναλαμβάνουμε

$$f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) - \lambda^2 f(r) = 0 \tag{15.2.3}$$

με τη μέθοδο των δυναμοσειρών και καταλήξαμε στη λύση (14.4.18). Δεν είναι ακριβώς η εξίσωση Bessel (15.2.2): είναι μια τροποποιημένη μορφή της. Εντούτοις και η ίδια η εξίσωση Bessel (15.2.1) ή (15.2.2) μπορεί κι αυτή θαυμάσια να λυθεί με τη μέθοδο των δυναμοσειρών του Κεφαλαίου A14 σε μια γενικευμένη μορφή και χρήση της. Εδώ θα παραλείψουμε τη σχετική διαδικασία: με τη μέθοδο του Frobenius, η οποία είναι χρονοβόρα και υπολογιστικά λίγο επαχθής, γράφοντας κατευθείαν το αποτέλεσμα της λύσεως αυτής. Αυτό είναι (με τη μέθοδο των δυναμοσειρών επαναλαμβάνουμε)

$$y_g(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x) \tag{15.2.4}$$

με την προϋπόθεση ότι η τάξη  $\nu$  της εξισώσεως Bessel (15.2.1) ή (15.2.2) δεν είναι ακέραιος αριθμός. Φυσικά στη λύση αυτή, που είναι η γενική λύση της εξισώσεως Bessel, οι ποσότητες  $C_1$  και  $C_2$  είναι απλά δύο αυθαίρετες σταθερές πραγματικές για πραγματικές λύσεις  $y(x)$ . Και το σημαντικό ...

Οι δύο συναρτήσεις  $J_\nu(x)$  και  $J_{-\nu}(x)$  στη γενική αυτή λύση  $y_g(x)$  είναι συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους και τάξεων  $\nu$  και  $-\nu$  αντίστοιχα. (Οι τάξεις αυτές δείχνονται στους δείκτες:  $J_\nu$  και  $J_{-\nu}$  αντίστοιχα.) Η συνάρτηση Bessel  $J_\nu(x)$  πρώτου είδους και τάξεως  $\nu$  ορίζεται μέσω της δυναμοσειράς

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+1+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \quad \text{με } x > 0. \tag{15.2.5}$$

(Ανάλογα και η συνάρτηση Bessel  $J_{-\nu}(x)$  απλά με  $-\nu$  αντί για  $\nu$ .) Ο ορισμός αυτός με δυναμοσειρά δεν είναι βέβαια αυθαίρετος. Προέκυψε από την επίλυση της εξισώσεως Bessel (15.2.1) ή (15.2.2) με τη μέθοδο των δυναμοσειρών (σε κάπως γενικευμένη μορφή της: μέθοδος του Frobenius).

Στον παρανομαστή εκτός από το παραγοντικό  $k!$  έχουμε και τη συνάρτηση γάμμα  $\Gamma(k+1+\nu)$ . Η συνάρτηση γάμμα  $\Gamma(x)$  ορίζεται με τον ακόλουθο ολοκληρωτικό τύπο:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad \text{φυσικά με } x > 0, \tag{15.2.6}$$

ώστε να υπάρχει το ολοκλήρωμα (εδώ να μην απειρίζεται), κι έχει μερικές αξιοσημείωτες ιδιότητες:

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad \text{φυσικά με } \sin \pi x \neq 0. \tag{15.2.7}$$

Από αυτές η πρώτη ιδιότητα είναι η πιο σημαντική, επειδή αυτή συνδέει άμεσα τη συνάρτηση  $\Gamma(x)$  με το παραγοντικό  $n!$  για ακέραιες τιμές του  $x$ :  $x = n+1$ . Επαναλαμβάνουμε:  $\Gamma(n+1) = n!$ . Και η δεύτερη ιδιότητα είναι σημαντική: θυμίζει τη γνωστή ιδιότητα του παραγοντικού  $n! = n(n-1)!$ .

Ορίσθηκε λοιπόν στη σχέση (15.2.5) η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους τάξεως  $\nu$ , η  $J_\nu(x)$ , με μορφή δυναμοσειράς και είναι λύση της εξισώσεως Bessel (15.2.1) επίσης τάξεως  $\nu$ . Το ίδιο βέβαια και η συνάρτηση Bessel  $J_{-\nu}(x)$  με  $-\nu$  αντί για  $\nu$  και είναι εύλογο αυτό, αφού έχουμε  $v^2 = (\pm \nu)^2$  στην εξίσωση Bessel (15.2.1). Φυσικά, εάν η τάξη  $\nu$  της συναρτήσεως Bessel  $J_\nu(x)$  είναι μη αρνητικός ακέραιος αριθμός  $n$ , ε τότε

$$\Gamma(k+1+\nu) = \Gamma(k+1+n) = (k+n)! \tag{15.2.8}$$

και η δυναμοσειρά (15.2.5) απλοποιείται λιγάκι στον παρονομαστή παίρνοντας τώρα τη μορφή

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \quad \text{με } n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{και } x \geq 0. \quad (15.2.9)$$

(Εννοείται ότι για  $n \geq 0$  μπορούμε βέβαια να θέτουμε  $x \geq 0$ , όχι μόνο  $x > 0$ .)

▼ **Παράδειγμα A15.2:** Να υπολογισθούν οι έξι πρώτοι όροι των δύο συναρτήσεων Bessel πρώτου είδους  $J_0(x)$  και  $J_1(x)$  τάξεων 0 και 1 αντίστοιχα. Ποιων διαφορικών εξισώσεων είναι αυτές λύσεις;

**Λύση:** Απλά εφαρμόζουμε αμέσως τον πιο πάνω τύπο (15.2.9) με  $n = 0$  και  $n = 1$  αντίστοιχα. Κατ' αυτόν τον τρόπο προκύπτουν οι δύο τύποι

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \frac{x^8}{147456} - \frac{x^{10}}{14745600} + \dots \quad (15.2.10)$$

και

$$J_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{384} - \frac{x^7}{18432} + \frac{x^9}{1474560} - \frac{x^{11}}{176947200} + \dots \quad (15.2.11)$$

Προφανώς η συνάρτηση Bessel  $J_0(x)$  είναι άρτια, ενώ αντίθετα η  $J_1(x)$  είναι περιττή.

Αυτές οι δύο συναρτήσεις Bessel  $J_0(x)$  και  $J_1(x)$  είναι ασφαλώς λύσεις των διαφορικών εξισώσεων Bessel μηδενικής τάξεως (με  $\nu = 0$ ) και πρώτης τάξεως (με  $\nu = 1$ ) αντίστοιχα, δηλαδή

$$x^2 J_0''(x) + x J_0'(x) + x^2 J_0(x) = 0 \quad \text{και} \quad x^2 J_1''(x) + x J_1'(x) + (x^2 - 1) J_1(x) = 0. \quad (15.2.12)$$

Παρατηρούμε τέλος ότι  $J_0'(x) = -J_1(x)$ , μια πολύ ενδιαφέρουσα ιδιότητα στην παραγωγή. ▲

Χωρίς απόδειξη αναφέρουμε επίσης ότι για  $\nu = \pm \frac{1}{2}$  προκύπτουν οι πολύ απλοί τύποι

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \quad \text{και} \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \quad (15.2.13)$$

Αυτοί εκφράζουν τις συναρτήσεις  $J_{\pm \frac{1}{2}}(x)$  με «κλειστό» (εντός εισαγωγικών!) τρόπο με τη χρήση τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Άλλο που και οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις  $\sin x$  και  $\cos x$  ορίζονται συχνά και οι ίδιες μέσω δυναμοσειρών, ακριβώς όπως και οι συναρτήσεις Bessel. Αλλά είπαμε, άλλο αυτό που θεωρούμε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις γνωστές, ενώ τις συναρτήσεις Bessel άγνωστες. Βέβαια πολλά προγράμματα, όπως η *Mathematica*, τις θεωρούν εξίσου γνωστές!

### A15.2.2. Ιδιότητες των συναρτήσεων Bessel πρώτου είδους

Αναφέραμε ήδη την ιδιότητα παραγωγίσεως

$$J_0'(x) = -J_1(x). \quad (15.2.14)$$

Οι συναρτήσεις Bessel γενικά (όχι μόνο οι  $J_\nu(x)$ ) έχουν και πολλές, πάρα-πάρα πολλές ιδιότητες. Οι αποδείξεις τους είναι άλλοτε εύκολες και άλλοτε δύσκολες, γενικά υπολογιστικά κοπιαστικές λόγω των δυναμοσειρών. Θα τις παραλείψουμε φυσικά τις ιδιότητες αυτές. Έτσι κι αλλιώς λίγα προσφέρουν στη θεμελίωση του μαθήματος Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II, ενώ είναι διαθέσιμες σε πολλά βιβλία και πίνακες. Ας αναφέρουμε μόνο δύο από τις ιδιότητες αυτές. Πρώτη ιδιότητα:

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x), \quad (15.2.15)$$

ένας ενδιαφέρων, αν και όχι τόσο χρήσιμος, αναδρομικός τύπος για τον υπολογισμό της συναρτήσεως Bessel  $J_{\nu+1}(x)$  από τις αντίστοιχες συναρτήσεις Bessel  $J_\nu(x)$  και  $J_{\nu-1}(x)$ . Δεύτερη ιδιότητα:

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J_\nu'(x), \quad (15.2.16)$$

αρκετά χρήσιμη για τον υπολογισμό της παραγώγου  $J'_\nu(x)$  από τις συναρτήσεις  $J_{\nu-1}(x)$  και  $J_{\nu+1}(x)$ .

▼ **Παράδειγμα A15.3:** Να υπολογισθεί η συνάρτηση Bessel  $J_{\frac{3}{2}}(x)$  τάξεως  $\nu = \frac{3}{2}$ .

**Λύση:** Από τον πιο πάνω αναδρομικό τύπο (15.2.15) λύνοντάς τον ως προς  $J_{\nu+1}(x)$  βρίσκουμε

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x). \quad (15.2.17)$$

Για  $\nu = \frac{1}{2}$  (οπότε  $2\nu = 1$ ) έχουμε

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{1}{x} J_{\frac{1}{2}}(x) - J_{-\frac{1}{2}}(x). \quad (15.2.18)$$

Αλλά τις δύο συναρτήσεις Bessel  $J_{\pm\frac{1}{2}}(x)$  τις γνωρίζουμε ήδη από τις σχέσεις (15.2.13), έστω κι αν δεν τις αποδείξαμε. Τις αντικαθιστούμε λοιπόν στη σχέση αυτή (15.2.18) και παίρνουμε τελικά

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left( \frac{\sin x}{x} - \cos x \right). \quad (15.2.19)$$

Ανάλογα μπορούμε να υπολογίσουμε τριγωνομετρικά και τις συναρτήσεις Bessel  $J_{\frac{5}{2}}(x), J_{\frac{7}{2}}(x)$ , κλπ. ▲

### A15.2.3. Οι συναρτήσεις Bessel δευτέρου είδους

Μέχρι τώρα αναφερθήκαμε στις συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους  $J_\nu(x)$  (τάξεως  $\nu$ ). Με τη χρήση τους εκφράσαμε στη σχέση (15.2.4) τη γενική λύση  $y_g(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x)$  της εξίσωσης Bessel (15.2.1) στην περίπτωση που η τάξη της  $\nu$  δεν είναι ακέραιος αριθμός  $n$ . Εάν όμως είναι; Ε τότε δυστυχώς αποδεικνύεται ότι οι δύο συναρτήσεις  $J_\nu(x)$  και  $J_{-\nu}(x)$  δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητες μεταξύ τους. Επομένως και η λύση μας αυτή δεν είναι η γενική λύση  $y_g(x)$  της εξίσωσης Bessel (15.2.1) που αναζητάμε. Και τότε; Τότε απλά αναγκαζόμαστε να χρησιμοποιήσουμε τις καλούμενες συναρτήσεις Bessel δευτέρου είδους  $Y_\nu(x)$  (πάλι τάξεως  $\nu$ ). Αυτές ορίζονται ως εξής:

$$Y_\nu(x) = \frac{1}{\sin \nu\pi} [J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)] \quad \text{για } \nu \text{ μη ακέραιο αριθμό: } \nu \neq n \quad (15.2.20)$$

και

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(x) \quad \text{για } \nu \text{ ακέραιο αριθμό: } \nu = n. \quad (15.2.21)$$

Δε θα δώσουμε την τελική έκφραση αυτού του ορίου, επειδή δεν είναι ιδιαίτερα απλή. Σημειώνουμε επίσης ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} Y_\nu(x) = -\infty, \quad \text{ενώ} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} Y_\nu(x) = 0. \quad (15.2.22)$$

Από τους ορισμούς αυτούς (15.2.20) και (15.2.21) των συναρτήσεων Bessel δευτέρου είδους μη ακέραιης και ακέραιης τάξεως  $\nu$  αντίστοιχα μπορεί να αποδειχθεί ότι η γενική λύση της εξίσωσης Bessel τάξεως  $\nu$  (15.2.1) είναι δυνατόν να γραφεί στη μορφή

$$y_g(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x) \quad \text{για κάθε τιμή της τάξεώς της } \nu. \quad (15.2.23)$$

Δηλαδή η μορφή αυτή ισχύει είτε για ακέραιη είτε για μη ακέραιη τιμή του  $\nu$ . Αντίθετα η γενική λύση (15.2.4):  $y_g(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x)$  ισχύει μόνο για μη ακέραιες τιμές του  $\nu$ , δηλαδή για  $\nu \neq n$ .

◆ **Συμπέρασμα:** Ο γραμμικός συνδυασμός (15.2.23):  $C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x)$  των δύο συναρτήσεων Bessel: πρώτου είδους  $J_\nu(x)$  και δευτέρου είδους  $Y_\nu(x)$  αποτελεί τη γενική λύση  $y_g(x)$  της εξίσωσης Bessel (15.2.1):  $x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0$  για κάθε τιμή του  $\nu$  είτε ακέραιη είτε μη ακέραιη. Πρακτικά στη λύση αυτή μόνο οι μη αρνητικές τιμές της τάξεως  $\nu$  ( $\nu \geq 0$ ) έχουν νόημα, αφού στην εξίσωση Bessel η τάξη της  $\nu$  εμφανίζεται μόνο στο τετράγωνο:  $\nu^2$  στο συντελεστή  $x^2 - \nu^2$  του  $y(x)$ .

### A15.2.4. Μια γενικευμένη εξίσωση Bessel

Πολλές φορές στην πράξη, κυρίως στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III, παρουσιάζεται η εξίσωση Bessel (15.2.1) στην ακόλουθη

γενικευμένη μορφή της:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (\lambda^2 x^2 - \nu^2)y(x) = 0. \quad (15.2.24)$$

Στη μορφή αυτή έχουμε εκτός από την τάξη  $\nu$  της εξισώσεως Bessel και τη δεύτερη παράμετρο  $\lambda$  στον όρο  $\lambda^2 x^2$  στο συντελεστή  $\lambda^2 x^2 - \nu^2$  του  $y(x)$ . Και τί κάνουμε τώρα; Τώρα απλά ορίζουμε τη νέα εξαρτημένη μεταβλητή  $t = \lambda x$  και τη νέα άγνωστη συνάρτηση  $\hat{y}(t) \equiv \hat{y}(\lambda x) := y(x)$  με τη νέα εξαρτημένη μεταβλητή  $t$ . Με αυτήν την αλλαγή μεταβλητής (από  $x$  σε  $t$ ) προκύπτει αμέσως ότι

$$y'(x) = \lambda \hat{y}'(\lambda x) = \lambda \hat{y}'(t) \quad \text{και} \quad y''(x) = \lambda^2 \hat{y}''(\lambda x) = \lambda^2 \hat{y}''(t) \quad \text{με} \quad t = \lambda x \quad \text{και} \quad x = \frac{t}{\lambda} \quad (15.2.25)$$

Έτσι η παραπάνω γενικευμένη εξίσωση Bessel (15.2.24) παίρνει εύκολα τη νέα της μορφή

$$t^2 \hat{y}''(t) + t \hat{y}'(t) + (t^2 - \nu^2) \hat{y}(t) = 0. \quad (15.2.26)$$

Μα αυτή η μορφή ταυτίζεται με την αρχική εξίσωση Bessel (15.2.1) (με νέα μεταβλητή όμως τώρα, ως μην το ξεχνάμε αυτό: την  $t = \lambda x$ , οπότε  $x = t/\lambda$ ). Επομένως η γενική λύση της  $\hat{y}_g(t)$  θα είναι

$$\hat{y}_g(t) = C_1 J_\nu(t) + C_2 Y_\nu(t) \quad \text{για κάθε τάξη} \quad \nu \geq 0. \quad (15.2.27)$$

Σ' αυτήν προτιμήσαμε τη λύση (15.2.23), ώστε να ισχύει για κάθε τάξη  $\nu$  (με  $\nu \geq 0$ ). Φυσικά τα σύμβολα  $C_1$  και  $C_2$  δηλώνουν κατά τα συνήθη δύο αυθαίρετες σταθερές. Και τέλος επιστρέφουμε από τη λύση (15.2.27) στην αρχική μας ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$  χωρίς να λησμονούμε ότι  $t = \lambda x$ . Επομένως με  $\hat{y}_g(t) \equiv y_g(x)$  παίρνουμε τελικά

$$y_g(x) = C_1 J_\nu(\lambda x) + C_2 Y_\nu(\lambda x) \quad \text{για κάθε τάξη} \quad \nu \geq 0. \quad (15.2.28)$$

Πάει λοιπόν και η παρούσα γενικευμένη εξίσωση Bessel (15.2.24). Τη λύσαμε κι αυτή. Παρακάτω!

#### A15.2.5. Η τροποποιημένη εξίσωση Bessel και οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel

Μελετάμε τώρα την εξίσου σημαντική τροποποιημένη εξίσωση Bessel. Αυτή έχει τη μορφή

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - (x^2 + \nu^2)y(x) = 0. \quad (15.2.29)$$

Είναι δηλαδή η ίδια η αρχική εξίσωση Bessel (15.2.1), αλλ' εδώ με  $-x^2$  αντί για  $x^2$ , που ήταν αρχικά στο συντελεστή του  $y(x)$ . Τίποτε άλλο δεν άλλαξε! Ξαναγράφοντάς την στην ισοδύναμη μορφή

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (i^2 x^2 - \nu^2)y(x) = 0 \quad (15.2.30)$$

(με  $i = \sqrt{-1}$  τη φανταστική μονάδα, άρα  $i^2 = -1$ ), συνειδητοποιούμε ότι πρόκειται για την παραπάνω γενικευμένη εξίσωση Bessel (15.2.24), αλλά με φανταστική δεύτερη παράμετρο  $\lambda = i$ . (Η τάξη της  $\nu$  δεν έχει αλλάξει!)

Άρα η γενική λύση (15.2.28) της γενικευμένης εξισώσεως Bessel (15.2.24) παίρνει εδώ τη μορφή

$$y_g(x) = C_1 J_\nu(ix) + C_2 Y_\nu(ix) \quad \text{για κάθε τάξη} \quad \nu \geq 0. \quad (15.2.31)$$

Παρατηρούμε λοιπόν φανταστικές τιμές  $ix$  σαν ορίσματα των δύο συναρτήσεων Bessel πρώτου είδους  $J_\nu$  και δευτέρου είδους  $Y_\nu$ . Είναι απόλυτα σωστό αυτό, αφού τώρα  $\lambda = i$ , αλλ' όχι και τόσο ευχάριστο στην πράξη.

Η αντιμετώπιση της δυσκολίας αυτής συνίσταται στην εισαγωγή των δύο τροποποιημένων συναρτήσεων Bessel  $I_\nu(x)$  (πρώτου είδους) και  $K_\nu(x)$  (δευτέρου είδους), έτσι ώστε να ταιριάζουν στην τροποποιημένη εξίσωση Bessel (15.2.29). Ο ορισμός της τροποποιημένης συναρτήσεως



Bessel πρώτου είδους  $I_\nu(x)$  είναι ανάλογος του ορισμού (15.2.5) της αρχικής (μη τροποποιημένης) αντίστοιχης συναρτήσεως  $J_\nu(x)$ . Συγκεκριμένα τώρα έχουμε τη λίγο απλούστερη δυναμοσειρά

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(k+1+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \quad \text{με } x > 0. \quad (15.2.32)$$

Αποδεικνύεται μάλιστα εύκολα ότι

$$J_\nu(ix) = i^\nu I_\nu(x) \quad \text{και ισοδύναμα } I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix). \quad (15.2.33)$$

Όσον αφορά στην τροποποιημένη συνάρτηση Bessel δευτέρου είδους  $K_\nu(x)$  ο ορισμός της είναι ανάλογος (με μικροδιαφορές) με τον ορισμό (15.2.20) και (15.2.21) της αντίστοιχης αρχικής (μη τροποποιημένης) συναρτήσεως Bessel  $Y_\nu(x)$ . Συγκεκριμένα ορίζουμε την τροποποιημένη συνάρτηση Bessel δευτέρου είδους  $K_\nu(x)$  με βάση την αντίστοιχη της συνάρτησης πρώτου είδους  $I_\nu(x)$  ως εξής:

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2 \sin \nu\pi} [I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)] \quad \text{για } \nu \text{ μη ακέραιο αριθμό: } \nu \neq n \quad (15.2.34)$$

και

$$K_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} K_\nu(x) \quad \text{για } \nu \text{ ακέραιο αριθμό: } \nu = n. \quad (15.2.35)$$

Τώρα πια μπορεί να αποδειχθεί πως η γενική λύση  $y_g(x)$  της τροποποιημένης εξισώσεως Bessel (15.2.29), που ήταν αρχικά στη μορφή (15.2.31), παίρνει την τελική της μορφή

$$y_g(x) = C_1 I_\nu(x) + C_2 K_\nu(x) \quad \text{για κάθε τάξη } \nu \geq 0. \quad (15.2.36)$$

Στη μορφή αυτή εμφανίζονται και οι δύο τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel  $I_\nu(x)$  (πρώτου είδους) και  $K_\nu(x)$  (δευτέρου είδους) της ίδιας τάξεως  $\nu$  όπως και προηγουμένως. Όλα πάνε καλά λοιπόν!

Όσο για τους δύο τύπους (15.2.13) τροποποιούνται και αυτοί σε υπερβολικούς από τριγωνομετρικοί που ήσαν:

$$I_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sinh x \quad \text{και} \quad I_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cosh x. \quad (15.2.37)$$

Και οι δύο βασικές ιδιότητες (15.2.15) και (15.2.16) παίρνουν τις τροποποιημένες (ε όχι και πολύ τροποποιημένες ..., ουσιαστικά ένα πρόσρημο αλλάζει τώρα στην καθεμιά τους) μορφές τους

$$I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} I_\nu(x), \quad (15.2.38)$$

$$I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x) = 2I'_\nu(x). \quad (15.2.39)$$

Τέλος κι ο ενδιαφέρων τύπος παραγωγίσεως (15.2.14) χάνει κι αυτός το μείον του (τί να κάνουμε;):

$$I'_0(x) = I_1(x) \quad \text{με συν τώρα, ενώ πριν ήταν με πλην: } J'_0(x) = -J_1(x). \quad (15.2.40)$$

▼ **Παράδειγμα A15.4:** Να υπολογισθεί η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel δευτέρου είδους  $K_{\frac{1}{2}}(x)$ .

**Λύση:** Αφού η τάξη της είναι μη ακέραιη:  $\nu = \frac{1}{2}$ , μπορούμε να εφαρμόσουμε τον τύπο ορισμού της (15.2.34) με  $\nu = \frac{1}{2}$ . Παίρνουμε επίσης υπόψη μας και τους τύπους (15.2.37) για τις δύο τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους  $I_{\frac{1}{2}}(x)$  και  $I_{-\frac{1}{2}}(x)$ . Έτσι με  $\nu = \frac{1}{2}$  προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} K_{\frac{1}{2}}(x) &= \frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi}{2}} [I_{-\frac{1}{2}}(x) - I_{\frac{1}{2}}(x)] = \frac{\pi}{2 \cdot 1} \left( \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cosh x - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sinh x \right) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} (\cosh x - \sinh x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}, \end{aligned} \quad (15.2.41)$$

ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα αντίστοιχο με τους τύπους (15.2.37) (με υπερβολικές συναρτήσεις). ▲

**A15.2.6. Μια γενικευμένη τροποποιημένη εξίσωση Bessel**

Στην παράγραφο αυτή γενικεύουμε την τροποποιημένη εξίσωση Bessel (15.2.29) στη μορφή

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - (\lambda^2 x^2 + \nu^2)y(x) = 0, \quad (15.2.42)$$

όπου εμφανίζεται εκτός από την τάξη  $\nu$  και η παράμετρος  $\lambda$ . Ακριβώς το ίδιο είχαμε κάνει και στην προπροηγούμενη Παράγραφο A15.2.4, εκεί όμως για την αρχική εξίσωση Bessel (15.2.1). Με ολόγιοδο τρόπο εργασίας: την αλλαγή ανεξάρτητης μεταβλητής  $t = \lambda x$ , καταλήγουμε στη γενική λύση

$$y_g(x) = C_1 I_\nu(\lambda x) + C_2 K_\nu(\lambda x) \quad \text{για κάθε τάξη } \nu \geq 0 \quad (15.2.43)$$

της γενικευμένης τροποποιημένης εξισώσεως Bessel (15.2.42). Αυτή η γενική λύση είναι απόλυτα ανάλογη με τη γενική λύση (15.2.28) της γενικευμένης αρχικής εξισώσεως Bessel (15.2.24).

Φυσικά στην παρούσα γενική λύση (15.2.43) παρουσιάζονται οι δύο τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel  $I_\nu$  και  $K_\nu$  (τάξεως  $\nu$ ), ενώ στη γενική λύση (15.2.28) είχαν παρουσιασθεί οι δύο συνήθεις συναρτήσεις Bessel  $J_\nu$  και  $Y_\nu$  (κι εκεί βέβαια τάξεως  $\nu$ ). Αυτή είναι η μοναδική διαφορά ανάμεσα στις δύο γενικές λύσεις (15.2.28) και (15.2.43) για τις δύο γενικευμένες εξισώσεις Bessel (15.2.24) και (15.2.42) αντίστοιχα. Σημειώνουμε τέλος πως και οι δύο γενικευμένες εξισώσεις Bessel: τόσο η αρχική (15.2.24) όσο και η τροποποιημένη (15.2.42) είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στις εφαρμογές.

**A15.2.7. Γραφικές παραστάσεις, ρίζες και οριακές τιμές των συναρτήσεων Bessel**

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε στην επόμενη σελίδα (στο Σχήμα A15.2) τις γραφικές παραστάσεις και των οκτώ συναρτήσεων Bessel τάξεων  $\nu = 0$  (αριστερά) και  $\nu = 1$  (δεξιά): (α) συνήθεις πρώτου είδους  $J_0(x)$  και  $J_1(x)$ : δύο πρώτες γραφικές παραστάσεις, (β) συνήθεις δευτέρου είδους  $Y_0(x)$  και  $Y_1(x)$ : δύο επόμενες γραφικές παραστάσεις, (γ) τροποποιημένες πρώτου είδους  $I_0(x)$  και  $I_1(x)$ : δύο επόμενες γραφικές παραστάσεις, και τέλος (δ) τροποποιημένες δευτέρου είδους  $K_0(x)$  και  $K_1(x)$ : δύο τελευταίες γραφικές παραστάσεις.

Από αυτές τις οκτώ γραφικές παραστάσεις παρατηρούμε αμέσως ότι οι συνήθεις συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους  $J_0(x)$  και  $J_1(x)$  έχουν άπειρες ρίζες για  $x > 0$ . Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και για τις συνήθεις συναρτήσεις Bessel δευτέρου είδους  $Y_0(x)$  και  $Y_1(x)$ . Μπορεί να αποδειχθεί μάλιστα πως αυτή η παρατήρηση (άπειρες θετικές ρίζες) ισχύει για κάθε συνάρτηση Bessel  $J_\nu(x)$  και  $Y_\nu(x)$  ανεξάρτητα από την τάξη της  $\nu$ . Αντίθετα από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις παρατηρούμε ότι και οι τέσσερις τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel  $I_0(x)$ ,  $I_1(x)$  (πρώτου είδους) και  $K_0(x)$ ,  $K_1(x)$  (δευτέρου είδους) δεν έχουν καμία απολύτως ρίζα για  $x > 0$ . Αποδεικνύεται ότι τούτο ισχύει γενικότερα για κάθε τάξεως  $\nu$  (με  $\nu \geq 0$ ) τροποποιημένη συνάρτηση Bessel  $I_\nu(x)$  και  $K_\nu(x)$ .

Παρατηρούμε επίσης από τις παρακάτω οκτώ γραφικές παραστάσεις του Σχήματος A15.2 ότι για  $x = 0$  οι δύο συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους και μηδενικής τάξεως ( $\nu = 0$ ), οι  $J_0(x)$  και  $I_0(x)$ , παίρνουν την τιμή 1. Λίγο διαφορετική τιμή (πάλι για  $x = 0$ ) ισχύει για τις δύο συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους και πρώτης τάξεως ( $\nu = 1$ ): οι  $J_1(x)$  και  $I_1(x)$  παίρνουν για  $x = 0$  την τιμή 0. Είναι λοιπόν φραγμένες για  $x = 0$  οι τέσσερις αυτές συναρτήσεις. Αντίθετα και οι τέσσερις συναρτήσεις δευτέρου είδους  $Y_0(x)$ ,  $Y_1(x)$ ,  $K_0(x)$  και  $K_1(x)$  απειρίζονται για  $x \rightarrow 0$ : οι δύο πρώτες τείνουν στο  $-\infty$  και οι δύο τελευταίες στο  $\infty$ . Δεν είναι φραγμένες για  $x \rightarrow 0$  (εννοείται  $x \rightarrow 0^+$ ). Συνοψίζοντας

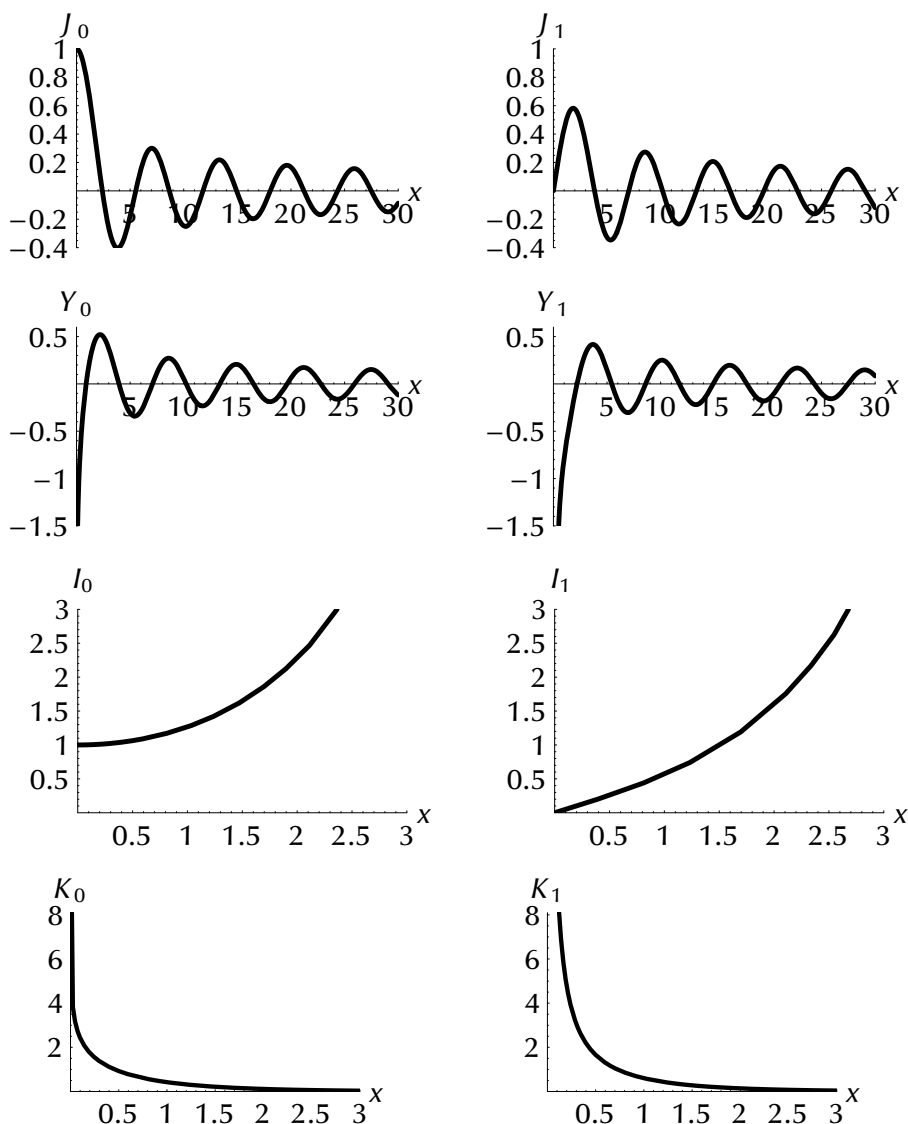
$$J_0(0) = I_0(0) = 1, \quad J_1(0) = I_1(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} Y_0(x) = \lim_{x \rightarrow 0} Y_1(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} K_0(x) = \lim_{x \rightarrow 0} K_1(x) = \infty. \quad (15.2.44)$$

Όσον αφορά στο άπειρο τώρα, για  $x \rightarrow \infty$ , παρατηρούμε ότι έχουμε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow \infty} J_0(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} J_1(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} Y_0(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} Y_1(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} K_0(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} K_1(x) = 0, \quad (15.2.45)$$

ενώ αντίθετα

$$\lim_{x \rightarrow \infty} I_0(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} I_1(x) = \infty. \quad (15.2.46)$$



**Σχήμα A15.2:** Οι οκτώ βασικές συναρτήσεις Bessel τάξεων  $\nu = 0$  (αριστερά) και  $\nu = 1$  (δεξιά): πρώτου είδους και δευτέρου είδους, συνήθεις (επάνω) και τροποποιημένες (κάτω): κατά σειρά οι συναρτήσεις  $J_0(x), J_1(x), Y_0(x), Y_1(x), I_0(x), I_1(x), K_0(x)$  και  $K_1(x)$ .

Με βάση τις παρατηρήσεις αυτές, που στηρίζονται στις παραπάνω γραφικές παραστάσεις, οι τέσσερις συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους  $J_0(x), J_1(x), I_0(x)$  και  $I_1(x)$  μπορούν να παρομοιαστούν με τις τριγωνομετρικές και τις υπερβολικές συναρτήσεις συνημίτονο και ημίτονο ως εξής:

$$J_0(x) \sim \cos x, \quad J_1(x) \sim \sin x, \quad I_0(x) \sim \cosh x, \quad I_1(x) \sim \sinh x \quad (15.2.47)$$

με το σύμβολο  $\sim$  να δηλώνει εδώ παρομοίωση, αντιστοιχία και όχι ισότητα ή έστω προσέγγιση.

Ασφαλώς η επιτυχία των παρομοιώσεων αυτών είναι μόλις μέτρια: υπάρχουν και σημαντικές διαφορές! Παραδείγματος χάρη, οι συναρτήσεις Bessel  $J_0(x)$  και  $J_1(x)$  δεν είναι περιοδικές και επίσης οι ρίζες τους δεν ισαπέχουν αντίθετα με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις  $\cos x$  και  $\sin x$ , με τις οποίες τις παρομοιάσαμε. Επίσης οι ίδιες συναρτήσεις Bessel τείνουν στο μηδέν για  $x \rightarrow \infty$ , ενώ δεν υπάρχουν τα αντίστοιχα όρια (για  $x \rightarrow \infty$ ) για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις  $\cos x$  και  $\sin x$ .

Στο επόμενο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III θα έχουμε την ευκαιρία να αναφερθούμε στην ορθογωνιότητα των συναρτήσεων Bessel και στις σειρές Fourier-Bessel. Αυτά θα τα χρησιμοποιήσουμε για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους που οδηγούν σε συναρτήσεις Bessel: και είναι πολύ ενδιαφέρουσες, αξιόλογες οι εξισώσεις αυτές. Εφαρμογές τώρα!

**A15.2.8. Εφαρμογές των συναρτήσεων Bessel**

Και τώρα αρκετά ευχαριστημένοι από τα στοιχεία θεωρίας των συναρτήσεων Bessel προχωράμε αμέσως σε τέσσερις σύντομες εφαρμογές τους σε προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού.

**A15.2.8.1. Συμμετρική παραμόρφωση ελαστικού κυλίνδρου**

Πρόκειται για το ίδιο ακριβώς πρόβλημα τριδιάστατης ισότροπης γραμμικής ελαστικότητας με κυκλική συμμετρία, το οποίο πραγματευθήκαμε ήδη στην Ενότητα A14.4 του προηγούμενου Κεφαλαίου A14. Εκεί χρησιμοποιήσαμε τη μέθοδο των δυναμοσειρών σαν να μην είχαμε ιδέα από συναρτήσεις Bessel και πραγματικά δεν είχαμε. Τώρα όμως ξέρουμε αρκετά και συνεχίζουμε ... Η διαφορική εξίσωση του προβλήματος είναι η (14.4.1), την επαναλαμβάνουμε για διευκόλυνση

$$f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) - \lambda^2 f(r) = 0 \quad \text{και ισοδύναμα} \quad r^2 f''(r) + rf'(r) - \lambda^2 r^2 f(r) = 0. \quad (15.2.48)$$

Παρατηρούμε ότι πρόκειται για τη γενικευμένη τροποποιημένη εξίσωση Bessel (15.2.42) μηδενικής τάξεως: δεν έχουμε εδώ  $\nu$ :  $\nu = 0$ . Η γενική λύση της είναι φυσικά η (15.2.43), εδώ με  $\nu = 0$ , δηλαδή

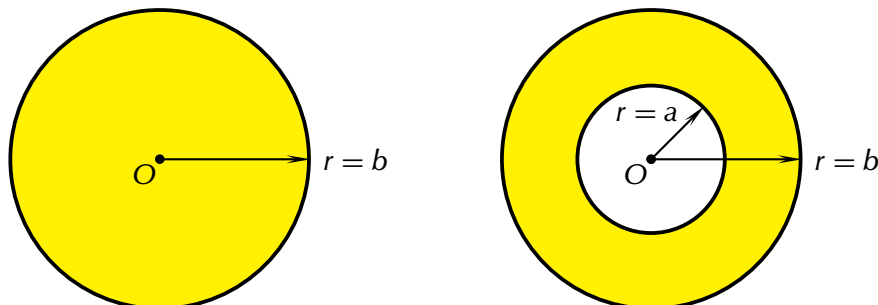
$$f_g(r) = C_1 I_0(\lambda r) + C_2 K_0(\lambda r) \quad (15.2.49)$$

με  $I_0$  και  $K_0$  τις δύο τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel: πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα.

Πάρα πολύ ωραία ως εδώ, αλλά ... Αλλά τί; Ο Πολιτικός Μηχανικός δεν είναι μαθηματικός και πρέπει να δίνει προσοχή και στο φυσικό πρόβλημα που αντιμετωπίζει, εδώ ενός ελαστικού κυλίνδρου. Στο πρόβλημα αυτό στον άξονα του κυλίνδρου  $r = 0$  δεν είναι αποδεκτοί απειρισμοί των τάσεων, μετατοπίσεων και παραμορφώσεων. Και η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel δεύτερου είδους  $K_0(\lambda r)$  απειρίζεται για  $r \rightarrow 0$ , όπως είδαμε και στην προτελευταία (κάτω αριστερά) από τις οκτώ γραφικές παραστάσεις στο Σχήμα A15.2. Για να αποφύγουμε λοιπόν τον απειρισμό της λύσεως  $f_g(r)$ , πρέπει να την αποστερήσουμε από τη συνάρτηση  $K_0(\lambda r)$  απλά επιλέγοντας  $C_2 = 0$ . Τώρα με  $C_2 = 0$  παίρνουμε τη λύση

$$f_p(r) = C_1 I_0(\lambda r), \quad (15.2.50)$$

που σημειώσαμε και στη σχέση (14.4.19) της Ενότητας A14.4 με βάση τη δυναμοσειρά (14.4.18). Από την πέμπτη γραφική παράσταση του Σχήματος A15.2 είμαστε βέβαιοι ότι  $I_0(0) = 1$ , εδώ πάνω στον άξονα του κυλίνδρου. Είμαστε ευχαριστημένοι λοιπόν με τη λύση αυτή  $f_p(r)$ , αν και δε θα προχωρήσουμε περισσότερο στην επίλυση του παρόντος προβλήματος ελαστικού κυλίνδρου. Απαιτούνται περισσότερες γνώσεις και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Μηχανικής των Υλικών και Ελαστικότητας. Εδώ αρκούμαστε στη γενική λύση (15.2.49) και στη μερική λύση (15.2.50), που μας αφορά στο παρόν πρόβλημα ελαστικού κυλίνδρου. Μας απομένει μια σημαντική παρατήρηση:



(α) Κυκλική περιοχή ή διατομή      (β) Δακτυλιοειδής περιοχή ή διατομή

**Σχήμα A15.3:** Κυκλική (αριστερά) και δακτυλιοειδής (δεξιά) περιοχή ή διατομή.

► **Παρατήρηση A15.4:** Είναι προφανές για τον Πολιτικό Μηχανικό πως υπάρχει βέβαια και η περίπτωση αντί για συμπαγή κύλινδρο να έχει ελαστικό σωλήνα με δακτυλιοειδή αντί για κυκλική διατομή (Σχήμα A15.3). Παραδείγματος χάρη, αυτό συμβαίνει πάντα σε σωλήνες στην Υδραυλική, σε στύλους ηλεκτροφωτισμού και σε καπνοδόχους μεγάλων εργοστασίων. Αρκετές φορές το ίδιο συμβαίνει και σε ελαφρές Μεταλλικές Κατασκευές με κοίλες (ή σωληνωτές) κυκλικές διατομές στους μεταλλικούς στύλους τους, δηλαδή με δακτυλιοειδείς διατομές. Στην περίπτωση δακτυλιοειδούς διατομής δεν υπάρχει βέβαια υλικό στον άξονα συμμετρίας  $r = 0$ , υπάρχει κενό. Δεν υπάρχουν τάσεις, μετατοπίσεις και παραμορφώσεις. Ούτε και η συνάρτηση  $f(r)$  ορίζεται για  $r = 0$ . Τότε ο Πολιτικός Μηχανικός πρέπει να προσέχει και να μη θέσει  $C_2 = 0$ . Πρέπει να αποδεχθεί την πλήρη γενική λύση (15.2.49) στο παρόν πρόβλημα και να μην αρκестθεί στη μερικότερη λύση (15.2.50). Εάν όμως δεν το κάνει, τότε δε θα μπορέσει να λάβει υπόψη του τις συνοριακές συνθήκες και για  $r = a$ : εσωτερική ακτίνα της δακτυλιοειδούς διατομής την οποία υποθέσαμε) και για  $r = b$ : αντίστοιχη εξωτερική ακτίνα (Σχήμα A15.3β). Κατά συνέπεια δε θα μπορέσει να λύσει το πρόβλημά του. Κι αν τυχόν νομίσει ότι το έλυσε με βάση τη μερική λύση (15.2.50), ενώ έχει δακτυλιοειδή διατομή, απλά θα έχει κάνει σοβαρότατο λάθος. Χρειάζεται λοιπόν πάντοτε ιδιαίτερη προσοχή σε μια μελέτη.

### A15.2.8.2. Δακτυλιοειδής και κυκλική μεμβράνη

Εξετάζουμε τώρα το πρόβλημα της δυναμικής καταπόνησεως μιας δακτυλιοειδούς ή κυκλικής μεμβράνης, δηλαδή μιας πάρα πολύ λεπτής πλάκας με μηδενική δυσκαμψία:  $D = 0$ . Το πρόβλημα αυτό ανάγεται ως προς τη θέση  $r$  (την πολική ακτίνα στο χώρο) στη διαφορική εξίσωση Bessel

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \left(\beta^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)R(r) = 0, \text{ ισοδύναμα } r^2R''(r) + rR'(r) + (\beta^2r^2 - n^2)R(r) = 0 \quad (15.2.51)$$

με το  $\beta$  παράμετρο και το  $n$  μη αρνητικό ακέραιο αριθμό. Πρόκειται για τη γενικευμένη εξίσωση Bessel (15.2.24) με λύση της τη (15.2.28). Στην περίπτωση μας αυτή παίρνει αμέσως τη μορφή

$$R_g(r) = C_1J_n(\beta r) + C_2Y_n(\beta r) \quad (15.2.52)$$

με δύο αυθαίρετες σταθερές: τις  $C_1$  και  $C_2$ , όπως πρέπει για διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως.

Αν τώρα αντί για δακτυλιοειδή μεμβράνη έχουμε κυκλική μεμβράνη, ο απειρισμός της συναρτήσεως Bessel δευτέρου είδους  $Y_n(r)$  στο κέντρο  $r = 0$  της μεμβράνης είναι πλήρως απαράδεκτος από φυσικής απόψεως. Επομένως η πιο πάνω γενική λύση  $R_g(r)$  παίρνει τη μερικότερη μορφή της

$$R_p(r) = C_1J_n(\beta r), \quad (15.2.53)$$

τώρα με μία μόνο αυθαίρετη σταθερά: τη  $C_1$ . Πάρα πολύ σχετική είναι και η αμέσως πιο πάνω παρατήρηση στο τέλος της προηγούμενης εφαρμογής. Σημειώνουμε επίσης ότι στην ειδική περίπτωση της κυκλικής (ή αξονικής) συμμετρίας, η ακέραιη σταθερά  $n$  στη διαφορική εξίσωση (15.2.51) μηδενίζεται,  $n = 0$ , κι αυτή γίνεται μηδενικής τάξεως εξίσωση Bessel: με  $\nu = 0$ . Σ' αυτήν την ειδική περίπτωση η πιο πάνω λύση (15.2.53) παίρνει προφανώς τη μορφή  $R_p(r) = C_1J_0(\beta r)$ .

Περισσότερα όμως για εφαρμογές όπως η παρούσα και η επόμενη θα αναφερθούν στο επόμενο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III στο Μέρος Γ, που αφορά στις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγωγούς. Αρκετά ως εδώ στην παρούσα ενότητα, που αφορά στις συναρτήσεις Bessel.

### A15.2.8.3. Δακτυλιοειδής και κυκλική πλάκα

Ο Πολιτικός Μηχανικός χρησιμοποιεί μερικές φορές μεμβράνες (χωρίς δυσκαμψία:  $D = 0$ ) αντί για πλάκες (με δυσκαμψία:  $D > 0$ ), που χρησιμοποιεί γενικά. Αυτό συμβαίνει π.χ. στα στέγαστρα πρόχειρων κατασκευών και κατασκευών που δεν επιτρέπεται να έχουν πολλά υποστυλώματα (κολώνες), όπως είναι ένα κλειστό στάδιο ή ένας εκθεσιακός χώρος. Εντούτοις κανόνα αποτελεί η χρήση από τον Πολιτικό Μηχανικό κανονικών, συνήθων πλακών με δυσκαμψία:  $D > 0$ . Αυτές είναι αληθινοί επιφανειακοί φορείς και μπορούν βέβαια να φέρουν κάθετο φορτίο, π.χ. χιόνι.

Εδώ περιοριζόμαστε στη δυναμική καταπόνηση μιας δακτυλιοειδούς ή κυκλικής πλάκας (ξανά Σχήμα Α15.3). Το πρόβλημα αυτό, εδώ για πλάκα, είναι βέβαια δυσκολότερο από το απλούστερο πρόβλημα για την αντίστοιχη μεμβράνη, που το εξετάσαμε στην αμέσως προηγούμενη εφαρμογή. Αποδεικνύεται ότι τελικά στην ειδική περίπτωση κυκλικής (ή αξονικής) συμμετρίας (δηλαδή συμμετρίας ως προς το κέντρο  $O$  της πλάκας, Σχήμα Α15.3) το πρόβλημα αυτό ανάγεται ως προς τη θέση  $r$  πάλι (την πολική ακτίνα στο χώρο) στη γραμμική διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως

$$R''''(r) + \frac{2}{r} R'''(r) - \frac{1}{r^2} R''(r) + \frac{1}{r^3} R'(r) - \beta^4 R(r) = 0 \quad (15.2.54)$$

με το  $\beta$  θετική σταθερά. Ασφαλώς η διαφορική αυτή εξίσωση δεν είναι εξίσωση Bessel. Διαπιστώνεται όμως ότι μπορεί να γραφεί στην ισοδύναμη μορφή, που είναι και η συνηθισμένη μορφή της:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \beta^2 \right) \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \beta^2 \right) R(r) = 0 \quad \text{ή αντίστροφα με } +\beta^2 \text{ και } -\beta^2. \quad (15.2.55)$$

Σ' αυτήν την τελευταία μορφή πράγματι οι δύο διαφορικοί τελεστές με μεταβλητούς συντελεστές μέσα στις παρενθέσεις είναι διαφορικοί τελεστές που τους ξέρουμε. Συγκεκριμένα ο δεύτερος διαφορικός τελεστής, αυτός με το  $+\beta^2$ , εμφανίζεται στη γενικευμένη συνήθη εξίσωση Bessel μηδενικής τάξεως (15.2.24). Επίσης ο πρώτος διαφορικός τελεστής, αυτός με το  $-\beta^2$ , παρουσιάζεται στη γενικευμένη τροποποιημένη εξίσωση Bessel μηδενικής τάξεως (15.2.42). Και οι δύο με τάξη  $\nu = 0$ .

Με τούτες τις σκέψεις, αλλά και τους αναγκαίους υπολογισμούς που θα παραλειφθούν εδώ, η γενική λύση  $R_g(r)$  της παρούσας διαφορικής εξισώσεως (15.2.54) ή (15.2.55) είναι τελικά η εξής:

$$R_g(r) = C_1 J_0(\beta r) + C_2 Y_0(\beta r) + C_3 I_0(\beta r) + C_4 K_0(\beta r). \quad (15.2.56)$$

Η γενική αυτή λύση έχει φυσικά τέσσερις αυθαίρετες σταθερές: τις  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  και  $C_4$ . Τούτο είναι εύλογο, επειδή η διαφορική μας εξίσωση (15.2.54) ή καλύτερα (15.2.55) είναι εδώ τετάρτης τάξεως και όχι δευτέρας τάξεως, όπως ήταν στην προηγούμενη εφαρμογή με τη μεμβράνη.

Αν τώρα στη θέση της δακτυλιοειδούς πλάκας (Σχήμα Α15.3β) έχουμε απλά μια κυκλική πλάκα (Σχήμα Α15.3α), τότε οι απειρισμοί των δύο συναρτήσεων Bessel δευτέρου είδους  $Y_0(\beta r)$  και  $K_0(\beta r)$  στο κέντρο  $r = 0$  της πλάκας δεν είναι βέβαια αποδεκτοί από φυσικής απόψεως από τον Πολιτικό Μηχανικό. (Σημειώνεται ότι οι δύο αυτοί απειρισμοί είναι εμφανείς στις σχετικές γραφικές παραστάσεις του Σχήματος Α15.2 και έχουν αναφερθεί επίσης στις σχέσεις (15.2.44).) Επομένως πρέπει να ισχύει  $C_2 = C_4 = 0$  και η πιο πάνω γενική λύση  $R_g(r)$  παίρνει τη μερικότερη μορφή της

$$R_p(r) = C_1 J_0(\beta r) + C_3 I_0(\beta r). \quad (15.2.57)$$

Σ' αυτήν υπεισέρχονται τώρα δύο μόνο αυθαίρετες σταθερές: η  $C_1$  και η  $C_3$ . Η λύση αυτή είναι πεπερασμένη για  $r = 0$ . Τούτο είναι επίσης εμφανές από το Σχήμα Α15.2 και τις σχέσεις (15.2.44).

#### **Α15.2.8.4. Λυγισμός στύλου από την επίδραση του βάρους του (υπό το ίδιο βάρος)**

Αυτή είναι η τέταρτη και τελευταία εφαρμογή των συναρτήσεων Bessel σε προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού. Εδώ αναφερόμαστε στο πρόβλημα του λυγισμού ενός στύλου (ή ράβδου ή υποστυλώματος) ύψους  $L$  υπό την επίδραση του βάρους του, υπό το ίδιο βάρος σύμφωνα με την ορολογία του Πολιτικού Μηχανικού. Ο στύλος αυτός θεωρείται ότι είναι πακτωμένος στο κάτω άκρο του  $x = 0$ , ενώ είναι ελεύθερος στο πάνω άκρο του  $x = L$ : είναι ένας μονόπακτος στύλος.

Το πρόβλημα αυτό περιγράφεται και επιλύεται αναλυτικά στο κλασικό σύγγραμμα των Timoshenko, S. P and Gere, J. M (1961), *Theory of Elastic Stability* (Θεωρία Ελαστικής Ευστάθειας). McGraw-Hill, New York, 2η έκδοση, 1961 (1η έκδοση το 1936) στην Ενότητα 2.12. Στη σχετική βιβλιογραφία αναφέρεται ότι το πρόβλημα αυτό το έθεσε πρώτος ο Euler, αλλά το έλυσε πρώτος ο Greenhill το 1881 με τη χρήση συναρτήσεων Bessel. Πάρα πολύ συνοπτικά η λύση του είναι η ακόλουθη:

Θέτουμε  $\rho$  την πυκνότητα του υλικού του στύλου και  $A$  το εμβαδόν της διατομής του, που υποτίθεται σταθερό κατά μήκος του. Επομένως η γραμμική πυκνότητα του στύλου θα είναι  $\rho A$  και το γραμμικό ειδικό βάρος του  $\rho Ag$  με  $g$  την επιτάχυνση της βαρύτητας. Επίσης θέτουμε  $E$  το μέτρο ελαστικότητας του στύλου και  $I$  τη ροπή αδρανεΐας της διατομής του (για λυγισμό την ελάχιστη ροπή αδρανεΐας). Άρα  $EI$  θα είναι η δυσκαμψία του. (Οι πέντε ποσότητες  $\rho, A, E, I$  και  $g$  θεωρούνται γνωστές. Δηλώνουμε τώρα με  $v(x)$  το βέλος κάμψεως του στύλου στην περίπτωση λυγισμού του και χρησιμοποιούμε τη γνωστή μας διαφορική εξίσωση  $EIv''(x) = M(x)$ . Στην εξίσωση αυτή  $M(x)$  είναι η καμπτική ροπή κατά το ύψος του στύλου:  $0 \leq x \leq L$ . Αυτή οφείλεται απλά στο βάρος του. Τελικά στο παρόν πρόβλημα λυγισμού προκύπτει η διαφορική εξίσωση τρίτης τάξεως

$$EIv'''(x) = -\rho Ag(L - x)v'(x). \tag{15.2.58}$$

Πρόκειται για ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση τρίτης τάξεως με μεταβλητούς συντελεστές εξαιτίας της παρουσίας του παράγοντα  $L - x$  στο συντελεστή  $\rho Ag(L - x)$  του  $v'(x)$  στο δεξιό μέλος.

Για την επίλυση της διαφορικής αυτής εξισώσεως με τη χρήση συναρτήσεων Bessel είναι αναγκαία η αλλαγή ανεξάρτητης μεταβλητής με την εισαγωγή της βοηθητικής μεταβλητής

$$\xi = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\rho Ag}{EI}} (L - x)^3, \tag{15.2.59}$$

που φέρνει τα πάνω κάτω. Δηλαδή το επάνω, το ελεύθερο άκρο του στύλου  $x = L$  αντιστοιχεί τώρα στο σημείο  $\xi = 0$  αυτής της βοηθητικής μεταβλητής  $\xi$ , αφού  $L - L = 0$  στον όρο  $(L - x)^3$ .

Μετά τους αναγκαίους υπολογισμούς, που τους παραλείπουμε, η διαφορική εξίσωση (15.2.58) παίρνει τη μορφή

$$\hat{v}'''(\xi) + \frac{1}{\xi} \hat{v}''(\xi) + \left(1 - \frac{1}{9\xi^2}\right) \hat{v}'(\xi) = 0 \tag{15.2.60}$$

φυσικά με  $\hat{v}(\xi) \equiv v(x)$ . (Σε ένα συγκεκριμένο φυσικό σημείο του στύλου  $v$  είναι το βέλος κάμψεως μετά το λυγισμό είτε εκφράζεται σαν  $v(x)$  είτε σαν  $\hat{v}(\xi)$ .) Η διαφορική αυτή εξίσωση τρίτης τάξεως ανάγεται προφανώς σε μια διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως απλά θέτοντας  $w(\xi) := \hat{v}'(\xi)$ . Έτσι παίρνει την παραπλήσια μορφή της

$$w''(\xi) + \frac{1}{\xi} w'(\xi) + \left(1 - \frac{1}{9\xi^2}\right) w(\xi) = 0, \text{ ισοδύναμα } \xi^2 w''(\xi) + \xi w'(\xi) + \left(\xi^2 - \frac{1}{3^2}\right) w(\xi) = 0. \tag{15.2.61}$$

Παρατηρούμε όμως πως τώρα έχουμε καταλήξει στην αρχική εξίσωση Bessel (15.2.1), αλλά εδώ κλασματικής τάξεως:  $\nu = \frac{1}{3}$ . Η γενική λύση της  $w_g(\xi)$  μας είναι γνωστή από τη σχέση (15.2.4)

$$w_g(\xi) = C_1 J_{\frac{1}{3}}(\xi) + C_2 J_{-\frac{1}{3}}(\xi). \tag{15.2.62}$$

Επειδή η τάξη  $\nu$  της εξισώσεως Bessel δεν είναι ακέραιη: εδώ είναι κλασματική:  $\nu = \frac{1}{3}$ , επιτρέπεται να χρησιμοποιήσουμε τη γενική λύση (15.2.4) της εξισώσεως Bessel αντί για τη συνηθέστερη (και γενικότερη: ισχύει για κάθε τάξη  $\nu$ ) γενική λύση της (15.2.23). Την προτιμάμε μάλιστα στο παρόν πρόβλημα λυγισμού στύλου που εξετάζουμε τη γενική λύση (15.2.62) εξαιτίας των συνοριακών συνθηκών στα δύο άκρα  $x = 0$  (στο πακτωμένο άκρο) και  $x = L$  (στο ελεύθερο άκρο) του στύλου.

Από τη συνοριακή συνθήκη  $M(L) = 0$  μηδενικής καμπτικής ροπής στο ελεύθερο άκρο του στύλου  $x = L$  προκύπτει μετά από κάποιους υπολογισμούς (όχι αμέσως!) ότι η σταθερά  $C_1$  στην παραπάνω γενική λύση  $w_g(\xi)$  πρέπει να μηδενίζεται. Άρα η λύση μας παίρνει τη μερικότερη μορφή

$$w_g(\xi) = C_2 J_{-\frac{1}{3}}(\xi), \tag{15.2.63}$$

που αρκετά παράδοξα περιέχει αποκλειστικά τη συνάρτηση Bessel  $J_\nu(x)$  αρνητικής τάξεως  $\nu = -\frac{1}{3}$ . (Ε και τί να κάνουμε; Συμβαίνουν και παράδοξα πράγματα στις διαφορικές εξισώσεις, όταν τις χρησιμοποιούμε σε τεχνικά προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά!)

Και η δεύτερη συνοριακή συνθήκη τώρα: η συνθήκη πακτώσεως στο κάτω άκρο  $x = 0$  του στύλου για μηδενική στροφή του  $\theta(0) = 0$  στην πάκτωση. Αυτή μας αναγκάζει να δεχθούμε ότι

$$w_g(\xi_0) = 0, \quad \text{οπότε} \quad J_{-\frac{1}{3}}(\xi_0) = 0 \quad \text{με} \quad \xi_0 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\rho Ag}{EI}} L^3, \quad (15.2.64)$$

αφού  $x = 0$  στην αλλαγή ανεξάρτητης μεταβλητής (15.2.59) στο κάτω άκρο (στην πάκτωση)  $x = 0$ .

Σκεφτόμαστε τώρα: είναι θετικές οι ποσότητες  $\rho$ ,  $A$ ,  $E$ ,  $I$  και  $L$  στο στύλο μας. (Το ίδιο βέβαια και η επιτάχυνση της βαρύτητας:  $g > 0$ .) Άρα και το  $\xi_0$  είναι θετικό κι αυτό. Επομένως η μόνη περίπτωση να λυγίσει ο στύλος μας (εδώ υπό το ίδιο βάρος του) είναι να μηδενισθεί η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους  $J_{-\frac{1}{3}}(\xi)$ . Κι αφού είναι συνάρτηση Bessel πρώτου είδους, μηδενίζεται στ' αλήθεια, ακριβώς όπως και οι συναρτήσεις  $J_0(x)$  και  $J_1(x)$  στις δύο πρώτες γραφικές παραστάσεις του Σχήματος A15.2. Έχει μάλιστα άπειρες ρίζες η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους  $J_{-\frac{1}{3}}(\xi)$  που προέκυψε. Αλλ' απ' αυτές ασφαλώς μόνο η πρώτη ρίζα  $x_1$  ενδιαφέρει εδώ τον Πολιτικό Μηχανικό, αυτή είναι το  $\xi_0$ , γιατί μ' αυτή θα γίνει ο πρώτος λυγισμός του στύλου, ο «κρίσιμος» λυγισμός του.

Η ρίζα της  $x_1$  (εδώ με  $\xi_0 = x_1$ ) προκύπτει εύκολα αριθμητικά (εδώ με τη *Mathematica*) και είναι

$$\xi_0 = x_1 \approx 1.86635 \ 08588 \ 73895 \ 17155 \approx 1.86635 \quad \text{με} \quad J_{-\frac{1}{3}}(x_1) = 0. \quad (15.2.65)$$

Γι' αυτήν την τιμή  $\xi_0 = x_1$  πληρούται η συνθήκη (15.2.64) για τον πρώτο (τον κρίσιμο) λυγισμό του στύλου υπό την επίδραση μονάχα του βάρους του. Ξαναγράφουμε τη συνθήκη αυτή στη μορφή

$$\frac{2}{3} \sqrt{\frac{\rho Ag}{EI}} L^3 = x_1 \approx 1.86635. \quad (15.2.66)$$

Λύνοντάς την τώρα ως προς το μήκος  $L$  του στύλου, η κρίσιμη τιμή του  $L_{cr}$  παίρνει την εξής μορφή:

$$L_{cr} \approx 1.98635 \sqrt[3]{\frac{EI}{\rho Ag}} \approx 2 \sqrt[3]{\frac{EI}{\rho Ag}}. \quad (15.2.67)$$

Άμα τη φθάσει ένας συγκεκριμένος στύλος (με δεδομένα τη γραμμική πυκνότητά του  $\rho A$  και τη δυσκαμψία του  $EI$ ), ε τότε πάει, λυγίσει ο στύλος υπό το ίδιο βάρος του, χωρίς εξωτερική φόρτιση  $P$ .

► **Παρατήρηση A15.5:** Παρουσιάζει ίσως ενδιαφέρον να συγκρίνουμε το αποτέλεσμα (15.2.66) για το λυγισμό του μονόπακτου στύλου μας (με πάκτωση-ελεύθερο άκρο) υπό τό ίδιο βάρος με το αντίστοιχο γνωστό μας αποτέλεσμα λυγισμού του ίδιου στύλου υπό την επίδραση μόνο εξωτερικού θλιπτικού φορτίου  $P$ . (Στη δεύτερη αυτή περίπτωση, την οποία μελετήσαμε εκτενώς στην Παράγραφο A9.1.4, ο στύλος θεωρείται αβαρής.) Προκύπτει ο διάσημος τύπος του Euler (9.1.41)

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \approx \frac{2.4674 EI}{L^2} \approx \frac{2.5 EI}{L^2} \quad (15.2.68)$$

για το κρίσιμο φορτίο λυγισμού  $P_{cr}$ . (Υπενθυμίζουμε πως αυτό είναι το μικρότερο από όλα και το μοναδικό που έχει φυσική σημασία για τον Πολιτικό Μηχανικό!) Κι εδώ τί γίνεται τώρα; Εδώ για τη σύγκριση μόνο θεωρούμε ολόκληρο το βάρος του στύλου, που είναι προφανώς  $W = \rho AgL$ : γραμμικό ειδικό βάρος  $\rho Ag$  του στύλου επί το ύψος του  $L$ . Χρησιμοποιώντας λοιπόν το βάρος  $W$  του στύλου, ξαναγράφουμε τον τύπο (15.2.66) για τον πρώτο, τον κρίσιμο λυγισμό του στη μορφή

$$\frac{2L}{3} \sqrt{\frac{W}{EI}} = x_1 \approx 1.86635. \quad (15.2.69)$$

Τελικά λύνουμε ως προς το βάρος  $W$ , δηλώνοντάς το μάλιστα σαν  $W_{cr}$ : κρίσιμο βάρος λυγισμού:

$$W_{cr} \approx \frac{7.8373 EI}{L^2} \approx \frac{7.8 EI}{L^2}, \quad \text{οπότε} \quad \frac{W_{cr}}{P_{cr}} \approx \frac{7.8373}{2.4674} \approx 3.17634 \approx 3.2 > 3. \quad (15.2.70)$$

Έχουμε λοιπόν πάνω από τρεις φορές αύξηση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού  $P_{cr}$  του στύλου μας, όταν σαν φορτίο λυγισμού δρα το ίδιο το βάρος του  $W_{cr}$ . Αυτό είναι κατανοητό από πάνω ίσαμε κάτω κατά μέσον όρο πιο κοντά στην πάκτωση  $x = 0$ . Κι έτσι προφανώς δυσχεραίνεται ο λυγισμός!



# Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο *A16*

## Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΣΕΙΡΩΝ FOURIER: ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Οι σειρές Fourier αποτελούν ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά εκφράζοντας μια περιοδική συνάρτηση  $f(x)$  με περίοδο  $T$  και θεμελιώδη κυκλική συχνότητα  $\omega_1 = 2\pi/T$  με τριγωνομετρική σειρά με άπειρους συνημιτονικούς και ημιτονικούς όρους με κυκλικές συχνότητες  $n\omega_1$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Οι σειρές Taylor σε ένα σημείο  $x_0$ , που ήδη τις γνωρίζουμε (με ειδική περίπτωση τους τις σειρές Maclaurin), είναι κλασικές δυναμοσειρές με άπειρους όρους της μορφής  $[f^{(n)}(x_0)/n!](x - x_0)^n$ . Απαιτούν έτσι τη διαθεσιμότητα και τον υπολογισμό της συναρτήσεως  $f(x)$ , αλλά και των παραγώγων της  $f^{(n)}(x)$  (που υποτίθεται ότι υπάρχουν και είναι λίγο-πολύ εύκολο να υπολογισθούν) στο σημείο  $x_0$ . Σ' αυτές βασίζεται όλη η σειρά Taylor (ή Maclaurin για  $x_0 = 0$ ).

Αντίθετα οι σειρές Fourier είναι περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο  $T$  ίδια με εκείνη της περιοδικής συναρτήσεως  $f(x)$  στην οποία αντιστοιχούν (και στην οποία συνήθως συγκλίνουν) με πληροφορίες για τους συντελεστές τους λαμβανόμενες όχι από ένα μεμονωμένο σημείο  $x_0$ , αλλ' από ολόκληρο το διάστημα  $[0, T]$  (ή  $[-T/2, T/2]$ ) της περιόδου της συναρτήσεως  $f(x)$ . Ο προσδιορισμός των σειρών Fourier δεν απαιτεί παραγωγίσεις, αλλ' ολοκληρώσεις της συναρτήσεως  $f(x)$  επί την τριγωνομετρική συνάρτηση  $\cos n\omega_1 x$  ή  $\sin n\omega_1 x$  στο διάστημα  $[0, T]$  ολόκληρης της περιόδου της συναρτήσεως  $f(x)$ .

Είναι πάρα πολύ χρήσιμες οι σειρές Fourier για την παράσταση περιοδικών συναρτήσεων  $f(x)$  (με περίοδο  $T$ ) με ανάλυσή τους σε αρμονικές συνιστώσες. Χρησιμοποιούνται τόσο οι κλασικές τριγωνομετρικές σειρές Fourier όσο και οι ισοδύναμες τους μιγαδικές ή εκθετικές σειρές Fourier. (Υπάρχουν επίσης και οι συνημιτονικές και οι ημιτονικές σειρές Fourier πολύ χρήσιμες και αυτές σε ειδικές περιπτώσεις.) Ειδικά στο πεδίο του χρόνου  $t$  μια συνάρτηση  $p(t)$  αναλύεται με τις σειρές Fourier σε αρμονικές συνιστώσες και τούτο μας διευκολύνει στην εύρεση μιας μερικής λύσεως της γραμμικής διαφορικής εξισώσεως που ισχύει σε ένα μηχανικό σύστημα. Την ενδιαφέρουσα αυτή εφαρμογή στις Ταλαντώσεις θα την εξετάσουμε λεπτομερώς στο επόμενο Κεφάλαιο A17.

Οι σειρές Fourier έχουν εφαρμογές σε προβλήματα ταλαντώσεων που σχετίζονται με συνήθεις διαφορικές εξισώσεις με ανεξάρτητη μεταβλητή το χρόνο  $t$ . Οι ίδιες σειρές είναι επιπλέον εξαιρετικά χρήσιμες και σε προβλήματα που αφορούν σε διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους, όχι μόνο ως προς το χρόνο  $t$ , αλλά, κυρίως, ως προς τη θέση  $x$  (συχνά και τη θέση  $y$ ) σαν ανεξάρτητες μεταβλητές. Τέτοιες εφαρμογές θα εξετασθούν στο επόμενο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III. Προς το παρόν θα περιορισθούμε στη θεωρία των σειρών Fourier σ' αυτό το Κεφάλαιο A16 και στην εφαρμογή τους στο κλασικό μηχανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα υπό περιοδική φόρτιση  $p(t)$  στο επόμενο Κεφάλαιο A17. Η θεωρία των σειρών Fourier βασίζεται στις ορθογώνιες συναρτήσεις, ειδικότερα στην ορθογωνιότητα (ή ορθογωνικότητα) των κλασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων συνημίτονο και ημίτονο, έννοιες που πρέπει να ορίσουμε πρώτες.

## A16.1. ΟΡΘΟΓΩΝΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

### A16.1.1. Ορισμός των ορθογωνίων συναρτήσεων

Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε στις **ορθογώνιες συναρτήσεις**, που αποτελούν τη βάση για τη θεωρία των σειρών Fourier. Γνωρίζουμε ήδη ότι δύο διανύσματα **A** και **B** καλούνται ορθογώνια, εάν το εσωτερικό τους γινόμενο  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  ισούται με μηδέν:  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ . Παραδείγματος χάρη, τα συνηθισμένα μοναδιαία διανύσματα  $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$  και  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$  κατά τους άξονες  $x$ ,  $y$  και  $z$  αντίστοιχα στις Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y, z)$  στις τρεις διαστάσεις είναι ορθογώνια μεταξύ τους, δηλαδή  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = 0$ , κλπ.

Κατά κάποιον τρόπο ανάλογα δύο διαφορετικές συναρτήσεις  $f(x)$  και  $g(x)$  ( $f(x) \neq g(x)$ ) της μεταβλητής  $x$  καλούνται ορθογώνιες σε ένα πεπερασμένο ή άπειρο διάστημα  $[a, b]$ , εφόσον

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = 0 \quad (16.1.1)$$

βέβαια με την αυτονόητη προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα υπάρχει. Παραδείγματος χάρη, οι συναρτήσεις  $f(x) = x$  και  $g(x) = x^2$  (προφανώς  $f(x) \neq g(x)$ ) είναι ορθογώνιες στο διάστημα  $[-1, 1]$ , επειδή

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x) dx = \int_{-1}^1 x x^2 dx = \int_{-1}^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0. \quad (16.1.2)$$

Τούτο είναι βέβαια προφανές στο διάστημα  $[-1, 1]$  για την περιττή συνάρτηση  $x^3$  που προέκυψε.

Η ιδιότητα δύο συναρτήσεων να είναι ορθογώνιες ονομάζεται **ορθογωνιότητα** (ή **ορθογωνικότητα**). Αρκετές φορές έχουμε πολλές και συνήθως άπειρες κατά το πλήθος συναρτήσεις  $f_n(x)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) που είναι ανά δύο ορθογώνιες μεταξύ τους στο διάστημα  $[a, b]$ , συγκεκριμένα ισχύει η ιδιότητα ορθογωνιότητας (ή ορθογωνικότητας)

$$\int_a^b f_m(x)f_n(x) dx = 0, \quad m \neq n. \quad (16.1.3)$$

Μιλάμε τότε για σύστημα (ή σύνολο) ορθογωνίων συναρτήσεων.

Μερικές φορές η ορθογωνιότητα δύο συναρτήσεων  $f(x)$  και  $g(x)$  ορίζεται με τη γενικευμένη σχέση

$$\int_a^b w(x)f(x)g(x) dx = 0 \quad (16.1.4)$$

(αντί για τη βασική σχέση (16.1.1)). Εδώ υπεισέρχεται και μια τρίτη συνάρτηση: η συνάρτηση βάρους  $w(x)$ . Τούτο συμβαίνει σε πολλές περιπτώσεις συστημάτων ορθογωνίων πολυωνύμων, π.χ. στα πολυώνυμα Chebyshev  $T_n(x)$  (πρώτου είδους) και  $U_n(x)$  (δευτέρου είδους), στα οποία θα αναφερθούμε πολύ σύντομα στην αμέσως επόμενη παράγραφο.

### A16.1.2. Ορθογώνια πολυώνυμα

Ειδικά εάν πρόκειται για πολυώνυμα, μιλάμε για σύστημα ορθογωνίων πολυωνύμων. Για παράδειγμα, τα πολυώνυμα Legendre  $P_n(x)$  (Ενότητα A15.1 του Κεφαλαίου A15) αποτελούν σύστημα ορθογωνίων πολυωνύμων στο διάστημα  $[-1, 1]$  (χωρίς συνάρτηση βάρους:  $w(x) = 1$ ), δηλαδή

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx = 0, \quad m \neq n. \quad (16.1.5)$$

Την ιδιότητα της ορθογωνιότητας των πολυωνύμων Legendre την ξέρουμε ήδη από την Παράγραφο A15.1.2 του προηγούμενου Κεφαλαίου A15. Τα πολυώνυμα Legendre είναι μεταξύ άλλων πάρα πολύ χρήσιμα στην αριθμητική ολοκλήρωση μεγάλης πολυωνυμικής ακριβείας:  $2n-1$ , της μεγαλύτερης δυνατής: κανόνας αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss-Legendre. Έχουμε αναφερθεί και στον κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss-Legendre στην Παράγραφο A15.1.4. Η αριθμητική ολοκλήρωση αποτελεί τμήμα του μαθήματος Αριθμητικές Μέθοδοι του 3ου Εξαμήνου Σπουδών.

Ανάλογα και τα πολυώνυμα Chebyshev πρώτου είδους  $T_n(x)$  και δευτέρου είδους  $U_n(x)$  αποτελούν και αυτά δύο χωριστά συστήματα ορθογωνίων πολυωνύμων στο ίδιο βασικό διάστημα  $[-1, 1]$ . Τώρα όμως οι συναρτήσεις βάρους είναι οι συναρτήσεις  $w_T(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$  και  $w_U(x) = \sqrt{1-x^2}$  αντίστοιχα μέσα στα ολοκληρώματα, δηλαδή

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_m(x) T_n(x) dx = 0, \quad m \neq n, \quad (16.1.6)$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_m(x) U_n(x) dx = 0, \quad m \neq n. \quad (16.1.7)$$

Και τα πολυώνυμα Chebyshev  $T_n(x)$  και  $U_n(x)$  είναι χρήσιμα στις εφαρμογές. Τα πρώτα, τα  $T_n(x)$ , κυρίως σε πολυωνυμικές προσεγγίσεις συναρτήσεων στο διάστημα  $[-1, 1]$ . Και τα μεν, τα  $T_n(x)$ , και τα δε, τα  $U_n(x)$ , στην αριθμητική ολοκλήρωση ως προς τις αντίστοιχες συναρτήσεις βάρους. Επίσης και στην επίλυση προβλημάτων του Πολιτικού Μηχανικού που αφορούν σε ιδιομορφίες, όπως στα άκρα ρωγμών ή λεπτών εγκλεισμάτων (στη Μηχανική της Θραύσεως και στη Μηχανική των Υλικών) ή λεπτών εμποδίων στη μόνιμη (σταθερή) ροή ιδεατού ρευστού (στη Ρευστομηχανική ή Μηχανική των Ρευστών).

Υπάρχουν φυσικά και άλλα μαθηματικά ενδιαφέροντα και πρακτικά χρήσιμα συστήματα ορθογωνίων πολυωνύμων. Τέτοια είναι, π.χ., τα κλασικά ορθογώνια πολυώνυμα Laguerre  $L_n(x)$  και Hermite  $H_n(x)$  με συναρτήσεις βάρους  $w_L(x) = e^{-x}$  (στο ημίαπειρο διάστημα  $[0, \infty)$ ) και  $w_H(x) = e^{-x^2}$  (στο άπειρο διάστημα  $(-\infty, \infty)$ ) αντίστοιχα και σχετικές ιδιότητες ορθογωνιότητας

$$\int_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = 0, \quad m \neq n, \quad (16.1.8)$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 0, \quad m \neq n, \quad (16.1.9)$$

επίσης αντίστοιχα. Εντούτοις δε θα επεκταθούμε στο θέμα αυτό. Θα μεταφερθούμε αμέσως στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις συνημίτονο (cosine) και ημίτονο (sine), που κι αυτές πληρούν σχέσεις ορθογωνιότητας. Τούτο θα το διαπιστώσουμε στην αμέσως επόμενη παράγραφο.

### A16.1.3. Ορθογωνιότητα στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις συνημίτονο και ημίτονο

Τη βάση για τις σειρές Fourier την αποτελούν οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις συνημίτονο (cosine, σύμβολο cos) και ημίτονο (sine, σύμβολο sin). Για τις συνημιτονικές συναρτήσεις  $\cos nx$  με το  $n$  μη αρνητικό ακέραιο αριθμό ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) θα αποδείξουμε την ιδιότητα ορθογωνιότητας στο διάστημα  $[-\pi, \pi]$ , δηλαδή ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0, \quad m \neq n, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (16.1.10)$$

για κάθε ζεύγος  $(m, n)$  διαφορετικών και μη αρνητικών ακέραιων αριθμών. Για την απόδειξη της ιδιότητας αυτής θα βασισθούμε στους γνωστούς τριγωνομετρικούς τύπους

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad (16.1.11)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \quad (16.1.12)$$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας κατά μέλη τους τύπους αυτούς, αποδεικνύουμε τους επίσης πολύ γνωστούς τύπους της Τριγωνομετρίας για τη μετατροπή γινομένων τριγωνομετρικών συναρτήσεων (είτε συνημιτόνων είτε ημιτόνων) σε αθροίσματα

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)], \quad (16.1.13)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]. \quad (16.1.14)$$

Ειδικότερα για  $\beta = \alpha$ , οι πιο πάνω τριγωνομετρικοί τύποι απλοποιούνται στις μορφές

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad (16.1.15)$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}. \quad (16.1.16)$$

Για την απόδειξη της θεμελιώδους ιδιότητας της ορθογωνιότητας (16.1.10) των συστημάτων (ή συνόλων) των συναρτήσεων  $\cos nx$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) χρησιμοποιούμε τώρα τον τριγωνομετρικό τύπο (16.1.13). Ανάγουμε έτσι στην προς απόδειξη ιδιότητα (16.1.10) το γινόμενο των συνημιτόνων σε άθροισμα και εκτελούμε εύκολα την ολοκλήρωση. Συγκεκριμένα, υποθέτοντας ότι  $m \neq n$  (αλλιώς δε θα είχαμε δύο συναρτήσεις, θα είχαμε μόνο μία συνάρτηση), οπότε  $m - n \neq 0$ , έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] \, dx \\ &= \left[ \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{\sin(m+n)\pi}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)\pi}{2(m-n)} - \frac{\sin[(m+n)(-\pi)]}{2(m+n)} - \frac{\sin[(m-n)(-\pi)]}{2(m-n)} \\ &= \frac{\sin(m+n)\pi}{m+n} + \frac{\sin(m-n)\pi}{m-n} \\ &= 0 + 0 = 0, \quad m \neq n, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (16.1.17)$$

Τούτο ισχύει, επειδή  $\sin k\pi = 0$  για κάθε ακέραιο αριθμό  $k$ , εδώ για  $k = m+n$  και  $k = m-n$ .

Αποδείξαμε συνεπώς ότι οι συναρτήσεις

$$\cos 0x = 1, \quad \cos x, \quad \cos 2x, \quad \cos 3x, \quad \cos 4x, \quad \dots, \quad \cos nx, \quad \dots \quad (16.1.18)$$

αποτελούν ένα σύστημα (ή σύνολο) ορθογωνίων συναρτήσεων στο διάστημα  $[-\pi, \pi]$ .

Φυσικά, αν  $m = n$ , πρόκειται για την ίδια συνάρτηση και δε νοείται, δεν ισχύει η ορθογωνιότητα (ή ορθογωνικότητα). Πιο συγκεκριμένα, για  $m = n = 0$  έχουμε  $f(x) = g(x) = \cos 0x = 1$ , οπότε

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 0x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx = x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi - (-\pi) = 2\pi, \quad m = n = 0, \quad (16.1.19)$$

εύλογα ένα μη μηδενικό αποτέλεσμα:  $2\pi$ . Επίσης για  $m = n > 0$  (με  $m = n = 1, 2, \dots$ ) έχουμε ανάλογα

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nx \, dx = \frac{2\pi}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin 2nx}{2n} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \pi + 0 = \pi, \quad m = n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (16.1.20)$$

έχοντας χρησιμοποιήσει και τον κλασικό τριγωνομετρικό τύπο (16.1.15) με  $\alpha = nx$ . Το μη μηδενικό αποτέλεσμα προέκυψε τώρα (για  $m = n > 0$ ) ίσο με  $\pi$  αντί  $2\pi$  στον τύπο (16.1.19) (για  $m = n = 0$ ).

Μπορούμε πλέον να προχωρήσουμε και στο γενικότερο διάστημα  $[-L, L]$  ( $L > 0$ ) αντί για το διάστημα  $[-\pi, \pi]$  που είχαμε μέχρι τώρα θεωρώντας το λίγο γενικότερο σύστημα συνημιτονικών συναρτήσεων  $\cos(n\pi x/L)$  (με  $n = 0, 1, 2, \dots$ ), δηλαδή

$$\cos \frac{0\pi x}{L} = 1, \quad \cos \frac{\pi x}{L}, \quad \cos \frac{2\pi x}{L}, \quad \cos \frac{3\pi x}{L}, \quad \cos \frac{4\pi x}{L}, \quad \dots, \quad \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad \dots \quad (16.1.21)$$

Πρόκειται και πάλι (στη γενίκευση αυτή) για σύστημα ορθογωνίων συναρτήσεων, αλλά τώρα στο γενικότερο διάστημα  $[-L, L]$ , συγκεκριμένα

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 0, \quad m \neq n, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (16.1.22)$$

Η απόδειξη είναι εντελώς ανάλογη με την απόδειξη (16.1.17) για το απλούστερο διάστημα  $[-\pi, \pi]$  και παραλείπεται. Εντελώς ανάλογη ιδιότητα ορθογωνιότητας ισχύει και για τις ημιτονικές συναρτήσεις  $\sin(n\pi x/L)$  (με  $n = 1, 2, 3, \dots$ ). (Η περίπτωση  $n = 0$  είναι τετριμμένη, επειδή  $\sin 0 = 0$ .) Και για τις συναρτήσεις αυτές ισχύει ο εξής τύπος ορθογωνιότητας (ή ορθογωνικότητας):

$$\int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0, \quad m \neq n, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots, \quad (16.1.23)$$

που είναι απόλυτα ανάλογος του αντίστοιχου τύπου (16.1.22) για τις συνημιτονικές συναρτήσεις.

Με ανάλογο τρόπο (με μετατροπή του γινομένου των τριγωνομετρικών συναρτήσεων σε άθροισμα) μπορεί εύκολα να αποδειχθεί και η ακόλουθη ιδιότητα ορθογωνιότητας (ή ορθογωνικότητας):

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (16.1.24)$$

Τώρα έχουμε μια συνημιτονική συνάρτηση ορθογώνια με μια ημιτονική συνάρτηση χωρίς πλέον τον περιορισμό  $m \neq n$ . (Ειδικά όμως στην περίπτωση αυτή δε μπορούμε να μιλάμε για σύστημα ορθογωνίων συναρτήσεων.)

Φυσικά στην πολύ ειδική περίπτωση όπου  $m = n$  τα ολοκληρώματα (16.1.22) και (16.1.23) δε μηδενίζονται: έχουμε τότε την ίδια συνάρτηση, όχι διαφορετικές συναρτήσεις, και προφανώς δεν ισχύει η ορθογωνιότητα. Στην ειδική, αλλά και πρακτικά χρήσιμη, αυτή περίπτωση εύκολα διαπιστώνουμε με τη χρήση και των τριγωνομετρικών τύπων (16.1.15) και (16.1.16) ότι

$$\int_{-L}^L \cos^2 \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left( 1 + \cos \frac{2n\pi x}{L} \right) dx = \frac{1}{2} (2L + 0) = L, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (16.1.25)$$

$$\int_{-L}^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left( 1 - \cos \frac{2n\pi x}{L} \right) dx = \frac{1}{2} (2L + 0) = L, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (16.1.26)$$

Προφανώς για  $n = 0$ , οπότε  $\cos(n\pi x/L) = \cos(0\pi x/L) = 1$ , ο τύπος (16.1.25) παίρνει την ακόλουθη απλούστατη μορφή:

$$\int_{-L}^L 1 dx = 2L \quad (16.1.27)$$

με  $2L$  και όχι  $L$  στο αποτέλεσμα.

Στην επίσης ειδική περίπτωση όπου  $m = 0$ , οι τύποι ορθογωνιότητας (16.1.22) (με  $n > 0$  τώρα, γιατί υποθέσαμε ότι  $m = 0$ ) και (16.1.24) απλοποιούνται στις μορφές

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (16.1.28)$$

$$\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (16.1.29)$$

Βέβαια οι μορφές αυτές μπορούν να αποδειχθούν πολύ εύκολα και ανεξάρτητα: από την αρχή.

Με βάση όλους αυτούς τους τύπους (16.1.22) έως (16.1.29) είμαστε πλέον απόλυτα έτοιμοι (έχουμε όλα τα απαραίτητα εφόδια σε τύπους), για να δημιουργήσουμε τη σειρά Fourier  $f_F(x)$ . Αυτή είναι μια τριγωνομετρική σειρά (εννοείται απείρων όρων) που αντιστοιχεί στη γνωστή περιοδική συνάρτηση  $f(x)$  με περίοδο  $T = 2L$  και μάλιστα συνήθως συγκλίνει σ' αυτή, δηλαδή  $f_F(x) = f(x)$ .

## A16.2. ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

### A16.2.1. Η έννοια της σειράς Fourier

Θεωρούμε μια γνωστή (και φυσικά ορισμένη και μονότιμη) περιοδική συνάρτηση  $f(x)$  της πραγματικής μεταβλητής  $x$  ( $-\infty < x < \infty$ ) με περίοδο  $T = 2L$ , οπότε λόγω της περιοδικότητας

$$f(x + kT) \equiv f(x + 2kL) = f(x), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (16.2.1)$$

Η αντίστοιχη σειρά Fourier  $f_F(x)$  είναι μια τριγωνομετρική σειρά που έχει τη μορφή

$$f_F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (16.2.2)$$

(Ο όρος  $a_0$  αντιστοιχεί στο συνημιτονικό όρο με  $n = 0$ , οπότε  $\cos(0\pi x/L) = 1$ , όπως προαναφέραμε.) Ο ημιτονικός όρος με  $n = 0$  απλά δεν υπάρχει, γιατί  $\sin(0\pi x/L) = 0$ . Δεν έχει επίσης κανένα νόημα να αναφερόμαστε σε όρους με αρνητικές ακέραιες τιμές του δείκτη  $n$ , επειδή ξέρουμε ότι

$$\cos \frac{-n\pi x}{L} = \cos \frac{n\pi x}{L} \quad \text{και} \quad \sin \frac{-n\pi x}{L} = -\sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (16.2.3)$$

Για την πιο πάνω σειρά Fourier (16.2.2) επιθυμούμε αυτή να συμπίπτει με την αρχική συνάρτηση  $f(x)$ , στην οποία αντιστοιχεί (τουλάχιστον στα σημεία συνεχείας της  $f(x)$ ). Με τη σκέψη αυτή θα προσδιορίσουμε τους προς το παρόν άγνωστους άπειρους συντελεστές  $a_n$  και  $b_n$  της σειράς Fourier (16.2.2). Πρέπει επομένως, θέλουμε κατά το δυνατόν να ισχύει

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (16.2.4)$$

Δηλαδή θέλουμε η συνάρτηση  $f(x)$  και η σειρά Fourier της  $f_F(x)$  να συμπίπτουν στο ίδιο σημείο  $x$  σ' ολόκληρο το διάστημα  $[-L, L]$  της περιόδου ή, τουλάχιστον, σχεδόν σ' ολόκληρο το διάστημα αυτό. Η σειρά Fourier είναι μια σειρά με άπειρους φυσικά τριγωνομετρικούς (συνημιτονικούς και ημιτονικούς) όρους με συντελεστές  $a_n$  και  $b_n$  (τους συντελεστές Fourier) προς προσδιορισμό.

### A16.2.2. Προσδιορισμός των συντελεστών Fourier

Για τον προσδιορισμό των συντελεστών Fourier  $a_n$  και  $b_n$  θα χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες ορθογωνιότητας των τριγωνομετρικών συναρτήσεων που αναφέραμε στην προπροηγούμενη Παράγραφο A16.1.3. Πιο συγκεκριμένα θα εκμεταλλευθούμε κατάλληλα τις ιδιότητες αυτές, ώστε να δημιουργήσουμε από τη σειρά Fourier (16.2.4) απλές εξισώσεις με ένα μόνο άγνωστο κάθε φορά: το συντελεστή  $a_0$  για το σταθερό όρο, τους συντελεστές  $a_n$  για τους συνημιτονικούς όρους και τους συντελεστές  $b_n$  για τους ημιτονικούς όρους της σειράς Fourier  $f_F(x)$ .

Ξεκινάμε με τον προσδιορισμό του συντελεστή  $a_0$  στο σταθερό όρο. Προς το σκοπό αυτό απλά ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη της σχέσεως (16.2.4) από  $-L$  έως  $L$  (στο διάστημα  $[-L, L]$  μιας περιόδου  $T = 2L$ ). Δεχόμαστε επίσης ότι το ολοκλήρωμα της σειράς στο δεξιό μέλος ισούται με το άθροισμα των επί μέρους ολοκληρωμάτων. Έτσι προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) dx &= \int_{-L}^L \left[ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \right] dx \\ &= a_0 \int_{-L}^L 1 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right) \\ &= 2a_0L, \end{aligned} \quad (16.2.5)$$

γιατί ισχύουν και οι τύποι (16.1.27), (16.1.28) και (16.1.29).

Στο δεξιό μέλος υπάρχει τώρα μόνο ο συντελεστής  $a_0$  σαν άγνωστη ποσότητα. Λύνοντας ως προς το συντελεστή αυτό, διαπιστώνουμε άμεσα ότι

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx. \quad (16.2.6)$$

Άρα πρόκειται για τη μέση τιμή της περιοδικής συναρτήσεώς μας  $f(x)$  στο διάστημα  $[-L, L]$  μιας περιόδου της  $T = 2L$ .

Προσδιορίσαμε επομένως το συντελεστή Fourier  $a_0$  στη σειρά Fourier (16.2.2) και, σχεδόν ισοδύναμα (16.2.4), που αντιστοιχεί στην περιοδική συνάρτηση  $f(x)$ . Ελάχιστα πιο δύσκολα είναι τα δύο επόμενα βήματα. Αυτά αφορούν στον προσδιορισμό των συντελεστών Fourier  $a_n$  και  $b_n$  (με  $n = 1, 2, \dots$ ).

Ξεκινάμε ξανά από τη βασική σχέση (16.2.4). Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της επί τον παράγοντα  $\cos(m\pi x/L)$  (με  $m = 1, 2, \dots$ ) και ολοκληρώνουμε στο διάστημα  $[-L, L]$  μιας περιόδου. Δεχόμαστε και πάλι ότι στο δεξιό μέλος μπορούμε να αντιστρέψουμε τη σειρά μεταξύ αθροίσεως και ολοκληρώσεως. Έτσι προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= \int_{-L}^L \left[ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \right] \cos \frac{m\pi x}{L} dx \\ &= a_0 \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right. \\ &\quad \left. + b_n \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right), \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (16.2.7)$$

Κάπως πολύπλοκη έκφραση! Και όμως λόγω των τύπων (16.1.28) καθώς και των σχέσεων ορθογωνιότητας (16.1.22) και (16.1.24) είναι σαφές ότι όλα, μάλλον σχεδόν όλα, τα ολοκληρώματα στο άπειρο άθροισμα του δεξιού μέλους μηδενίζονται. Είπαμε σχεδόν όλα, γιατί το ολοκλήρωμα που αντιστοιχεί στο συνημιτονικό συντελεστή  $a_m$  (δηλαδή αυτό με  $n = m$ ) δε μηδενίζεται, ακριβώς επειδή  $n = m$ . Εδώ πρόκειται για την ίδια συνημιτονική συνάρτηση:  $\cos(m\pi x/L)$  (δύο φορές, στο τετράγωνο) και όχι για δύο διαφορετικές ορθογώνιες συναρτήσεις. Στην ειδική αυτή περίπτωση χρησιμοποιούμε τον τύπο (16.1.25) (εδώ με  $m$  αντί  $n$ ) και τελικά βρίσκουμε ότι

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx = a_m L, \quad m = 1, 2, \dots \quad (16.2.8)$$

Προφανώς, λύνοντας τώρα ως προς  $a_m$ , έχουμε τελικά

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx, \quad m = 1, 2, \dots \quad (16.2.9)$$

Εύλογα δεν υπάρχει πια καμία απολύτως δυσκολία να χρησιμοποιήσουμε το δείκτη  $n$  (αντί για το δείκτη  $m$ ) στους τύπους (16.2.9) προσδιορισμού των συντελεστών Fourier  $a_m$  ή, απόλυτα ισοδύναμα,  $a_n$ . (Ακριβώς οι ίδιοι συντελεστές είναι άλλωστε!) Έτσι οι τύποι (16.2.9) παίρνουν την τελική τους μορφή

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (16.2.10)$$

Άρα όλοι οι συντελεστές Fourier  $a_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) των συνημιτονικών όρων στη σειρά Fourier (16.2.2) είναι πια διαθέσιμοι μέσω των ολοκληρωτικών αυτών τύπων (16.2.10). Επίσης και ο συντελεστής Fourier  $a_0$  έχει ήδη προσδιορισθεί από τον τύπο (16.2.6).

Με απόλυτα ανάλογο τρόπο εργασίας προκύπτουν και οι συντελεστές Fourier  $b_n$  των ημιτονικών όρων στη σειρά Fourier (16.2.2) (σχεδόν ισοδύναμα (16.2.4)). Προς το σκοπό αυτό αρκεί να πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της σχέσεως (16.2.4) επί  $\sin(m\pi x/L)$  (αντί  $\cos(m\pi x/L)$ )

πάλι με  $m = 1, 2, \dots$  και να ολοκληρώσουμε στο διάστημα μιας περιόδου  $[-L, L]$ . Ακριβώς έτσι κάναμε και προηγουμένως για τον προσδιορισμό των συντελεστών Fourier  $a_n$ . Τώρα λαμβάνουμε υπόψη μας τη σχέση (16.1.29), τις σχέσεις ορθογωνιότητας (16.1.24) και (16.1.23) καθώς και τη σχέση (16.1.26) (εδώ με  $n = m$ ). Τελικά προκύπτει ο τύπος

$$b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx, \quad m = 1, 2, \dots \quad (16.2.11)$$

Αυτός είναι εντελώς ανάλογος με τον τύπο (16.2.9), ο οποίος ήδη βρέθηκε για τους συντελεστές Fourier  $a_n$ . Χρησιμοποιώντας μάλιστα σ' αυτόν το δείκτη  $n$  αντί για τον  $m$ , προκύπτει αμέσως ο τελικός τύπος

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (16.2.12)$$

Τούτος είναι ο αντίστοιχος τύπος του τελικού τύπου (16.2.10) για τους συντελεστές Fourier  $a_n$ .

Έχουμε επομένως τώρα διαθέσιμους τους τύπους (16.2.6) (για το συντελεστή  $a_0$  της σειράς Fourier (16.2.2)), τους τύπους (16.2.10) (για τους συντελεστές Fourier  $a_n$  των συνημιτονικών όρων) και τους τύπους (16.2.12) (για τους συντελεστές Fourier  $b_n$  των ημιτονικών όρων) στην ίδια σειρά Fourier  $f_F(x)$ : στη σειρά (16.2.2). Άρα, υποθέτοντας ότι τα ολοκληρώματα αυτά υπάρχουν (π.χ. για μια τμηματικά συνεχή περιοδική συνάρτηση  $f(x)$ ) και μπορούν να υπολογισθούν κατά κάποιον τρόπο (ακριβή ή προσεγγιστικό), και η ίδια η σειρά Fourier (16.2.2) είναι κι αυτή πλήρως προσδιορισμένη κατά τον ίδιο τρόπο (ακριβή ή προσεγγιστικό).

### A16.2.3. Παρατηρήσεις

As παρατηρηθεί στο σημείο αυτό ότι σε πάρα πολλά συγγράμματα (σχεδόν σε όλα!) της μαθηματικής βιβλιογραφίας ο σταθερός όρος  $a_0$  στη σειρά Fourier (16.2.2) γράφεται σαν  $a_0/2$  (δηλαδή διηρημένος δια 2). Στην περίπτωση αυτή ο σχετικός τύπος (16.2.6) για τον όρο (μάλλον το συντελεστή Fourier) αυτό  $a_0$  δε χρειάζεται να διαιρεθεί δια 2, έχουμε δηλαδή στο δεξιό μέλος  $L$  (αντί για  $2L$ ) στον παρονομαστή του κλάσματος. Αντίθετα, στην τεχνική βιβλιογραφία (συμπεριλαμβανομένης και της βιβλιογραφίας του Πολιτικού Μηχανικού), η σειρά Fourier  $f_F(x)$  συνήθως γράφεται στην παρούσα μορφή της (16.2.2). Στην περίπτωση αυτή υπάρχει και το πλεονέκτημα της άμεσης ερμηνείας του τύπου (16.2.6) για το συντελεστή Fourier  $a_0$  σαν της **μέσης τιμής** της περιοδικής συναρτήσεως  $f(x)$  στο διάστημα  $[-L, L]$  μιας περιόδου της συναρτήσεως αυτής, η οποία έχει περίοδο  $T = 2L$ .

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι οι ολοκληρώσεις για όλους τους συντελεστές Fourier  $a_0$ ,  $a_n$  και  $b_n$  (με  $n = 1, 2, \dots$ ) στους τύπους (16.2.6), (16.2.10) και (16.2.12) αντίστοιχα δεν είναι ανάγκη να γίνουν στο βασικό διάστημα  $[-L, L]$  μιας περιόδου  $T = 2L$ . Μπορούν να γίνουν και σε οποιοδήποτε άλλο διάστημα μιας περιόδου  $[d - L, d + L]$  ή, ισοδύναμα,  $[d, d + 2L]$  (με το  $d$  σταθερά) μήκους και αυτού ίσου με  $2L$ . Αυτό συμβαίνει, επειδή η συνάρτηση  $f(x)$  έχει ήδη υποτεθεί περιοδική με περίοδο  $T = 2L$ . Επομένως ισχύει η σχέση

$$f(x + kT) \equiv f(x + 2kL) = f(x), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (16.2.13)$$

Επιπλέον και οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις οι οποίες υπεισέρχονται στους τύπους (16.2.10) και (16.2.12) για τους συντελεστές Fourier  $a_n$  και  $b_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) αντίστοιχα είναι κι αυτές περιοδικές συναρτήσεις με την ίδια ακριβώς περίοδο  $T = 2L$ . Πιο συγκεκριμένα για τις συνημιτονικές συναρτήσεις  $\cos(n\pi x/L)$  στους τύπους (16.2.10) ισχύει ότι

$$\cos \frac{n\pi(x + 2kL)}{L} = \cos \frac{n\pi x + 2kn\pi L}{L} = \cos \left( \frac{n\pi x}{L} + 2kn\pi \right) = \cos \frac{n\pi x}{L},$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (16.2.14)$$



Απόλυτα ανάλογα για τις ημιτονικές συναρτήσεις  $\sin(n\pi x/L)$  στους τύπους (16.2.12) ισχύει ότι

$$\sin \frac{n\pi(x + 2kL)}{L} = \sin \frac{n\pi x + 2kn\pi L}{L} = \sin \left( \frac{n\pi x}{L} + 2kn\pi \right) = \sin \frac{n\pi x}{L},$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (16.2.15)$$

Αυτά προφανώς ισχύουν, επειδή οι δύο βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις  $\cos u$  και  $\sin u$  είναι περιοδικές με περίοδο  $T = 2\pi$ .

#### A16.2.4. Σύγκλιση της σειράς Fourier: Συνθήκες του Dirichlet

Με τον τρόπο που προσδιορίστηκαν οι συντελεστές της σειράς Fourier  $f_F(x)$  (στη σχέση (16.2.2)) που αντιστοιχεί στην περιοδική συνάρτηση  $f(x)$  είναι εύλογο να περιμένουμε τη σύγκλιση (16.2.4) της σειράς Fourier  $f_F(x)$  στη συνάρτηση  $f(x)$ . Αυτό πραγματικά γενικά ισχύει ιδίως μάλιστα σε πρακτικά προβλήματα.

Πιο συγκεκριμένα οι **συνθήκες του Dirichlet** αφορούν σε ικανές συνθήκες σύγκλισης της σειράς Fourier (16.2.2) στη συνάρτηση  $f(x)$ . Σύμφωνα με τις συνθήκες αυτές υποθέτουμε πως η συνάρτηση  $f(x)$  είναι ορισμένη, φραγμένη και περιοδική (εδώ με περίοδο  $T = 2L$ ). Επίσης υποθέτουμε πως έχει πεπερασμένο μόνο πλήθος (αριθμό) ασυνεχειών (εννοείται πεπερασμένων ασυνεχειών για φραγμένη συνάρτηση) και ακροτάτων (μεγίστων και ελαχίστων) στο διάστημα  $[-L, L]$  μιας περιόδου της. Τότε η αντίστοιχη σειρά Fourier  $f_F(x)$  συγκλίνει στη συνάρτηση  $f(x)$ , εάν το σημείο  $x$  είναι σημείο συνεχείας της  $f(x)$ , δηλαδή

$$f_F(x) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \text{ που είναι σημείο συνεχείας της } f(x). \quad (16.2.16)$$

Εάν αντίθετα το σημείο  $x$  είναι σημείο ασυνεχείας της  $f(x)$  (εννοείται πεπερασμένης ασυνεχείας, γιατί η  $f(x)$  έχει υποθεθεί φραγμένη), τότε η σειρά Fourier  $f_F(x)$  της  $f(x)$  συγκλίνει στο σημείο  $x$  στο μέσο όρο των οριακών τιμών της  $f(x)$  (από αριστερά  $f(x^-)$  και από δεξιά  $f(x^+)$ ) στο σημείο  $x$ . Δηλαδή

$$f_F(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} \quad \text{για κάθε } x \text{ που είναι σημείο πεπερασμένης ασυνεχείας της } f(x). \quad (16.2.17)$$

Είναι πάρα πολύ ενδιαφέροντα τα αποτελέσματα αυτά για τη σειρά Fourier  $f_F(x)$  της περιοδικής συναρτήσεώς μας  $f(x)$ . Ας σημειωθεί επίσης ότι προφανώς, αλλά και λόγω των σχέσεων (16.2.14) και (16.2.15) (ή ακόμη και της σχέσεως (16.2.16), η οποία είναι και σημαντικότερη) και η σειρά Fourier  $f_F(x)$  της περιοδικής συναρτήσεως  $f(x)$  είναι και αυτή περιοδική συνάρτηση και μάλιστα με την ίδια ακριβώς περίοδο  $T = 2L$ . Επίσης επαναλαμβάνεται ότι οι συνθήκες του Dirichlet είναι μόνο ικανές (επαρκείς), αλλ' όχι και αναγκαίες συνθήκες για τη σύγκλιση (16.2.16) της σειράς Fourier  $f_F(x)$  στην αντίστοιχη συνάρτηση  $f(x)$ . Συνεπώς δεν αποκλείεται να ισχύει παρόμοια σύγκλιση και σε ορισμένες περιπτώσεις μη πληρώσεως των συνθηκών του Dirichlet.

Πρακτικά μιλώντας, οι συνθήκες του Dirichlet καλύπτουν ήδη μια πάρα πολύ ευρεία κατηγορία περιοδικών συναρτήσεων  $f(x)$  που συναντάει ο Πολιτικός Μηχανικός: σχεδόν όλες τις συναρτήσεις του. Επιτρέπουν μάλιστα και πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών (πεπερασμένων όμως ασυνεχειών) στο διάστημα της περιόδου  $[-L, L]$  της  $f(x)$ . Τούτο καλύπτει, π.χ., και τις ασυνεχείς κατανεμημένες φορτίσεις  $\rho(x)$  (με  $x$  τη θέση) σε δοκούς ή τις ασυνεχείς εξωτερικές δυνάμεις (φορτίσεις)  $\rho(t)$  σε μηχανικά συστήματα του Πολιτικού Μηχανικού. Στα τελευταία θα αναφερθούμε εκτενέστερα στο αμέσως επόμενο Κεφάλαιο A17.

Ας σημειωθεί τέλος ότι για μη περιοδικές συναρτήσεις  $f(x)$  δεν είναι νοητή η ύπαρξη σειράς Fourier  $f_F(x)$ , απλά επειδή δεν υπάρχει περίοδος  $T = 2L$ . Στην περίπτωση αυτή με κατάλληλη (όχι όμως και ιδιαίτερα απλή!) οριακή διαδικασία  $T = 2L \rightarrow \infty$  η σειρά Fourier  $f_F(x)$  της περιοδικής συναρτήσεως  $f(x)$  (με πεπερασμένη περίοδο  $T$ ) μεταπίπτει, μετασχηματίζεται στο μετασχηματισμό Fourier  $F(\omega)$  τώρα της μη περιοδικής συναρτήσεως  $f(x)$  (χωρίς περίοδο  $T$ :  $T \rightarrow \infty$ ). Τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier θα την εξετάσουμε στα Κεφάλαια A18 και A19 παρακάτω.

Τόσο οι σειρές Fourier όσο και ο μετασχηματισμός Fourier είναι χρήσιμες στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων (και συνήθων και με μερικές παραγώγους). Στο αμέσως επόμενο Κεφάλαιο A17 θα εξετάσουμε αυτήν τη δυνατότητα σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Συγκεκριμένα θα κάνουμε χρήση των σειρών Fourier στο τόσο κλασικό για τον Πολιτικό Μηχανικό μονοβάθμιο (δηλαδή με ένα βαθμό ελευθερίας) τριπαραμετρικό (δηλαδή με τρεις παραμέτρους:  $m$ ,  $k$  και  $c$ ) μηχανικό σύστημα υλικού σημείου (μάζας  $m$ ), ελατηρίου (σταθεράς  $k$ ) και αποσβεστήρα (σταθεράς  $c$ ). Ανάλογα θα κάνουμε χρήση του μετασχηματισμού Fourier στο Κεφάλαιο A19.

### A16.2.5. Παράδειγμα σειράς Fourier

Για να προσδιορίσουμε τη σειρά Fourier μιας γνωστής περιοδικής συναρτήσεως

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad \text{με} \quad f(x+2L) = f(x) \quad (16.2.18)$$

(δηλαδή με περίοδο  $T = 2L$ ) υποθέτοντας μάλιστα ότι η σειρά αυτή γενικά συγκλίνει στη συνάρτηση  $f(x)$  (συνήθως με πλήρωση των συνθηκών του Dirichlet), θα πρέπει βέβαια να προσδιορίσουμε τους συντελεστές της  $a_0$ ,  $a_n$  και  $b_n$  (με  $n = 1, 2, \dots$ ). Προς το σκοπό αυτό πρέπει ασφαλώς να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους τους οποίους ήδη βρήκαμε στην Παράγραφο A16.2.2, δηλαδή τους τύπους (16.2.6), (16.2.10) και (16.2.12). Οι τύποι αυτοί είναι οι εξής, ως τους επαναλάβουμε:

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad (16.2.19)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (16.2.20)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (16.2.21)$$

Θεωρητικά δεν είναι καθόλου δύσκολη η χρήση των τύπων αυτών, που ουσιαστικά αποτελεί συνήθως απλή άσκηση σε ολοκληρώσεις. Οι ολοκληρώσεις αυτές μπορούν να γίνουν με το χέρι, με τη χρήση πινάκων και, ακόμη καλύτερα, γρηγορότερα και υπολογιστικά ασφαλέστερα με τη χρήση προγραμμάτων συμβολικών υπολογισμών, όπως είναι η *Mathematica* και η *Maxima*.

Στην παράγραφο αυτή θα περιορισθούμε σε ένα πολύ απλό παράδειγμα. Αυτό θα κάνει σαφή τη χρήση των πιο πάνω τύπων και θα επιτρέψει, ελπίζεται, τον προσδιορισμό μιας απλής σειράς Fourier (χωρίς μάλιστα να χρειάζεται η χρήση του υπολογιστή). Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε την περιοδική συνάρτηση  $p(x)$  με περίοδο  $T = 2L$  που παίρνει την τιμή μηδέν για  $-L \leq x < 0$  και την τιμή  $p_0$  για  $0 \leq x < L$ . Έχουμε επομένως

$$p(x) = 0 \quad \text{για} \quad -L \leq x < 0 \quad \text{και} \quad p(x) = p_0 \quad \text{για} \quad 0 \leq x < L \quad \text{με} \quad p(x+2L) = p(x). \quad (16.2.22)$$

Η τελευταία σχέση δηλώνει απλά την περιοδικότητα της συναρτήσεως  $p(x)$ . Πρόκειται για μια πολύ απλή συνάρτηση, αλλά κλασική στις σειρές Fourier και ιδιαίτερα χρήσιμη πρακτικά.

Για τις ολοκληρώσεις με βάση τους τύπους (16.2.19), (16.2.20) και (16.2.21) θα χρησιμοποιηθεί το βασικό διάστημα  $[-L, L]$  μιας περιόδου  $T = 2L$ . Επειδή όμως η συνάρτηση  $p(x)$  είναι ίση με το μηδέν στο διάστημα  $[-L, 0)$  βάσει του ορισμού της, οι ολοκληρώσεις θα γίνουν ουσιαστικά μόνο στο διάστημα  $[0, L)$ . Έχουμε επομένως για τους ζητούμενους συντελεστές Fourier  $a_0$ ,  $a_n$  και  $b_n$

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_0^L p_0 dx = \frac{1}{2L} p_0 L = \frac{p_0}{2}, \quad (16.2.23)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_0^L p_0 \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{p_0}{L} \left. \frac{\sin(n\pi x/L)}{n\pi/L} \right|_0^L = \frac{p_0}{n\pi} \sin n\pi = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (16.2.24)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_0^L p_0 \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{p_0}{L} \left. \frac{-\cos(n\pi x/L)}{n\pi/L} \right|_0^L = \frac{p_0}{n\pi} (1 - \cos n\pi), \quad n = 1, 2, \dots \quad (16.2.25)$$

Ως προς τους τύπους αυτούς μπορούν να γίνουν οι εξής τρεις παρατηρήσεις:

► **Παρατήρηση A16.1:** Στον πρώτο τύπο (16.2.23) για το συντελεστή  $a_0$  πραγματικά αυτός ισούται με τη μέση τιμή της συναρτήσεως  $p(x)$  στο διάστημα  $[-L, L]$  μιας περιόδου της  $T = 2L$ .

► **Παρατήρηση A16.2:** Στο δεύτερο τύπο (16.2.24) έχει ληφθεί υπόψη ότι  $\sin n\pi = 0$  για ακέραιες τιμές του  $n$ . Επίσης όλοι οι συνημιτονικοί συντελεστές Fourier  $a_n$  προέκυψαν ίσοι με το μηδέν. Τούτο είναι απόλυτα λογικό και επαληθεύσιμο χωρίς ολοκληρώσεις. Πραγματικά, ας εισαγάγουμε πρώτα την τροποποιημένη συνάρτηση

$$p^*(x) = p(x) - a_0 = p(x) - \frac{p_0}{2} = \frac{p_0}{2} \operatorname{sgn} x, \quad x \neq 0, \quad (16.2.26)$$

με τη συνάρτηση  $\operatorname{sgn}$  να δηλώνει τη συνάρτηση προσήμου (sign), δηλαδή

$$\operatorname{sgn} x = -1 \quad \text{για } x < 0 \quad \text{και} \quad \operatorname{sgn} x = 1 \quad \text{για } x > 0 \quad \text{με } x \neq 0, \quad (16.2.27)$$

(ας εξαιρέσουμε την τιμή  $x = 0$ ), ισοδύναμα

$$\operatorname{sgn} x = \frac{x}{|x|}, \quad x \neq 0. \quad (16.2.28)$$

Αλλ' η τροποποιημένη νέα συνάρτηση  $p^*(x)$  είναι προφανώς περιττή. Επομένως η σειρά Fourier της δε μπορεί να περιέχει συνημιτονικούς όρους, γιατί το συνημίτονο, όπως είναι γνωστό, είναι άρτια συνάρτηση:  $\cos(-u) = \cos u$ . Αφού όμως οι συναρτήσεις  $p(x)$  και  $p^*(x)$  διαφέρουν μόνο κατά  $a_0 = p_0/2$  (μια σταθερά), έτσι ακριβώς όπως η  $p^*(x)$  και η αρχική συνάρτηση  $p(x)$  δε μπορεί να περιέχει συνημιτονικούς όρους στη σειρά Fourier της. Σωστά λοιπόν οι ολοκληρώσεις για τους συντελεστές Fourier  $a_n$  κατέληξαν σε μηδενικά αποτελέσματα:  $a_n = 0$  (με  $n = 1, 2, \dots$ ). Με τη λογική αυτή σε μερικές περιπτώσεις (κυρίως για άρτιες και για περιττές συναρτήσεις) μπορούν να αποφεύγονται οι ολοκληρώσεις για ορισμένους από τους συντελεστές Fourier. Συγκεκριμένα για άρτιες συναρτήσεις οι ημιτονικοί συντελεστές Fourier  $b_n$  μηδενίζονται. Ακριβώς το αντίθετο συμβαίνει για περιττές συναρτήσεις, όπου οι συνημιτονικοί συντελεστές Fourier  $a_0$  (με  $n = 0$ ) και  $a_n$  (με  $n = 1, 2, \dots$ ) μηδενίζονται. Ας τα έχουμε υπόψη μας όλα αυτά.

► **Παρατήρηση A16.3:** Η τρίτη παρατήρηση αφορά στους ημιτονικούς συντελεστές Fourier  $b_n$  που υπολογίστηκαν με ολοκλήρωση στον τύπο (16.2.25). Δε μας πολυαρέσει το αποτέλεσμα με την έννοια ότι μπορεί να απλοποιηθεί. Πραγματικά, όπως γνωρίζουμε από την Τριγωνομετρία,

$$\cos 2k\pi = 1, \quad \text{ενώ} \quad \cos (2k - 1)\pi = -1, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (16.2.29)$$

Επομένως για άρτιες τιμές του  $n$  ( $n = 2k$ ) οι ημιτονικοί συντελεστές Fourier  $b_n$  μηδενίζονται, επειδή

$$b_{2k} = \frac{p_0}{2k\pi} (1 - \cos 2k\pi) = \frac{p_0}{2k\pi} (1 - 1) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (16.2.30)$$

Αντίθετα για περιττές τιμές του  $n$  ( $n = 2k - 1$ ) οι ίδιοι συντελεστές  $b_n$  δε μηδενίζονται, αλλά παίρνουν τις τιμές

$$b_{2k-1} = \frac{p_0}{(2k-1)\pi} [1 - \cos (2k-1)\pi] = \frac{p_0}{(2k-1)\pi} [1 - (-1)] = \frac{2p_0}{(2k-1)\pi}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (16.2.31)$$

Άρα τελικά μόνο οι ακόλουθοι συντελεστές Fourier δε μηδενίζονται:

$$a_0 = \frac{p_0}{2}, \quad b_1 = \frac{2p_0}{\pi}, \quad b_3 = \frac{2p_0}{3\pi}, \quad b_5 = \frac{2p_0}{5\pi}, \quad b_7 = \frac{2p_0}{7\pi}, \quad b_9 = \frac{2p_0}{9\pi}, \quad \dots \quad (16.2.32)$$

Υπ' αυτές τις συνθήκες η σειρά Fourier (16.2.18) της συναρτήσεως  $p(x)$  έχει την εξής μορφή:

$$p(x) = \frac{p_0}{2} + \frac{2p_0}{\pi} \left( \sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{L} + \frac{1}{7} \sin \frac{7\pi x}{L} + \frac{1}{9} \sin \frac{9\pi x}{L} + \dots \right). \quad (16.2.33)$$

Είναι προφανώς βραδεία η σύγκλιση αυτής της σειράς Fourier, αλλ' οι συνθήκες του Dirichlet πληρούνται και υπάρχει επομένως σύγκλιση στη συνάρτηση  $p(x)$ . Εξαιρούνται βέβαια τα σημεία ασυνεχείας  $x = jL$  ( $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), στα οποία οφείλεται και η βραδύτητα της συγκλίσεως. Στα σημεία αυτά, όπως γνωρίζουμε από τη σχέση (16.2.17), η σειρά Fourier πρέπει να συγκλίνει στο μέσο όρο των οριακών τιμών της  $p(x)$ , στην περίπτωση μας στην τιμή  $(0+p_0)/2 = (p_0+0)/2 = p_0/2$ . Αυτό διαπιστώνεται και άμεσα από την παραπάνω σειρά Fourier (16.2.33), αφού στα σημεία  $x = jL$  όλοι οι ημιτονικοί όροι μηδενίζονται και απομένει μόνο ο πρώτος όρος: ο σταθερός όρος  $a_0 = p_0/2$ .

Στο πιο κάτω Σχήμα A16.1 δείχνουμε πρώτα την ίδια τη συνάρτηση  $p(x)$ . Στη συνέχεια τη δείχνουμε μαζί με τις προσεγγίσεις της (με βάση τους διαδοχικούς όρους της σειράς Fourier (16.2.33))

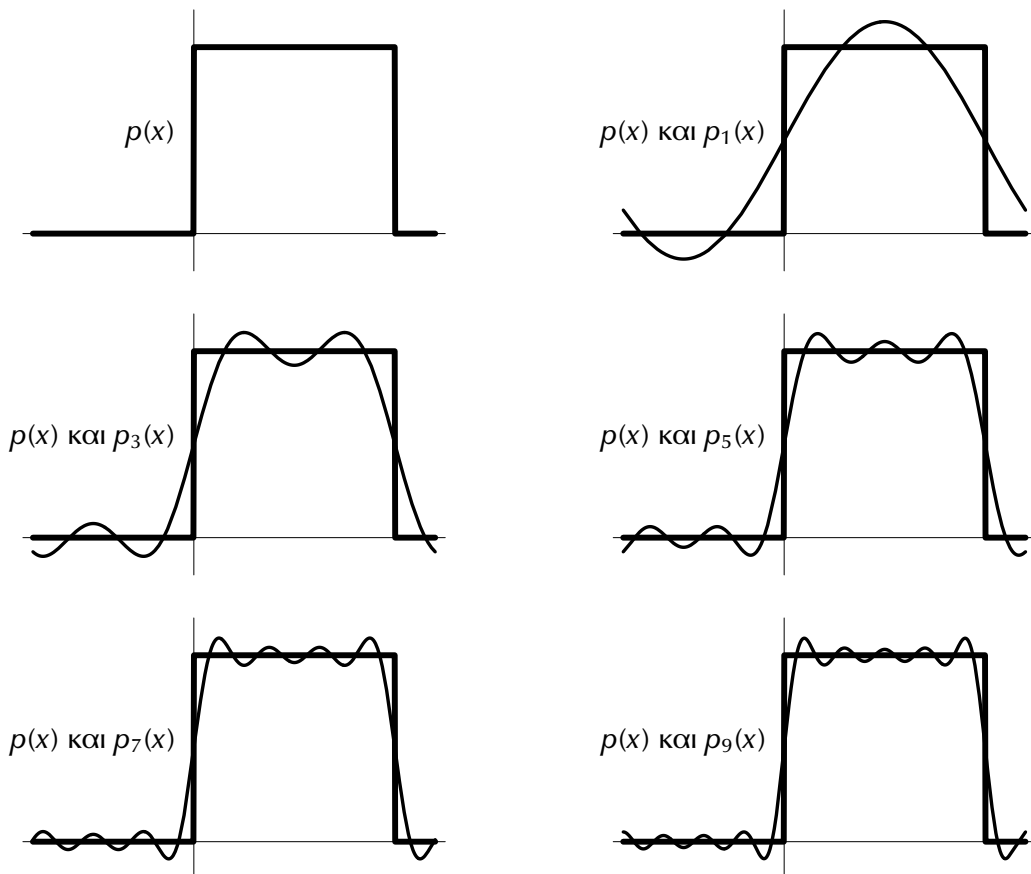
$$p_1(x) = \frac{p_0}{2} + \frac{2p_0}{\pi} \sin \frac{\pi x}{L}, \tag{16.2.34}$$

$$p_3(x) = \frac{p_0}{2} + \frac{2p_0}{\pi} \left( \sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{L} \right), \tag{16.2.35}$$

$$p_5(x) = \frac{p_0}{2} + \frac{2p_0}{\pi} \left( \sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{L} \right), \tag{16.2.36}$$

$$p_7(x) = \frac{p_0}{2} + \frac{2p_0}{\pi} \left( \sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{L} + \frac{1}{7} \sin \frac{7\pi x}{L} \right), \tag{16.2.37}$$

$$p_9(x) = \frac{p_0}{2} + \frac{2p_0}{\pi} \left( \sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{L} + \frac{1}{7} \sin \frac{7\pi x}{L} + \frac{1}{9} \sin \frac{9\pi x}{L} \right). \tag{16.2.38}$$



**Σχήμα A16.1:** Η συνάρτηση  $p(x)$ , σχέση (16.2.22), στο διάστημα μιας περιόδου της  $[-0.8L, 1.2L]$  (υπενθυμίζεται ότι εδώ  $T = 2L$ ) κι οι διαδοχικές προσεγγίσεις της  $p_1(x)$ ,  $p_3(x)$ ,  $p_5(x)$ ,  $p_7(x)$  και  $p_9(x)$  από τις αντίστοιχες προσεγγίσεις της σειράς Fourier της (16.2.33). (Αυτές φαίνονται στις παραπάνω σχέσεις (16.2.34) έως (16.2.38) αντίστοιχα.) Παρατηρείται η βελτίωση της προσεγγίσεως, καθώς προχωράμε από την πρώτη προσέγγιση  $p_1(x)$  στην τελευταία προσέγγιση, εδώ την  $p_9(x)$ .

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ *A17*

## Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΣΕΙΡΩΝ FOURIER: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζεται και πάλι το μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα μάζας (δηλαδή υλικού σημείου), ελατηρίου και αποσβεστήρα ως προς τη μόνιμη (όχι τη μεταβατική) απόκρισή του υπό αυθαίρετη περιοδική φόρτιση (εξωτερική δύναμη)  $p(t)$  με περίοδο  $T$ , δηλαδή με  $p(t + T) = p(t)$ . Στο Κεφάλαιο A6 είχαμε βρει την απόκριση του πιο πάνω μηχανικού συστήματος υπό συνημιτονική φόρτιση κυκλικής συχνότητας  $\omega$  καθώς και υπό αντίστοιχη ημιτονική φόρτιση.

Εδώ απλά θα χρησιμοποιήσουμε τη σειρά Fourier της παρούσας αυθαίρετης φορτίσεως  $p(t)$ . Θα την αναλύσουμε σε αρμονικές (συνημιτονικές και ημιτονικές) συνιστώσες και θα μεταφέρουμε άμεσα τις αποκρίσεις τις οποίες βρήκαμε στο Κεφάλαιο A6 για καθεμία συνιστώσα (συνημιτονική ή ημιτονική και οποιασδήποτε κυκλικής συχνότητας  $\omega$ ) στο άθροισμα των αρμονικών όρων της σειράς Fourier της παρούσας φορτίσεως  $p(t)$ . Η αρχή της υπερθέσεως (ή της επαλληλίας) των μερικών λύσεων σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις επιτρέπει την άθροιση αυτών των μερικών αποκρίσεων στη συνολική απόκριση  $u(t)$  στην περιοδική φόρτιση  $p(t)$ . Ασφαλώς και η απόκριση αυτή  $u(t)$  θα είναι επίσης περιοδική συνάρτηση με την ίδια περίοδο  $T$ , όπως και η φόρτιση  $p(t)$ .

Πέρα από τη συνήθη τριγωνομετρική σειρά Fourier για τη φόρτιση  $p(t)$  εξετάζεται και η απόλυτα ισοδύναμη μιγαδική (ή εκθετική) σειρά Fourier της. Και αυτή η σειρά Fourier μπορεί εύκολα να χρησιμοποιηθεί σαν βάση για τον προσδιορισμό της αντίστοιχης αποκρίσεως  $u(t)$  τώρα σε μιγαδική ή εκθετική μορφή. Ασφαλώς, όπως η τριγωνομετρική και η μιγαδική (ή εκθετική) σειρές Fourier της φορτίσεως  $p(t)$  είναι απόλυτα ισοδύναμες, το ίδιο ακριβώς ισχύει και για τις αντίστοιχες σειρές Fourier της αποκρίσεως  $u(t)$ . Το συμπέρασμά μας είναι ότι η μέθοδος των σειρών Fourier αποτελεί αποτελεσματική μέθοδο προσδιορισμού της αποκρίσεως  $u(t)$  μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος υπό αυθαίρετη περιοδική φόρτιση  $p(t)$  λόγω της ισχύος της αρχής της επαλληλίας των μερικών λύσεων σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις.

### A17.1. ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΑΖΑΣ-ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ-ΑΠΟΣΒΕΣΤΗΡΑ

Στο Κεφάλαιο A6, το οποίο αναφέρεται στις εφαρμογές των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων στις ταλαντώσεις, είχαμε την ευκαιρία να εξετάσουμε (στην Ενότητα A6.1) το απλό μονοβάθμιο (δηλαδή με ένα μόνο βαθμό ελευθερίας) μηχανικό σύστημα υλικού σημείου  $M$  (μάζας  $m$ ), ελατηρίου  $S$  (σταθεράς  $k$ ) και αποσβεστήρα  $D$  (με ιξώδη απόσβεση και σταθεράς  $c$ ). Η σχετική διαφορική εξίσωση (6.1.3) για την άγνωστη μετατόπιση  $u(t)$  του υλικού σημείου  $M$  έχει τη γνωστή μορφή

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) \tag{17.1.1}$$

που αρκετές φορές συνοδεύεται και από τις σχετικές αρχικές συνθήκες (6.1.4). Πολύ συχνά σε μονοβάθμια (και πολυβάθμια γενικότερα) μηχανικά συστήματα με απόσβεση ο Πολιτικός Μηχανικός δεν ενδιαφέρεται καθόλου για τις αρχικές συνθήκες, που επηρεάζουν τη **μεταβατική** ή **παροδική απόκριση**  $u_t(t)$  του μηχανικού συστήματος, αλλ' ενδιαφέρεται μόνο για τη **μόνιμη απόκριση**  $u_p(t)$ , που οφείλεται στην εξωτερική δύναμη (τη φόρτιση)  $p(t)$  που ασκείται πάνω στη μάζα (στο υλικό σημείο)  $M$ . (Βέβαια το αντίθετο συμβαίνει σε ειδικά προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού, όπως σε σεισμικά φαινόμενα, όπου η μεταβατική απόκριση είναι και η κατά πρώτο λόγο ζητούμενη.)

Έχουμε εισαγάγει τη φυσική κυκλική συχνότητα  $\omega_0$  του χωρίς απόσβεση (με  $c = 0$ ) αντίστοιχου μηχανικού συστήματος και το λόγο αποσβέσεως  $\xi$  μέσω των ορισμών τους (6.1.7), που τους επαναλαμβάνουμε

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \xi = \frac{c}{2m\omega_0} = \frac{c}{2m\sqrt{k/m}} = \frac{c}{2\sqrt{km}}. \quad (17.1.2)$$

Τώρα η βασική διαφορική εξίσωση (17.1.1) παίρνει την απλούστερη και ανηγμένη στη μάζα  $m$  του υλικού σημείου  $M$  μορφή της (6.1.8). Την επαναλαμβάνουμε και αυτή

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0 \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = \frac{p(t)}{m}. \quad (17.1.3)$$

Τη βασική αυτή διαφορική εξίσωση είχαμε την ευκαιρία να τη λύσουμε στην Ενότητα A6.1 προσδιορίζοντας και τη γενική λύση  $u_h(t)$  της ομογενούς και μια μερική λύση  $u_p(t)$  της μη ομογενούς (της πλήρους). Λόγω της υποθεθείσας ιξώδους αποσβέσεως ( $c > 0$ , οπότε και  $\xi > 0$ ) αγνοήσαμε τελικά τη γενική λύση  $u_h(t)$  της ομογενούς, η οποία αφορά στο μεταβατικό φαινόμενο. Περιορισθήκαμε μόνο στη μερική λύση  $u_p(t)$  της μη ομογενούς (της πλήρους), η οποία αφορά στη μόνιμη κατάσταση. Το ίδιο θα κάνουμε και στο παρόν Κεφάλαιο A17. Θα γενικεύσουμε όμως τα αποτελέσματα της Ενότητας A6.1 από αρμονική φόρτιση της απλής μορφής

$$p(t) = p_0 \cos \omega t \quad \text{ή} \quad p(t) = p_0 \sin \omega t \quad (17.1.4)$$

με εύρος  $p_0$  και κυκλική συχνότητα  $\omega = 2\pi/T$ , όπου  $T$  είναι η αντίστοιχη περίοδος (οπότε ισχύει ότι  $T = 2\pi/\omega > 0$ , όπως είναι γνωστό), σε οποιαδήποτε (αυθαίρετη, τυχαία) περιοδική εξωτερική δύναμη (φόρτιση)  $p(t)$  με περίοδο  $T$ . Τότε για κάθε χρονική στιγμή  $t$  έχουμε

$$p(t + T) = p(t) \quad \text{και γενικότερα} \quad p(t + kT) = p(t), \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad (17.1.5)$$

προφανώς με περίοδο  $T$  το μικρότερο θετικό αριθμό ( $T > 0$ ) για τον οποίο ισχύει η πιο πάνω σχέση περιοδικότητας της φορτίσεως  $p(t)$ .

Μια τέτοια φόρτιση  $p(t)$  δεν είναι βέβαια κατ' ανάγκη αρμονική (συνημιτονική ή ημιτονική και μιας συγκεκριμένης κυκλικής συχνότητας  $\omega$ , όπως συνέβαινε στις σχέσεις (17.1.4)). Είναι γενικά οποιαδήποτε (αυθαίρετη, τυχαία) φόρτιση, αλλά περιοδική βέβαια (με περίοδο  $T$ ) σύμφωνα με τον πιο πάνω ορισμό της περιοδικότητας (17.1.5).

Πάρα πολλές φορές ο Πολιτικός Μηχανικός συναντάει περιοδικές φορτίσεις  $p(t)$  ή φορτίσεις που προσεγγίζονται από περιοδικές (εν ανάγκη με αρκετά μεγάλη την περίοδο  $T$ ). Στο Κεφάλαιο αυτό A17 θα χρησιμοποιήσουμε τις γνώσεις μας από το προηγούμενο Κεφάλαιο A16 αναπτύσσοντας την περιοδική φόρτιση  $p(t)$  (με περίοδο  $T$ ,  $T > 0$ ) σε σειρά Fourier με μεταβλητή το χρόνο  $t$  και στο διάστημα  $[-T/2, T/2]$  μιας περιόδου  $T$  ή καλύτερα στο απόλυτα ισοδύναμο διάστημα  $[0, T]$  πάλι μιας περιόδου  $T$ . Επομένως τώρα έχουμε  $2L = T$  ή  $L = T/2$  σε σύγκριση με το διάστημα  $[-L, L]$ , που είχαμε χρησιμοποιήσει στο προηγούμενο Κεφάλαιο A16. Εκεί μάλιστα είχαμε για ανεξάρτητη μεταβλητή το  $x$ . Αντίθετα εδώ έχουμε για ανεξάρτητη μεταβλητή το  $t$ : το χρόνο.

Επομένως σύμφωνα με τη θεωρία των σειρών Fourier του προηγούμενου Κεφαλαίου Α16 με τον παρόντα συμβολισμό έχουμε την εξής σειρά Fourier για την περιοδική (με περίοδο  $T$ ) φόρτιση  $p(t)$ :

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t). \quad (17.1.6)$$

Οι κυκλικές συχνότητες  $\omega_n$  είναι προφανώς ίσες με  $n\omega_1$ :  $\omega_n = n\omega_1$ , όπου η θεμελιώδης (η βασική, η πρώτη, αυτή με  $n = 1$ ) κυκλική συχνότητα  $\omega_1$  είναι ίση με  $2\pi/T$ :  $\omega_1 = 2\pi/T$ . Πιο συγκεκριμένα

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \implies \omega_n = n\omega_1 = \frac{2n\pi}{T}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (17.1.7)$$

Χρησιμοποιούμε τους τύπους (16.2.6), (16.2.10) και (16.2.12) (ισοδύναμα (16.2.19), (16.2.20) και (16.2.21)) για τους συντελεστές  $a_0$ ,  $a_n$  και  $b_n$  (με  $n = 1, 2, \dots$ ) αντίστοιχα των σειρών Fourier (εδώ με  $L = T/2$ , δηλαδή με διάστημα ολοκλήρωσης το  $[0, T]$  και με  $t$  αντί του  $x$ ). Διαπιστώνουμε έτσι αμέσως ότι προκύπτουν οι ανάλογοι τύποι

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt, \quad (17.1.8)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \cos \omega_n t dt, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (17.1.9)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \sin \omega_n t dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (17.1.10)$$

Σημειώνουμε και πάλι ότι η χρήση του διαστήματος  $[0, T]$  για τις ολοκληρώσεις είναι απόλυτα ισοδύναμη με τη χρήση του διαστήματος  $[-T/2, T/2]$ . Αυτό ισχύει λόγω της περιοδικότητας της συναρτήσεως  $p(t)$  που υποθέσαμε, όπως πολύ εύκολα μπορεί εξάλλου να αποδειχθεί. Γενικότερα μάλιστα οι ολοκληρώσεις στους τύπους (17.1.8) έως (17.1.10) θα μπορούσαν να είχαν λάβει χώρα σε οποιοδήποτε διάστημα  $[d, d + T]$  μήκους μιας περιόδου  $T$ .

Έχουμε θεωρήσει γνωστή την περιοδική φόρτιση  $p(t)$  στο μηχανικό σύστημα που εξετάζουμε (ή και οπουδήποτε αλλού). Κατά συνέπεια ο πλήρης υπολογισμός των συντελεστών  $a_0$ ,  $a_n$  και  $b_n$  (με  $n = 1, 2, \dots$ ) της σειράς Fourier (17.1.6) (που την υποθέτουμε να συγκλίνει, κάτι που έτσι κι αλλιώς σχεδόν πάντοτε συμβαίνει στην πράξη) μέσω των τύπων (17.1.8) έως και (17.1.10) δεν παρουσιάζει κανένα πρόβλημα εκτός ίσως από τις σχετικές ολοκληρώσεις. Αυτές μπορούν να γίνουν αναλυτικά ή, αν είναι ανάγκη, αριθμητικά. Θεωρούνται λοιπόν γνωστοί όλοι οι συντελεστές Fourier  $a_0$ ,  $a_n$  και  $b_n$ , εφόσον η περιοδική φόρτιση  $p(t)$  (με περίοδο  $T$  και, επομένως, με θεμελιώδη κυκλική συχνότητα  $\omega_1 = 2\pi/T$ ) είναι γνωστή.

Έχουμε λοιπόν γνωστή τη φόρτιση  $p(t)$  (την **είσοδο** στο παρόν μηχανικό σύστημα, τη **διέγερση** του συστήματος αυτού) και την αντίστοιχη σειρά Fourier (17.1.6). Στην επόμενη Ενότητα Α17.2 θα προχωρήσουμε στον προσδιορισμό της αντίστοιχης μετατοπίσεως  $u_p(t)$  του υλικού σημείου  $M$  (στη μόνιμη, σταθερή κατάσταση). Δηλαδή θα βρούμε την αντίστοιχη **έξοδο** του μηχανικού συστήματος (πολύ καλύτερη έκφραση την **απόκρισή** του)  $u_p(t)$ .

## Α17.2. ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΤΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΕ ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ

Ο τρόπος εργασίας είναι πολύ απλός. Γνωρίζουμε ήδη ότι για δύο διαφορετικές φορτίσεις  $p(t)$ : τις  $p_1(t)$  και  $p_2(t)$  και τις αντίστοιχες αποκρίσεις  $u_1(t)$  και  $u_2(t)$  η διαφορική εξίσωση (17.1.1)

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) \quad (17.2.1)$$

(και η ισοδύναμή της (17.1.3)) παίρνει τις ανάλογες μορφές

$$m\ddot{u}_1(t) + c\dot{u}_1(t) + ku_1(t) = p_1(t), \quad (17.2.2)$$

$$m\ddot{u}_2(t) + c\dot{u}_2(t) + ku_2(t) = p_2(t) \quad (17.2.3)$$

με προφανείς δείκτες 1 και 2 αντίστοιχα. Αθροίζοντας κατά μέλη τις δύο αυτές διαφορικές εξισώσεις με μερικές λύσεις τις  $u_1(t)$  και  $u_2(t)$  που αντιστοιχούν στα δεξιά τους μέλη  $p_1(t)$  και  $p_2(t)$ : τις σχετικές φορτίσεις, διαπιστώνουμε αμέσως ότι

$$m[\ddot{u}_1(t) + \ddot{u}_2(t)] + c[\dot{u}_1(t) + \dot{u}_2(t)] + k[u_1(t) + u_2(t)] = p_1(t) + p_2(t). \quad (17.2.4)$$

Γνωρίζουμε μάλιστα ότι στην παραγωγή ισχύει η γραμμική ιδιότητα. Επομένως εύκολα παρατηρούμε ότι η συνάρτηση

$$u_S(t) = u_1(t) + u_2(t), \quad (17.2.5)$$

η οποία είναι το άθροισμα (sum) των αποκρίσεων  $u_1(t)$  και  $u_2(t)$ , αποτελεί την απόκριση του μηχανικού συστήματος. Δηλαδή είναι η μερική λύση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (17.2.1) με φόρτιση το άθροισμα των φορτίσεων

$$p_S(t) = p_1(t) + p_2(t). \quad (17.2.6)$$

Το γεγονός αυτό, που είναι ήδη καταρχήν γνωστό σε μας από τη θεωρία των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, ισχύει ασφαλώς, επειδή η διαφορική εξίσωση (17.2.1) είναι γραμμική. Και είναι γραμμική, απλά επειδή το μηχανικό μας σύστημα είναι γραμμικό και ως προς την ελαστική δύναμη επαναφοράς  $-ku(t)$  του ελατηρίου  $S$  (σταθεράς  $k$ ), αλλά και ως προς την αντίστοιχη δύναμη αποσβέσεως  $-c\dot{u}(t)$  του αποσβεστήρα  $D$ , που είναι παράλληλος με το ελατήριο  $S$ . Το ίδιο (η γραμμικότητα αυτή) ισχύει λόγω του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα και ως προς την αδρανειακή δύναμη  $-m\ddot{u}(t)$ . Αντίθετα, αν εξετάζαμε ένα μη γραμμικό μηχανικό σύστημα, δε θα ίσχυαν αυτά, εκτός κι αν το προσεγγίζαμε με γραμμικό μηχανικό σύστημα μέσω γραμμικοποίησης (Ενότητα A1.4). Τούτο, η γραμμικοποίηση, έγινε στο απλό εκκρεμές με ανεξάρτητη μεταβλητή το χρόνο  $t$ , αλλά και στη συνήθη δοκό. Στη δοκό όμως ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η θέση  $x$  αντί για το χρόνο  $t$ .

Η γενίκευση είναι προφανής και μαθηματικά ευχερής για  $M$  φορτίσεις  $p_m(t)$  (με  $m = 1, 2, \dots$ ): το άθροισμά τους  $p_S(t)$  προκαλεί σαν απόκριση  $u_S(t)$  το άθροισμα των αντίστοιχων μερικών αποκρίσεων  $u_m(t)$  (με  $m = 1, 2, \dots$ ) στο παρόν γραμμικό και μονοβάθμιο (με ένα βαθμό ελευθερίας) μηχανικό σύστημα. Ισχύει επομένως ότι

$$p_S(t) = \sum_{m=1}^M p_m(t) \implies u_S(t) = \sum_{m=1}^M u_m(t). \quad (17.2.7)$$

Γενικεύουμε τώρα και στη σειρά Fourier (17.1.6), την οποία θεωρούμε ότι συγκλίνει στη φόρτιση  $p(t)$  στα σημεία συνεχείας της  $p(t)$ . Στο άθροισμα  $p_S(t)$  των όρων της  $p_m(t)$  (σταθερού, συνημιτονικών και ημιτονικών όρων) αναμένουμε να αντιστοιχεί σαν συνολική απόκριση  $u_p(t)$  του μηχανικού συστήματος (δηλαδή σαν συνολική μετατόπιση του υλικού σημείου από τη θέση ισορροπίας του) η συνάρτηση  $u_S(t)$ . Αυτή θα είναι ίση με το άθροισμα  $u_S(t)$  των αντίστοιχων αποκρίσεων  $u_m(t)$  σε κάθε έναν όρο  $p_m(t)$  της φορτίσεως (σταθερό, συνημιτονικό ή ημιτονικό) ξεχωριστά.

Είμαστε πια έτοιμοι να χρησιμοποιήσουμε τα συμπεράσματα αυτά βρίσκοντας τις αποκρίσεις οι οποίες αντιστοιχούν σε κάθε έναν όρο  $a_0$ ,  $a_n \cos \omega_n t$  και  $b_n \sin \omega_n t$  της σειράς Fourier (17.1.6) και αθροίζοντάς τις. Για το σταθερό όρο  $a_0$  της σειράς Fourier της φορτίσεως  $p(t)$  η αντίστοιχη απόκριση  $u_0(t)$  θα είναι προφανώς και αυτή σταθερή και ίση με

$$u_0(t) = \frac{a_0}{k}. \quad (17.2.8)$$

Τούτο προκύπτει άμεσα από τη διαφορική εξίσωση (17.2.1).

Για ένα συνημιτονικό όρο  $a_n \cos \omega_n t$  (με  $n = 1, 2, \dots$ ) κυκλικής συχνότητας  $\omega_n = n\omega_1 = 2n\pi/T$  της σειράς Fourier (17.1.6) της φορτίσεως  $p(t)$  η σχετική απόκριση έχει προσδιορισθεί ήδη στο Κεφάλαιο A6 και δίνεται από τον τύπο (6.1.49) για φόρτιση  $p_0 \cos \omega t$ . Εμείς απλά ξαναγράφουμε



τον τύπο αυτό (6.1.49) για τη φόρτισή μας  $a_n \cos \omega_n t$ , δηλαδή θέτοντας  $p_0 = a_n$  και  $\omega = \omega_n$ , οπότε και  $\beta_n = \omega_n/\omega_0$  (αντί για  $\beta = \omega/\omega_0$  στο Κεφάλαιο A6: σχέση (6.1.46)). Έτσι προκύπτει η εξής συνημιτονική απόκριση  $u_{nc}(t)$  του μονοβάθμιου μηχανικού συστήματός μας:

$$u_{nc}(t) = \frac{a_n}{k} \frac{1}{(1 - \beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2} [(1 - \beta_n^2) \cos \omega_n t + 2\xi\beta_n \sin \omega_n t] \quad (17.2.9)$$

με  $\beta_n$  το λόγο κυκλικών συχνοτήτων

$$\beta_n = \frac{\omega_n}{\omega_0} = \frac{n\omega_1}{\omega_0} = \frac{n(2\pi/T)}{2\pi/T_0} = \frac{nT_0}{T}. \quad (17.2.10)$$

Στον τύπο αυτό  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  είναι η ιδιοπερίοδος του αντίστοιχου μηχανικού συστήματος χωρίς απόσβεση και  $T = 2\pi/\omega$  είναι η ήδη εκτενώς αναφερθείσα περίοδος της εξωτερικής δύναμης (φορτίσεως)  $p(t)$  του μηχανικού συστήματος. Ας σημειωθεί επίσης ότι στον τύπο (17.2.9) ο δείκτης  $n$  δηλώνει τον  $n$ -στό συνημιτονικό όρο, ενώ ο δείκτης  $c$  δηλώνει ότι πρόκειται για συνημιτονικό όρο. Παρατηρούμε επίσης εύκολα ότι για  $n = 0$ , οπότε  $\cos 0t = 1$  και  $\beta_0 = 0$ , ο παραπάνω τύπος (17.2.9) μεταπίπτει, όπως και είναι αναμενόμενο, στον απλούστατο τύπο (17.2.8).

Τώρα για έναν αντίστοιχο ημιτονικό όρο  $b_n \sin \omega_n t$  (με  $n = 1, 2, \dots$ ) κυκλικής συχνότητας  $\omega_n = n\omega_1 = 2n\pi/T$  της ίδιας σειράς Fourier (17.1.6) της φορτίσεως  $p(t)$  η σχετική απόκριση προσδιορίσθηκε ανάλογα στο Κεφάλαιο A6 και δίνεται από τον τύπο (6.1.50) για φόρτιση  $p_0 \sin \omega t$ . Εμείς απλά ξαναγράφουμε τον τύπο αυτό (6.1.50) για τη φόρτιση  $b_n \sin \omega_n t$ , δηλαδή θέτοντας  $p_0 = b_n$  και  $\omega = \omega_n$ , οπότε και  $\beta_n = \omega_n/\omega_0$  (αντί για  $\beta = \omega/\omega_0$  στο Κεφάλαιο A6) ανάλογα με την εργασία μας για τους συνημιτονικούς όρους  $a_n \cos \omega_n t$  αμέσως πιο πριν. Έτσι προκύπτει η εξής ημιτονική απόκριση  $u_{ns}(t)$  του μονοβάθμιου μηχανικού συστήματός μας:

$$u_{ns}(t) = \frac{b_n}{k} \frac{1}{(1 - \beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2} [-2\xi\beta_n \cos \omega_n t + (1 - \beta_n^2) \sin \omega_n t]. \quad (17.2.11)$$

Είναι προφανές πως υπάρχει αρκετή αναλογία μεταξύ των αποκρίσεων (17.2.9) (για τον  $n$ -στό συνημιτονικό όρο) και (17.2.11) (για τον  $n$ -στό ημιτονικό όρο).

Σύμφωνα τώρα με την αρχή της υπερθέσεως (ή της επαλληλίας) (17.2.7) στο άθροισμα των όρων της φορτίσεως  $p(t)$  στη σειρά Fourier της (17.1.6) αποδεικνύεται ότι αντιστοιχεί (σαν μερική λύση της διαφορικής εξίσωσής (17.2.1)) το άθροισμα των αποκρίσεων

$$u_p(t) = u_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} u_{nc}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} u_{ns}(t) \quad (17.2.12)$$

με τις επιμέρους αποκρίσεις  $u_0(t)$ ,  $u_{nc}(t)$  και  $u_{ns}(t)$  (με  $n = 1, 2, \dots$ ) να δίνονται από τους παραπάνω τύπους (17.2.8), (17.2.9) και (17.2.11) αντίστοιχα.

Αρκετές φορές προτιμάται η αντικατάσταση των επιμέρους αυτών αποκρίσεων στον τελικό τύπο (17.2.12). Πρόκειται για μια πολύ εύκολη εργασία με αποτέλεσμα

$$u_p(t) = \frac{a_0}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{k} \frac{1}{(1 - \beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2} [(1 - \beta_n^2) \cos \omega_n t + 2\xi\beta_n \sin \omega_n t] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{k} \frac{1}{(1 - \beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2} [-2\xi\beta_n \cos \omega_n t + (1 - \beta_n^2) \sin \omega_n t]. \quad (17.2.13)$$

Εύκολο είναι και το ξαναγράψιμο του τύπου αυτού με μια μόνο σειρά (άπειρο άθροισμα) προσθέτοντας τους αντίστοιχους όρους των δύο παραπάνω σειρών. (Η σταθερά του ελατηρίου  $k$  μπορεί επίσης να τεθεί έξω από το άθροισμα.) Προκύπτει εύκολα η ισοδύναμη έκφραση για τη συνολική απόκριση  $u_p(t)$  στη φόρτιση  $p(t)$ , αλλά, επαναλαμβάνεται, χωρίς το μεταβατικό φαινόμενο:

$$u_p(t) = \frac{a_0}{k} + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(1 - \beta_n^2)a_n - 2\xi\beta_n b_n] \cos \omega_n t + [2\xi\beta_n a_n + (1 - \beta_n^2)b_n] \sin \omega_n t}{(1 - \beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2}. \quad (17.2.14)$$

Είναι σαφές από τον τελικό αυτό τύπο ότι η σειρά Fourier (17.1.6) της φορτίσεως (διεγέρσεως, «εισόδου») έδωσε στο παρόν κλασικό μηχανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα τη σειρά Fourier (17.2.14) της μετατοπίσεως του υλικού σημείου  $M$  (αποκρίσεως, «εξόδου») σαν μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης (17.2.1). Η έννοια είναι ότι στη μερική αυτή λύση έχει αγνοηθεί το μεταβατικό (ή παροδικό) φαινόμενο, δηλαδή η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης στην περίπτωση μας για ταλαντώσεις με απόσβεση.

### A17.3. ΜΙΓΑΔΙΚΗ Ή ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΕΙΡΑ FOURIER

Πολλές φορές ο Πολιτικός Μηχανικός προτιμάει τη χρήση της μιγαδικής (ή εκθετικής) σειράς Fourier αντί για τη συνήθη τριγωνομετρική μορφή (17.1.6) της σειράς Fourier. Προς το σκοπό αυτό εργαζόμαστε με μεταβλητή το χρόνο  $t$  και χρησιμοποιούμε τους πολύ γνωστούς τύπους του Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta \quad \text{με} \quad i = \sqrt{-1} \quad (17.3.1)$$

(Παράγραφος A1.5.1, τύποι (1.5.3) και (1.5.4)) και τους αντιστρόφους τους

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \quad (17.3.2)$$

που δίνουν τις συναρτήσεις συνημίτονο  $\cos \theta$  και ημίτονο  $\sin \theta$  με τη βοήθεια της μιγαδικής εκθετικής συναρτήσεως  $e^{\pm i\theta}$ . Για  $\theta = \omega_n t$  (με  $\omega_n = n\omega_1 = 2n\pi/T$ ) που μας ενδιαφέρει εδώ, οι τύποι (17.3.2) παίρνουν τις μορφές

$$\cos \omega_n t = \frac{e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}}{2}, \quad \sin \omega_n t = \frac{e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t}}{2i}. \quad (17.3.3)$$

Εισάγουμε τώρα αυτές τις εκφράσεις του  $\cos \omega_n t$  και  $\sin \omega_n t$  στην πραγματική (την τριγωνομετρική) σειρά Fourier (17.1.6). Τότε αυτή παίρνει την απόλυτα ισοδύναμη μορφή

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \frac{e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}}{2} + b_n \frac{e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t}}{2i} \right) \quad \text{με} \quad \omega_n = n\omega_1 = \frac{2n\pi}{T}, \quad (17.3.4)$$

όπως ξέρουμε. Μπορεί μάλιστα να γραφεί και απλούστερα η νέα αυτή μορφή της σειράς Fourier: η **μιγαδική** (ή **εκθετική**) **σειρά Fourier**, δηλαδή με τρόπο που να μας θυμίζει κάπως λιγότερο τη διαδικασία που την προσδιορίσαμε μέσω της αντίστοιχης πραγματικής σειράς Fourier (17.1.6). (Υπάρχει φυσικά και ο άμεσος τρόπος ευρέσεώς της. Αυτόν όμως θα τον παραλείψουμε εδώ.)

Εν πάση περιπτώσει ξαναγράφουμε, σε απλοποιημένη τώρα μορφή, τη μιγαδική (ή εκθετική) σειρά Fourier (17.3.4) ως εξής:

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n - ib_n}{2} e^{i\omega_n t} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-i\omega_n t} \right). \quad (17.3.5)$$

Εισάγοντας τώρα τους μιγαδικούς συντελεστές Fourier

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad (17.3.6)$$

και γράφοντας επίσης  $a_0 = c_0$  (απλή αλλαγή συμβόλου), ξαναγράφουμε τη μιγαδική (ή εκθετική) σειρά Fourier (17.3.5) στη μορφή

$$p(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{i\omega_n t} + c_{-n} e^{-i\omega_n t}). \quad (17.3.7)$$

Σημειώνουμε μάλιστα ότι ο δείκτης  $-n$  στους δεξιούς όρους των αθροισμάτων της σειράς Fourier δηλώνει απλά αρνητικές τιμές (από  $-1$  έως  $-\infty$ ) του δείκτη  $n$  στους αριστερούς όρους των αθροισμάτων. Έτσι εύκολα ξαναγράφουμε τη μιγαδική σειρά Fourier (17.3.7) στην απλούστερη μορφή

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t}, \quad \omega_n = n\omega_1. \quad (17.3.8)$$

Οι πρώτοι τύποι (17.3.6) ισχύουν για θετικές τιμές του  $n$ , ενώ οι δεύτεροι για αρνητικές στους μιγαδικούς συντελεστές Fourier  $c_n$ , ενώ, όπως ήδη αναφέραμε, απλά  $c_0 = a_0$ .

Εκ πρώτης όψεως φαίνεται να παίρνει μιγαδικές τιμές η μιγαδική σειρά Fourier (17.3.8), την οποία μόλις προσδιορίσαμε. Ένας τέτοιος ισχυρισμός δεν είναι όμως ακριβής, επειδή, όπως εύκολα παρατηρούμε από τους ορισμούς (17.3.6) των μιγαδικών συντελεστών Fourier  $c_n$ , έχουμε

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{\overline{a_n - ib_n}}{2} = \bar{c}_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (17.3.9)$$

Σημειώνεται ότι η παύλα πάνω από ένα μιγαδικό αριθμό δηλώνει το συζυγή του μιγαδικό αριθμό σύμφωνα με το συνηθισμένο στους μιγαδικούς αριθμούς συμβολισμό, π.χ.  $\bar{i} = -i$  ή  $\overline{3 + 4i} = 3 - 4i$ .

Επομένως στη μιγαδική (ή εκθετική) σειρά Fourier (17.3.8) οι όροι που αντιστοιχούν σε αρνητικές τιμές του δείκτη  $n$  είναι απλά οι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί των αντίστοιχων όρων που αντιστοιχούν στην αντίθετη τιμή του δείκτη  $n$ . (Ας μη λησμονείται εξάλλου ότι  $\omega_n = n\omega_1$ .) Άρα η μιγαδική (ή εκθετική) σειρά Fourier (17.3.8) αναμφισβήτητα αποτελείται από μιγαδικούς όρους. Εντούτοις οι όροι της που αντιστοιχούν σε μια τιμή του  $n$  και στην αντίθετή της  $-n$  είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί. Έχουν επομένως άθροισμα πραγματικό αριθμό, γιατί το άθροισμα δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών  $z = x + iy$  και  $\bar{z} = x - iy$  είναι

$$z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = (x + x) + i(y - y) = 2x + 0i = 2x, \quad (17.3.10)$$

ένας πραγματικός αριθμός. Συνεπώς σωστά η μιγαδική (ή εκθετική) σειρά Fourier παριστάνει την πραγματική φόρτιση (εξωτερική δύναμη)  $p(t)$  που ασκείται στο υλικό σημείο  $M$  στο παρόν μονοβάθμιο τριπαραμετρικό μηχανικό σύστημα. Και δε θα μπορούσε μάλιστα να ήταν αλλιώς, επειδή η μιγαδική (ή εκθετική) σειρά Fourier (17.3.8) προέκυψε από την αντίστοιχη τριγωνομετρική σειρά Fourier (17.1.6), που είναι αναμφισβήτητα πραγματική, μέσω αποδεκτών αλγεβρικών πράξεων.

Τελειώνοντας την παρούσα εισαγωγή στις μιγαδικές (ή εκθετικές) σειρές Fourier, έχουμε οπωσδήποτε την υποχρέωση να αναφέρουμε και τους μιγαδικούς τύπους υπολογισμού των μιγαδικών συντελεστών της  $c_n$  (με  $-\infty < n < \infty$ ). Για θετικές τιμές του  $n$  (με  $n = 1, 2, \dots$ ) από τους πρώτους τύπους (17.3.6) σε συνδυασμό με τους τύπους (17.1.9) και (17.1.10) για τους πραγματικούς συντελεστές Fourier  $a_n$  και  $b_n$  αντίστοιχα (που αφορούν στην τριγωνομετρική σειρά Fourier (17.1.6), από την οποία και ξεκινήσαμε), χωρίς δυσκολία διαπιστώνουμε ότι

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cos \omega_n t \, dt - \frac{i}{T} \int_0^T p(t) \sin \omega_n t \, dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T p(t) (\cos \omega_n t - i \sin \omega_n t) \, dt. \end{aligned} \quad (17.3.11)$$

Αν θυμηθούμε μάλιστα και το δεύτερο τύπο του Euler (το δεύτερο από τους τύπους (17.3.1)) με  $\theta = \omega_n t$  στην παρούσα περίπτωση, καταλήγουμε στην εξής μιγαδική εκθετική έκφραση του μιγαδικού συντελεστή Fourier  $c_n$ :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) e^{-i\omega_n t} \, dt \quad (17.3.12)$$

για θετικές τιμές του  $n$ . Για αρνητικές τιμές του  $n$  ισχύει ακριβώς ο ίδιος τύπος, όπως διαπιστώνουμε από τους δεύτερους από τους τύπους (17.3.6) ή απλά εάν θυμηθούμε ότι  $c_{-n} = \bar{c}_n$ . (Αυτοί οι συντελεστές Fourier,  $c_n$  και  $c_{-n}$ , είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί, όπως ήδη έχουμε αναφέρει.) Φυσικά ο ίδιος τύπος (17.3.11) ισχύει και για  $n = 0$ , γιατί τότε

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \, dt = a_0 \quad (17.3.13)$$

με βάση και τον τύπο (17.1.8) για το συντελεστή Fourier  $a_0$  ίσο, υπενθυμίζουμε, με τη μέση τιμή της φορτίσεως  $p(t)$  στο διάστημα της περιόδου της  $T$ . Το τελικό συμπέρασμα είναι ότι ο τύπος (17.3.12)

ισχύει για κάθε τιμή του  $n$ : θετική, αρνητική ή μηδέν και μπορεί ασφαλώς να χρησιμοποιείται για την εύρεση των μιγαδικών συντελεστών Fourier  $c_n$  στη μιγαδική (ή εκθετική) σειρά Fourier (17.3.8).

#### A17.4. ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ ΤΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΕΩΣ ΤΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Στο Κεφάλαιο αυτό Α17 θεωρήσαμε το κλασικό μονοβάθμιο τριπααραμετρικό μηχανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα με άγνωστη συνάρτηση τη μετατόπιση του υλικού σημείου  $M$  και σχετική διαφορική εξίσωση τη (17.1.1) ξαναγραμμένη και σαν (17.2.1). Υπό περιοδική φόρτιση (εξωτερική δύναμη)  $p(t)$  με περίοδο  $T$  και με τη χρήση της συνήθους, δηλαδή της τριγωνομετρικής, σειράς Fourier (17.1.6) για τη φόρτιση  $p(t)$ , προσδιορίσαμε την άγνωστη συνάρτηση  $u(t)$ , τη μετατόπιση του υλικού σημείου  $M$ , την απόκριση του μηχανικού συστήματος (την «έξοδο» του με «είσοδο» τη φόρτιση  $p(t)$ ) στην τελική πραγματική μορφή (17.2.14). Την επαναλαμβάνουμε

$$u_p(t) = \frac{a_0}{k} + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(1 - \beta_n^2)a_n - 2\xi\beta_n b_n] \cos \omega_n t + [2\xi\beta_n a_n + (1 - \beta_n^2)b_n] \sin \omega_n t}{(1 - \beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2}. \quad (17.4.1)$$

Έναν πολύ απλούστερο αλγεβρικά και επίσης σαφώς συντομότερο στη γραφή τρόπο εργασίας αποτελεί εδώ η χρήση της μιγαδικής (ή εκθετικής) σειράς Fourier (17.3.8) για τη φόρτιση  $p(t)$  της προηγούμενης Ενότητας Α17.3 που την επαναλαμβάνουμε κι αυτήν

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t}, \quad \omega_n = n\omega_1 = \frac{2n\pi}{T}, \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T}. \quad (17.4.2)$$

Η γραφή αυτή της φορτίσεως  $p(t)$  μας δηλώνει απλά την ανάλυσή της σε ένα άπειρο άθροισμα μιγαδικών εκθετικών όρων (αλλά τελικά με ένα πραγματικό αποτέλεσμα: την ίδια την πραγματική συνάρτηση  $p(t)$ ) με διακριτές κυκλικές συχνότητες  $\omega_n = n\omega_1 = 2n\pi/T$  (με  $-\infty < n < \infty$ ).

Τώρα τα πράγματα έχουν γίνει στ' αλήθεια πάρα πολύ απλά: γνωρίζουμε από το Κεφάλαιο Α6, Παράγραφος Α6.1.6 ότι υπό τη συνδυασμένη (μιγαδική) φόρτιση

$$p(t) = p_0 \cos \omega t + ip_0 \sin \omega t = p_0 e^{i\omega t} \quad (17.4.3)$$

(εξαιτίας του πρώτου από τους τύπους του Euler (17.3.1)) αντιστοιχεί η απόκριση που δίνει ο τύπος (6.1.76), τον οποίο και υπενθυμίζουμε

$$u_{fp}(t) = G(\omega) p_0 e^{i\omega t}. \quad (17.4.4)$$

Ο τύπος αυτός ισχύει για οποιαδήποτε κυκλική συχνότητα  $\omega$  με  $G(\omega)$  τη σχετική **μιγαδική συνάρτηση αποκρίσεως στο πεδίο της συχνότητας**  $\omega$ , στην περίπτωση μας τη συνάρτηση (6.1.73) ή ισοδύναμα (6.1.74) ή (6.1.75). Σημειώνεται ότι η συνάρτηση  $G(\omega)$  συμβολίζεται πολύ συχνότερα με  $H(\omega)$ . Αυτό όμως δημιουργεί κίνδυνο συγχύσεως με τη βηματική συνάρτηση του Heaviside  $H(t)$ .

Όμως κάθε όρος της μιγαδικής (ή εκθετικής) σειράς Fourier (17.4.2) που θεωρούμε είναι ακριβώς της μορφής (17.4.3) (με  $p_0 = c_n$  και  $\omega = \omega_n$ ). Προκαλεί επομένως απόκριση  $u_{pn}(t)$  ακριβώς της μορφής (17.4.4) (εννοείται πάλι με  $p_0 = c_n$  και  $\omega = \omega_n$ ). Άρα, εφαρμόζοντας και την αρχή της υπερθέσεως (ή της επαλληλίας) (17.2.7), καταλήγουμε άμεσα στη συνολική απόκριση  $u_p(t)$  (χωρίς βέβαια τη μεταβατική ή παροδική απόκριση). Αυτή έχει την τελική μορφή

$$u_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(\omega_n) c_n e^{i\omega_n t}, \quad \omega_n = n\omega_1 = \frac{2n\pi}{T}, \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T}. \quad (17.4.5)$$

Η απόκριση αυτή (17.4.5) θα μπορούσε ίσως να θεωρηθεί κάπως απλούστερη (ή έστω κομψότερη) από την ίδια απόκριση, αλλά στην ισοδύναμη πραγματική μορφή της (17.4.1). Τούτο είναι και το πλεονέκτημα της χρήσεως των μιγαδικών σειρών Fourier στην ανάλυση στο **πεδίο της κυκλικής συχνότητας**  $\omega$  (ή απλούστερα της συχνότητας  $\omega$ ). Πρόκειται για μια ανάλυση που πάρα πολύ συχνά χρησιμοποιεί στις μελέτες του ο Πολιτικός Μηχανικός ιδίως στη Δυναμική των Κατασκευών.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ *A18*

## Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER: ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Εκτός από το μετασχηματισμό Laplace (που συμβολίζεται με  $\mathcal{L}$ ) αρκετά χρήσιμος στις εφαρμογές είναι και ένας ακόμη ολοκληρωτικός μετασχηματισμός: ο μετασχηματισμός Fourier (που συμβολίζεται με  $\mathcal{F}$ ). Το διάστημα ολοκλήρωσης είναι τώρα το διάστημα  $(-\infty, \infty)$  και ο σχετικός πυρήνας στο ολοκλήρωμα είναι της μορφής  $e^{-i\omega x}$  (ή, πολύ πιο συχνά στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού,  $e^{-i\omega t}$  με μεταβλητή το χρόνο  $t$ ). Ο μετασχηματισμός Fourier έχει αρκετά ανάλογες ιδιότητες με το μετασχηματισμό Laplace και μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, αλλά και στις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους. Αυτές αποτελούν σημαντικό τμήμα της ύλης του μαθήματος Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III. Ο μετασχηματισμός Fourier πέρα από την αναλογία του με το μετασχηματισμό Laplace μπορεί εύκολα να θεωρηθεί ότι προέρχεται και από τις μιγαδικές (ή εκθετικές) σειρές Fourier με κατάλληλη οριακή διαδικασία. Συγκεκριμένα η περίοδος  $T$  τείνει στο άπειρο, δηλαδή παύει να ισχύει η περιοδικότητα της συναρτήσεως  $f(x)$  (ή  $f(t)$  με  $t$  το χρόνο). Ιδιαίτερα χρήσιμος είναι ο μετασχηματισμός Fourier σε προβλήματα που αφορούν στο χρόνο  $t$ . Βέβαια τότε η σχετική μεταβλητή  $\omega$  έχει άμεση φυσική σημασία σαν κυκλική συχνότητα.

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετασθούν ο ορισμός του μετασχηματισμού Fourier, η φυσική ερμηνεία του (στα πεδία του χρόνου  $t$  και της συχνότητας  $\omega$ ), γενικεύσεις του, ορισμένες βασικές ιδιότητές του, όπως το θεώρημα της συνελίξεως για το μετασχηματισμό αυτό και οι μετασχηματισμοί Fourier παραγώγων συναρτήσεως  $f(t)$  με γνωστό μετασχηματισμό Fourier  $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ . Θα γίνει επίσης αναφορά στη δυνατότητα επιλύσεως συνήθων διαφορικών εξισώσεων με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier μέσω της μετατροπής τους σε πρωτοβάθμιες αλγεβρικές εξισώσεις. Η ενδιαφέρουσα αυτή δυνατότητα, που είναι απόλυτα ανάλογη με εκείνη στο μετασχηματισμό Laplace, θα εφαρμοσθεί στο αμέσως επόμενο Κεφάλαιο A19: (α) στην κλασική διαφορική εξίσωση του μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα και (β) στη διαφορική εξίσωση της συγκεντρώσεως ρύπου (με αποδόμησή του) σε υδατικό σύστημα με εισροή-εκροή νερού.

### A18.1. Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

#### A18.1.1. Ορισμός του μετασχηματισμού Fourier και αντιστροφή του

Γνωρίζουμε ήδη τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace  $F_L(s) = \mathcal{L}\{f_L(x)\}$  (που συμβολίζεται με  $\mathcal{L}$ ) γνωστής συναρτήσεως  $f_L(x)$

$$F_L(s) = \mathcal{L}\{f_L(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} f_L(x) dx \quad (18.1.1)$$

με το γενικευμένο (ή καταχρηστικό) ολοκλήρωμα στο ημίαπειρο διάστημα  $[0, \infty)$  να θεωρείται φυσικά ότι υπάρχει. Αρκετά ανάλογος με το μετασχηματισμό Laplace είναι και ο ορισμός του μετασχηματισμού Fourier  $F_F(\omega) = \mathcal{F}\{f_F(x)\}$  (που συμβολίζεται με  $\mathcal{F}$ ) επίσης γνωστής συναρτήσεως  $f_F(x)$

$$F_F(\omega) = \mathcal{F}\{f_F(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f_F(x) dx \quad (18.1.2)$$

με το γενικευμένο (ή καταχρηστικό) ολοκλήρωμα, τώρα στο άπειρο διάστημα  $(-\infty, \infty)$ , να υποτίθεται επίσης ότι υπάρχει και με  $i\omega$  αντί για  $s$  ( $s \rightarrow i\omega$ ) στον εκθετικό παράγοντα.

Και οι δύο αυτοί μετασχηματισμοί είναι ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί, δηλαδή οι ορισμούς τους βασίζονται σε ολοκληρώσεις της συναρτήσεως που μετασχηματίζεται. Οι διαφορές τους αφορούν στο διάστημα ολοκληρώσεως:  $[0, \infty)$  στο μετασχηματισμό Laplace και  $(-\infty, \infty)$  στο μετασχηματισμό Fourier και στους σχετικούς πυρήνες στα ολοκληρώματα:  $e^{-sx}$  στο μετασχηματισμό Laplace και  $e^{-i\omega x}$  στο μετασχηματισμό Fourier. Παρά τις δύο αυτές διαφορές και οι δύο αυτοί ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί μοιάζουν πολύ στις ιδιότητές τους και, αυτό που κυρίως μας ενδιαφέρει, στη δυνατότητα μετατροπής μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης σε πρωτοβάθμια αλγεβρική εξίσωση με την εφαρμογή τους. Στο Κεφάλαιο αυτό A18 και στο επόμενο Κεφάλαιο A19 θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με το μετασχηματισμό Fourier. Θα εργασθούμε μάλιστα με τρόπο απόλυτα ανάλογο με εκείνον που ήδη γνωρίζουμε από το μετασχηματισμό Laplace.

Στο εξής δε χρειάζεται πια ο δείκτης  $F$  στη συνάρτηση  $f(x)$  που μετασχηματίζεται κατά Fourier ούτε στο μετασχηματισμό Fourier της  $\mathcal{F}\{f(x)\}$ . Επιπλέον, αφού ο Πολιτικός Μηχανικός χρησιμοποιεί συνήθως (όχι πάντοτε βέβαια!) το μετασχηματισμό Fourier σε προβλήματα της Δυναμικής των Κατασκευών και των Υδατικών Συστημάτων που έχουν σχέση με το χρόνο  $t$ , αυτή η μεταβλητή (ο χρόνος  $t$ ) είναι που θα χρησιμοποιείται και στο παρόν κεφάλαιο. Τέλος στο μετασχηματισμό Fourier συνηθίζεται ο πυρήνας του  $e^{-i\omega x}$  (εδώ  $e^{-i\omega t}$  με μεταβλητή το χρόνο  $t$ ) να μπαίνει στον ορισμό του (με ολοκλήρωμα) (18.1.2) μετά τη συνάρτηση  $f(x)$  (εδώ  $f(t)$ ) που μετασχηματίζεται. Με τις μη ουσιαστικές αυτές τροποποιήσεις (που αφορούν στο συμβολισμό μόνο) ο ορισμός (18.1.2) του μετασχηματισμού Fourier  $\mathcal{F}$  παίρνει την εξής ισοδύναμη μορφή που συνήθως θα χρησιμοποιούμε:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (18.1.3)$$

Ασφαλώς το γενικευμένο (ή καταχρηστικό) ολοκλήρωμα στον ορισμό αυτό πρέπει να υπάρχει. Για το σκοπό αυτό αρκεί να ισχύουν οι ακόλουθες επαρκείς (αλλ' όχι και απόλυτα αναγκαίες) συνθήκες για τη συνάρτηση  $f(t)$  που μετασχηματίζεται κατά Fourier:

(α) Να είναι ορισμένη και φραγμένη στο άπειρο διάστημα  $(-\infty, \infty)$ .

(β) Να έχει πεπερασμένο μόνο πλήθος (αριθμό) ασυνεχειών (εννοείται πεπερασμένων ασυνεχειών για φραγμένη συνάρτηση) και ακροτάτων (μεγίστων και ελαχίστων) σε κάθε πεπερασμένο διάστημα  $[t_1, t_2]$  που είναι μέρος του άπειρου διαστήματος  $(-\infty, \infty)$ .

(γ) Να είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη στο άπειρο διάστημα  $(-\infty, \infty)$ , δηλαδή να υπάρχει (να μην απειρίζεται) το γενικευμένο (ή καταχρηστικό) ολοκλήρωμα

$$I_a = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt, \quad I_a < \infty. \quad (18.1.4)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχεται από τις σειρές Fourier, που έχουν τη βάση τους σε περιοδικές συναρτήσεις  $f_T(t)$ , όταν η περίοδος  $T$  τείνει στο άπειρο:  $T \rightarrow \infty$ . Η μιγαδική (ή εκθετική) σειρά Fourier της περιοδικής συναρτήσεως  $f_T(t)$  είναι η καταλληλότερη για τη σχετική και όχι φοβερά δύσκολη οριακή διαδικασία (για  $T \rightarrow \infty$ ), η οποία όμως θα παραλειφθεί εδώ. Εντούτοις με βάση τις σειρές Fourier και την ίδια οριακή διαδικασία προκύπτει ο ακόλουθος πάρα πολύ σημαντικός τύπος που αφορά στην αντιστροφή  $\mathcal{F}^{-1}$  ενός γνωστού μετασχηματισμού Fourier  $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ :

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (18.1.5)$$

Πρέπει να σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι, ακριβώς όπως και στις σειρές Fourier (και στις πραγματικές και στις μιγαδικές σειρές Fourier), έτσι και στο μετασχηματισμό Fourier ο τύπος (18.1.5) σε ένα σημείο  $t = t_d$  πεπερασμένης ασυνέχειας της συναρτήσεως  $f(t)$  συγκλίνει στο μέσο όρο

$$\hat{f}(t_d) = \frac{f(t_d^-) + f(t_d^+)}{2} \quad (18.1.6)$$

των οριακών τιμών της  $f(t)$ :  $f(t_d^-)$  (οριακή τιμή από αριστερά) και  $f(t_d^+)$  (οριακή τιμή από δεξιά) στο σημείο  $t = t_d$  της πεπερασμένης ασυνέχειας. Και οι δύο αυτές οριακές τιμές πρέπει να υπάρχουν.

### A18.1.2. Σχόλια και παρατηρήσεις

Συγκρίνοντας τους τύπους (18.1.3) για τον ευθύ μετασχηματισμό Fourier  $\mathcal{F}$  και (18.1.5) για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier  $\mathcal{F}^{-1}$ , παρατηρούμε μια αντιστοιχία μεταξύ τους (είναι παρόμοιοι). Αυτή θα γινόταν μάλιστα ακόμη πιο σαφής, εάν είχαμε χρησιμοποιήσει το συντελεστή  $1/\sqrt{2\pi}$  εμπρός από τα ολοκληρώματα και στους δύο αυτούς τύπους αντί να χρησιμοποιούμε το συντελεστή  $1/(2\pi)$  μόνο στον τύπο (18.1.5) για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier. Δε θα το κάνουμε, απλά γιατί δε συνηθίζεται στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού, ίσως για να διατηρηθεί η αντιστοιχία μεταξύ των σειρών Fourier και του μετασχηματισμού Fourier, ίσως και για να τονισθεί η ομοιότητα μεταξύ των μετασχηματισμών Laplace και Fourier, μάλλον το δεύτερο!

Σημειώνεται επίσης ότι αν η κυκλική συχνότητα  $\omega$  (την οποία σχεδόν πάντοτε χρησιμοποιεί ο Πολιτικός Μηχανικός στις κατασκευαστικές μελέτες του) αντικατασταθεί από τη συνηθισμένη συχνότητα  $\nu$  με την έννοια της Φυσικής με βάση το γνωστό τύπο

$$\omega = 2\pi\nu \implies \nu = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{και} \quad d\nu = \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (18.1.7)$$

τότε, εξαιτίας των τύπων αυτών, ο μετασχηματισμός Fourier  $\mathcal{F}$  και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier  $\mathcal{F}^{-1}$  (τύποι (18.1.3) και (18.1.5) αντίστοιχα) θα πάρουν τις νέες και αξιοσημείωτες μορφές τους

$$\hat{F}(\nu) = \hat{\mathcal{F}}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \nu t} dt, \quad (18.1.8)$$

$$f(t) = \hat{\mathcal{F}}^{-1}\{\hat{F}(\nu)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu. \quad (18.1.9)$$

Τώρα πια οι δύο αυτοί τύποι για τον τροποποιημένο ορισμό  $\hat{\mathcal{F}}$  του μετασχηματισμού Fourier και τον αντίστροφό του  $\hat{\mathcal{F}}^{-1}$  έχουν απόλυτη συμμετρία σε αντίθεση με τους τύπους (18.1.3) και (18.1.5).

Ας σημειώσουμε επίσης ότι το σωστό είναι να μιλάμε για μετασχηματισμένη κατά Fourier, όταν αναφερόμαστε στη συνάρτηση  $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ , κρατώντας τη φράση μετασχηματισμός Fourier μόνο για τον ίδιο το μετασχηματισμό Fourier  $\mathcal{F}$  και όχι για τη συνάρτηση  $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$  που προκύπτει από αυτόν. Εντούτοις θα χρησιμοποιούμε τον όρο μετασχηματισμός Fourier και για τη συνάρτηση  $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$  ελπίζοντας ότι τούτο διευκολύνει και επίσης δεν προκαλεί σύγχυση. Απόλυτα ανάλογες διευκρινίσεις ισχύουν και για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier  $\mathcal{F}^{-1}$ .

Σύμφωνα με τα παραπάνω, για μια συνάρτηση  $f(t)$  που ορίζεται στο διάστημα  $(-\infty, \infty)$  ορίζεται συνήθως (όταν βέβαια υπάρχει το σχετικό γενικευμένο ή καταχρηστικό ολοκλήρωμα (18.1.3)) ο μετασχηματισμός Fourier της  $F(\omega)$ . Και αντίστροφα στη συνάρτηση  $F(\omega)$  αντιστοιχεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier  $f(t)$  με βάση τον τύπο (18.1.5) αντιστροφής του μετασχηματισμού Fourier. Πρόκειται για ζεύγος συναρτήσεων:  $f(t)$  και  $F(\omega)$  που συνδέονται με το μετασχηματισμό Fourier  $\mathcal{F}$  και τον αντίστροφό του  $\mathcal{F}^{-1}$ , δηλαδή  $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$  και  $f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}$ . Μπορούμε μάλιστα να δημιουργήσουμε και δίστηλους πίνακες συναρτήσεων  $f(t)$  και μετασχηματισμών Fourier τους  $F(\omega)$  (αν και δε θα το κάνουμε) και πραγματικά υπάρχουν διαθέσιμοι πολλοί τέτοιοι πίνακες.

Ας τονισθεί επίσης ότι ο Πολιτικός Μηχανικός χρησιμοποιώντας συνήθως το μετασχηματισμό Fourier σε προβλήματα της Δυναμικής (κάτι που θα το μελετήσουμε αρκετά εκτενώς στο επόμενο

Κεφάλαιο A19) που έχουν ανεξάρτητη μεταβλητή το χρόνο  $t$ , μιλάει για το πεδίο του χρόνου  $t$  (**φυσική παράσταση** του φαινομένου) στο πρόβλημά του, όταν εργάζεται με την αρχική συνάρτηση  $f(t)$ . Όταν όμως βρει το μετασχηματισμό Fourier  $F(\omega)$  της  $f(t)$  και εργάζεται με αυτόν, τότε αναφέρεται στο πεδίο της συχνότητας  $\omega$  (**φασματική παράσταση** του φαινομένου). Η μεταβλητή  $\omega$  στο μετασχηματισμό Fourier  $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$  εκφράζει πραγματικά κυκλική συχνότητα, σε κάπως γενικευμένη βέβαια μορφή, γιατί δεν έχουμε περιοδικές συναρτήσεις. Το γεγονός αυτό διαπιστώνεται καλύτερα με τη λεπτομερή μετάβαση (με οριακή διαδικασία, δηλαδή με την περίοδο  $T$  της περιοδικής συναρτήσεως  $f_T(t)$  να τείνει στο άπειρο:  $T \rightarrow \infty$ ) από τις μιγαδικές (εκθετικές) σειρές Fourier στο μετασχηματισμό Fourier. Όμως την οριακή αυτή διαδικασία παραλείψαμε να την εκτελέσουμε εδώ για οικονομία χώρου και χρόνου. Σημειώνεται βέβαια ότι οι σειρές Fourier χρησιμοποιούνται κυρίως για περιοδικές συναρτήσεις  $f_T(t)$  (με περίοδο  $T$ ), ενώ ο μετασχηματισμός Fourier για μη περιοδικές συναρτήσεις  $f(t)$ .

### A18.1.3. Φάσματα εύρους, γωνίας φάσεως και ενέργειας

Με μεταβλητή  $t$  το χρόνο στη μετασχηματιζόμενη συνάρτηση  $f(t)$  με μετασχηματισμό Fourier τον  $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$  ο τύπος για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier (18.1.5) ουσιαστικά δημιουργεί και πάλι την αρχική συνάρτηση  $f(t)$  από το μετασχηματισμό Fourier αυτής  $F(\omega)$  με ολοκλήρωση ως προς τη μεταβλητή  $\omega$ . Ο παράγοντας  $e^{i\omega t}$  στο ολοκλήρωμα του τύπου αντιστροφής (18.1.5) μας δείχνει καθαρά ότι η συνάρτηση  $f(t)$  (στο πεδίο του χρόνου  $t$ ) σχηματίζεται από άπειρες αρμονικές συνιστώσες εύρους  $[1/(2\pi)]F(\omega) d\omega$  η καθεμία στο πεδίο της συχνότητας  $\omega$ . Ανάλογα συνέβαιναν βέβαια και στις σειρές Fourier, αλλ' εκεί είχαμε **διακριτό φάσμα**: διακεκριμένες κυκλικές συχνότητες  $\omega_n = n\omega_1$ . Αντίθετα στο μετασχηματισμό Fourier έχουμε συνεχές φάσμα: συνεχή μεταβολή της κυκλικής συχνότητας  $\omega$  στο ολοκλήρωμα του τύπου αντιστροφής (18.1.5).

Με τη λογική αυτή για καθεμιά συγκεκριμένη τιμή της κυκλικής συχνότητας  $\omega$  η απόλυτος τιμή  $|F(\omega)|$  του μετασχηματισμού Fourier  $F(\omega)$  (διηρημένου δια  $2\pi$ ) της συναρτήσεως  $f(t)$  εκφράζει το εύρος της αρμονικής συνιστώσας της  $f(t)$  που αντιστοιχεί στη συχνότητα αυτή  $\omega$ , συνολικά το **φάσμα εύρους**. Με παρόμοιο τρόπο το όρισμα (εννοείται βέβαια με την έννοια των μιγαδικών αριθμών) του μετασχηματισμού Fourier  $F(\omega)$  στη συχνότητα  $\omega$ , το  $\arg F(\omega)$  (η συνάρτηση  $F(\omega)$  είναι συνήθως μιγαδική!), εκφράζει τη γωνία φάσεως  $\alpha$  η οποία αντιστοιχεί στη συχνότητα  $\omega$ , συνολικά το **φάσμα γωνίας φάσεως**. Τέλος το τετράγωνο της απόλυτου τιμής  $|F(\omega)|^2$  του ίδιου μετασχηματισμού Fourier  $F(\omega)$  εκφράζει την **πυκνότητα ενέργειας** της αρμονικής συνιστώσας της  $f(t)$  που αντιστοιχεί σ' αυτήν την κυκλική συχνότητα  $\omega$ , συνολικά το **φάσμα ενέργειας**.

Έχουμε λοιπόν το φάσμα εύρους, το φάσμα γωνίας φάσεως και το φάσμα ενέργειας (και τα τρία συναρτήσεις της κυκλικής συχνότητας  $\omega$ ). Αυτά αναφέρονται στην αρμονική συνιστώσα (κατά συνεχή τρόπο) της αρχικής συναρτήσεως  $f(t)$  (στο πεδίο του χρόνου  $t$ : **φυσική παράσταση** ενός φαινομένου) η οποία αντιστοιχεί στην κυκλική συχνότητα  $\omega$  (στο πεδίο της συχνότητας  $\omega$ : **φασματική παράσταση** του ίδιου φαινομένου). Και τα τρία αυτά φάσματα προκύπτουν, όπως ήδη έγινε σαφές, ευκολότατα, εφόσον είναι διαθέσιμος ο μετασχηματισμός Fourier  $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ . Με την έννοια αυτή ο μετασχηματισμός Fourier (αντίθετα με το μετασχηματισμό Laplace, που δεν έχει φυσική έννοια) δεν αποτελεί μόνο χρήσιμο εργαλείο για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων (συνήθων στο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II και με μερικές παραγώγους στο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III) στο διάστημα  $(-\infty, \infty)$ . Έχει επίσης και πολύ αξιόλογη φυσική σημασία για τον Πολιτικό Μηχανικό στην επιστήμη του (και σε άλλες επιστήμες του Μηχανικού), επειδή εκφράζει την ανάλυση της μη περιοδικής χρονικής συναρτήσεως  $f(t)$  (με συνεχή φάσματα εύρους, γωνίας φάσεως και ενέργειας) σε άπειρες αρμονικές συνιστώσες στο πεδίο της συχνότητας  $\omega$ .

### A18.1.4. Θεώρημα του Parseval

Πολύ σημαντικό στο μετασχηματισμό Fourier είναι το **θεώρημα** (ή η **ταυτότητα**) **του Parseval**.



Το θεώρημα αυτό το αναφέρουμε εδώ χωρίς απόδειξη. Αυτό συνδέει τα ολοκληρώματα της συναρτήσεως  $f(t)$ , συνήθως στο πεδίο του χρόνου  $t$ , και του μετασχηματισμού Fourier αυτής  $F(\omega)$ , στο πεδίο της κυκλικής συχνότητας  $\omega$ , εάν  $t$  δηλώνει το χρόνο ως συνήθως (τύποι (18.1.3): ευθύς μετασχηματισμός Fourier  $\mathcal{F}$  και (18.1.5): αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier  $\mathcal{F}^{-1}$ ) με τη σχέση

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega. \quad (18.1.10)$$

Σημειώνουμε επίσης ότι τα δύο αυτά ολοκληρώματα (και το αριστερό στο πεδίο του χρόνου  $t$  και το δεξιό στο πεδίο της συχνότητας  $\omega$ ) εκφράζουν τη συνολική ενέργεια. Εάν μάλιστα χρησιμοποιήσουμε τη συνηθισμένη στη Φυσική συχνότητα  $\nu = \omega/(2\pi)$  (τύποι (18.1.8) και (18.1.9) στην περίπτωση της συχνότητας  $\nu$ ), το θεώρημα του Parseval παίρνει την ακόμη πιο συμμετρική μορφή

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{F}(\nu)|^2 d\nu. \quad (18.1.11)$$

Τώρα πια δεν παρουσιάζεται ο παράγοντας  $1/(2\pi)$  στο δεξιό ολοκλήρωμα (της συχνότητας  $\nu$ ).

### A18.1.5. Συνημιτονικός μετασχηματισμός Fourier και ημιτονικός μετασχηματισμός Fourier

Πέρα από το συνήθη μετασχηματισμό Fourier (18.1.3) και τον αντίστροφό του (18.1.5) είναι μερικές φορές χρήσιμοι και ο **συνημιτονικός** (ή **συνημιτονοειδής**) **μετασχηματισμός Fourier**  $\mathcal{F}_c$  και ο **ημιτονικός** (ή **ημιτονοειδής**) **μετασχηματισμός Fourier**  $\mathcal{F}_s$ . Οι δύο αυτοί μετασχηματισμοί και οι αντίστροφοί τους  $\mathcal{F}_c^{-1}$  και  $\mathcal{F}_s^{-1}$  προκύπτουν ως εξής για συνάρτηση  $f(t)$  με μεταβλητή το χρόνο  $t$ :

$$F_c(\omega) = \mathcal{F}_c\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad (18.1.12)$$

$$f(t) = \mathcal{F}_c^{-1}\{F_c(\omega)\} = \int_0^{\infty} F_c(\omega) \cos \omega t d\omega \quad (18.1.13)$$

για το **συνημιτονικό** (ή **συνημιτονοειδή**) **μετασχηματισμό Fourier**  $\mathcal{F}_c$  και αντίστοιχα

$$F_s(\omega) = \mathcal{F}_s\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt, \quad (18.1.14)$$

$$f(t) = \mathcal{F}_s^{-1}\{F_s(\omega)\} = \int_0^{\infty} F_s(\omega) \sin \omega t d\omega \quad (18.1.15)$$

για τον **ημιτονικό** (ή **ημιτονοειδή**) **μετασχηματισμό Fourier**  $\mathcal{F}_s$ .

Παρατηρούμε ότι οι μετασχηματισμοί αυτοί Fourier δεν περιέχουν καθόλου τη φανταστική μονάδα  $i = \sqrt{-1}$ . Επομένως δίνουν πάντοτε πραγματικούς μετασχηματισμούς  $F_c(\omega)$  ή  $F_s(\omega)$  για πραγματικές μετασχηματιζόμενες συναρτήσεις  $f(t)$  αντίθετα με ό,τι συμβαίνει συνήθως στο συνήθη μετασχηματισμό Fourier  $\mathcal{F}$ . Επίσης αναφέρονται στο ημιάπειρο διάστημα  $[0, \infty)$  αντί για το άπειρο διάστημα  $(-\infty, \infty)$  στο συνήθη μετασχηματισμό Fourier  $\mathcal{F}$ . Στο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II δε θα χρησιμοποιήσουμε τους ειδικούς αυτούς μετασχηματισμούς Fourier  $\mathcal{F}_c$  και  $\mathcal{F}_s$ .

## A18.2. ΑΠΛΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ FOURIER

Θα αναφερθούμε τώρα σε τρία ιδιαίτερα κλασικά και αρκετά απλά παραδείγματα:

### A18.2.1. Πρώτο παράδειγμα

Θεωρούμε τη μη περιοδική συνάρτηση

$$\rho(t) = \rho_0 \quad \text{για } |t| \leq \frac{T_0}{2} \quad \text{και} \quad \rho(t) = 0 \quad \text{για } |t| > \frac{T_0}{2} \quad (18.2.1)$$

με το  $T_0$  γνωστή θετική σταθερά. Πρόκειται για μια πολύ απλή μη περιοδική συνάρτηση με σταθερή τιμή  $\rho_0$  μόνο στο συμμετρικό διάστημα  $[-T_0/2, T_0/2]$  και μηδενική τιμή έξω από το διάστημα αυτό.

Θα μπορούσε ίσως να αφορά στη μη περιοδική εξωτερική δύναμη (φόρτιση)  $p(t)$  που ασκείται σε ένα σημείο  $M$  ενός μηχανικού συστήματος, γενικότερα μιας κατασκευής του Πολιτικού Μηχανικού υπό δυναμική (όχι ασφαλώς στατική!) καταπόνηση.

Συμβολίζουμε το ζητούμενο μετασχηματισμό Fourier της συναρτήσεως  $p(t)$  με το αντίστοιχο κεφαλαίο γράμμα  $P(\omega)$ , όπως συνήθως κάνουμε. Από τον τύπο (18.1.3) ορισμού του μετασχηματισμού Fourier  $\mathcal{F}$  πολύ εύκολα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} P(\omega) = \mathcal{F}\{p(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} p_0 e^{-i\omega t} dt = p_0 \int_{-T_0/2}^{T_0/2} (\cos \omega t - i \sin \omega t) dt \\ &= 2p_0 \int_0^{T_0/2} \cos \omega t dt = 2p_0 \frac{\sin \omega t}{\omega} \Big|_0^{T_0/2} = 2p_0 \frac{\sin(\omega T_0/2)}{\omega} \quad \text{με } \omega \neq 0. \end{aligned} \quad (18.2.2)$$

Στους τόσο απλούς αυτούς υπολογισμούς πέρα από τον ορισμό (18.2.1) της μη περιοδικής συναρτήσεως  $p(t)$  χρησιμοποιήσαμε επίσης τον πολύ γνωστό τύπο του Euler (Παράγραφος Α1.5.1)

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x \quad (18.2.3)$$

(εν προκειμένω με το μείον και με  $x = \omega t$ ). Λάβαμε υπόψη και τα γεγονότα ότι η μεν συνάρτηση  $\cos x$  είναι άρτια:  $\cos(-x) = \cos x$ , ενώ αντίθετα η συνάρτηση  $\sin x$  είναι περιττή:  $\sin(-x) = -\sin x$ .

Για  $\omega = 0$  ο υπολογισμός του σχετικού ολοκληρώματος  $P(0)$  γίνεται ακόμη πιο απλός:

$$P(0) = P(\omega)|_{\omega=0} = \mathcal{F}\{p(t)\}|_{\omega=0} = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} p_0 dt = p_0 T_0. \quad (18.2.4)$$

Τούτο είναι εξάλλου αναμενόμενο και από το μετασχηματισμό Fourier (18.2.2) (ο οποίος ισχύει για  $\omega \neq 0$ ) παίρνοντας σ' αυτόν το όριο  $\omega \rightarrow 0$  σε συνδυασμό με το πολύ γνωστό μας όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (18.2.5)$$

εδώ με  $x = \omega T_0/2$ . Οι σχέσεις (18.2.2) και (18.2.4) (φυσικά κυρίως η σχέση (18.2.2)) ορίζουν το ζητούμενο μετασχηματισμό Fourier  $P(\omega) = \mathcal{F}\{p(t)\}$  για την παρούσα μη περιοδική συνάρτηση  $p(t)$  που ορίστηκε στις σχέσεις ορισμού της (18.2.1).

Ήταν πραγματική η συνάρτηση αυτή  $p(t)$ , όπως συνήθως συμβαίνει στην πράξη, αλλά προέκυψε και πραγματικός ο μετασχηματισμός Fourier της  $P(\omega) = \mathcal{F}\{p(t)\}$  αντίθετα με ό,τι συνήθως συμβαίνει. Στ' αλήθεια ο τύπος (18.1.3) ορισμού του μετασχηματισμού Fourier  $\mathcal{F}$  εξαιτίας της φανταστικής μονάδας  $i = \sqrt{-1}$  στον πυρήνα του  $e^{-i\omega t}$  δίνει γενικά μιγαδικούς μετασχηματισμούς Fourier  $P(\omega)$ . Εδώ η συνάρτηση  $p(t)$  ήταν μη μηδενική (με σταθερή μάλιστα τιμή  $p(t) = p_0$ ) στο συμμετρικό ως προς τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$  διάστημα  $[-T_0/2, T_0/2]$  κι επιπλέον ήταν και άρτια. Αυτός είναι και ο λόγος που προέκυψε πραγματικός ο μετασχηματισμός Fourier  $P(\omega)$  της  $p(t)$ .

### Α18.2.2. Δεύτερο παράδειγμα

Μεταθέτουμε τώρα, στο δεύτερο τούτο παράδειγμα, το χρονικό διάστημα ισχύος της μη μηδενικής τιμής  $p_0$  της συναρτήσεως  $p(t)$  από το αρχικό χρονικό διάστημα  $[-T_0/2, T_0/2]$  στο νέο (και ίσου μήκους  $T_0$ ) χρονικό διάστημα  $[0, T_0]$ . Παίρνουμε έτσι την τροποποιημένη συνάρτηση

$$p^*(t) = p_0 \quad \text{για } 0 \leq t \leq T_0 \quad \text{και} \quad p^*(t) = 0 \quad \text{για } t < 0 \quad \text{και επίσης για } t > T_0. \quad (18.2.6)$$

Τώρα ο σχετικός μετασχηματισμός Fourier  $P^*(\omega) = \mathcal{F}\{p^*(t)\}$  προκύπτει ότι είναι (δυστυχώς) μια μιγαδική συνάρτηση. Τούτο συμβαίνει, επειδή

$$\begin{aligned} P^*(\omega) = \mathcal{F}\{p^*(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} p^*(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{T_0} p_0 e^{-i\omega t} dt = p_0 \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \Big|_0^{T_0} \\ &= p_0 \frac{e^{-i\omega T_0} - 1}{-i\omega} = 2p_0 \frac{\sin(\omega T_0/2)}{\omega} e^{-i\omega T_0/2} \quad \text{με } \omega \neq 0. \end{aligned} \quad (18.2.7)$$

Προέκυψε λοιπόν μιγαδικός ο μετασχηματισμός Fourier  $P^*(\omega)$  της τόσο απλής πραγματικής συναρτήσεως  $p^*(t)$ . Σχεδόν πάντοτε αυτό συμβαίνει, όπως ήδη εξηγήθηκε, στο μετασχηματισμό Fourier! (Θαυμαστικό, αλλ' έτσι είναι πάντως λόγω της φανταστικής μονάδας  $i = \sqrt{-1}$  στον πυρήνα  $e^{-i\omega t}$  στο ολοκλήρωμα του τύπου ορισμού (18.1.3) του μετασχηματισμού Fourier  $\mathcal{F}$ . Έτσι είναι!)

### A18.2.3. Ο μετασχηματισμός Fourier της ωστικής (ή κρουστικής) συναρτήσεως δέλτα του Dirac

Μια πολύ ενδιαφέρουσα οριακή περίπτωση της συναρτήσεως  $p^*(t)$  στη σχέση (18.2.6) και του μετασχηματισμού Fourier της  $P^*(\omega)$  στη σχέση (18.2.7) προκύπτει, όταν το χρονικό διάστημα  $T_0$  τείνει στο μηδέν ( $T_0 \rightarrow 0$ ) και ταυτόχρονα η τιμή  $p_0$  της  $p^*(t)$  επιλέγεται ίση με  $1/T_0$ . Επομένως αυτή τείνει στο άπειρο, δηλαδή  $p_0 = 1/T_0 \rightarrow \infty$ . Στην ενδιαφέρουσα αυτή οριακή περίπτωση έχουμε φυσικά  $p_0 T_0 = (1/T_0)T_0 = 1$ . Επομένως η συνάρτηση  $p^*(t)$  τείνει στην ωστική (ή κρουστική) συνάρτηση  $\delta(t)$  του Dirac:  $p^*(t) \rightarrow \delta(t)$ , που ορίζεται (σαν γενικευμένη συνάρτηση) ως εξής (Ενότητα A10.6, σχέση ορισμού (10.6.3) της συναρτήσεως  $\delta(t)$ ):

$$\delta(t) = 0 \quad \text{για} \quad t \neq 0, \quad \delta(0) = \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (18.2.8)$$

Τώρα ο μετασχηματισμός Fourier  $P^*(\omega)$  στη σχέση (18.2.7) της συναρτήσεώς μας  $p^*(t)$  τείνει (για  $T_0 \rightarrow 0$ ) στο όριο (επαναλαμβάνεται με  $p_0 = 1/T_0$ )

$$\lim_{T_0 \rightarrow 0} \left[ \frac{2}{T_0} \frac{\sin(\omega T_0/2)}{\omega} e^{-i\omega T_0/2} \right] = \lim_{T_0 \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin(\omega T_0/2)}{\omega T_0/2} \right] \cdot 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

με  $\omega \neq 0$  και με  $x = \omega T_0/2 \neq 0$  (18.2.9)

λόγω του γνωστού ορίου (18.2.5). Επειδή έτσι  $p^*(t) \rightarrow \delta(t)$ , συνάγεται ότι ο μετασχηματισμός Fourier  $\mathcal{F}\{\delta(t)\}$  της ωστικής (ή κρουστικής) συναρτήσεως  $\delta(t)$  του Dirac ισούται με τη μονάδα, δηλαδή

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1. \quad (18.2.10)$$

Τούτο προκύπτει εξάλλου αμέσως και από τον ορισμό (18.2.8) της ωστικής (ή κρουστικής) συναρτήσεως  $\delta(t)$  του Dirac σε συνδυασμό με τον ορισμό (18.1.3) του μετασχηματισμού Fourier  $\mathcal{F}$ .

Ο παράξενος αυτός μετασχηματισμός Fourier,  $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$ , δηλώνει ότι, ενώ στο πεδίο του χρόνου  $t$  η συνάρτηση  $\delta(t)$  μηδενίζεται για κάθε  $t \neq 0$  (απειρίζεται όμως για  $t = 0$ ) σύμφωνα με τον ορισμό της (18.2.8), αντίθετα, στο πεδίο της συχνότητας  $\omega$  ο μετασχηματισμός Fourier  $\mathcal{F}\{\delta(t)\}$  είναι σταθερός (ίσος με 1) για κάθε συχνότητα  $\omega$  ( $-\infty < \omega < \infty$ ). Δηλαδή δε μεταβάλλεται καθόλου με τη συχνότητα  $\omega$ . Μερικές φορές για το μετασχηματισμό αυτό Fourier  $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$  στο πεδίο της συχνότητας  $\omega$  χρησιμοποιείται στις Ταλαντώσεις η φράση **ιδεατός λευκός θόρυβος** αντίστοιχα με τη φράση **ιδεατό λευκό φως** στην Οπτική, που κι αυτό δεν κάνει διάκριση συχνότητας  $\omega$ .

## A18.3. ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER

Στην ενότητα αυτή θα αναφέρουμε μερικές βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier.

### A18.3.1. Η γραμμική ιδιότητα

Πολλές ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace έχουν τις ανάλογές τους στο μετασχηματισμό Fourier. Η πιο βασική και πρακτικά χρήσιμη είναι η γραμμική ιδιότητα (ή γραμμικότητα)

$$\mathcal{F}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \mathcal{F}\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{F}\{f_2(t)\} = c_1 F_1(\omega) + c_2 F_2(\omega) \quad (18.3.1)$$

για το γραμμικό συνδυασμό  $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$  δύο συναρτήσεων  $f_1(t)$  και  $f_2(t)$  οι οποίες φυσικά υποτίθενται ότι διαθέτουν μετασχηματισμούς Fourier  $F_1(\omega)$  και  $F_2(\omega)$  αντίστοιχα. (Τα σύμβολα  $c_1$  και  $c_2$  δηλώνουν απλά πολλαπλασιαστικές σταθερές.) Η ιδιότητα αυτή είναι προφανής από τον ορισμό

του μετασχηματισμού Fourier  $\mathcal{F}$  μέσω του ολοκληρωτικού τύπου (18.1.3). Μπορεί να γραφεί και σε αντίστροφη μορφή (δηλαδή με αντίστροφους μετασχηματισμούς Fourier  $\mathcal{F}^{-1}$ ) ως εξής:

$$\mathcal{F}^{-1}\{c_1 F_1(\omega) + c_2 F_2(\omega)\} = c_1 \mathcal{F}^{-1}\{F_1(\omega)\} + c_2 \mathcal{F}^{-1}\{F_2(\omega)\} = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \quad (18.3.2)$$

με βάση και το θεμελιώδη ολοκληρωτικό τύπο (18.1.5) που δίνει τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier  $\mathcal{F}^{-1}$ . Επίσης προφανώς πολύ εύκολα η γραμμική ιδιότητα γενικεύεται και σε περισσότερες από δύο (σε  $n$ ) συναρτήσεις  $f_k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) με αντίστοιχες πολλαπλασιαστικές σταθερές  $c_k$ .

### A18.3.2. Μετάθεση χρόνου και συχνότητας

Μια άλλη, όχι όμως τόσο βασική, ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier αφορά στο μετασχηματισμό Fourier της συναρτήσεως  $f(t - t_0)$  με το  $t$  τη χρονική μεταβλητή και το  $t_0$  σταθερή χρονική στιγμή. Με  $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$  ισχύει (μετάθεση χρόνου, χρονική μετατόπιση)

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = e^{-i\omega t_0} F(\omega), \quad (18.3.3)$$

δηλαδή ο μετασχηματισμός Fourier  $\mathcal{F}\{f(t - t_0)\}$  της μετατοπισμένης συναρτήσεως  $f(t - t_0)$  ισούται με το μετασχηματισμό Fourier  $F(\omega)$  της αρχικής συναρτήσεως  $f(t)$ , αλλά πολλαπλασιασμένο επί τον εκθετικό παράγοντα  $e^{-i\omega t_0}$ . Δίνουμε και τη σχετική και μάλλον απλή απόδειξη, που βασίζεται βέβαια στον ορισμό (18.1.3) του μετασχηματισμού Fourier  $\mathcal{F}$ , αλλά και στην αλλαγή μεταβλητής

$$t - t_0 = \tau \implies t = \tau + t_0 \quad \text{και επίσης} \quad dt = d\tau. \quad (18.3.4)$$

**Απόδειξη:** Έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t - t_0)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega(\tau+t_0)} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} e^{-i\omega t_0} d\tau \\ &= e^{-i\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = e^{-i\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega t_0} F(\omega). \end{aligned} \quad (18.3.5)$$

Πήραμε στο τέλος υπόψη μας πως σε ένα ορισμένο ολοκλήρωμα δεν έχει σημασία η χρήση του συμβόλου  $t$  αντί για το  $\tau$  σαν μεταβλητής ολοκληρώσεως. Αυτή είναι η ιδιότητα που οδήγησε στα προηγούμενα παραδείγματα από το μετασχηματισμό Fourier (18.2.2) για την αρχική μας συνάρτηση  $p(t)$  με ορισμό της το (18.2.1) στο μετασχηματισμό Fourier (18.2.7) για τη μετατοπισμένη (κατά  $T_0/2$ ) συνάρτηση  $p^*(t)$  με ορισμό της το (18.2.6).  $\square$

Μια ανάλογη και κάπως αντίστροφη (μεταξύ των πεδίων του χρόνου  $t$  της αρχικής συναρτήσεως  $f(t)$  και της κυκλικής συχνότητας  $\omega$ , της μεταβλητής του μετασχηματισμού Fourier  $F(\omega)$  της  $f(t)$ ) είναι η εξής (η μετάθεση συχνότητας) με ενσωματωμένη την απλούστατη απόδειξή της:

$$\mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t} f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i\omega_0 t} f(t)] e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt = F(\omega - \omega_0). \quad (18.3.6)$$

Και πάλι βέβαια χρησιμοποιήσαμε το συμβολισμό  $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$  για το μετασχηματισμό Fourier.

### A18.3.3. Συνέλιξη και το θεώρημα της συνέλιξεως

Αρκετά πιο δύσκολη είναι η απόδειξη του θεωρήματος για το μετασχηματισμό Fourier της **συνελίξεως**

$$f * g \equiv (f * g)(t) \equiv f(t) * g(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad (18.3.7)$$

των συναρτήσεων  $f(t)$  και  $g(t)$ . Σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή ο μετασχηματισμός Fourier της συνέλιξεως  $f * g \equiv (f * g)(t) \equiv f(t) * g(t)$  των συναρτήσεων  $f(t)$  και  $g(t)$  ισούται απλά με το γινόμενο  $F(\omega)G(\omega)$  των αντίστοιχων μετασχηματισμών Fourier  $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$  και  $G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}$ , δηλαδή

$$\mathcal{F}\{(f * g)(t)\} := \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau\right\} = F(\omega)G(\omega). \quad (18.3.8)$$

Αντιστρέφοντας κατά Fourier, παίρνουμε

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)G(\omega)\} = (f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau. \quad (18.3.9)$$

Θα παραλειφθεί η σχετική και όχι ιδιαίτερα απλή απόδειξη. Σημειώνεται εντούτοις η αναλογία της ιδιότητας αυτής στη συνέλιξη με την αντίστοιχη ιδιότητα στο μετασχηματισμό Laplace  $\mathcal{L}$ . Παρατηρείται επίσης ότι στο μετασχηματισμό Fourier  $\mathcal{F}$  στα τρία παραπάνω συνελκτικά ολοκληρώματα (18.3.7) έως και (18.3.9) το διάστημα ολοκληρώσεως είναι το άπειρο διάστημα  $(-\infty, \infty)$  αντί για το πεπερασμένο διάστημα  $[0, t]$  στα αντίστοιχα συνελκτικά ολοκληρώματα που αφορούσαν στο μετασχηματισμό Laplace  $\mathcal{L}$ . Τώρα, δηλαδή στο μετασχηματισμό Fourier, το κάτω όριο ολοκληρώσεως είναι το  $-\infty$  (αντί για το 0 στο μετασχηματισμό Laplace). Επίσης το άνω όριο ολοκληρώσεως είναι το  $\infty$  (αντί για το  $t$  στο μετασχηματισμό Laplace). Μπορούμε να μιλάμε επομένως για άπειρη συνέλιξη στο μετασχηματισμό Fourier και αντίθετα για πεπερασμένη συνέλιξη στο μετασχηματισμό Laplace, εφόσον θέλουμε να είμαστε σαφείς. Και πραγματικά υπάρχει διαφορά!

Επομένως με τη χρήση του μετασχηματισμού Fourier  $\mathcal{F}$  μπορούμε να εξετάσουμε και αποκρίσεις  $u(t)$  μηχανικών συστημάτων με εξωτερικές δυνάμεις (φορτίσεις)  $p(t)$  που αρχίζουν από τη χρονική στιγμή  $t_0 = -\infty$  και όχι από τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$ , όπως συνέβαινε υποχρεωτικά στο μετασχηματισμό Laplace. Επίσης στο μετασχηματισμό Laplace χρησιμοποιούσαμε αρχικές συνθήκες (τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$ ), π.χ. την αρχική μετατόπιση  $u(0) = u_0$  και την αρχική ταχύτητα  $\dot{u}(0) = v_0$ . Εδώ στο μετασχηματισμό Fourier, όπως θα δούμε καλύτερα παρακάτω, δεν υπάρχουν αρχικές συνθήκες, πρακτικά γιατί η μέτρηση του χρόνου αρχίζει τη χρονική στιγμή  $t_0 = -\infty$ .

Ας αναφερθεί τέλος ότι η συνέλιξη  $f * g \equiv (f * g)(t) \equiv f(t) * g(t)$  των συναρτήσεων  $f(t)$  και  $g(t)$  έχει την **αντιμεταθετική** ιδιότητα. (Αυτή αποδεικνύεται πάρα πολύ εύκολα θέτοντας  $t - \tau = \eta$ , οπότε προκύπτει ότι  $\tau = t - \eta$  και  $d\tau = -d\eta$ .) Έχει επίσης την **προσεταιριστική** ιδιότητα καθώς και την **επιμεριστική** ιδιότητα. Πιο συγκεκριμένα στη συνέλιξη ισχύουν οι τρεις ιδιότητες

$$f * g = g * f, \quad (f * g) * h = f * (g * h), \quad f * (g + h) = f * g + f * h \quad (18.3.10)$$

(αντιμεταθετική, προσεταιριστική και επιμεριστική ιδιότητα αντίστοιχα) με  $h(t)$  μια τρίτη συνάρτηση της ίδιας μεταβλητής (έστω του χρόνου)  $t$ .

Είναι πάρα πολύ χρήσιμο το θεώρημα της συνέλιξεως για το μετασχηματισμό Fourier, ακριβώς όπως ήταν και το αντίστοιχο θεώρημα της συνέλιξεως για το μετασχηματισμό Laplace. Αυτό συμβαίνει κυρίως κατά την εύρεση αντίστροφων μετασχηματισμών Fourier  $f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}$  συναρτήσεων  $F(\omega)$  που έχουν τη μορφή γινομένου δύο απλούστερων για την αντιστροφή συναρτήσεων (π.χ.  $F(\omega) = R(\omega)S(\omega)$ ) ή γινομένου δύο μη απόλυτα καθορισμένων με κλειστό τύπο (αυθαίρετων, τυχαίων, δηλαδή οποιωνδήποτε) συναρτήσεων. Επιπλέον αρκετά ενδιαφέρονσα από φυσικής απόψεως στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού είναι και η αντιμεταθετική ιδιότητα  $f * g = g * f$ , που ήδη αναφέρθηκε. Εντούτοις δε θα επεκταθούμε στο θέμα αυτό.

#### A18.3.4. Μετασχηματισμοί Fourier των παραγώγων συναρτήσεως

Πρόκειται για τη θεμελιώδη ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier, ανάλογη με την αντίστοιχη ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace. Αυτή είναι κι η βασική ιδιότητα την οποία χρησιμοποιούμε σε μια γραμμική διαφορική εξίσωση (ή σε ένα αντίστοιχο σύστημα) για την εξάλειψη των παραγώγων, π.χ. ως προς τη χρονική ανεξάρτητη μεταβλητή  $t$ . Μετατρέπουμε έτσι τη διαφορική εξίσωση σε πρωτοβάθμια αλγεβρική εξίσωση με έναν άγνωστο: το μετασχηματισμό Fourier  $U(\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\}$  της άγνωστης συναρτήσεως (εξαρτημένης μεταβλητής)  $u(t)$  της διαφορικής εξισώσεως. Σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή με  $U(\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\}$  να δηλώνει το μετασχηματισμό Fourier της συναρτήσεως  $u(t)$ , ο μετασχηματισμός Fourier της  $n$ -στής παραγώγου  $u^{(n)}(t)$  της ίδιας συναρτήσεως  $u(t)$  δίνεται από τον τύπο

$$\mathcal{F}\{u^{(n)}(t)\} = (i\omega)^n U(\omega). \quad (18.3.11)$$

Ειδικεύοντας τώρα για  $n = 1, 2, 3$  και  $4$ , έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{u'(t)\} &= i\omega U(\omega), & \mathcal{F}\{u''(t)\} &= -\omega^2 U(\omega), \\ \mathcal{F}\{u'''(t)\} &= -i\omega^3 U(\omega), & \mathcal{F}\{u''''(t)\} &= \omega^4 U(\omega).\end{aligned}\quad (18.3.12)$$

Έτσι μια συνήθης γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές και με άγνωστη συνάρτηση τη  $u(t)$ , μόλις μετασχηματισθεί κατά Fourier, μετατρέπεται σε πρωτοβάθμια αλγεβρική εξίσωση ως προς το μετασχηματισμό Fourier  $F(\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\}$  της άγνωστης συναρτήσεως  $u(t)$ . Ανάλογα θεωρούμε μια γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές  $x$  και  $t$  και με άγνωστη συνάρτηση τη  $u = u(x, t)$ . Αυτή μετατρέπεται σε συνήθη διαφορική εξίσωση με ανεξάρτητη μεταβλητή τη  $x$  μόνο και με άγνωστη συνάρτηση το μετασχηματισμό Fourier  $U(x, \omega)$  της αρχικά άγνωστης συναρτήσεως  $u(x, t)$  των δύο μεταβλητών  $x$  και  $t$  ως προς τη μεταβλητή της  $t$ . Απολύτως ανάλογα θα ίσχυαν, εάν ο μετασχηματισμός Fourier εκτελείτο ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$  (αντί για την  $t$ ). Θεωρητικά, αν και όχι συχνά, ίσως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και δεύτερη φορά το μετασχηματισμό Fourier, ώστε να απαλειφθούν τελικά οι μερικές παράγωγοι της άγνωστης συναρτήσεως  $u(x, t)$  και ως προς τις δύο μεταβλητές της  $x, t$ .

Δεν πρέπει βέβαια ποτέ να διαφεύγει της προσοχής μας ότι ο μετασχηματισμός Fourier  $\mathcal{F}$  ορίζεται στο άπειρο διάστημα  $(-\infty, \infty)$ . Εκεί επομένως, σε μεταβλητές  $x, t$ , κλπ. που ορίζονται στο διάστημα αυτό  $(-\infty, \infty)$  σε μια διαφορική εξίσωση, πρέπει να περιορίζεται και η χρήση του εκτός βέβαια κι αν έχουμε τη δυνατότητα μαθηματικής (ασφαλώς όχι φυσικής) επεκτάσεως του διαστήματος μιας μεταβλητής. Παραδείγματος χάρη, για το ημίαπειρο διάστημα  $[0, \infty)$  κατάλληλος είναι συνήθως ο γνωστός μας μετασχηματισμός Laplace  $\mathcal{L}$  και όχι ο παρών μετασχηματισμός Fourier  $\mathcal{F}$ .

Θα αποδείξουμε (εύκολα μάλιστα) την πιο πάνω θεμελιώδη ιδιότητα (18.3.11) για την πρώτη παράγωγο  $u'(t)$ . Και πάλι με βάση τον ορισμό (18.1.3) του μετασχηματισμού Fourier  $\mathcal{F}$  έχουμε με τη χρήση ολοκληρώσεως κατά μέρη (ή ολοκληρώσεως κατά παράγοντες)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{u'(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} u'(t)e^{-i\omega t} dt = u(t)e^{-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u(t)(-i\omega e^{-i\omega t})dt \\ &= 0 + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i\omega t} dt = i\omega \mathcal{F}\{u(t)\} = i\omega U(\omega).\end{aligned}\quad (18.3.13)$$

Η ιδιότητα αυτή ισχύει μόνο υπό την προϋπόθεση μηδενισμού της συναρτήσεως  $u(t)$  για  $t \rightarrow \pm\infty$ . Πρέπει δηλαδή να ισχύει

$$u(\pm\infty) := \lim_{t \rightarrow \pm\infty} u(t) = 0. \quad (18.3.14)$$

Συνήθως αυτό πραγματικά συμβαίνει για τις τόσο απόμακρες χρονικές στιγμές  $t = \pm\infty$ .

Ανάλογα προχωράμε στη δεύτερη παράγωγο  $u''(t)$  θεωρώντας την σαν την πρώτη παράγωγο της πρώτης παραγώγου  $u'(t)$ , δηλαδή  $u''(t) = (u'(t))'$ . Τότε έχουμε με βάση τον τύπο (18.3.13), ο οποίος ήδη αποδείχθηκε, για την πρώτη παράγωγο  $u'(t)$ ,

$$\mathcal{F}\{u''(t)\} = i\omega \mathcal{F}\{u'(t)\} = i\omega[i\omega \mathcal{F}\{u(t)\}] = i\omega[i\omega U(\omega)] = -\omega^2 U(\omega), \quad (18.3.15)$$

επειδή  $i^2 = -1$ . Ανάλογες αποδείξεις είναι βέβαια δυνατές με όμοιο τρόπο και για κάθε άλλης τάξεως παράγωγο  $u^{(n)}(t)$ . Στην περίπτωση της δευτέρας παραγώγου  $u''(t)$  θα πρέπει φυσικά και η συνάρτηση  $u(t)$  και η πρώτη παράγωγός της  $u'(t)$  να μηδενίζονται και οι δύο για  $t \rightarrow \pm\infty$ :  $u(\pm\infty) = u'(\pm\infty) = 0$ . Ανάλογα για την  $n$ -στή παράγωγο  $u^{(n)}(t)$  ο γενικός τύπος (18.3.11) για το μετασχηματισμό Fourier της  $(i\omega)^n U(\omega)$  ισχύει υπό την προϋπόθεση όμως ότι τόσο η συνάρτηση  $u(t)$  όσο και οι  $n - 1$  πρώτες παράγωγοί της μηδενίζονται για  $t \rightarrow \pm\infty$ . Αυτοί οι μηδενισμοί για  $t \rightarrow \pm\infty$  υποτίθενται εκ των προτέρων ότι ισχύουν κατά την επίλυση μιας διαφορικής εξίσωσης με τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Fourier  $\mathcal{F}$ . Απομένει όμως να ελεγχθούν εκ των υστέρων, δηλαδή μετά την τελική εύρεση της λύσεως  $u(t)$  της ίδιας διαφορικής εξίσωσης.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ *A19*

## Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο κεφάλαιο αυτό θα εφαρμοσθεί η μέθοδος του μετασχηματισμού Fourier, η οποία αναπτύχθηκε θεωρητικά στο προηγούμενο Κεφάλαιο A18, στην επίλυση δύο μη ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων που παρουσιάζονται σε γραμμικά συστήματα του Πολιτικού Μηχανικού. Η πρώτη εφαρμογή αφορά στο μονοβάθμιο **μηχανικό σύστημα** μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα υπό αυθαίρετη μη περιοδική φόρτιση  $p(t)$ . Άγνωστη συνάρτηση  $u(t)$  είναι η μετατόπιση του υλικού σημείου. Η δεύτερη εφαρμογή αφορά σε μονοβάθμιο **υδατικό σύστημα** με εισροή και εκροή νερού που περιέχει ρύπο. Ο ρύπος αποδομείται με χημική αντίδραση πρώτης τάξεως και η συγκέντρωσή του  $c(t)$  στο νερό, που είναι και η άγνωστη συνάρτηση, είναι συνάρτηση μόνο του χρόνου  $t$ .

Και στις δύο εφαρμογές η επίλυση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier περιλαμβάνει τα εξής τρία βήματα: (α) Εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier στη διαφορική εξίσωση και αναγωγή της σε μια πρωτοβάθμια αλγεβρική εξίσωση με μετάβαση έτσι από το **πεδίο του χρόνου**  $t$  στο **πεδίο της συχνότητας**  $\omega$ . (β) Επίλυση της πρωτοβάθμιας αυτής αλγεβρικής εξισώσεως στο πεδίο της συχνότητας  $\omega$  ως προς το μετασχηματισμό Fourier της άγνωστης συναρτήσεως. (γ) Αντιστροφή του μετασχηματισμού αυτού Fourier και επιστροφή από το πεδίο της συχνότητας  $\omega$  στο πεδίο του χρόνου  $t$ . Η όλη διαδικασία παρουσιάζει αναλογία με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Τώρα όμως η εργασία γίνεται στο διάστημα  $(-\infty, \infty)$  και επίσης δεν υπάρχουν αρχικές συνθήκες για  $t = -\infty$ .

Η τελική λύση έχει τη μορφή συνελκτικού ολοκληρώματος αρκετά ανάλογο με εκείνο στο μετασχηματισμό Laplace. Σ' αυτό υπεισέρχεται και η **ωστική** (ή **κρουστική**) **απόκριση**  $g(t)$  (ή  $h(t)$ ). Αυτή είναι η απόκριση που αντιστοιχεί σε είσοδο την ωστική (ή κρουστική) συνάρτηση δέλτα του Dirac. Η ωστική απόκριση  $g(t)$  έχει μετασχηματισμό Fourier τη **μυγαδική συνάρτηση αποκρίσεως στο πεδίο της συχνότητας**  $G(\omega)$  (ή  $H(\omega)$ ):  $\mathcal{F}\{g(t)\} = G(\omega)$ . Η μέθοδος εργασίας στο πεδίο της συχνότητας  $\omega$  αποτελεί για τον Πολιτικό Μηχανικό μια γνωστή και ενδιαφέρουσα εναλλακτική μέθοδο εκείνης στο πεδίο του χρόνου  $t$ . Στο Κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε φυσικά την περίπτωση μη περιοδικών εισόδων. Γι' αυτές μόνο έχει νόημα η χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Fourier.

Πολύ συχνά η είσοδος είναι διαθέσιμη σε διακριτή μορφή. Τότε αντί για το μετασχηματισμό Fourier χρησιμοποιείται ο **διακριτός μετασχηματισμός Fourier (DFT)**. Επίσης τα ολοκληρώματα προσεγγίζονται με τη χρήση αριθμητικής ολοκληρώσεως. Μια πολύ οικονομική από υπολογιστικής απόψεως μέθοδο ευρέσεως του διακριτού μετασχηματισμού Fourier (DFT) και του αντιστρόφου του αποτελεί ο **ταχύς μετασχηματισμός Fourier (FFT)**. Τέλος μια ενδιαφέρουσα συγγενή δυνατότητα, με εργασία όμως μόνο στο πεδίο του χρόνου  $t$ , συνιστά η **διακριτή συνέλιξη**. Όλα αυτά αναπτύσσονται σύντομα στην τελευταία Ενότητα A19.3 αυτού του κεφαλαίου κι έχουν ευρύτατη εφαρμογή.

**A19.1. ΜΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΑΖΑΣ-ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ-ΑΠΟΣΒΕΣΤΗΡΑ****A19.1.1. Η διαφορική εξίσωση**

Μελετάμε και πάλι το κλασικό μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου  $M$  μάζας  $m$ , ελατηρίου  $S$  σταθεράς  $k$  και αποσβεστήρα  $D$  (με ιξώδη απόσβεση) σταθεράς  $c$  υπό αυθαίρετη (όχι συγκεκριμένη, τυχαία, οποιαδήποτε) μη περιοδική εξωτερική δύναμη (φόρτιση, διέγερση)  $p(t)$ . Η σχετική διαφορική εξίσωση έχει άγνωστη συνάρτηση τη μετατόπιση  $u(t)$  του υλικού σημείου  $M$  ως προς τη θέση ισορροπίας του  $u = 0$  και είναι γραμμική, δευτέρας τάξεως, πρώτου βαθμού, με σταθερούς συντελεστές και μη ομογενής φυσικά. Με βάση το διάσημο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα την προσδιορίσαμε ήδη στην Παράγραφο A6.1.1 του Κεφαλαίου A6, εξίσωση (6.1.3), στη μορφή

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t). \quad (19.1.1)$$

Στην Παράγραφο A6.1.2 του Κεφαλαίου A6 είχαμε την ευκαιρία να προσδιορίσουμε λεπτομερώς τη γενική λύση  $u_h(t)$  της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξισώσεως (δηλαδή με  $p(t) \equiv 0$ ). Αυτή αφορά στο μεταβατικό (ή παροδικό) φαινόμενο. Το φαινόμενο αυτό σβήνει, εξαλείφεται σχετικά γρήγορα με το χρόνο  $t$ , ανάλογα βέβαια και με το λόγο αποσβέσεως  $\xi = c/(2\sqrt{km})$ , λόγω της ιξώδους αποσβέσεως που υποθέσαμε. Αυτό εκφράζεται με τη σταθερά  $c$  στην πιο πάνω διαφορική εξίσωση (19.1.1). Στη συνέχεια στις Παραγράφους A6.1.3 και A6.1.4 προσδιορίσαμε τη μερική (ή ειδική) λύση  $u_p(t)$  της μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως (19.1.1) (δηλαδή με  $p(t) \neq 0$ ), αλλά για αρμονική (σνημιτονική ή ημιτονική) περιοδική φόρτιση. Τη λύση αυτή ήδη την επεκτείναμε σε αυθαίρετη περιοδική φόρτιση  $p_T(t)$  (με τη χρήση σειρών Fourier) στο Κεφάλαιο A17. Εδώ θα βρούμε την αντίστοιχη λύση  $u_p(t)$  για μη περιοδική φόρτιση  $p(t)$ . Θα εργασθούμε με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier  $\mathcal{F}$ , δηλαδή στο πεδίο της συχνότητας  $\omega$  αντί στο πεδίο του χρόνου  $t$ .

**A19.1.2. Μετασχηματισμός Fourier της διαφορικής εξισώσεως**

Καταρχήν μετασχηματίζουμε κατά Fourier την πιο πάνω γραμμική διαφορική εξίσωση (19.1.1) και στο αριστερό μέλος της και στο δεξιό δηλώνοντας με  $U(\omega)$  και  $P(\omega)$  τους μετασχηματισμούς Fourier της άγνωστης συναρτήσεως  $u(t)$  (δηλαδή της μετατοπίσεως του υλικού σημείου  $M$ ) και της εξωτερικής δυνάμεως  $p(t)$  (της μη περιοδικής φορτίσεως) αντίστοιχα, δηλαδή

$$U(\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\}, \quad P(\omega) = \mathcal{F}\{p(t)\}. \quad (19.1.2)$$

Χρησιμοποιούμε επίσης και τη γραμμική ιδιότητα (18.3.1) του μετασχηματισμού Fourier καθώς και τους δύο πρώτους από τους τύπους (18.3.12) για τους μετασχηματισμούς Fourier των δύο πρώτων παραγώγων  $\dot{u}(t)$  και  $\ddot{u}(t)$  της συναρτήσεως  $u(t)$ , οι οποίες υπεισέρχονται στη διαφορική εξίσωση (19.1.1). Μετασχηματίζοντας έτσι κατά Fourier τη γραμμική διαφορική εξίσωση (19.1.1), οδηγούμαστε εύκολα στην πρωτοβάθμια αλγεβρική εξίσωση

$$-m\omega^2 U(\omega) + ic\omega U(\omega) + kU(\omega) = P(\omega) \implies (-m\omega^2 + ic\omega + k)U(\omega) = P(\omega) \quad (19.1.3)$$

ως προς το μετασχηματισμό Fourier  $U(\omega)$  της άγνωστης συναρτήσεως (της μετατοπίσεως)  $u(t)$ .

Η πρωτοβάθμια αυτή αλγεβρική εξίσωση (19.1.3) λύνεται ευκολότατα ως προς τον άγνωστο μετασχηματισμό Fourier  $U(\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\}$ . Η λύση της  $U(\omega)$  είναι

$$U(\omega) = \frac{P(\omega)}{-m\omega^2 + ic\omega + k} = \frac{P(\omega)}{m(-\omega^2 + 2i\xi\omega_0\omega + \omega_0^2)} \quad (19.1.4)$$

με τη χρήση και των δύο γνωστών μας βοηθητικών συμβόλων

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{και} \quad \xi = \frac{c}{2m\omega_0} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (19.1.5)$$

(φυσική κυκλική συχνότητα  $\omega_0$  του αντίστοιχου χωρίς απόσβεση μηχανικού συστήματος και λόγος αποσβέσεως  $\xi$  αντίστοιχα). Τα δύο αυτά σύμβολα τα ορίσαμε ήδη στην Παράγραφο A6.1.1,



στις σχέσεις (6.1.7), και τα χρησιμοποιήσαμε εκτενώς, π.χ. στο ξαναγράψιμο της διαφορικής εξίσωσης (6.1.3) (επίσης (19.1.1)) στη νέα της μορφή (6.1.8). Την επαναλαμβάνουμε και αυτή

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0\dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = \frac{\rho(t)}{m}. \quad (19.1.6)$$

Φυσικά, μόλις μετασχηματίσουμε κατά Fourier την τροποποιημένη αυτή γραμμική διαφορική εξίσωση (19.1.6), οδηγούμαστε άμεσα στη δεύτερη μορφή της λύσεως (19.1.4) για τον άγνωστο μετασχηματισμό Fourier  $U(\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\}$ .

**A19.1.3. Η μιγαδική συνάρτηση αποκρίσεως**

Η πιο πάνω λύση (19.1.4) για το μετασχηματισμό Fourier  $U(\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\}$  μπορεί να γραφεί απλούστερα με τη χρήση της **μιγαδικής συναρτήσεως αποκρίσεως στο πεδίο της συχνότητας** (ή απλά **μιγαδικής συναρτήσεως αποκρίσεως**)  $G(\omega)$  (ή  $H(\omega)$ ).

► **Παρατήρηση A19.1:** Επαναλαμβάνουμε πως γενικά ο Πολιτικός Μηχανικός χρησιμοποιεί το σύμβολο  $H(\omega)$  για τη μιγαδική συνάρτηση αποκρίσεως στο πεδίο της συχνότητας  $\omega$ . Εδώ όμως χρησιμοποιούμε το εναλλακτικό σύμβολο  $G(\omega)$ . Έτσι θα αποφευχθεί κάθε πιθανή σύγχυση με τη βηματική συνάρτηση του Heaviside  $H(t)$ , που ορίστηκε στην Παράγραφο A10.3.4, σχέση (10.3.47).

Τη μιγαδική συνάρτηση αποκρίσεως στο πεδίο της συχνότητας  $G(\omega)$  την έχουμε ήδη εισαγάγει στην Παράγραφο A6.1.6 με βάση τον τύπο 6.1.73) ή ισοδύναμα (6.1.74). Έχουμε επομένως

$$G(\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + i c \omega + k} = \frac{1}{m(-\omega^2 + 2i\xi\omega_0\omega + \omega_0^2)} = \frac{1}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\xi\omega_0\omega}. \quad (19.1.7)$$

Τώρα η λύση (19.1.4) παίρνει άμεσα την απλούστερη μορφή

$$U(\omega) = G(\omega)P(\omega) \quad (19.1.8)$$

με βάση τη μιγαδική αυτή συνάρτηση αποκρίσεως  $G(\omega)$  στο παρόν μηχανικό σύστημα.

Μετασχηματίσαμε επομένως τη γραμμική διαφορική εξίσωση (19.1.1) (ή την ισοδύναμή της διαφορική εξίσωση (19.1.6)) κατά Fourier φυσικά χωρίς αρχικές συνθήκες και έχοντας έμμεσα υποθέσει ότι  $u(\pm\infty) = \dot{u}(\pm\infty) = 0$ , ώστε να ισχύουν οι δύο πρώτοι τύποι (18.3.12). Στη συνέχεια λύσαμε ως προς  $U(\omega)$  την πρωτοβάθμια αλγεβρική εξίσωση (19.1.3) που προέκυψε και βρήκαμε τη λύση (19.1.4) και τελικά (19.1.8) στην τελευταία μορφή της με τη χρήση της μιγαδικής συναρτήσεως αποκρίσεως  $G(\omega)$ . Έχοντας μετασχηματίσει κατά Fourier, βρισκόμαστε τώρα στο πεδίο της κυκλικής συχνότητας  $\omega$ . Απομένει η επιστροφή στο πεδίο του χρόνου  $t$ , από το οποίο και ξεκινήσαμε με τη διαφορική εξίσωση (19.1.1), ισοδύναμα (19.1.6).

**A19.1.4. Η συνελικτική λύση και η ωστική (ή κρουστική) απόκριση**

Η επιστροφή στο πεδίο του χρόνου  $t$  επιτυγχάνεται με την αντιστροφή κατά Fourier  $\mathcal{F}^{-1}$  της τελικής λύσεως (19.1.8). Στη λύση αυτή έχουμε στο δεξιό μέλος το γινόμενο των δύο γνωστών μετασχηματισμών Fourier  $G(\omega)$  και  $P(\omega)$ . Είναι επομένως σκόπιμη η χρήση του θεωρήματος της συνελίξεως για το μετασχηματισμό Fourier στη μορφή του (18.3.9). Με βάση το θεώρημα αυτό ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της σχέσεως (19.1.8) δίνει εύκολα

$$u(t) = (g * p)(t) = (p * g)(t) \equiv p(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau)g(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)p(\tau) d\tau. \quad (19.1.9)$$

Στο αποτέλεσμα αυτό λάβαμε μάλιστα υπόψη και την αντιμεταθετική ιδιότητα (την πρώτη ιδιότητα (18.3.10)) της συνελίξεως και, κάτι το τετριμμένο, στο τέλος και την αντιμεταθετική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό. Στην πιο πάνω λύση (19.1.9) το σύμβολο  $g(t)$  δηλώνει προφανώς τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της μιγαδικής συναρτήσεως αποκρίσεως  $G(\omega)$  στο πεδίο της συχνότητας, συγκεκριμένα με βάση τους τύπους (18.1.5) και (18.1.3) του μετασχηματισμού Fourier  $\mathcal{F}$

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{i\omega t} d\omega \iff G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (19.1.10)$$

Άρα οι δύο συναρτήσεις  $g(t)$  και  $G(\omega)$  αποτελούν ζεύγος αντίστοιχων συναρτήσεων στο μετασχηματισμό Fourier  $\mathcal{F}$ , η πρώτη  $g(t)$  στο πεδίο του χρόνου  $t$ , ενώ η δεύτερη  $G(\omega)$  στο πεδίο της κυκλικής συχνότητας  $\omega$ . Τη δεύτερη συνάρτηση, τη  $G(\omega)$ , ήδη την αποκαλέσαμε μιγαδική συνάρτηση αποκρίσεως (εννοείται στο πεδίο της συχνότητας  $\omega$  και για το μηχανικό σύστημά μας). Την πρώτη συνάρτηση  $g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(\omega)\}$  την αποκαλούμε **ωστική απόκριση** (ή **κρουστική απόκριση**) εννοείται στο πεδίο του χρόνου  $t$  και πάλι του ίδιου μηχανικού συστήματός μας. Γιατί άραγε αυτός ο χαρακτηρισμός της συναρτήσεως  $g(t)$ ;

Η απάντηση είναι απλά ότι αν θεωρούσαμε για φόρτιση  $p(t)$  την ωστική (ή κρουστική) συνάρτηση  $\delta(t)$  του Dirac (που παριστάνει ώθηση, κρούση ακριβώς τη χρονική στιγμή  $t = 0$ ), τότε, όπως γνωρίζουμε, ο μετασχηματισμός Fourier της είναι η μονάδα. Αυτό ήδη διαπιστώθηκε με οριακή διαδικασία στην Παράγραφο A18.2.3 με τελικό τύπο τον (18.2.10):  $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$ . Ακόμη πιο συγκεκριμένα για  $p(t) = \delta(t)$  έχουμε

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t} dt = 1 \implies \mathcal{F}\{p(t)\} = P(\omega) = 1 \quad (19.1.11)$$

στην περίπτωση αυτή. Άρα για  $p(t) = \delta(t)$

$$U(\omega) = G(\omega)P(\omega) = G(\omega) \cdot 1 = G(\omega) \quad (19.1.12)$$

στη σχέση (19.1.8). Επομένως, εάν αντιστρέψουμε κατά Fourier τη μιγαδική συνάρτηση αποκρίσεως  $G(\omega)$ , παίρνουμε την ωστική (ή κρουστική) απόκριση  $g(t)$  λόγω της ωστικής (ή κρουστικής) φορτίσεως  $p(t) = \delta(t)$  που ήδη υποθέσαμε.

Με μια κάπως διαφορετική (αλλ' ισοδύναμη) διατύπωση η ωστική (ή κρουστική) απόκριση  $g(t)$  επαληθεύει προφανώς (εξ ορισμού της) τη διαφορική εξίσωση (19.1.1) για  $p(t) = \delta(t)$ , δηλαδή

$$m\ddot{g}(t) + c\dot{g}(t) + kg(t) = \delta(t). \quad (19.1.13)$$

Γι' αυτό και η συνάρτηση  $g(t)$  καλείται ωστική (ή κρουστική) απόκριση: γιατί είναι η απόκριση του μηχανικού συστήματος που οφείλεται στην ωστική (ή κρουστική) εξωτερική δύναμη (φόρτιση, διέγερση)  $\delta(t)$  ακριβώς τη χρονική στιγμή  $t = 0$ . Μετασχηματίζοντας επομένως κατά Fourier τη διαφορική αυτή εξίσωση (19.1.13), διαπιστώνουμε άμεσα ότι

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = \frac{1}{-m\omega^2 + ic\omega + k} \implies \mathcal{F}\{g(t)\} = G(\omega) \quad (19.1.14)$$

λόγω και της πρώτης εκφράσεως (19.1.7) της μιγαδικής συναρτήσεως αποκρίσεως  $G(\omega)$ .

Αναφέρουμε επίσης ότι η έκφραση της ωστικής (ή κρουστικής) αποκρίσεως  $g(t)$  είναι πολύ γνωστή για το κλασικό μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα που μελετάμε. Αυτή έχει την ακόλουθη μορφή (όπως μπορεί αρκετά εύκολα να προκύψει με τη μέθοδο της Ενότητας A11.10) για ασθενή απόσβεση ( $0 < \xi < 1$ ), η οποία είναι και η συνηθισμένη περίπτωση για τον Πολιτικό Μηχανικό:

$$g(t) = \frac{1}{m\omega_D} e^{-\xi\omega_0 t} \sin \omega_D t \quad \text{με} \quad \omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}, \quad 0 < \xi < 1, \quad t \geq 0, \quad (19.1.15)$$

ενώ μηδενίζεται για  $t < 0$ . Ο μηδενισμός αυτός (για  $t < 0$ ) είναι εύλογος. Τούτο συμβαίνει, γιατί η ωστική (ή κρουστική) απόκριση  $g(t)$  (σε μοναδιαία ώθηση ή κρούση  $\delta(t)$  που εφαρμόζεται ακριβώς τη χρονική στιγμή  $t = 0$ ) δε μπορεί παρά να μηδενίζεται τις χρονικές στιγμές  $t < 0$ . Δηλαδή  $g(t) = 0$  πριν από τη στιγμή  $t = 0$  της στιγμιαίας επιβολής της μοναδιαίας ωστικής (ή κρουστικής) φορτίσεως  $\delta(t)$  (συνάρτησεως δέλτα του Dirac). Επίσης σε περίπτωση μηδενικής αποσβέσεως ( $c = 0$ , ισοδύναμα  $\xi = 0$ , οπότε και  $\omega_D = \omega_0$ ) η παραπάνω έκφραση (19.1.15) της ωστικής αποκρίσεως  $g(t)$  μπορεί να πάρει την απλούστερη μορφή (11.10.5) της Ενότητας A11.10

$$g(t) = \frac{1}{m\omega_0} \sin \omega_0 t, \quad \xi = 0, \quad t \geq 0. \quad (19.1.16)$$

Προφανώς η μορφή αυτή δεν παρουσιάζει απόσβεση με το χρόνο  $t$ .

Είναι ιδιαίτερα σκόπιμο να ληφθεί υπόψη ο μηδενισμός της ωστικής (ή κρουστικής) αποκρίσεως  $g(t)$  (ή  $h(t)$ ) στο συνελκτικό ολοκληρωτικό τύπο (19.1.9) που βρήκαμε για την απόκριση  $u(t)$  του μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος υπό αυθαίρετη (τυχαία) φόρτιση  $p(t)$  που εξετάζουμε. Αυτό ισχύει, επειδή  $g(t) = 0$  για  $t < 0$ . Κατά συνέπεια  $g(t - \tau) = 0$  για  $t - \tau < 0$ , δηλαδή για  $\tau > t$ . Άρα ο συνελκτικός τύπος (19.1.9), ο θεμελιώδης τύπος που δίνει την απόκριση  $u(t)$  του μηχανικού συστήματος υπό αυθαίρετη (οποιαδήποτε, τυχαία) φόρτιση  $p(t)$ , παίρνει την απλούστερη μορφή

$$u(t) = \int_{-\infty}^t g(t - \tau)p(\tau) d\tau. \tag{19.1.17}$$

Άνω όριο ολοκληρώσεως είναι η χρονική στιγμή  $t$ , ακριβώς όπως συμβαίνει και στο μετασχηματισμό Laplace. Κάτω όριο ολοκληρώσεως συνεχίζει όμως να είναι (και πολύ σωστά μάλιστα!) το  $-\infty$ . Μόνο αν η εξωτερική δύναμη (η φόρτιση)  $p(t)$  άρχιζε να εφαρμόζεται τη χρονική στιγμή  $t = 0$  (όντας μηδενική για αρνητικές χρονικές στιγμές  $t < 0$ ), τότε μόνο το κάτω όριο ολοκληρώσεως θα είχε αντικατασταθεί από το μηδέν. Στην ειδική αυτή περίπτωση ο παραπάνω τελικός ολοκληρωτικός τύπος (19.1.17), στον οποίο καταλήξαμε, θα συνέπιπτε με το ολοκλήρωμα Duhamel

$$u(t) = \int_0^t g(t - \tau)p(\tau) d\tau. \tag{19.1.18}$$

Τη συνελκτική αυτή λύση ήδη την προσδιορίσαμε με τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων καθώς και με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace (για μηδενικές αρχικές συνθήκες). Επαναλαμβάνουμε όμως ότι ο συνελκτικός τύπος (19.1.17) (με κάτω όριο ολοκληρώσεως το  $-\infty$ ) είναι γενικότερος, όπως ήδη εξηγήσαμε, και επίσης δεν υπάρχουν αρχικές συνθήκες για  $t = -\infty$ .

## A19.2. ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ: ΑΠΟΔΟΜΗΣΗ ΡΥΠΟΥ

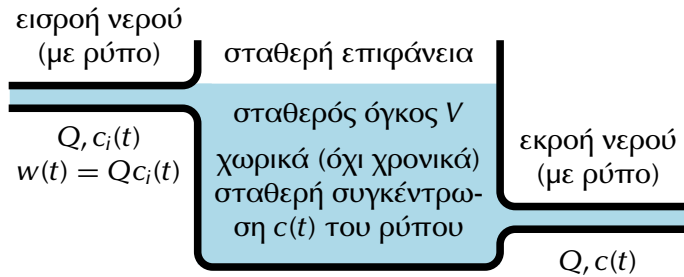
### A19.2.1. Το φυσικό πρόβλημα

Στην Ενότητα A4.1 του Κεφαλαίου A4 είχαμε μελετήσει την αποδόμηση ρύπου A πρώτης τάξεως μέσα σε δοχείο (Σχήμα A4.1) με σταθερή ποσότητα νερού και με πλήρη ανάμειξη του ρύπου: ομοιόμορφη **συγκέντρωση**  $c(t)$  του ρύπου μέσα στο δοχείο. Στην Παράγραφο A4.1.1 υποθέσαμε επίσης **αποδόμηση** (διάσπαση, χημική καταστροφή) του ρύπου με **μονόδρομη χημική αντίδραση πρώτης τάξεως**  $A \rightarrow B$  με **σταθερά του ρυθμού αποδομήσεως**  $k$ . Καταλήξαμε έτσι στη λύση  $c(t) = c_0 e^{-kt}$  της σχετικής διαφορικής εξίσωσης  $\dot{c}(t) = -kc(t)$  με  $c_0 := c(0)$  την αρχική συγκέντρωση του ρύπου στο δοχείο. Ωραία, πολύ ωραία! Ας γενικεύσουμε τώρα το πρόβλημα με εισροή και εκροή νερού (μαζί με ρύπο) αντιμετωπίζοντάς το με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier.

Θεωρούμε τώρα ένα γενικότερο **υδατικό σύστημα** που δεν είναι απλό δοχείο, αλλά έχει **εισροή (ροή εισόδου)** του νερού  $Q$  και **εκροή (ροή εξόδου)** του νερού επίσης  $Q$  (Σχήμα A19.1 στην επόμενη σελίδα). Άρα δε συγκεντρώνεται νερό στο «δοχείο» μας, όπου ο όγκος του νερού θεωρείται σταθερός:  $V$ . Το νερό που εισρέει περιέχει ένα συγκεκριμένο ρύπο A με συγκέντρωση  $c_i(t)$ , που εισέρχεται κι αυτός στο «δοχείο» μαζί με το νερό. Εκεί αποδομείται (διασπάται, καταστρέφεται) εν μέρει πάλι με τον ίδιο τρόπο που περιγράψαμε. Στη συνέχεια εξέρχεται από το «δοχείο» (μαζί με το νερό). Στο «δοχείο» μας υποθέτουμε και πάλι πλήρη ανάμειξη του ρύπου, δηλαδή χωρική σταθερή συγκέντρωσή του  $c(t)$ . Αυτή θα είναι η συγκέντρωση του ρύπου και κατά την εκροή του νερού από το «δοχείο». Όλα αυτά, ξαναλέμε, φαίνονται στο Σχήμα A19.1 της επόμενης σελίδας.

Πριν προχωρήσουμε, σκόπιμο είναι να εξηγήσουμε λιγάκι τα εισαγωγικά στη λέξη «δοχείο». Τί μπορεί να είναι το «δοχείο» μας αυτό; (α) Ένα κοινό δοχείο, μικρό ή μεγάλο με σωλήνες εισροής και εκροής του νερού. (β) Ένας **αντιδραστήρας CSTR** ή **CMFR**: αντιδραστήρας **συνεχούς τροφοδοτήσεως** και **πλήρους αναμείξεως** στον Καθαρισμό Νερού. (γ) Ένας αντίστοιχος αντιδραστήρας στον καθαρισμό **υγρών αποβλήτων**, που πάλι περιέχουν ένα ρύπο A (κι άλλους ρύπους φυσικά!).

(δ) Μια φυσική λίμνη, όπου εισρέει το νερό από έναν ποταμό και εκρέει σε άλλο ποταμό. (ε) Ένας **ταμιευτήρας** νερού, δηλαδή μια **δεξαμενή** συγκεντρώσεως του νερού, συνήθως μέσω φράγματος, όπως είναι η τεχνητή λίμνη του Μόρνου ή η τεχνητή λίμνη του Μαραθώνα, από όπου υδρεύεται η Αθήνα. (στ) Ή ακόμη πιο τεχνητές δεξαμενές, όπως είναι μια δεξαμενή από σκυρόδεμα σε ένα ύψωμα ή σε έναν **υδατόπυργο** που υδρεύει μια πόλη, μια κωμόπολη ή ένα μεγάλο χωριό.



**Σχήμα A19.1:** Υδατικό σύστημα το οποίο περιέχει έναν ομοιόμορφα κατανεμημένο ρύπο με συγκέντρωση  $c(t)$ . Υπάρχει εισροή και εκροή του νερού που μεταφέρει το ρύπο. Ο ρύπος επίσης αποδομείται μέσω χημικής αντίδρασης πρώτης τάξεως. Άγνωστη συνάρτηση είναι η συγκέντρωση  $c(t)$  του ρύπου στο υδατικό μας σύστημα.

Είχαμε λοιπόν **μηχανικά συστήματα**, π.χ. το μηχανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα ή ένα κτίριο ιδεατό ή μη. Εδώ απλά διαπιστώνουμε ότι ανάλογα έχουμε βέβαια και **υδατικά συστήματα**, όπως αυτά που αναφέραμε λίγο πιο πάνω: φυσικά και τεχνητά. Προχωράμε τώρα!

**A19.2.2. Κατάστροση της διαφορικής εξίσωσης**

Υπό τις συνθήκες που ήδη αναφέραμε σκοπεύουμε να καταστρώσουμε τη διαφορική εξίσωση που ισχύει για το πιο πάνω «δοχείο» μας ως προς τη συγκέντρωση  $c(t)$  του ρύπου μέσα στο δοχείο (και στο σημείο εκροής του νερού βέβαια). Θα πρέπει απλά να εφαρμόσουμε **ισοζύγιο μάζας** ως προς το ρύπο  $A$  που θεωρούμε. (Δε θα προτιμούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τη φράση **διατήρηση μάζας**, επειδή έχουμε και αποδόμηση του ρύπου. Άρα η μάζα του ρύπου στο **υδατικό σύστημα** δε διατηρείται: μειώνεται. Η διαφορά μάζας μετατρέπεται σε παράγωγα  $B$  της αποδομίσσεως.)

Για να το δούμε αυτό το ισοζύγιο μάζας. Απλά έχουμε για το υδατικό σύστημα που θεωρούμε:

**Συσσώρευση ρύπου στο «δοχείο» = Είσοδος ρύπου – Έξοδος ρύπου + Παραγωγή ρύπου**

στη μονάδα του χρόνου, π.χ. ανά sec. (Δηλαδή πρόκειται για *ρυθμούς* συσσωρεύσεως, εισόδου, εξόδου και παραγωγής του ρύπου  $A$ .) Και τώρα ας γίνουμε σαφέστεροι:

Ως προς τη συσσώρευση του ρύπου στο «δοχείο» αυτή είναι ίση με την παράγωγο  $\dot{c}(t)$  της συγκεντρώσεως  $c(t)$  του ρύπου στο νερό μέσα στο «δοχείο» επί τον όγκο  $V$  του νερού στο «δοχείο», δηλαδή  $V\dot{c}(t)$ . Ως προς την είσοδο του ρύπου στο δοχείο αυτή είναι  $w(t)$  (μάζα ανά μονάδα χρόνου). Αν η συγκέντρωση του ρύπου στο νερό που εισρέει μέσα στο δοχείο είναι  $c_i(t)$ , θα έχουμε

$$w(t) = Qc_i(t) \tag{19.2.1}$$

με  $Q$  την παροχή του νερού (και στην είσοδο και στην έξοδο του «δοχείου»). Με όμοια συλλογιστική ως προς την έξοδο του ρύπου από το «δοχείο» αυτή θα είναι  $Qc(t)$ , μια που η συγκέντρωση  $c(t)$  του ρύπου σ’ ολόκληρο το δοχείο είναι σταθερή, άρα και στην εκροή του νερού από αυτό. Τέλος ως προς την παραγωγή ρύπου στο δοχείο, αυτή είναι βέβαια αρνητική:  $-kVc(t) = -kVc(t)$ , αφού υποθέσαμε αποδόμηση του ρύπου με χημική αντίδραση πρώτης τάξεως, όπως ήδη εξηγήσαμε.

Κατά συνέπεια το πιο πάνω ισοζύγιο μάζας του ρύπου στο «δοχείο» παίρνει τώρα τη μορφή της ακόλουθης μη ομογενούς γραμμικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξεως:

$$V \frac{dc(t)}{dt} = w(t) - Qc(t) - kVc(t) \quad \text{ισοδύναμα} \quad V\dot{c}(t) + (Q + kV)c(t) = w(t), \tag{19.2.2}$$

όπου, υπενθυμίζεται,  $w(t) = Qc_i(t)$ . Την ίδια διαφορική εξίσωση τη γράφουμε και στη μορφή

$$V\dot{c}(t) + Kc(t) = w(t) \quad \text{με} \quad K := Q + kV. \tag{19.2.3}$$

Τη διαφορική αυτή εξίσωση μπορούμε να τη λύσουμε σαν μια μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως απευθείας ή με τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace στο χρονικό διάστημα  $[0, \infty)$  μαζί με την αρχική συνθήκη  $c(0) = c_0$ . Εδώ θα θεωρήσουμε όλο το χρονικό διάστημα  $(-\infty, \infty)$  χωρίς καμία αρχική συνθήκη. Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier μεταβαίνοντας από το πεδίο του χρόνου  $t$  στο πεδίο της συχνότητας  $\omega$  κι επιστρέφοντας μετά στο πεδίο του χρόνου  $t$ . Ο τρόπος εργασίας μας είναι απόλυτα ανάλογος με εκείνο της προηγούμενης Ενότητας A19.1 για τη μη περιοδική φόρτιση μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα. Εδώ όμως το σύστημά μας είναι υδατικό (όχι μηχανικό) και η διαφορική εξίσωση (19.2.3) μόλις πρώτης τάξεως. Η «φόρτιση» του υδατικού μας συστήματος είναι η  $w(t)$  (ρυθμός εισερχόμενης μάζας ρύπου: g/sec). Αυτή θεωρείται μια αυθαίρετη μη περιοδική συνάρτηση του χρόνου  $t$ . Αν ήταν περιοδική συνάρτηση του χρόνου  $t$ , θα έπρεπε, όπως ξέρουμε, να εργασθούμε με τη χρήση σειρών Fourier (αντί μετασχηματισμού Fourier). Αυτό ακριβώς κάναμε στο Κεφάλαιο A17, εκεί όμως για περιοδική φόρτιση  $\rho(t)$  του κλασικού τριπαραμετρικού μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα.

**A19.2.3. Μετασχηματισμός Fourier και επίλυση της διαφορικής εξίσωσης**

Όπως ακριβώς κάναμε στην Παράγραφο A19.1.2 της προηγούμενης Ενότητας A19.1, καταρχήν μετασχηματίζουμε κατά Fourier τη γραμμική διαφορική εξίσωση (19.2.3) και στα δύο μέλη της. Δηλώνουμε με  $C(\omega)$  και  $W(\omega)$  τους μετασχηματισμούς Fourier της άγνωστης συναρτήσεως  $c(t)$  (της συγκεντρώσεως του ρύπου  $A$  που εξετάζουμε στο νερό) και του ρυθμού εισόδου  $w(t)$  του ρύπου αντίστοιχα, δηλαδή

$$C(\omega) = \mathcal{F}\{c(t)\}, \quad W(\omega) = \mathcal{F}\{w(t)\}. \tag{19.2.4}$$

Χρησιμοποιούμε βέβαια και τη γραμμική ιδιότητα (18.3.1) του μετασχηματισμού Fourier καθώς και τον πρώτο από τους τύπους (18.3.12) για το μετασχηματισμό Fourier της πρώτης παραγώγου  $\dot{c}(t)$  της συναρτήσεως  $c(t)$ , που υπεισέρχεται στη διαφορική εξίσωση (19.2.3). (Φυσικά υποθέτουμε ότι  $c(\pm\infty) = 0$ .) Με τον τρόπο αυτό μετασχηματίζουμε κατά Fourier τη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (19.2.3). Έτσι οδηγούμαστε εύκολα στην πρωτοβάθμια αλγεβρική εξίσωση

$$iV\omega C(\omega) + KC(\omega) = W(\omega) \implies (iV\omega + K)C(\omega) = W(\omega) \tag{19.2.5}$$

ως προς το μετασχηματισμό Fourier  $C(\omega) = \mathcal{F}\{c(t)\}$  της άγνωστης συγκεντρώσεως  $c(t)$  του ρύπου. Αυτή η πρωτοβάθμια αλγεβρική εξίσωση (19.2.5) λύνεται πάρα πολύ εύκολα ως προς τον άγνωστο μετασχηματισμό Fourier  $C(\omega) = \mathcal{F}\{c(t)\}$  με αποτέλεσμα

$$C(\omega) = \frac{W(\omega)}{iV\omega + K} = G(\omega)W(\omega) \quad \text{με} \quad G(\omega) := \frac{1}{iV\omega + K}. \tag{19.2.6}$$

Η συνάρτηση αυτή  $G(\omega)$  δηλώνει και εδώ, ακριβώς όπως συνέβαινε και στην προηγούμενη Ενότητα A19.1, τη **μιγαδική συνάρτηση αποκρίσεως στο πεδίο της συχνότητας**  $\omega$  ή απλούστερα **μιγαδική συνάρτηση αποκρίσεως**. (Πολύ συχνά χρησιμοποιείται γι' αυτήν και το σύμβολο  $H(\omega)$ .)

Έχουμε τώρα καταλήξει εδώ σε μια απόλυτα ανάλογη λύση με τη λύση (19.1.8) στην προηγούμενη Ενότητα A19.1, εδώ βέβαια για το μετασχηματισμό Fourier  $C(\omega) = \mathcal{F}\{c(t)\}$  στο πεδίο της συχνότητας  $\omega$ . Για να επιστρέψουμε στο πεδίο του χρόνου  $t$ , δηλαδή για να βρούμε την αληθινή συγκέντρωση  $c(t)$  του ρύπου στο νερό μέσα στο «δοχείο» μας, θα πρέπει να αντιστρέψουμε το μετασχηματισμό Fourier  $C(\omega) = \mathcal{F}\{c(t)\}$ , τον οποίο μόλις βρήκαμε. Όμως ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier  $c(t) = \mathcal{F}^{-1}\{C(\omega)\}$  με  $C(\omega)$  το γινόμενο  $G(\omega)W(\omega)$  σημαίνει απλά ένα συνελκτικό ολοκλήρωμα σύμφωνα με το θεώρημα της συνελίξεως (18.3.9) στο μετασχηματισμό Fourier. Επομένως, ακριβώς όπως και στην προηγούμενη εφαρμογή στην Ενότητα A19.1, παίρνουμε τελικά

$$c(t) = (g * w)(t) = (w * g)(t) \equiv w(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)g(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)w(\tau) d\tau. \tag{19.2.7}$$

Πρόκειται βέβαια για τον ίδιο ακριβώς τύπο (19.1.9) (με μικροδιαφορές στα σύμβολα) της λύσεως της προηγούμενης εφαρμογής, εδώ όμως για το παρόν υδατικό σύστημα που εξετάζουμε.

Φυσικά στον τύπο αυτό  $g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(\omega)\}$  είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της μιγαδικής συναρτήσεως αποκρίσεως  $G(\omega)$  στο πεδίο της συχνότητας  $\omega$ . Αυτή είναι η **ωστική απόκριση** (ή **κρουστική απόκριση**) του υδατικού συστήματος που μελετάμε. Και τί σημαίνει εδώ ωστική απόκριση; Μα είναι η απόκριση, όταν η είσοδος είναι η ωστική (ή κρουστική) συνάρτηση δέλτα του Dirac:  $w(t) = \delta(t)$ . Δηλαδή, με πάρα πολύ απλά λόγια είναι η απόκριση  $c(t)$ , όταν μια μοναδιαία μάζα ρύπου (1 g ρύπου) εισέρχεται όλη μαζί στο «δοχείο» μας τη χρονική στιγμή  $t = 0$ .

#### A19.2.4. Υπολογισμός της ωστικής αποκρίσεως

Για να υπολογίσουμε την ωστική απόκριση  $g(t)$ , θα πρέπει να αντιστρέψουμε κατά Fourier τη σχετική μιγαδική συνάρτηση αποκρίσεως στο πεδίο της συχνότητας  $G(\omega) := 1/(iV\omega + K)$  στη δεξιά σχέση (19.2.6). Αυτό μπορεί να γίνει σχετικά εύκολα με τη χρήση: (α) ενός πίνακα μετασχηματισμών Fourier ή (β) ενός προγράμματος συμβολικών υπολογισμών, όπως είναι η *Mathematica*. Προκύπτει

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{iV\omega + K}\right\} = \frac{1}{V} e^{-Kt/V} H(t) \quad (19.2.8)$$

με  $H(t)$  τη γνωστή μας βηματική συνάρτηση του Heaviside (Παράγραφος A10.3.4). Άρα η ωστική απόκριση  $g(t)$  στη λύση (19.2.7) (μέσω συνελκτικού ολοκληρώματος) είναι τώρα απόλυτα γνωστή.

Ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού της ίδιας ακριβώς ωστικής αποκρίσεως  $g(t)$  είναι με την επίλυση της διαφορικής μας εξίσωσης (19.2.3) με δεξιό μέλος την ωστική συνάρτηση  $\delta(t)$  του Dirac. Έχουμε λοιπόν να επιλύσουμε τη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως

$$V\dot{g}(t) + Kg(t) = \delta(t). \quad (19.2.9)$$

Η συνάρτηση  $\delta(t)$  στο δεξιό μέλος είναι μια γενικευμένη συνάρτηση με έντονη ιδιομορφία για  $t = 0$ . Κατάλληλη μέθοδος είναι πέρα από τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier, στην οποία ήδη αναφερθήκαμε, και η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace. Δηλώνουμε με  $G_L(s)$  το μετασχηματισμό Laplace της ωστικής αποκρίσεως  $g(t)$ . Γνωρίζουμε επίσης από το Κεφάλαιο A10 ότι  $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$  και ότι  $\mathcal{L}\{\dot{g}(t)\} = sG_L(s)$ , αφού εδώ  $g(0) = 0$ . Με αυτές τις γνώσεις και τη γραμμική ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace η διαφορική εξίσωση (19.2.9) μετασχηματίζεται κατά Laplace ως εξής:

$$VsG_L(s) + KG_L(s) = 1 \implies (Vs + K)G_L(s) = 1. \quad (19.2.10)$$

Επομένως

$$G_L(s) = \frac{1}{Vs + K} = \frac{1}{V} \frac{1}{s + \frac{K}{V}}. \quad (19.2.11)$$

Αντιστρέφοντας κατά Laplace, προκύπτει

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G_L(s)\} = \frac{1}{V} e^{-Kt/V} H(t) \quad (19.2.12)$$

με  $H(t)$  τη βηματική συνάρτηση του Heaviside. Πρέπει να παρουσιάζεται οπωσδήποτε η συνάρτηση του Heaviside στην ωστική απόκριση  $g(t)$ . Αυτό συμβαίνει, επειδή η συνάρτηση  $g(t)$  πρέπει να μηδενίζεται κάθε χρονική στιγμή  $t$  προγενέστερη από τη στιγμή  $t = 0$  εφαρμογής της ωστικής συναρτήσεως  $\delta(t)$  του Dirac. Εδώ αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει η συγκέντρωση  $c(t)$  του ρύπου στο «δοχείο» να είναι μηδενική πριν από τη χρονική στιγμή  $t = 0$  εισαγωγής του ρύπου μοναδιαίας μάζας (1 g), που εκφράζεται στο παρόν πρόβλημα από την ωστική συνάρτηση δέλτα του Dirac:  $\delta(t)$ .

► **Παρατήρηση A19.2:** Παρατηρούμε τέλος ότι ισχύει κι η τεχνική ερμηνεία της λύσεως (19.2.7) σαν υπέρθεση εισαγωγών στοιχειωδών μαζών  $dm(\tau) = w(\tau)d\tau$  τη χρονική στιγμή  $\tau$  με αποκρίσεις  $g(t - \tau)dm(\tau) = g(t - \tau)w(\tau)d\tau$  με το χρονικό διάστημα  $d\tau$  απειροστό. Επίσης η παρουσία της βηματικής συναρτήσεως του Heaviside  $H(t)$  στην ωστική απόκριση  $g(t)$  δηλώνει ότι το άνω όριο ολοκληρώσεως στη λύση (19.2.7) είναι ουσιαστικά το  $t$ , δηλαδή  $\tau \leq t$ , ώστε  $t - \tau \geq 0$  και  $H(t - \tau) = 1$ .

### A19.3. ΔΙΑΚΡΙΤΟΣ ΚΑΙ ΤΑΧΥΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER, ΔΙΑΚΡΙΤΗ ΣΥΝΕΛΙΞΗ

#### A19.3.1. Ανάλυση στο πεδίο της συχνότητας με μετασχηματισμό Fourier

Στις δύο προηγούμενες ενότητες διαπιστώσαμε τη χρησιμότητα του μετασχηματισμού Fourier (προηγούμενο Κεφάλαιο A18) στην επίλυση πρακτικών προβλημάτων σε γραμμικά συστήματα (με μη περιοδική είσοδο) της Επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού (π.χ. σε μηχανικά ή υδατικά συστήματα): (α) Σε μηχανικό σύστημα στην Ενότητα A19.1 και (β) Σε υδατικό σύστημα στην Ενότητα A19.2. Και στις δύο περιπτώσεις οι λύσεις ήσαν πανομοιότυπες. Τα βήματα είναι τρία:

**Βήμα 1:** Υπολογισμός του μετασχηματισμού Fourier  $P(\omega) = \mathcal{F}\{p(t)\}$  (ή  $W(\omega) = \mathcal{F}\{w(t)\}$  αντίστοιχα) της μη περιοδικής εισόδου στο μηχανικό σύστημα (υδατικό σύστημα), δηλαδή της φορτίσεως (ρυθμού εισόδου ρύπου). Για τον υπολογισμό αυτό χρησιμοποιείται ο ολοκληρωτικός τύπος

$$P(\omega) = \mathcal{F}\{p(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)e^{-i\omega t} dt \quad \text{ή} \quad W(\omega) = \mathcal{F}\{w(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} w(t)e^{-i\omega t} dt \quad (19.3.1)$$

(με βάση τον τύπο (18.1.3) ορισμού του μετασχηματισμού Fourier) για το μηχανικό και το υδατικό σύστημα αντίστοιχα.

**Βήμα 2:** Τώρα, υποθέτοντας γνωστή τη μιγαδική συνάρτηση αποκρίσεως στο πεδίο της συχνότητας  $G(\omega)$  (ή ισοδύναμα  $H(\omega)$ ), υπολογισμός του μετασχηματισμού Fourier της αποκρίσεως

$$U(\omega) = G(\omega)P(\omega) \quad \text{ή} \quad C(\omega) = G(\omega)W(\omega) \quad (19.3.2)$$

για το μηχανικό και το υδατικό σύστημα αντίστοιχα: τύποι (19.1.8) και (19.2.6) αντίστοιχα.

**Βήμα 3:** Τέλος υπολογισμός της ίδιας της αποκρίσεως με αντιστροφή αυτού του μετασχηματισμού Fourier της (ολοκληρωτικός τύπος αντιστροφής (18.1.5))

$$u(t) = \mathcal{F}^{-1}\{U(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad \text{ή} \quad c(t) = \mathcal{F}^{-1}\{C(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (19.3.3)$$

ξανά για το μηχανικό και το υδατικό σύστημα που έχουμε μελετήσει αντίστοιχα.

Το Βήμα 2 είναι κυριολεκτικά αστείο: πολλαπλασιασμός δύο γνωστών μετασχηματισμών Fourier. Ωραία! Δυστυχώς όμως το Βήμα 1 απαιτεί τον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος: για τον ευθύ μετασχηματισμό Fourier της εισόδου στο σύστημα: σχέσεις (19.3.1). Ανάλογα και το Βήμα 3: αυτό όμως για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της εξόδου του συστήματος: σχέσεις (19.3.3).

Δεν είναι απλά θέμα υπολογισμού δύο ολοκληρωμάτων, κάτι που μπορεί να είναι μαθηματικά δύσκολο, εξαιρετικά δύσκολο ή (συνήθως) αδύνατο. Το θέμα είναι ότι στην πράξη του Πολιτικού Μηχανικού η είσοδος  $p(t)$  (ή  $w(t)$ ) είναι συνήθως γνωστή αριθμητικά μόνο σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές  $t_k$  στο χρονικό διάστημα  $[0, T_d]$ , όπου υφίσταται η είσοδος αυτή. Δηλαδή συνήθως δεν είναι γνωστή υπό τη μορφή συναρτήσεως. Αυτό ισχύει για τα ψηφιακά καταγραφικά μηχανήματα, αλλά και τα αναλογικά κι αυτά δε δίνουν στον Πολιτικό Μηχανικό κάποια μαθηματική συνάρτηση. Και σ' αυτά το μόνο ουσιαστικό που μπορεί να κάνει ο Πολιτικός Μηχανικός είναι να πάρει τις τιμές της εισόδου ανά τακτά πάρα πολύ μικρά χρονικά διαστήματα  $\Delta t$ . Για παράδειγμα, σε ένα σεισμό η επιτάχυνση του εδάφους  $a(t) = \ddot{u}_g(t)$  (που προσδιορίζεται στο **επιταχυνσιογράφημα**) αποτελεί ουσιαστικά τη φόρτιση  $p(t)$  ενός μονώροφου κτιρίου. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται πως ισχύει η σχέση  $p(t) = -ma(t) = -m\ddot{u}_g(t)$  με  $m$  τη συγκεντρωμένη στο ύψος της πλάκας μάζα της πλάκας και των υποστυλωμάτων. Η επιτάχυνση  $a(t) = \ddot{u}_g(t)$  του εδάφους είναι συνεχώς διαθέσιμη γραφικά στο χρονικό διάστημα  $[0, T_d]$  του σεισμού. Μπορεί να γίνει διαθέσιμη και αριθμητικά (για τον υπολογιστή), αλλά μόνο σε συγκεκριμένες και συνήθως χρονικά ισαπέχουσες (κατά  $\Delta t$ ) στιγμές.

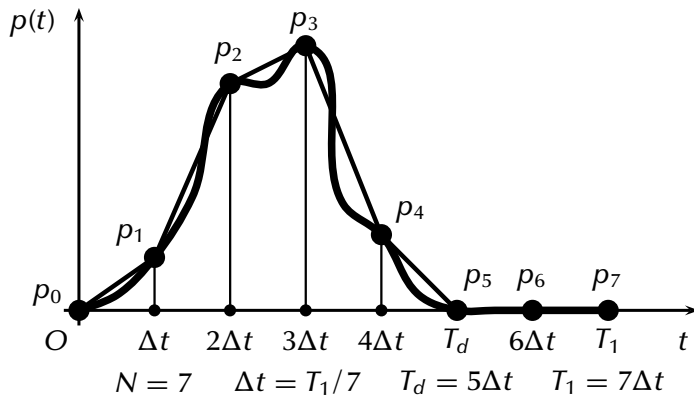
Και ακριβώς σ' αυτό το σημείο, όπου δεν υπάρχει έτσι κι αλλιώς καμία απολύτως δυνατότητα αναλυτικού υπολογισμού του μετασχηματισμού Fourier (19.3.1) ή του αντιστρόφου του (19.3.3), έρχεται αρωγός, να βοηθήσει ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier (discrete Fourier transform, DFT).

**A19.3.2. Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier**

Υποθέτουμε πως η είσοδος  $p(t)$  (ανάλογα η  $w(t)$ ) μας είναι γνωστή αριθμητικά σε ισαπέχουσες χρονικές στιγμές (ανά  $\Delta t$ , π.χ. ανά 10 msec, 50 msec ή 1 sec) του χρονικού διαστήματος  $[0, T_d]$  (π.χ. της διάρκειας  $T_d$  του σεισμού). Και προηγουμένως (για  $t < 0$ ) και μετά (για  $t > T_d$ ) η είσοδος αυτή  $p(t)$  θεωρείται πρακτικά μηδενική:  $p(t) = 0$  για  $t \notin [0, T_d]$  (Σχήμα A19.2). Άρα γνωρίζουμε αριθμητικά τις τιμές  $p_k := p(t_k)$  της εισόδου  $p(t)$  τις χρονικές στιγμές  $t_k := k\Delta t$  με  $k = 0, 1, 2, \dots$

Υπό τις συνθήκες αυτές ο μετασχηματισμός Fourier στην πρώτη (ή στη δεύτερη) σχέση (19.3.1) θα έχει σαν διάστημα ολοκληρώσεως το διάστημα  $[0, T_d]$  της διάρκειας της εισόδου. Το διάστημα αυτό είναι εντελώς ανεπαρκές για τον Πολιτικό Μηχανικό, επειδή αυτός ζητάει την απόκριση του συστήματος. Αυτή συνήθως διαρκεί πολύ περισσότερο χρόνο από την είσοδο. Για παράδειγμα, η απόκριση ενός κτιρίου σε σεισμό διαρκεί πολύ περισσότερο χρόνο από το σεισμό, ιδίως μάλιστα αν το κτίριο δεν έχει μεγάλο λόγο αποσβέσεως  $\xi$ . (Μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν και αποσβεστήρες.) Άρα ο Πολιτικός Μηχανικός προσαυξάνει το  $T_d$  κατά  $T_e$  (συνήθως με  $T_e > T_d$ , πολύ μεγαλύτερο) και παίρνει σαν διάστημα ολοκληρώσεως το διάστημα  $[0, T_1]$  με  $T_1 = T_d + T_e$ , παρόλο που ξέρι καλά ότι  $p(t) = 0$  στο διάστημα  $(T_d, T_e]$ . Εννοείται ότι το τελικό διάστημα  $T_1$  είναι τέτοιο, ώστε να ισχύει  $T_1 = N\Delta t$  με το  $N$  θετικό ακέραιο αριθμό και  $\Delta t$  το διάστημα δειγματοληψίας ή απλά διαθεσιμότητας αριθμητικών τιμών για την είσοδο  $p(t)$ . Άρα η πρώτη σχέση (19.3.1) γράφεται

$$P(\omega) = \int_0^{T_1} p(t)e^{-i\omega t} dt \quad \text{με} \quad T_1 = T_d + T_e. \tag{19.3.4}$$



**Σχήμα A19.2:** Η συνάρτηση  $p(t)$  (η είσοδος) διάρκειας  $T_d$  και η προσέγγισή της με τη χρήση του κανόνα του τραπεζίου (ή τραπεζοειδούς κανόνα) για την αριθμητική ολοκλήρωση. Με τον τρόπο αυτό θα προσδιορισθεί ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier της στο διάστημα  $[0, T_1]$  που ενδιαφέρει σε ένα γραμμικό μηχανικό ή υδατικό σύστημα. Τελικά θα προσδιορισθεί και η έξοδος ή απόκριση του συστήματος.

Στο σημείο αυτό είναι προφανές ότι γνωρίζοντας την είσοδο  $p(t)$  υπό τη μορφή αριθμητικών τιμών  $p_0, p_1, \dots, p_N$  με  $p_k := p(t_k)$  και  $t_k := k\Delta t$ , μοναδική ουσιαστικά δυνατότητά μας αποτελεί ο προσεγγιστικός υπολογισμός του ολοκληρώματος με τη χρήση αριθμητικής ολοκλήρωσεως. Κάνουμε το διαμερισμό  $(0, t_1, t_2, \dots, t_N)$  (με  $t_N = T_1$ ) του διαστήματος  $[0, T_1]$  σε  $N$  υποδιαστήματα, το καθένα μήκους  $\Delta t = T_1/N$  (Σχήμα A19.2). Είναι τότε προφανές ότι το ολοκλήρωμα (19.3.4) θα είναι προσεγγιστικά ίσο με το άθροισμα των προσημασμένων «εμβαδών» των σχετικών  $N$  ορθογωνίων με βάση  $\Delta t$  και μιγαδικό «ύψος»  $p(t_k)e^{-i\omega t_k} := p_k e^{-i\omega t_k}$  (με  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ ). Δηλαδή

$$P(\omega) \approx \sum_{k=0}^{N-1} p_k e^{-i\omega t_k} \Delta t = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} p_k e^{-i\omega t_k} \quad \text{με} \quad \Delta t = \frac{T_1}{N}, \quad t_k := k\Delta t \quad \text{και} \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \tag{19.3.5}$$

(Εννοείται βέβαια ότι αφού  $T_1 > T_d$ , οι τελευταίες τιμές  $p_k$  θα είναι μηδενικές.)

Στο διακριτό μετασχηματισμό Fourier περιορίζουμε την προσοχή μας στις (κυκλικές) συχνότητες

$$\omega_n = n\omega_1 \quad \text{με} \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \quad \text{και} \quad n = 0, 1, \dots, N - 1. \tag{19.3.6}$$

Με βάση τον τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσεως στην αριστερή σχέση (19.3.5) και την απλή σχέση

$$-i\omega_n t_k = -in\omega_1 k\Delta t = -in \frac{2\pi}{T_1} k \frac{T_1}{N} = -\frac{2\pi i k n}{N} \quad \text{με} \quad i = \sqrt{-1} \quad \text{και} \quad k, n = 0, 1, \dots, N - 1 \tag{19.3.7}$$



παίρνουμε το **διακριτό μετασχηματισμό Fourier** της συναρτήσεως  $p(t)$

$$P_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} p_k e^{-2\pi i k n / N} \quad \text{με} \quad P_n \approx \frac{P(\omega_n)}{T_1} \quad \text{και} \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (19.3.8)$$

(Για διευκόλυνσή μας στο διακριτό μετασχηματισμό Fourier έγινε η διαίρεση δια  $T_1$ :  $P_n := P(\omega_n)/T_1$ .)

Αυτές ακριβώς οι  $N$  τιμές  $P_n$  ( $n = 0, 1, \dots, N-1$ ) συνιστούν το διακριτό μετασχηματισμό Fourier της συναρτήσεως  $p(t)$ , που χρειαζόμαστε στο Βήμα 1 (σχέσεις (19.3.1)) της μεθόδου που εκθέσαμε για τον προσδιορισμό της εξόδου (αποκρίσεως)  $u(t)$ . Έτσι εργασθήκαμε με διακριτό μετασχηματισμό Fourier αντί με τον (ολοκληρωτικό) μετασχηματισμό Fourier, τον οποίο ήδη ξέραμε. Δηλαδή κάναμε **διακριτοποίηση** τόσο ως προς το χρόνο  $t$  όσο και ως προς τη συχνότητα  $\omega$  (αποκόπτοντας επίσης τις συχνότητες  $\omega$  από μια κατάλληλη συχνότητα  $\omega_\alpha$  και πάνω). Έτσι προσεγγίσαμε το ολοκλήρωμα του μετασχηματισμού Fourier με άθροισμα  $N$  όρων: χρησιμοποιήσαμε αριθμητική ολοκλήρωση. Γενικά μεγαλύτερο  $N$  (μικρότερο  $\Delta t = T_1/N$ ) οδηγεί σε ακριβέστερα αποτελέσματα.

Εντελώς ανάλογα υπολογίζουμε και το διακριτό μετασχηματισμό Fourier  $G_n$  της κρουστικής (ή ωστικής) αποκρίσεως  $g(t)$ . Και αυτόν το χρησιμοποιούμε στο αμέσως επόμενο Βήμα 2.

Στο Βήμα 2 απλά πολλαπλασιάζουμε τους μετασχηματισμούς Fourier  $G(\omega)$  και  $P(\omega)$  και παίρνουμε  $U(\omega) = G(\omega)P(\omega)$  (πρώτη σχέση (19.3.2)). Εμείς εδώ ενδιαφερόμαστε για τις διακριτές συχνότητες (κυκλικές συχνότητες)  $\omega_n = n\omega_1 = 2\pi n/T_1$ . Με τον τρόπο αυτό παίρνουμε

$$U_n = G_n P_n \quad \text{με} \quad U_n \approx \frac{U(\omega_n)}{T_1}, \quad G_n \approx \frac{G(\omega_n)}{T_1} \quad \text{και} \quad \text{με} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (19.3.9)$$

για το διακριτό μετασχηματισμό Fourier της εξόδου (αποκρίσεως)  $u(t)$ .

Τέλος στο Βήμα 3 απαιτείται η αντιστροφή ενός διακριτού μετασχηματισμού Fourier, εδώ του  $U_n$  (με  $n = 0, 1, \dots, N-1$ ). Οι σχέσεις (19.3.8) μας δίνουν τον (ευθύ) διακριτό μετασχηματισμό Fourier  $P_n$  (με  $n = 0, 1, \dots, N-1$ ) της εισόδου  $p(t)$ . Μπορεί σχετικά εύκολα να αποδειχθεί με επίλυση του συστήματος των  $N$  γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (19.3.8) ως προς  $p_k$  (με  $k = 0, 1, \dots, N-1$ ) ότι ο **αντίστροφος διακριτός μετασχηματισμός Fourier**  $p_k$  έχει τη μορφή

$$p_k = \sum_{n=0}^{N-1} P_n e^{2\pi i k n / N} \quad \text{με} \quad i = \sqrt{-1} \quad \text{και} \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (19.3.10)$$

Επομένως οι  $N$  γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις (19.3.8): ο **διακριτός μετασχηματισμός Fourier (discrete Fourier transform, DFT)**  $P_n$  και οι  $N$  εξισώσεις (19.3.10): ο **αντίστροφος διακριτός μετασχηματισμός Fourier (inverse DFT, IDFT)**  $p_k$  είναι κι αυτές κατά κάποιον τρόπο «αντίστροφες». Συγκεκριμένα μπορεί να αποδειχθεί πως η λύση του γραμμικού αλγεβρικού συστήματος (19.3.8) είναι η (19.3.10), ενώ η λύση του γραμμικού αλγεβρικού συστήματος (19.3.10) είναι η (19.3.8).

### A19.3.3. Ανάλυση στο πεδίο της συχνότητας με διακριτό μετασχηματισμό Fourier

Συνεχίζουμε να εργαζόμαστε στο **πεδίο της συχνότητας**  $\omega$  έχοντας μεταβεί σ' αυτό από το αρχικό (και λίγο πιο φυσικό) **πεδίο του χρόνου**  $t$ . Στο τέλος βέβαια επανερχόμαστε στο πεδίο του χρόνου  $t$ . Στην Παράγραφο A19.3.1 είχαμε περιγράψει τα τρία βήματα εργασίας με τη χρήση του (ολοκληρωτικού) μετασχηματισμού Fourier. Γράψαμε ολοκληρωτικού, για να δηλώσουμε την ύπαρξη ολοκληρώματος προς αντιδιαστολή (για να τονισθεί η διαφορά του) από το διακριτό μετασχηματισμό Fourier. Αυτός έχει άθροισμα αντί για ολοκλήρωμα. Και βέβαια έχει άθροισμα, απλά επειδή κάναμε αριθμητική ολοκλήρωση! Τώρα ξαναπεριγράφουμε τα ίδια ακριβώς τρία βήματα, αλλ' εδώ με τη χρήση του διακριτού μετασχηματισμού Fourier της αμέσως προηγούμενης Παραγράφου A19.3.2. Πριν καν ξεκινήσουμε, υπενθυμίζουμε ότι η είσοδος  $p(t)$  (π.χ. η φόρτιση ενός μηχανικού συστήματος) δεν είναι περιοδική και είναι μη μηδενική μόνο στο διάστημα  $[0, T_d]$ . Υπενθυμίζουμε επίσης ότι εργαζόμαστε στο διάστημα  $[0, T_1]$  με  $T_1 = T_d + T_e > T_d$ , πολύ μεγαλύτερο. Πάμε!

**Βήμα 1:** Υπολογισμός του διακριτού μετασχηματισμού Fourier  $P_n$  (ή  $W_n$  αντίστοιχα) της εισόδου στο μηχανικό σύστημα (υδατικό σύστημα), δηλαδή της φορτίσεως (του ρυθμού εισόδου ρύπου). Για τον υπολογισμό αυτό χρησιμοποιείται ο τύπος

$$P_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} p_k e^{-2\pi i k n / N} \quad \text{ή} \quad W_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w_k e^{-2\pi i k n / N} \quad \text{με} \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (19.3.11)$$

Αυτός βασίζεται στον τύπο (19.3.8) ορισμού του διακριτού μετασχηματισμού Fourier (DFT) για το μηχανικό και το υδατικό σύστημα που εξετάσαμε στις Ενότητες A19.1 και A19.2 αντίστοιχα.

Απόλυτα ανάλογος υπολογισμός και του διακριτού μετασχηματισμού Fourier  $G_n$  (ή  $H_n$ ) της ωστικής (ή κρουστικής) αποκρίσεως  $g(t)$  (ή  $h(t)$ ) του μηχανικού συστήματος (ή υδατικού συστήματος) που θεωρείται γνωστή συνάρτηση.

**Βήμα 2:** Τώρα, έχοντας γνωστούς και τους δύο διακριτούς μετασχηματισμούς Fourier (DFT) (α) της εισόδου  $p(t)$  ή  $w(t)$ :  $P_n$  ή  $W_n$  αντίστοιχα και (β) της ωστικής (ή κρουστικής) αποκρίσεως  $g(t)$  (ή  $h(t)$ ):  $G_n$  (ή  $H_n$ ), υπολογισμός του διακριτού μετασχηματισμού Fourier της αποκρίσεως (19.3.9)

$$U_n = G_n P_n \quad \text{ή} \quad C_n = G_n W_n \quad \text{με} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (19.3.12)$$

για το μηχανικό και το υδατικό σύστημα αντίστοιχα.  $N$  απλοί μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί είναι! Εντούτοις ο κάθε μιγαδικός πολλαπλασιασμός  $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$  είναι υπολογιστικά ισοδύναμος με τέσσερις πραγματικούς πολλαπλασιασμούς: τους  $x_1 x_2$ ,  $x_1 y_2$ ,  $y_1 x_2$  και  $y_1 y_2$ . Δεν είναι έτσι;

**Βήμα 3:** Τέλος υπολογισμός της ίδιας της εξόδου (της αποκρίσεως)  $u(t)$  (στα συγκεκριμένα και ισαπέχοντα σημεία  $t_k = k\Delta t$  με  $k = 0, 1, \dots, N-1$ ) με αντιστροφή αυτού του διακριτού μετασχηματισμού Fourier  $U_n$  ή  $C_n$  με βάση τον τύπο (19.3.10). Έτσι παίρνουμε

$$u_k = \sum_{n=0}^{N-1} U_n e^{2\pi i k n / N} \quad \text{ή} \quad c_k = \sum_{n=0}^{N-1} C_n e^{2\pi i k n / N} \quad \text{με} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (19.3.13)$$

ξανά για το μηχανικό και το υδατικό σύστημα που έχουμε μελετήσει αντίστοιχα.

► **Παρατήρηση A19.3:** Φυσικά τα Βήματα 2 και 3 συνήθως συμπύσσονται σε ένα μόνο βήμα:

$$u_k = \sum_{n=0}^{N-1} G_n P_n e^{2\pi i k n / N} \quad \text{ή} \quad c_k = \sum_{n=0}^{N-1} G_n W_n e^{2\pi i k n / N} \quad \text{με} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (19.3.14)$$

και είναι απόλυτα λογικό αυτό.

► **Παρατήρηση A19.4:** Η έξοδος  $u_k := u(t_k) = u(k\Delta t)$  (μετατόπιση) ή  $c_k := c(t_k) = c(k\Delta t)$  (συγκέντρωση ρύπου) που προσδιορίζεται στο Βήμα 3 με τη χρήση αντίστροφου διακριτού μετασχηματισμού Fourier (inverse DFT) είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου  $t$ . Αυτό συμβαίνει, επειδή

$$e^{2\pi i(k+N)n/N} = e^{2\pi i k n / N + 2\pi i n} = e^{2\pi i k n / N} e^{2\pi i n} = e^{2\pi i k n / N}, \quad \text{αφού} \quad e^{2\pi i n} = 1. \quad (19.3.15)$$

Δηλαδή μετά από χρόνο  $t_N = N\Delta t = NT_1/N = T_1$  επαναλαμβάνεται η τιμή  $u_k$ :  $u_{k+N} = u_k$ . Δε μας πολυαρέσει αυτό, γιατί εδώ είχαμε μη περιοδική είσοδο (φόρτιση  $p(t)$  ή ρυθμό εισόδου ρύπου  $w(t)$ ). Κατά συνέπεια ελπίζαμε και σε μη περιοδική έξοδο (μετατόπιση  $u(t)$  ή συγκέντρωση ρύπου  $c(t)$ ). Μάταιες οι ελπίδες μας! Πήραμε περιοδική έξοδο, αλλά ... Αλλά τί; Αλλ' εμείς τα αποτελέσματά μας πίσω στο πεδίο του χρόνου  $t$  μετά την αντιστροφή (19.3.13) του διακριτού μετασχηματισμού Fourier (19.3.12) μπορούμε θαυμάσια να τα χρησιμοποιήσουμε αποκλειστικά στο διάστημα  $[0, T_1]$ . Απορρίπτουμε έτσι την από 'κει και πέρα περιοδικότητά τους με περίοδο  $T_1$ , κάτι που σίγουρα δεν είναι σωστό από φυσικής απόψεως: είναι απλά συνέπεια της αριθμητικής ολοκλήρωσής.

► **Παρατήρηση A19.5:** Ας σημειώσουμε επίσης ότι αυτή η απροσδόκητη περιοδικότητα με περίοδο  $T_1$  (που δεν τη χρησιμοποιούμε έτσι κι αλλιώς: είναι λάθος) οφείλεται στην αριθμητική ολοκλήρωση που έχει γίνει στο διακριτό μετασχηματισμό Fourier (19.3.11). Έτσι φθάσαμε σ' αυτόν

από τον ακριβή (ολοκληρωτικό) μετασχηματισμό Fourier (19.3.1). Ανάλογα ισχύουν βέβαια και για τον αντίστροφο διακριτό μετασχηματισμό Fourier.

► **Παρατήρηση A19.6:** Από την άλλη πλευρά οι ίδιοι τύποι για το διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT) μπορούν να προκύψουν και με τη χρήση της μιγαδικής (ή εκθετικής) σειράς Fourier. Αυτήν τη μελετήσαμε στην Ενότητα A17.3 του Κεφαλαίου A17. Αυτό συμβαίνει, μόνο εφόσον εμείς υποθέσουμε από πριν τη συνάρτηση  $p(t)$  που θέλουμε να μετασχηματίσουμε κατά Fourier σαν περιοδική συνάρτηση (με περίοδο  $T_1$ ), ενώ δεν είναι!, και επιπλέον χρησιμοποιήσουμε αριθμητική ολοκλήρωση για τον υπολογισμό των σχετικών συντελεστών. Εδώ προτιμήσαμε την κατευθείαν χρήση αριθμητικής ολοκλήρωσης πάνω στο ίδιο το ολοκλήρωμα του μετασχηματισμού Fourier. Τούτο το θεωρούμε εκπαιδευτικά και ουσιαστικά προτιμότερο για μη περιοδική συνάρτηση  $p(t)$ , που δε διαθέτει σειρά Fourier, αλλά μόνο μετασχηματισμό Fourier. (Αυτός είναι και ο λόγος που μιλάμε για διακριτό μετασχηματισμό Fourier!) Δεν αποφύγαμε βέβαια την «παρενέργεια» της περιοδικότητας του αντίστροφου διακριτού μετασχηματισμού Fourier  $P_n$  (με περίοδο  $T_1$ ) που προέκυψε έτσι.

► **Παρατήρηση A19.7:** Στην ενότητα αυτή θεωρήσαμε διαθέσιμη την ωστική (ή κρουστική) απόκριση  $g(t)$  γενικά από ένα πείραμα προσδιορισμού της (π.χ. σε ένα αληθινό κτίριο) ή αναλυτικά και κάναμε διακριτό μετασχηματισμό Fourier όχι μόνο για την είσοδο  $p(t)$  του συστήματος, αλλά και για την ωστική (ή κρουστική) απόκριση  $g(t)$ . Έτσι έχουμε διαθέσιμες τις αριθμητικές τιμές  $G_n$ , ώστε να τις χρησιμοποιήσουμε στις σχέσεις (19.3.12) και (19.3.13) ή απλά στη σχέση (19.3.14) για την εύρεση της αποκρίσεως με αντίστροφο διακριτό μετασχηματισμό Fourier (inverse DFT, IDFT). Μια εναλλακτική δυνατότητα είναι να χρησιμοποιήσουμε κατευθείαν το σχετικό συνελκτικό ολοκληρωτικό τύπο (19.1.9), (19.1.17) ή (19.2.7). Έτσι δουλεύουμε κατευθείαν στο πεδίο του χρόνου  $t$  και αποφεύγουμε εντελώς το πεδίο της συχνότητας  $\omega$ . Αυτό θα το δούμε στη μεθεπόμενη Παράγραφο A19.3.5 της παρούσας ενότητας: διακριτή συνέλιξη. Δυστυχώς όμως χάνουμε έτσι την δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε τον ταχύ μετασχηματισμό Fourier (FFT) της επόμενης Παραγράφου A19.3.4, ο οποίος είναι πάρα πολύ αποτελεσματικός από υπολογιστικής απόψεως.

► **Παρατήρηση A19.8:** Ας επαναλάβουμε ότι με την είσοδο  $p(t)$  (ή τη  $w(t)$ ) μη μηδενική στο διάστημα  $[0, T_d]$ , όπως υποθέσαμε, ο Πολιτικός Μηχανικός έχει την ευθύνη να επιλέξει τη χρονική στιγμή  $T_1 = T_d + T_e$  πολύ μεγαλύτερη από την  $T_d$  (ίσως μέχρι και πέντε-δέκα φορές μεγαλύτερη), ώστε να πάρει την έξοδό του  $u(t)$ . Εδώ βέβαια η έξοδος αυτή  $u(t)$  προσδιορίζεται με διακριτές τιμές  $u_k$  (η  $c(t)$  κι αυτή με διακριτές τιμές  $c_k$ ) σ' όλο το χρονικό διάστημα  $T_1 = T_d + T_e$  που μας ενδιαφέρει. Στην επιλογή του χρόνου  $T_1$  παίζουν ρόλο και τα φυσικά χαρακτηριστικά του συστήματος που εξετάζει ο Πολιτικός Μηχανικός. Για παράδειγμα, σ' ένα κτίριο με σεισμική φόρτιση δεν παίζει ρόλο μόνο η διάρκεια του σεισμικού φαινομένου. Παίζουν ρόλο και οι ιδιοσυχνότητες του κτιρίου (ιδιαίτερα η πρώτη!) καθώς και ο λόγος αποσβέσεως  $\xi$  που έχει το κτίριο. Προφανώς, όσο πιο μεγάλος είναι ο λόγος αποσβέσεως  $\xi$ , τόσο γρηγορότερα θα σταματήσει το μεταβατικό φαινόμενο μετά τη λήξη του σεισμού τη χρονική στιγμή  $T_d$  και επομένως τόσο μικρότερο  $T_1$  χρειάζεται.

► **Παρατήρηση A19.9:** Δεν πρέπει τέλος να παραλείψουμε να αναφέρουμε πως στο διακριτό μετασχηματισμό Fourier υπό τις παρούσες συνθήκες ο κανόνας αριθμητικής ολοκλήρωσης του ορθογωνίου που χρησιμοποιήθηκε διαφέρει ελάχιστα (μόνο στον πρώτο όρο του) από τον κανόνα του τραπεζίου, που έχει ένα  $\frac{1}{2}$  στον πρώτο όρο του. Για κάπως μεγάλες τιμές του  $N$  η διαφορά αυτή είναι ανεπαίσθητη, πρακτικά μηδενική. Άρα μπορούμε, για να έχουμε ήσυχη τη συνείδησή μας (στο βαθμό που αφορά στην Αριθμητική Ανάλυση!), να θεωρήσουμε ότι χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα του τραπεζίου (Σχήμα A19.2). Από την άλλη πλευρά για περιοδικές συναρτήσεις (με  $h(T_1+t) = h(t)$ ) οι δύο κανόνες: του ορθογωνίου και του τραπεζίου συμπίπτουν λόγω της περιοδικότητας.

#### A19.3.4. Ο ταχύς μετασχηματισμός Fourier

Πρόκειται για έναν υπολογιστικά ευφυή αλγόριθμο, που επιτρέπει την αποφυγή πολλαπλών

αριθμητικών υπολογισμών στο διακριτό μετασχηματισμό Fourier με τη χρήση απλών ιδιοτήτων (κυρίως της περιοδικότητας) της μιγαδικής εκθετικής συναρτήσεως, η οποία υπεισέρχεται στο διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT) και στον αντίστροφό του (inverse DFT, IDFT). Δηλαδή με τον **ταχύ μετασχηματισμό Fourier (FFT)** απλά υπολογίζουμε τα αθροίσματα του διακριτού μετασχηματισμού Fourier (και του αντίστροφου του φυσικά) με πολύ λιγότερες πράξεις, κυρίως σε μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς. Ο ταχύς μετασχηματισμός Fourier επισημοποιήθηκε το 1965 με εργασία των Cooley και Tukey, η οποία είχε και έχει φοβερή επιτυχία, «άφησε εποχή». Εντούτοις οι βάσεις του σχετικού αλγόριθμου οφείλονται σε παλιότερες εργασίες των Gauss, Runge και άλλων.

Δε θα αναπτύξουμε εδώ τον αλγόριθμο των Cooley και Tukey ούτε φυσικά τις τροποποιήσεις του. Πάντως σε γενικές γραμμές ως σημειώσουμε ότι για  $N$  όρους στα αθροίσματα του διακριτού μετασχηματισμού Fourier (DFT) και του αντίστροφου του (inverse DFT, IDFT) το υπολογιστικό κόστος σε πολλαπλασιασμούς μειώνεται από  $2N^2 + N$  μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς σε  $(N/2) \log_2 N$  μόνο (με  $\log_2$  το λογάριθμο με βάση το 2). Άρα για μεγάλες τιμές του  $N$  το υπολογιστικό όφελός μας είναι πολύ μεγάλο. Γι' αυτό και πάντα χρησιμοποιείται ο ταχύς μετασχηματισμός Fourier (FFT) για τον υπολογισμό του ευθέως και του αντίστροφου διακριτού μετασχηματισμού Fourier (DFT).

### A19.3.5. Διακριτή συνέλιξη

Συνεχίζουμε να ασχολούμαστε με το ίδιο πρόβλημα (δοσμένη είσοδος στο διάστημα  $[0, T_d]$ , ζητούμενη έξοδος στο διάστημα  $[0, T_1]$  με  $T_1 = T_d + T_e > T_d$ ) στο γραμμικό σύστημα του Πολιτικού Μηχανικού το οποίο εξετάζουμε, π.χ. ένα μηχανικό ή υδατικό σύστημα. Εδώ σημειώνουμε και τη δυνατότητα της απευθείας χρήσεως του συνελικτικού ολοκληρωτικού τύπου (19.1.18), δηλαδή

$$u(t) = \int_0^t g(t-\tau)p(\tau) d\tau \quad \text{ή} \quad c(t) = \int_0^t g(t-\tau)w(\tau) d\tau \quad (19.3.16)$$

για την εύρεση της αποκρίσεως, της εξόδου  $u(t)$  ή  $c(t)$  με μηδενική είσοδο για  $t < 0$ . Προς το σκοπό αυτό περιοριζόμαστε στο διάστημα  $[0, T_1]$  που μας ενδιαφέρει ( $0 \leq t \leq T_1$ ) και κάνουμε πάλι αριθμητική ολοκλήρωση, ακριβώς όπως και στο διακριτό μετασχηματισμό Fourier με  $N$  σημεία ολοκληρώσεως. Εδώ όμως μιλάμε για **διακριτή συνέλιξη**, δηλαδή για την αντικατάσταση του ολοκληρώματος στο πιο πάνω συνελικτικό ολοκλήρωμα από άθροισμα (και προσέγγισή του φυσικά ...). Το υπολογιστικό κόστος είναι  $N^2$  πραγματικοί πολλαπλασιασμοί (όχι μιγαδικοί εδώ!) και είναι αρκετά βελτιωμένο σχετικά με το διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT). Υστερεί όμως φοβερά (για αρκετά μεγάλες τιμές του  $N$ ) σε σύγκριση με τον ταχύ μετασχηματισμό Fourier (FFT).

Ο τύπος της διακριτής συνέλιξεως (στο συνολικό διάστημα  $[0, T_1]$  (με  $T_1 = T_d + T_e$ ) με χρήση της αριθμητικής ολοκληρώσεως με  $N$  σημεία (κόμβους) είναι ο ακόλουθος (με  $\Delta t = T_1/N$ ):

$$u_k = \frac{T_1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} g_{k-m} p_m \quad \text{ή} \quad c_k = \frac{T_1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} g_{k-m} w_m \quad \text{με} \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (19.3.17)$$

Στον τύπο αυτό έχουμε ορίσει στην πρώτη σχέση

$$u_k := u(t_k), \quad g_{k-m} := g(t_k - t_m) \quad \text{και} \quad p_m := p(t_m) \quad \text{με} \quad t_j = j\Delta t = j \frac{T_1}{N} \quad \text{και} \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (19.3.18)$$

και ανάλογα στη δεύτερη σχέση. Εννοείται βέβαια ότι λόγω της αριθμητικής ολοκληρώσεως τα αποτελέσματα  $u_k$  και  $c_k$  είναι προσεγγιστικά. Δε λησμονούμε επίσης ότι πάντα  $g(t) = 0$  για  $t < 0$ .

Δε θα προχωρήσουμε εδώ σε περισσότερες λεπτομέρειες για όλα αυτά τα θέματα. Εντούτοις αναγνωρίζουμε πως είναι ιδιαίτερα ενδιαφέροντα και χρήσιμα για τον Πολιτικό Μηχανικό σε κάθε γραμμικό σύστημα, π.χ. μηχανικό σύστημα (όπως είναι ένα κτίριο) ή υδατικό σύστημα, που πρέπει να μελετήσει ή να αντιμετωπίσει στην πράξη. Θεωρούμε ότι είναι αρκετά ως εδώ στο παρόν μάθημα! Περισσότερες λεπτομέρειες σε άλλα μαθήματα, κυρίως στο μάθημα της Δυναμικής των Κατασκευών. (Δίνεται λίγο πιο κάτω, στο τέλος του διδακτικού βιβλίου, και σχετική βιβλιογραφία.)

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ *A20*

## ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Πολλές φορές μια διαφορική εξίσωση μπορεί να επιλυθεί αναλυτικά με τις μεθόδους τις οποίες έχουμε μελετήσει στα προηγούμενα κεφάλαια. Όμως αρκετές φορές παρουσιάζονται και διαφορικές εξισώσεις που δε διαθέτουν κλειστή λύση ή η λύση τους αυτή είναι εξαιρετικά πολύπλοκη. Σε τέτοιες περιπτώσεις χρησιμοποιούνται προσεγγιστικές και κυρίως αριθμητικές μέθοδοι επιλύσεως. Τις μεθόδους αυτές τις εξετάζουμε σύντομα σ' αυτό το τελευταίο Κεφάλαιο A20 με συνεχή αναφορά στη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως  $y' = f(x, y)$  με  $y = y(x)$  και  $f(x, y)$  γνωστή συνάρτηση. Ειδικά οι αριθμητικές μέθοδοι, οι οποίες είναι και οι σημαντικότερες, θα εξετασθούν σε πολύ μεγαλύτερη έκταση στο μάθημα Αριθμητικές Μέθοδοι στο επόμενο, στο 3ο Εξάμηνο Σπουδών.

Υπενθυμίζουμε ότι μέχρι τώρα έχουμε αναφερθεί σε προσεγγιστικές μεθόδους στην Ενότητα A3.8 του Κεφαλαίου A3, όπου εξετάσαμε τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων του Picard. Επίσης και στα Κεφάλαια A14 και A17, όπου χρησιμοποιήθηκαν μέθοδοι δυναμοσειρών και σειρών Fourier αντίστοιχα. Όσες φορές αποκόπτουμε τη σχετική σειρά στον  $N$ -στό όρο της παίρνουμε μια προσέγγιση  $\tilde{y}(x)$  της άγνωστης λύσεως  $y(x)$  της διαφορικής εξισώσεως. Δηλαδή ισχύει  $\tilde{y}(x) \approx y(x)$ .

Στην πρώτη Ενότητα A20.1 αναφερόμαστε καταρχήν στη γραφική **μέθοδο του πεδίου κατευθύνσεων** (ή **πεδίου διευθύνσεων**) της διαφορικής εξισώσεως  $y' = f(x, y)$  και στις σχετικές **ισοκλινείς καμπύλες**. Στη συνέχεια εξετάζουμε σύντομα και την προσεγγιστική **μέθοδο της σειράς Taylor**. Παρουσιάζεται και μία εφαρμογή των δύο αυτών μεθόδων σε ένα απλό πρόβλημα Δυναμικής.

Στη δεύτερη Ενότητα A20.2 αναφερόμαστε στις καθαρά αριθμητικές μεθόδους επιλύσεως της ίδιας διαφορικής εξισώσεως:  $y' = f(x, y)$ . Από αυτές αναφέρουμε τις τέσσερις βασικότερες: (α) τη **μέθοδο Euler**, που είναι πρώτης τάξεως, όπως θα εξηγήσουμε, (β) τη **βελτιωμένη μέθοδο Euler** (ή **μέθοδο Heun**), που είναι δευτέρας τάξεως, (γ) την (κλασική) **μέθοδο Runge-Kutta τρίτης τάξεως** και (δ) την (κλασική) **μέθοδο Runge-Kutta τετάρτης τάξεως** (ή απλά **μέθοδο Runge-Kutta**).

Στο τέλος της δεύτερης αυτής Ενότητας A20.2 παρουσιάζεται και μια εφαρμογή σε συγκεκριμένη διαφορική εξίσωση της μορφής  $y' = f(x, y)$ . Πρόκειται (α) για τη διαφορική εξίσωση (4.2.4) στην Ενότητα A4.2 του Κεφαλαίου A4: Ρευστομηχανική: ταχύτητα ιδεατού ρευστού σε άκρο σωλήνα και επίσης (β) για τη διαφορική εξίσωση (4.3.18) στην Παράγραφο A4.3.2 του ίδιου Κεφαλαίου A4: Δυναμική: πτώση υλικού σημείου στον αέρα με αντίσταση  $R$  ανάλογη του τετραγώνου  $v^2$  της ταχύτητάς του  $v = v(t)$ . Τα αποτελέσματα για την αριθμητική λύση της διαφορικής εξισώσεως αυτής της εφαρμογής παρουσιάζονται σε πίνακα αριθμητικών τιμών. Ξεκινάνε από ικανοποιητικά (για τη μέθοδο Euler: πρώτης τάξεως) και καταλήγουν σε εξαιρετικά ακριβή (για τη μέθοδο Runge-Kutta τετάρτης τάξεως). Για να καταστεί σαφέστερη η ακρίβεια της καθεμιάς από τις τέσσερις πιο πάνω μεθόδους, εκτός από τα ίδια τα προσεγγιστικά αριθμητικά αποτελέσματα παρουσιάζονται επίσης και τα αντίστοιχα σφάλματά τους (ως προς την ακριβή λύση  $y = y(x)$ ) κι αυτά βέβαια σε πίνακα.

**A20.1. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ****A20.1.1. Η γραφική μέθοδος του πεδίου κατευθύνσεων**

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως (με τη συνάρτηση  $f(x, y)$  γνωστή)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{ή} \quad y' = f(x, y) \quad \text{με} \quad y = y(x) \quad \text{και με αρχική συνθήκη την} \quad y(x_0) = y_0. \quad (20.1.1)$$

Η διαφορική αυτή εξίσωση μας επιτρέπει να προσδιορίζουμε την παράγωγο  $y' = y'(x)$  μιας λύσεως της  $y_p(x)$  σε κάθε σημείο  $(x, y)$  του επιπέδου  $Oxy$ , από όπου μπορεί να περνάει μια τέτοια λύση.

Σε αρκετές περιπτώσεις η μορφή της συναρτήσεως  $f(x, y)$  στο δεξιό μέλος δεν επιτρέπει την αναλυτική (σε κλειστή μορφή) επίλυση της διαφορικής αυτής εξισώσεως:  $y' = f(x, y)$ . Μια πρώτη και χωρίς ακρίβεια δυνατότητα για την προσέγγιση της λύσεως αποτελεί η γραφική **μέθοδος του πεδίου κατευθύνσεων (ή πεδίου διεθύνσεων)**. Ονομάζουμε πεδίο κατευθύνσεων της διαφορικής εξισώσεως  $y' = f(x, y)$  τη γραφική παράσταση στο επίπεδο  $Oxy$  όπου σε κάθε σημείο του  $(x, y)$  σχεδιάζουμε ένα πολύ μικρό ευθύγραμμο τμήμα με κλίση τη γνωστή μας παράγωγο  $y' = f(x, y)$ . Αυτό είναι πάρα πολύ εύκολο, αφού η συνάρτηση  $f(x, y)$  είναι γνωστή. Με διαθέσιμο τώρα το πεδίο κατευθύνσεων μιας διαφορικής εξισώσεως της μορφής  $y' = f(x, y)$  γνωρίζουμε σε κάθε σημείο  $(x, y)$  την κλίση της λύσεως που περνάει από το σημείο αυτό. (Στο επίπεδο  $Oxy$  αποκαλούμε συνήθως τη λύση αυτή **ολοκληρωτική καμπύλη**.) Ξέρουμε δηλαδή την εφαπτομένη της καμπύλης σε κάθε σημείο του επιπέδου. Άρα μπορούμε να σχεδιάσουμε πρόχειρα μια λύση που να περνάει από το συγκεκριμένο σημείο  $(x_0, y_0)$ , δηλαδή να αποτελεί λύση του προβλήματος αρχικής τιμής (20.1.1).

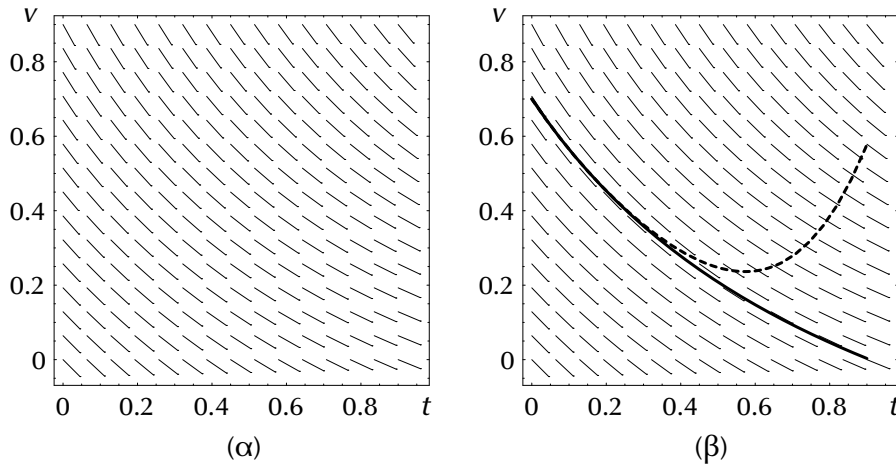
Σημειώνουμε επίσης πως οι καμπύλες του επιπέδου  $Oxy$  όπου η παράγωγος  $y' = f(x, y)$  παίρνει σταθερή τιμή  $c$  καλούνται **ισοκλινείς καμπύλες** της διαφορικής αυτής εξισώσεως. Αυτές έχουν βέβαια εξισώσεις της μορφής  $f(x, y) = c$  και μας βοηθάνε στη σχεδίαση με το χέρι του πεδίου κατευθύνσεων της διαφορικής εξισώσεως (20.1.1):  $y' = f(x, y)$ , αφού η κλίση  $y' = c$  κατά μήκος τους.

▼ **Εφαρμογή A20.1 (Δυναμική):** Θεωρούμε την ευθύγραμμη προς τα δεξιά κίνηση υλικού σημείου μοναδιαίας μάζας ( $m = 1$ ) πάνω στον άξονα  $Ox$  με ταχύτητα  $v(t) > 0$ . Η αρχική ταχύτητα του υλικού σημείου είναι  $v(0) = 0.7$ . Στο σημείο ασκείται φόρτιση προς τα αριστερά  $p(t) = -e^{-t}$ . Υπάρχει και αντίσταση στην κίνηση (πάλι προς τα αριστερά, αφού  $v(t) > 0$ ) ίση με  $R(t) = -v^2(t)$ , δηλαδή ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας  $v(t)$  του υλικού σημείου. Ζητούνται: (α) Η διαφορική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση την ταχύτητα  $v(t)$  του υλικού σημείου. (β) Η σχεδίαση του σχετικού πεδίου κατευθύνσεων. (γ) Η σχεδίαση της λύσεως  $v = v(t)$  του παρόντος προβλήματος.

**Λύση:** (α) Σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα  $m\dot{v}(t) = F(t)$  με  $F(t)$  τη συνολική δύναμη η οποία ασκείται πάνω στο υλικό σημείο, η διαφορική εξίσωση της κινήσεως που ζητείται θα είναι

$$m\dot{v}(t) = p(t) + R(t) \implies \dot{v}(t) = -e^{-t} - v^2(t), \quad \text{αφού} \quad m = 1. \quad (20.1.2)$$

Πρόκειται για μη γραμμική διαφορική εξίσωση της μορφής (20.1.1), που δεν ανήκει σε κάποια γνωστή κατηγορία και φαίνεται πως δε διαθέτει αναλυτική λύση. Η σχετική αρχική συνθήκη μας έχει δοθεί:  $v(0) = 0.7$ . (β) Μπορούμε εύκολα να σχεδιάσουμε το πεδίο κατευθύνσεων για τη διαφορική εξίσωση (20.1.2), αφού ξέρουμε την παράγωγο  $\dot{v}(t)$  σε κάθε σημείο του επιπέδου  $Otv$ . Η παράγωγος αυτή  $\dot{v}(t)$  είναι βέβαια ίση με  $f(t, v) = -e^{-t} - v^2(t)$ . Τούτο είναι σαφές από τη διαφορική εξίσωση (20.1.2). Το πεδίο αυτό κατευθύνσεων παρουσιάζεται στο Σχήμα A20.1α. (γ) Με βάση αυτό το πεδίο κατευθύνσεων και την αρχική συνθήκη  $v(0) = 0.7$  ξεκινάμε από το σημείο  $t = 0$  και  $v = 0.7$  και σχεδιάζουμε λίγο-λίγο τη ζητούμενη ολοκληρωτική καμπύλη: τη λύση που ζητάμε. Αυτό το κάνουμε με προσοχή, ώστε η καμπύλη αυτή να εφάπτεται συνεχώς όσο γίνεται στα μικρά ευθύγραμμα τμήματα που δείχνουν την εφαπτομένη της καμπύλης σε κάθε σημείο από όπου περνάει. Η σχετική ολοκληρωτική καμπύλη φαίνεται στο Σχήμα A20.1β: είναι η συνεχής καμπύλη (όχι η διακεκομμένη, γι' αυτή θα μιλήσουμε παρακάτω). Αυτή η συνεχής καμπύλη δίνει προσεγγιστικά την ταχύτητα  $v(t)$  του υλικού σημείου με  $v(0) = 0.7$ . (Τα σχήματα έγιναν με τη *Mathematica*.) ▲



**Σχήμα A20.1:** (α) Αριστερά: Πεδίο κατευθύνσεων (ή διευθύνσεων) της διαφορικής εξίσωσης (20.1.2). (β) Δεξιά: Το ίδιο πεδίο, τώρα όμως μαζί με μία ολοκληρωτική καμπύλη, λύση: αυτή με  $v(0) = 0.7$  και την προσέγγισή της με τη σειρά Taylor (20.1.4).

**A20.1.2. Η προσεγγιστική μέθοδος της σειράς Taylor**

Στη μέθοδο αυτή, που δεν είναι γραφική, υποθέτουμε τη λύση  $y(x)$  που ζητάμε στη μορφή σειράς Taylor (ή Maclaurin για  $x_0 = 0$ ). Από τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά I θυμόμαστε ότι η σειρά Taylor μιας παραγωγίσιμης συναρτήσεως, όπως θεωρούμε εδώ τη συνάρτηση  $y(x)$ , έχει τη μορφή

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 + \frac{y''''(x_0)}{24}(x - x_0)^4 + \dots \quad (20.1.3)$$

Από την αρχική συνθήκη  $y(x_0) = y_0$  ξέρουμε την ποσότητα  $y(x_0)$  στον πρώτο όρο της πιο πάνω σειράς Taylor. Από την ίδια τη διαφορική εξίσωση  $y' = f(x, y)$  μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την ποσότητα  $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ , αφού και το  $y_0$  μας είναι γνωστό από την αρχική συνθήκη  $y(x_0) = y_0$ . Μέχρις εδώ πηγαίναμε άνετα. Από 'δώ και πέρα όμως χρειάζεται να κάνουμε παραγωγίσεις της διαφορικής εξίσωσης  $y' = f(x, y)$ , ώστε να βρούμε τις επόμενες παραγώγους  $y''(x)$ ,  $y'''(x)$ , κλπ. και να τις χρησιμοποιήσουμε στη σειρά Taylor (20.1.3) στη θέση  $x = x_0$ . Κατά τη διάρκεια αυτών των παραγωγίσεων (που μπορούν βέβαια να γίνουν και με τον υπολογιστή) δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι ναι μεν παραγωγίζουμε ως προς  $x$ , αλλά  $y = y(x)$  (παρουσιάζεται και 'δώ το  $x$ ) στη δεύτερη μεταβλητή  $y$  της συναρτήσεως  $f(x, y)$  στο δεξιό μέλος. Έτσι μπορούμε να δημιουργήσουμε τη σειρά Taylor (20.1.3) της άγνωστης λύσεως  $y(x)$ . Αυτή αποτελεί συνήθως προσέγγιση  $\tilde{y}(x)$  της ακριβούς λύσεως  $y(x)$ . Αυτό συμβαίνει απλά, επειδή εμείς παίρνουμε σχεδόν πάντα πεπερασμένο άθροισμα όρων αντί για την πλήρη σειρά Taylor σταματώντας τους υπολογισμούς μας σε κάποιο όρο της.

▼ **Εφαρμογή A20.2 (Δυναμική):** Ζητούνται: (α) Να υπολογισθεί η προσεγγιστική λύση  $\tilde{v}(t) \approx v(t)$  στο πρόβλημα της προηγούμενης Εφαρμογής A20.1 με σειρά Taylor για  $t = 0$  (σειρά Maclaurin) με όρους μέχρι και  $t^4$ . (β) Να γίνει και γραφική παράστασή της με σχόλιο για την ακρίβεια της μεθόδου.

**Λύση:** (α) Η συγκεκριμένη προσέγγιση της σειράς Taylor με όρους μέχρι και  $t^4$  έχει τη μορφή

$$\tilde{v}(t) = v(0) + \dot{v}(0)t + \frac{\ddot{v}(0)}{2}t^2 + \frac{\dddot{v}(0)}{6}t^3 + \frac{\overset{\circ}{v}(0)}{24}t^4 \quad \text{με} \quad \tilde{v}(t) \approx v(t). \quad (20.1.4)$$

Τώρα πρέπει απλά να βρούμε τις πέντε ποσότητες:  $v(0)$ ,  $\dot{v}(0)$ ,  $\ddot{v}(0)$ ,  $\dddot{v}(0)$  και  $\overset{\circ}{v}(0)$ . Από την αρχική συνθήκη  $v(0) = 0.7$  ξέρουμε ήδη την ποσότητα  $v(0)$ . Τη δηλώνουμε με  $v_0$ :  $v(0) = v_0 = 0.7$ . Στη συνέχεια από τη διαφορική εξίσωση (20.1.2) υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο  $\dot{v}(0) = -1 - v_0^2$  για  $t = 0$ . Η δεύτερη παράγωγος  $\ddot{v}(0)$  προκύπτει με παραγωγή της διαφορικής εξίσωσης ως προς  $t$ :  $\ddot{v}(t) = e^{-t} - 2v(t)\dot{v}(t)$  και για  $t = 0$  έχουμε  $\ddot{v}(0) = 1 - 2v_0(-1 - v_0^2) = 1 + 2v_0 + 2v_0^3$  έχοντας πάρει υπόψη την αρχική συνθήκη  $v(0) = v_0$  καθώς και την παραπάνω σχέση για την πρώτη παράγωγο  $\dot{v}(0)$ . Με άλλες δύο παραγωγίσεις της διαφορικής εξίσωσης (20.1.2) βρίσκουμε επίσης ότι  $\dddot{v}(0) = -3 - 2v_0 - 8v_0^2 - 6v_0^4$  και  $\overset{\circ}{v}(0) = 7 + 18v_0 + 10v_0^2 + 40v_0^3 + 24v_0^5$ . Με αυτές τις τιμές των  $v(0)$ ,  $\dot{v}(0)$ ,  $\ddot{v}(0)$ ,  $\dddot{v}(0)$  και  $\overset{\circ}{v}(0)$  έχουμε πια διαθέσιμη την προσέγγιση Taylor (20.1.4). Άρα η προσέγγιση  $\tilde{v}(t)$  της λύσεως  $v(t)$  με σειρά Taylor με όρους μέχρι και  $t^4$  είναι πλέον πλήρως καθορισμένη. Η σχεδιάσή της έγινε επίσης το Σχήμα A20.1β (καμπύλη με διακεκομμένη γραμμή). Δυστυχώς αποκλίνει από την ακριβή λύση  $v(t)$  για  $t \geq 0.4$  λόγω του μικρού αριθμού των όρων της. ▲

## A20.2. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

### A20.2.1. Εισαγωγή στις αριθμητικές μεθόδους

Στην ενότητα αυτή θα αναφέρουμε τις τέσσερις πιο βασικές μεθόδους αριθμητικής επιλύσεως συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{ή} \quad y' = f(x, y) \quad \text{με} \quad y = y(x) \quad (20.2.1)$$

μαζί με την αρχική συνθήκη

$$y(x_0) = y_0 \quad (20.2.2)$$

στο σημείο  $x_0$  και με το  $y_0$  γνωστό. Στη διαφορική αυτή εξίσωση (20.2.1) ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το  $x$  και άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) το  $y$ . Η συνάρτηση  $f(x, y)$  στο δεξιό μέλος είναι γνωστή συνάρτηση και των δύο μεταβλητών  $x$  (ανεξάρτητης) και  $y$  (εξαρτημένης). Μπορεί όμως να λείπει η μία απ' αυτές, όπως συμβαίνει στην εφαρμογή της Παραγράφου Α20.2.6.

Οι αριθμητικές μέθοδοι που θα αναφέρουμε είναι οι εξής τέσσερις:

1. **Η μέθοδος Euler**
2. **Η βελτιωμένη μέθοδος Euler (ή μέθοδος Heun)**
3. **Η μέθοδος Runge–Kutta τρίτης τάξεως**
4. **Η μέθοδος Runge–Kutta τετάρτης τάξεως**

Σημειώνεται ότι η μέθοδος Euler είναι η μέθοδος Runge–Kutta πρώτης τάξεως. Επίσης η βελτιωμένη μέθοδος Euler (ή μέθοδος Heun) είναι η μέθοδος Runge–Kutta δεύτερας τάξεως. Όσες φορές λέμε απλά η μέθοδος Runge–Kutta, εννοούμε πάντα τη μέθοδο Runge–Kutta τετάρτης τάξεως.

Σημειώνεται ότι στις αριθμητικές μεθόδους δεν προσδιορίζεται αναλυτικά (με κλειστό τύπο) η άγνωστη συνάρτηση  $y = y(x)$ . Απλά προσδιορίζονται προσεγγιστικά οι αριθμητικές τιμές της

$$y_1 := y(x_1), \quad y_2 := y(x_2), \quad \dots, \quad y_n := y(x_n), \quad \dots \quad \text{με} \quad x_n := x_0 + nh \quad \text{και} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (20.2.3)$$

Η σταθερή θετική ποσότητα  $h$  καλείται **βήμα** της αριθμητικής μεθόδου. Άρα τα σημεία  $x_0, x_1, \dots, x_n$  είναι ισαπέχοντα με απόσταση δύο διαδοχικών σημείων  $x_n$  και  $x_{n+1}$  σταθερή και ίση πάντα με  $h$ , αν και αυτό δεν είναι απόλυτα υποχρεωτικό. Γενικά μιλώντας, όσο μικρότερο είναι το βήμα  $h$  της μεθόδου, δηλαδή όσο πιο κοντά είναι το σημείο  $x_n$  στο επόμενο του  $x_{n+1}$ , τόσο μεγαλύτερη ακρίβεια πετυχαίνουμε σε μια συγκεκριμένη αριθμητική μέθοδο. (Όχι βέβαια σε διαφορετικές μεθόδους!)

Θεωρούμε τώρα την ακριβή λύση  $y(x)$  της διαφορικής εξισώσεως (που γενικά δεν την ξέρουμε) και την προσέγγισή της  $\tilde{y}(x)$  με μια αριθμητική μέθοδο. Σε συγκεκριμένο σημείο  $x$  το **σφάλμα** θα είναι  $\varepsilon(x) := y(x) - \tilde{y}(x)$ : η διαφορά της ακριβούς λύσεως  $y(x)$  μείον την προσέγγιση  $\tilde{y}(x)$  στο σημείο αυτό. Λέγοντας **τάξη**  $p$  της αριθμητικής μεθόδου, εννοούμε τον εκθέτη  $p$  σε μια σχέση της μορφής  $|\varepsilon(x)| = |y(x) - \tilde{y}(x)| \leq c(x)h^p$  (με  $h \rightarrow 0$ ) με το  $c(x)$  μια κατάλληλη θετική ποσότητα και  $h$  το βήμα της μεθόδου. Η τάξη  $p$  μας δείχνει το **ρυθμό συγκλίσεως** της μεθόδου καθώς  $h \rightarrow 0$  (και  $n \rightarrow \infty$ ).

Στην ενότητα αυτή θα αναφέρουμε τις πιο πάνω τέσσερις μεθόδους με πρόχειρη δικαιολόγηση μόνο της πρώτης: της μεθόδου Euler. Πολύ περισσότερα γι' αυτές και για άλλες μεθόδους αριθμητικής επιλύσεως διαφορικών εξισώσεων θα αναφερθούν στο μάθημα Αριθμητικές Μέθοδοι.<sup>1</sup>

### A20.2.2. Η μέθοδος Euler

Αυτή είναι η απλούστερη και η λιγότερο ακριβής (μόλις πρώτης τάξεως) μέθοδος αριθμητικής επιλύσεως της πιο πάνω διαφορικής εξισώσεως (20.2.1):  $y' = f(x, y)$  μαζί με την αρχική συνθήκη της (20.2.2):  $y(x_0) = y_0$ . Οι δύο αυτές εξισώσεις συνιστούν βέβαια ένα πρόβλημα αρχικής τιμής.

<sup>1</sup> Σχετικό σύγγραμμα: Μάρκελλου, Β. Β. (2001), *Αριθμητικές Μέθοδοι*, 5η Έκδοση, Κεφάλαια 4 και 5 για τις *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις*, σσ. 133–215. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, vi+224 σελίδες. Στο μάθημα Αριθμητικές Μέθοδοι θα εξετασθούν και προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών. Αρκετά στοιχεία για τις μεθόδους αυτής της Ενότητας Α20.2 αναφέρονται και σε πολλά άλλα συγγράμματα της βιβλιογραφίας για τις διαφορικές εξισώσεις.



Γνωρίζουμε τη συνάρτηση  $f(x, y)$  στο δεξιό μέλος της διαφορικής εξίσωσης (20.2.1) σαν συνάρτηση των  $x$  και  $y$ . Δε γνωρίζουμε όμως τη λύση της  $y = y(x)$  μαζί με την αρχική συνθήκη (20.2.2). Άρα το  $y = y(x)$  μέσα στη συνάρτηση  $f(x, y)$  (δεύτερη, εξαρτημένη μεταβλητή) δε μας είναι γνωστό.

Στη μέθοδο Euler μπορούμε να υποθέσουμε ότι η παράγωγος  $y' = y'(x)$  στο αριστερό μέλος της διαφορικής εξίσωσης (20.2.1) και στο σημείο  $x$  προσεγγίζεται από την **πεπερασμένη διαφορά**

$$y' = y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{(x+h) - x} = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \quad \text{επιλέγοντας } h \text{ το βήμα της μεθόδου.} \quad (20.2.4)$$

Αν  $h \rightarrow 0$ , έχουμε το γνωστό μας ορισμό της παραγώγου  $y'(x)$  της άγνωστης συναρτήσεως  $y(x)$  στο σημείο  $x$ . Αν το  $h$  είναι απλά πολύ μικρό (όπως συμβαίνει εδώ), τότε έχουμε μια προσέγγιση της ίδιας παραγώγου  $y'(x)$ : την προσέγγισή της από την προς τα εμπρός πεπερασμένη διαφορά  $[y(x+h) - y(x)]/h$ . Καλή είναι και η προσέγγιση αυτή, ιδίως εάν το  $h$  επιλεγεί πάρα πολύ μικρό.

Τώρα στη μέθοδο Euler για την αριθμητική επίλυση της διαφορικής εξίσωσης (20.2.1) απλά την προσεγγίζουμε με μη διαφορική εξίσωση θέτοντας στο αριστερό μέλος της την προσέγγιση  $[y(x+h) - y(x)]/h$  της παραγώγου  $y'$ . Έτσι παίρνουμε (με την περισπωμένη να δηλώνει προσέγγιση)

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \approx f(x, y) \quad \text{ή καλύτερα} \quad \frac{\tilde{y}(x+h) - \tilde{y}(x)}{h} = f(x, \tilde{y}). \quad (20.2.5)$$

Στη δεύτερη αυτή μορφή βάλουμε το σύμβολο της ισότητας αντί για το σύμβολο της προσεγγίσεως. Τώρα όμως που έχουμε ισότητα, ενώ αρχικά είχαμε προσέγγιση (εξαιτίας της προσεγγίσεως της παραγώγου:  $y'(x) \approx [y(x+h) - y(x)]/h$ , να μην περιμένουμε βέβαια για λύση την ακριβή λύση  $y(x)$ . Η πλεονεξία μας αυτή: (α) να προσεγγίσουμε την παράγωγο  $y'(x)$  με την πεπερασμένη διαφορά  $[y(x+h) - y(x)]/h$  και ταυτόχρονα (β) να διατηρήσουμε το σύμβολο της ισότητας (=) μας οδηγεί σε μια εξίσωση που έχει σαν λύση την προσέγγιση  $\tilde{y}(x)$  της ακριβούς λύσεως  $y(x)$ . Δηλαδή ισχύει

$$\tilde{y}(x) \approx y(x) \quad \text{ισοδύναμα} \quad y(x) = \tilde{y}(x) + \varepsilon(x) \quad (20.2.6)$$

με  $\varepsilon(x)$  το σφάλμα της προσεγγίσεως  $\tilde{y}(x)$ , συγκεκριμένα  $\varepsilon(x) = y(x) - \tilde{y}(x)$ .

Τώρα με βάση τα ισαπέχοντα σημεία  $x_n := x_0 + nh$  στη δεξιά σχέση (20.2.3) και τις αντίστοιχες τιμές  $y_n := y(x_n)$  της άγνωστης συναρτήσεως  $y(x)$  η πιο πάνω σχέση (20.2.5) παίρνει τη μορφή

$$\frac{\tilde{y}_{n+1} - \tilde{y}_n}{h} = f(x_n, \tilde{y}_n) \quad \text{με} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (20.2.7)$$

Λύνοντας μάλιστα ως προς  $\tilde{y}_{n+1}$  (θυμίζουμε ότι  $\tilde{y}_{n+1} \approx y_{n+1} := y(x_{n+1})$ ), βρίσκουμε τον τελικό τύπο

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + hf(x_n, \tilde{y}_n) \quad \text{με} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (20.2.8)$$

Για να δούμε αυτόν τον τύπο καλύτερα! Από την αρχική συνθήκη (20.2.2) γνωρίζουμε ότι  $y(x_0) = y_0$ . Πάει το αρχικό σημείο  $x_0 \dots$  Τώρα με  $n = 0, n = 1$ , κλπ. ο παραπάνω τύπος (20.2.8) μας δίνει

$$\tilde{y}_1 = y_0 + hf(x_0, y_0), \quad \tilde{y}_2 = \tilde{y}_1 + hf(x_1, \tilde{y}_1), \quad \text{κλπ.} \quad (20.2.9)$$

Έτσι προσδιορίζουμε τις προσεγγιστικές τιμές  $\tilde{y}_n \approx y_n := y(x_n)$  στα γνωστά ισαπέχοντα σημεία  $x_n$ .

Ξανά! Τα ισαπέχοντα σημεία  $x_n := x_0 + nh$  είναι γνωστά. Η τιμή  $y_0 = y(x_0)$  είναι κι αυτή γνωστή από την αρχική συνθήκη (20.2.2). Όλες οι επόμενες τιμές του  $y$ , δηλαδή οι τιμές  $\tilde{y}_{n+1} := \tilde{y}(x_{n+1})$ , προκύπτουν από τον αναδρομικό τύπο (20.2.8). Χρησιμοποιούνται η γνωστή συνάρτηση  $f(x, y)$  στο δεξιό μέλος της διαφορικής εξίσωσης (20.2.1), το γνωστό βήμα  $h$  της μεθόδου και, το κυριότερο, η τιμή  $\tilde{y}_n \approx y_n$  της άγνωστης συναρτήσεως  $y(x)$  στο προηγούμενο σημείο  $x_n$ . Αυτή όμως είναι ήδη γνωστή από την προηγούμενη εφαρμογή του τύπου (20.2.8): με  $n$  αντί για  $n + 1$ . Για παράδειγμα, για  $n = 0$  και  $n = 1$  ο τύπος (20.2.8) παίρνει τις μορφές (20.2.9). (Το  $y_0$  είναι γνωστό!)

Περιττό να σημειωθεί πως με τόσο απλό τον αναδρομικό τύπο (20.2.8) της μεθόδου Euler για την αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων της ειδικής μορφής (20.2.1) ο προγραμματισμός του είναι πανεύκολος. Απαιτείται μόλις μια γραμμή κώδικα στη *Mathematica*: εντολή μιας γραμμής.

Σημειώνουμε τέλος ότι η μέθοδος Euler μπορεί εξίσου καλά να θεωρηθεί ότι προέρχεται από τη σειρά Taylor (20.1.3) της άγνωστης συναρτήσεως  $y(x)$  στο σημείο  $x_0$  με δύο όρους. Πραγματικά

$$y(x) \approx y_0 + y'(x_0)(x - x_0) \quad \text{κι εδώ} \quad \tilde{y}(x_1) \equiv \tilde{y}(x_0 + h) = y_0 + f(x_0, y_0)h = y_0 + hf(x_0, y_0) \quad (20.2.10)$$

για  $x = x_1 = x_0 + h$ , αφού η διαφορική μας εξίσωση (20.2.1) είναι η  $y'(x) = f(x, y)$ . Γενικά τώρα

$$\tilde{y}(x_{n+1}) = \tilde{y}(x_n) + f(x_n, \tilde{y}(x_n))h \quad \text{και ισοδύναμα} \quad \tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + hf(x_n, \tilde{y}_n) \quad \text{με} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (20.2.11)$$

Αυτός ακριβώς είναι ο τύπος (20.2.8), τον οποίο είχαμε βρει και προηγουμένως για τη μέθοδο Euler.

Τον ίδιο τύπο μπορούμε να το γράψουμε και στην ισοδύναμη (αν και όχι απλούστερη!) μορφή

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + K_1 \quad \text{με} \quad K_1 = hf(x_n, \tilde{y}_n) \quad \text{και} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (20.2.12)$$

(Υπενθυμίζεται ότι η περισπωμένη δηλώνει προσεγγιστικές τιμές!) Έτσι θα είναι πολύ ευκολότερη η σύγκρισή του με τους αντίστοιχους τύπους ανωτέρας τάξεως, που τους παραθέτουμε αμέσως.

### A20.2.3. Η βελτιωμένη μέθοδος Euler (ή μέθοδος Heun)

Στη μέθοδο αυτή η παράγωγος  $f(x_n, \tilde{y}_n)$  στον τύπο (20.2.12) της μεθόδου Euler αντικαθίσταται από το μέσο όρο των δύο παραγώγων  $f(x_n, \tilde{y}_n)$  και  $f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})$  στα δύο σημεία  $x_n := x_0 + nh$  και  $x_{n+1} := x_0 + (n+1)h$ . Από απόψεως αριθμητικής ολοκλήρωσης αποδεικνύεται ότι αυτό ισοδυναμεί με τη χρήση του κανόνα του τραπεζιού αντί για τη χρήση του κανόνα του ορθογωνίου στην αριθμητική ολοκλήρωση. Πρόκειται επομένως για βελτίωση της μεθόδου Euler. Για το λόγο αυτό η μέθοδος αυτή καλείται πολύ συχνά βελτιωμένη μέθοδος Euler. Η τάξη της βελτιωμένης αυτής μεθόδου είναι δύο (αντί για ένα στη μέθοδο Euler) και φυσικά και η ακρίβειά της είναι γενικά πολύ μεγαλύτερη. Επίσης πρόκειται για μέθοδο Runge–Kutta δευτέρας τάξεως (ενώ η μέθοδος Euler είναι μέθοδος Runge–Kutta πρώτης τάξεως). Η μορφή της (χωρίς απόδειξη) είναι η ακόλουθη:

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) \quad \text{με} \quad K_1 = hf(x_n, \tilde{y}_n), \quad K_2 = hf(x_{n+1}, \tilde{y}_n + K_1) \quad \text{και} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (20.2.13)$$

### A20.2.4. Η μέθοδος Runge–Kutta τρίτης τάξεως

Η μέθοδος Runge–Kutta τρίτης τάξεως είναι ακόμη πιο ακριβής μέθοδος αριθμητικής επίλυσης διαφορικών εξισώσεων της μορφής  $y' = f(x, y)$ . Η μορφή της (χωρίς την απόδειξη) είναι η εξής:

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + \frac{1}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3) \quad \text{με} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (20.2.14)$$

και

$$K_1 = hf(x_n, \tilde{y}_n), \quad K_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, \tilde{y}_n + \frac{K_1}{2}\right), \quad K_3 = hf(x_{n+1}, \tilde{y}_n - K_1 + 2K_2). \quad (20.2.15)$$

### A20.2.5. Η μέθοδος Runge–Kutta τετάρτης τάξεως

Η μέθοδος Runge–Kutta τετάρτης τάξεως, που καλείται και απλά μέθοδος Runge–Kutta, είναι μια ακόμη ακριβέστερη αριθμητική μέθοδος επίλυσης διαφορικών εξισώσεων της ίδιας ακριβώς μορφής (20.2.1):  $y' = f(x, y)$ . Η μορφή της (κι εδώ χωρίς την απόδειξη) είναι η ακόλουθη:

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \quad \text{με} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (20.2.16)$$

όπου τώρα

$$K_1 = hf(x_n, \tilde{y}_n), \quad K_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, \tilde{y}_n + \frac{K_1}{2}\right), \quad K_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, \tilde{y}_n + \frac{K_2}{2}\right), \quad K_4 = hf(x_{n+1}, \tilde{y}_n + K_3). \quad (20.2.17)$$

**Πίνακας A20.1:** Αριθμητικά αποτελέσματα  $\tilde{v}_{kn}$  επιλύσεως της διαφορικής εξίσωσης (20.2.18) (με  $v_\infty = 1$  και  $L = 1$  ή  $m/c = 2$ ) με τη χρήση και των τεσσάρων αριθμητικών μεθόδων: (α) Euler: στήλη 2, (β) βελτιωμένη Euler (ή Heun): στήλη 3, (γ) Runge-Kutta τρίτης τάξεως: στήλη 4 και τέλος (δ) Runge-Kutta τετάρτης τάξεως: στήλη 5. Στη στήλη 6 δίνονται οι αντίστοιχες ακριβείς τιμές  $v_n$ .

$t_n$	$\tilde{v}_{1n}$	$\tilde{v}_{2n}$	$\tilde{v}_{3n}$	$\tilde{v}_{4n}$	$v_n$
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.5	0.250000	0.242188	0.244952	0.244910	0.244919
1.0	0.484375	0.456352	0.462333	0.462095	0.462117
1.5	0.675720	0.626808	0.635617	0.635106	0.635149
2.0	0.811571	0.751923	0.762257	0.761531	0.761594
2.5	0.896909	0.838675	0.849036	0.848211	0.848284
3.0	0.945798	0.896596	0.905879	0.905076	0.905148
3.5	0.972164	0.934334	0.942013	0.941312	0.941376
4.0	0.985888	0.958546	0.964542	0.963976	0.964026
4.5	0.992894	0.973928	0.978420	0.977986	0.978026
5.0	0.996435	0.983641	0.986903	0.986585	0.986614
5.5	0.998214	0.989750	0.992066	0.991839	0.991860
6.0	0.999106	0.993584	0.995199	0.995040	0.995055
6.5	0.999553	0.995986	0.997096	0.996988	0.996998
7.0	0.999776	0.997490	0.998245	0.998171	0.998178
7.5	0.999888	0.998431	0.998939	0.998890	0.998894
8.0	0.999944	0.999019	0.999359	0.999326	0.999329
8.5	0.999972	0.999387	0.999613	0.999591	0.999593
9.0	0.999986	0.999617	0.999766	0.999752	0.999753
9.5	0.999993	0.999760	0.999859	0.999849	0.999850
10.0	0.999997	0.999850	0.999915	0.999909	0.999909

**A20.2.6. Αριθμητική εφαρμογή στη Ρευστομηχανική και στη Δυναμική**

Στην παράγραφο αυτή θα προχωρήσουμε σε αριθμητική εφαρμογή των τεσσάρων μεθόδων: (α) Euler, (β) βελτιωμένη Euler (ή Heun), (γ) Runge-Kutta τρίτης τάξεως και (δ) Runge-Kutta τετάρτης τάξεως για την αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων της μορφής (20.2.1):  $y' = f(x, y)$ .

Σαν διαφορική εξίσωση αυτής της μορφής επιλέξαμε εδώ τη γνωστή μας διαφορική εξίσωση

$$\dot{v} = \frac{v_\infty^2 - v^2}{2L} \quad \text{ή} \quad \dot{v} = \frac{v_\infty^2 - v^2}{m/c} \quad \text{με} \quad v = v(t) \quad \text{και} \quad \text{με} \quad \text{αρχική} \quad \text{συνθήκη} \quad \text{τη} \quad v(0) = 0. \quad (20.2.18)$$

Στην πρώτη μορφή της είναι η διαφορική εξίσωση (4.2.4) στην Ενότητα A4.2 του Κεφαλαίου A4: Ρευστομηχανική: ταχύτητα ιδεατού ρευστού σε ένα άκρο σωλήνα. Στη δεύτερη μορφή της είναι η διαφορική εξίσωση (4.3.18) στην Παράγραφο A4.3.2 του ίδιου Κεφαλαίου A4: Δυναμική: πτώση υλικού σημείου στον αέρα με αντίσταση  $R$  ανάλογη του τετραγώνου  $v^2$  της ταχύτητάς του  $v = v(t)$ . Η ποσότητα  $v_\infty$  δίνεται από τους τύπους (4.2.3) και (4.3.17) αντίστοιχα. Η λύση  $v = v(t)$  της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης (20.2.18) είναι η ακόλουθη:

$$v(t) = v_\infty \tanh \frac{t}{\tau}, \quad (20.2.19)$$

σχέσεις (4.2.10) και (4.3.19) αντίστοιχα, όπου  $\tau$  είναι ο σχετικός χαρακτηριστικός χρόνος.

Η διαφορική αυτή εξίσωση της Ρευστομηχανικής και της Δυναμικής (στα προβλήματα που αναφέραμε) είναι ακριβώς της μορφής  $y' = f(x, y)$  με το  $v$  στη θέση του  $y$  και το  $t$  στη θέση του  $x$ . Επομένως μπορούμε να τη λύσουμε αριθμητικά με τις τέσσερις μεθόδους που μόλις παρουσιάσαμε.

**Πίνακας A20.2:** Σφάλματα  $\varepsilon_{kn} = v_n - \tilde{v}_{kn}$  των αριθμητικών αποτελεσμάτων του Πίνακα A20.1 της προηγούμενης σελίδας και για τις τέσσερις αριθμητικές μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν.

$t_n$	$\varepsilon_{1n} = v_n - \tilde{v}_{1n}$	$\varepsilon_{2n} = v_n - \tilde{v}_{2n}$	$\varepsilon_{3n} = v_n - \tilde{v}_{3n}$	$\varepsilon_{4n} = v_n - \tilde{v}_{4n}$
0.0	$-0.00000 \times 10^{-3}$	$0.00000 \times 10^{-3}$	$-0.00000 \times 10^{-5}$	$0.00000 \times 10^{-6}$
0.5	$-5.08134 \times 10^{-3}$	$2.73116 \times 10^{-3}$	$-3.32215 \times 10^{-5}$	$8.36355 \times 10^{-6}$
1.0	$-2.22578 \times 10^{-2}$	$5.76512 \times 10^{-3}$	$-2.15593 \times 10^{-4}$	$2.23417 \times 10^{-5}$
1.5	$-4.05713 \times 10^{-2}$	$8.34063 \times 10^{-3}$	$-4.61739 \times 10^{-4}$	$4.32427 \times 10^{-5}$
2.0	$-4.99766 \times 10^{-2}$	$9.67146 \times 10^{-3}$	$-6.62641 \times 10^{-4}$	$6.29385 \times 10^{-5}$
2.5	$-4.86253 \times 10^{-2}$	$9.60824 \times 10^{-3}$	$-7.52402 \times 10^{-4}$	$7.31330 \times 10^{-5}$
3.0	$-4.06493 \times 10^{-2}$	$8.55253 \times 10^{-3}$	$-7.30881 \times 10^{-4}$	$7.22318 \times 10^{-5}$
3.5	$-3.07888 \times 10^{-2}$	$7.04107 \times 10^{-3}$	$-6.37133 \times 10^{-4}$	$6.36553 \times 10^{-5}$
4.0	$-2.18609 \times 10^{-2}$	$5.48178 \times 10^{-3}$	$-5.14573 \times 10^{-4}$	$5.17906 \times 10^{-5}$
4.5	$-1.48683 \times 10^{-2}$	$4.09834 \times 10^{-3}$	$-3.93482 \times 10^{-4}$	$3.98171 \times 10^{-5}$
5.0	$-9.82030 \times 10^{-3}$	$2.97373 \times 10^{-3}$	$-2.89149 \times 10^{-4}$	$2.93848 \times 10^{-5}$
5.5	$-6.35440 \times 10^{-3}$	$2.10959 \times 10^{-3}$	$-2.06295 \times 10^{-4}$	$2.10408 \times 10^{-5}$
6.0	$-4.05151 \times 10^{-3}$	$1.47081 \times 10^{-3}$	$-1.43923 \times 10^{-4}$	$1.47266 \times 10^{-5}$
6.5	$-2.55530 \times 10^{-3}$	$1.01154 \times 10^{-3}$	$-9.86812 \times 10^{-5}$	$1.01273 \times 10^{-5}$
7.0	$-1.59852 \times 10^{-3}$	$6.88098 \times 10^{-4}$	$-6.67394 \times 10^{-5}$	$6.86831 \times 10^{-6}$
7.5	$-9.93753 \times 10^{-4}$	$4.63909 \times 10^{-4}$	$-4.46402 \times 10^{-5}$	$4.60626 \times 10^{-6}$
8.0	$-6.14795 \times 10^{-4}$	$3.10447 \times 10^{-4}$	$-2.95888 \times 10^{-5}$	$3.06101 \times 10^{-6}$
8.5	$-3.78900 \times 10^{-4}$	$2.06453 \times 10^{-4}$	$-1.94644 \times 10^{-5}$	$2.01866 \times 10^{-6}$
9.0	$-2.32812 \times 10^{-4}$	$1.36563 \times 10^{-4}$	$-1.27225 \times 10^{-5}$	$1.32268 \times 10^{-6}$
9.5	$-1.42704 \times 10^{-4}$	$8.99166 \times 10^{-5}$	$-8.27036 \times 10^{-6}$	$8.61882 \times 10^{-7}$
10.0	$-8.73015 \times 10^{-5}$	$5.89653 \times 10^{-5}$	$-5.35072 \times 10^{-6}$	$5.58935 \times 10^{-7}$

Στην αριθμητική αυτή εφαρμογή υποθέσαμε ότι  $v_\infty = 1$  και επίσης  $L = 1$  (επομένως  $2L = 2$ ) στην πρώτη εφαρμογή: στη Ρευστομηχανική και  $m/c = 2$  στη δεύτερη εφαρμογή: στη Δυναμική. Τώρα η διαφορική εξίσωση (20.2.18) είναι ακριβώς η ίδια (συμπίπτει) και στις δύο αυτές εφαρμογές.

Χρησιμοποιήσαμε το συμβολισμό: (α)  $\tilde{v}_{1n}$  για τη μέθοδο Euler, που είναι πρώτης τάξεως: πρώτος δείκτης το 1, (β)  $\tilde{v}_{2n}$  για τη βελτιωμένη μέθοδο Euler (ή μέθοδο Heun), που είναι δευτέρας τάξεως: πρώτος δείκτης το 2, (γ)  $\tilde{v}_{3n}$  για τη μέθοδο Runge-Kutta τρίτης τάξεως: πρώτος δείκτης το 3 και (δ)  $\tilde{v}_{4n}$  για τη μέθοδο Runge-Kutta τετάρτης τάξεως (ή απλά μέθοδο Runge-Kutta): πρώτος δείκτης το 4. (Ξαναυπενθυμίζουμε ότι οι περισπωμένες δηλώνουν εδώ προσεγγίσεις!) Τις ακριβείς τιμές από τη διαθέσιμη (εδώ, όχι πάντοτε!) αναλυτική λύση (20.2.19) τις συμβολίζουμε σαν  $v_n$ . Το βήμα  $h$  και στις τέσσερις πιο πάνω αριθμητικές μεθόδους επιλέχθηκε ακριβώς το ίδιο:  $h = 0.5$ . Άρα χρησιμοποιούμε τις χρονικές στιγμές  $t_n = nh = hn = 0.5n$  ας πούμε σε δευτερόλεπτα (sec).

Τα αριθμητικά αποτελέσματα, τα οποία βρέθηκαν με τη *Mathematica*, τα παρουσιάζουμε στον Πίνακα A20.1 της προηγούμενης σελίδας (στήλες δύο έως και πέντε) στο χρονικό διάστημα  $[0, 10]$  με βήμα  $h = 0.5$ . Για τη σύγκρισή τους με την αναλυτική λύση  $v(t)$  παραθέτουμε στην τελευταία (την έκτη) στήλη και τις ακριβείς αριθμητικές τιμές  $v_n$  (αυτές με σφάλμα αποκλειστικά το σφάλμα στρογγυλεύσεως στις αριθμητικές πράξεις). Παρατηρούμε μια πολύ καλή ακρίβεια στα αριθμητικά αποτελέσματα. Πιο σημαντική όμως είναι η παρατήρηση ότι η ακρίβειά τους μεγαλώνει από τη στήλη 2 (μέθοδος Euler) προς τη στήλη 5 (μέθοδος Runge-Kutta τετάρτης τάξεως), δηλαδή όσο αυξάνει η τάξη της αριθμητικής μεθόδου η οποία χρησιμοποιήθηκε: από 1 στη στήλη 2 μέχρι 4 στη στήλη 5. Αυτό ήταν βέβαια αναμενόμενο! Τέλος στον πιο πάνω Πίνακα A20.2 παρουσιάζουμε τα ίδια αποτελέσματα, τώρα όμως με τις διαφορές  $\varepsilon_{kn} = v_n - \tilde{v}_{kn}$  με  $k = 1, 2, 3, 4$ . Πρόκειται για τα σφάλματα των τεσσάρων αριθμητικών μεθόδων, που δείχνουν πιο «ανάγλυφα» την ακρίβειά τους.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

• Τα πιο κάτω 22 πρώτα βιβλία αναφέρονται αποκλειστικά (ή σε κεφάλαιά τους) στις **Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις** και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την καλύτερη κατανόηση της ύλης του μαθήματος και για περαπέρα μελέτη από τον ενδιαφερόμενο φοιτητή/την ενδιαφερόμενη φοιτήτρια. Τα βιβλία αυτά είναι γραμμένα (ή μεταφρασμένα) στα Ελληνικά (εκτός από το [22]) και είναι διαθέσιμα στο εμπόριο, δηλαδή είτε άμεσα διαθέσιμα στα βιβλιοπωλεία των Πατρών που ειδικεύονται σε Πανεπιστημιακά βιβλία είτε διαθέσιμα μετά από παραγγελία από τους εκδότες ή τους συγγραφείς. Είναι επίσης διαθέσιμα (και στην Ελληνική αγορά!) και πάρα πολλά και εξίσου αξιόλογα βιβλία στα Αγγλικά. Αυτά όμως δε θα αναφερθούν στην παρούσα σύντομη βιβλιογραφία.

• Μετά τη βιβλιογραφία για τις **Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις** αναφέρονται δύο βιβλία για τις **Σειρές και το Μετασχηματισμό Fourier**. Ακολουθεί **πολύ συνοπτική** βιβλιογραφία για άλλες επιστημονικές περιοχές του άμεσου ενδιαφέροντος του Πολιτικού Μηχανικού με Ελληνικά και Αγγλικά βιβλία που ελήφθησαν υπόψη σε μικρότερο ή μεγαλύτερο βαθμό κατά την προετοιμασία του διδακτικού αυτού βιβλίου. Πρόκειται για βιβλία **Μαθηματικών για Μηχανικούς** (αυτά περιέχουν και θεωρία και εφαρμογές), **Δυναμικής, Ταλαντώσεων, Δυναμικής των Κατασκευών, Μηχανικής των Υλικών, Ελαστικής Ευστάθειας, Πλακών και Κελυφών, Εδαφομηχανικής και Θεμελιώσεων, Ρευστομηχανικής και Περιβαλλοντικής Μηχανικής**. Όλα περιέχουν σε κάποιο βαθμό εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων με ενδιαφέρον για τον Πολιτικό Μηχανικό. Τα βιβλία στα Ελληνικά (καθώς και οι μεταφράσεις στα Ελληνικά) αναφέρονται πρώτα. Δόθηκε σημαντική προτεραιότητα (αλλ' όχι και αποκλειστικότητα) στα βιβλία που είναι σήμερα διαθέσιμα στο εμπόριο.

• **ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ: Για τα Κεφάλαια Α1 έως Α20 (όλα)**

1. Αθανασιάδη, Α. Γ. (2001), *Ανώτερα Μαθηματικά II*, Κεφάλαιο 1: Στοιχεία Διαφορικών Εξισώσεων, σσ. 1–157. Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη, 336 σελίδες.
2. Αλικάκος, Ν. Δ., Καλογερόπουλος, Γ. Η. (2003), *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*. Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, viii+593 σελίδες.
3. Boyce, W. E., DiPrima, R. C. (1999), *Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών*. Μετάφραση από την 6η Αγγλική Έκδοση: *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, Wiley (1997). Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, xx+840 σελίδες. [8η Αγγλική Έκδοση: Wiley (2004), 800 σελίδες.]
4. Bronson, R. (1978), *Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις*. Μετάφραση από την 1η Αγγλική Έκδοση: *Modern Introductory Differential Equations*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York (1973). Εκδοτική Εταιρεία ΕΣΠΙ, Αθήνα, x+310 σελίδες. (Διαθέσιμο για δανεισμό από την Κεντρική Βιβλιοθήκη του Πανεπιστημίου Πατρών.) 2η Αγγλική Έκδοση: 1994.
5. Γεωργούδης, Ι., Παλιάτσος, Α., Πρεζεράκος, Ν. (1995), *Διαφορικές Εξισώσεις*. Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 430 σελίδες.
6. Δάσιος, Γ. (1991), *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*. Πάτρα, 586 σελίδες.
7. Δασκαλόπουλου, Δ. Γ. (1999), *Ανώτερα Μαθηματικά V: Διαφορικές Εξισώσεις* (Φωτογραφική ανατύπωση της αρχικής εκδόσεως). Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, Αθήνα, 760 σελίδες.
8. Κρόκου, Ι. Π. (2005), *Διαφορικές Εξισώσεις*, 6η Έκδοση. Εκδόσεις Αρνός, Αθήνα, 288 σελίδες.
9. Κυβεντίδη, Θ. (1987), *Διαφορικές Εξισώσεις*, Τόμος Πρώτος, 2η Έκδοση. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, xi+468 σελίδες.
10. Κυβεντίδη, Θ. (1998), *Διαφορικές Εξισώσεις*, 2η Έκδοση. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, xi+546 σελίδες.
11. Λεγάτου, Γ. Α. (1992), *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*. Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 696 σελίδες.
12. Μανανάκη, Μ. (1994), *Διαφορικές Εξισώσεις με Εφαρμογές*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, Πάτρα, x+303 σελίδες.
13. Μάρκελλου, Β. Β. (2000), *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*, Τόμος II: Γραμμική Άλγεβρα, Διαφορικές Εξισώσεις, Τεύχος 5: Διαφορικές Εξισώσεις, Εισαγωγή, iv+268 σελίδες το τεύχος αυτό.

14. Μάρκελλου, Β. Β. (2001), *Αριθμητικές Μέθοδοι*, 5η Έκδοση, Κεφάλαια 4 και 5 για τις Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις, σσ. 133–215. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, vi+224 σελίδες.
  15. Μπόζη, Γ. Δ., Παπαδόπουλου, Δ. Β. (1999), *Προβλήματα Διαφορικών Εξισώσεων*. Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη, 171 σελίδες.
  16. Παντελίδη, Γ. Ν., Κραββαρίτη, Δ. Χ., Χατζησάββα, Ν. Σ. (1990), *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις*, 2η Έκδοση. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, Αθήνα, vii+391 σελίδες.
  17. Πολυράκης, Ι. Α. (1989), *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις*. Αθήνα, 233 σελίδες.
  18. Σιαφαρίκας, Π. Δ. (2005, 2004), *Εφαρμογές των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων*, Τόμος I (2005), 524 σελίδες, Τόμος II (2004), 500 σελίδες. Πάτρα.
  19. Σταυρακάκης, Ν. (1997), *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις*. Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα, xvii+715 σελίδες.
  20. Τραχανάς, Σ. (2001), *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις*, 6η Έκδοση. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, xvi+533 σελίδες.
  21. Χατζηνικολάου, Κ. Θ. (1989), *Μαθηματικά II*, Τόμος Α: Διαφορικές Εξισώσεις. Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 607 σελίδες.
  22. Spiegel, M. R. (1965), *Laplace Transforms*. Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York, vi+261 σελίδες.
- **ΣΕΙΡΕΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER: Για τα Κεφάλαια A15 έως A19**
23. Spiegel, M. R. (1978), *Ανάλυση Fourier*. Μετάφραση από την Αγγλική Έκδοση: *Fourier Analysis*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York (1974). Εκδοτική Εταιρεία ΕΣΠΙ, Αθήνα, vi+197 σελίδες. (Διαθέσιμο για δανεισμό από την Κεντρική Βιβλιοθήκη του Πανεπιστημίου Πατρών.)
  24. Sneddon, I. N. (1995), *Fourier Transforms*, Dover Edition. Dover, New York, xii+542 σελίδες.
- **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ: Για τα Κεφάλαια A1 έως A20 (όλα)**
25. Sokolnikoff, I. S., Redheffer, R. M. (2001), *Μαθηματικά για Φυσικούς και Μηχανικούς*. Μετάφραση από τη 2η Αγγλική Έκδοση: *Mathematics of Physics and Modern Engineering*, McGraw-Hill, New York (1966). Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, xv+863 σελίδες.
  26. James, G., Burley, D., Clements D., Dyke, P., Searl, J., Wright, J. (2001), *Modern Engineering Mathematics*, 3η Έκδοση. Prentice Hall, Pearson Education, Harlow, England, xxv+978 σελίδες.
  27. Jeffrey, A. (2002), *Advanced Engineering Mathematics*, International Edition. Harcourt/Academic Press, xix+1160 σελίδες.
  28. Kreyszig, E. (2006), *Advanced Engineering Mathematics*, 9η Έκδοση. Wiley, New York, 1248 σελίδες. (Υπάρχει και *Mathematica Computer Manual*.)
  29. Pipes, L. A., Harvill, L. R. (1970), *Applied Mathematics for Engineers and Physicists*, 3η Έκδοση. McGraw-Hill, New York, xxii+1015 σελίδες.
  30. Wylie, C. R., Barrett, L. C. (1995), *Advanced Engineering Mathematics*, 6η Έκδοση. McGraw-Hill, New York, 1362 σελίδες.
- **ΔΥΝΑΜΙΚΗ: Για τις Ενότητες A1.2, A4.3, A11.3 και A12.1 και τις Εφαρμογές A1.11, A1.17, A1.19, A3.3, A3.8, A5.2 και A5.4**
31. Καράμπαλης, Δ. Λ. (2001), *Δυναμική και Ταλαντώσεις* (Παραδόσεις και Ασκήσεις του Μαθήματος). Πανεπιστήμιο Πατρών: Τμήμα Εκτυπώσεων Τυπογραφείου, 180 σελίδες.
  32. Νατσιάβας, Σ. (1994), *Εφαρμοσμένη Δυναμική*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, viii+495 σελίδες.
  33. Παϊπέτης, Σ. Α. (2002), *Τεχνική Μηχανική II: Δυναμική*. Εκδόσεις Ίων, Αθήνα, 364 σελίδες.
  34. Spiegel, M. R. (1985), *Θεωρητική Μηχανική*. Μετάφραση από την Αγγλική Έκδοση: *Theoretical Mechanics*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York (1980). Εκδοτική Εταιρεία ΕΣΠΙ, Αθήνα, vii+378 σελίδες.
  35. Τσίγκανος, Κ. Χ. (2001), *Κλασική Μηχανική*. Εκδόσεις Σταμούλη, Αθήνα, 353 σελίδες.
  36. Χατζηδημητρίου, Ι. Δ. (2000), *Θεωρητική Μηχανική*, Τεύχος Α: 2η Έκδοση, xvi+234+Π18 σελίδες και Τόμος Β: 3η Έκδοση, x+237 σελίδες. Εκδόσεις Γιαχούδη-Γιαπούλη, Θεσσαλονίκη.
  37. Fowles G. R., Cassiday, G. L. (2005), *Analytical Mechanics*, 7η Έκδοση. Brooks Cole, Thomson Higher Education, Belmont, California, 544 σελίδες.
  38. Meriam, J. L., Kraige, L. G. (2006), *Engineering Mechanics: Dynamics*, 6η Έκδοση. John Wiley & Sons, New York, 744 σελίδες.
  39. Shames I. H. (1997), *Engineering Mechanics: Statics and Dynamics*, 4η Έκδοση. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, lxxx+1024 σελίδες.

- **ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ: Για τα Κεφάλαια Α6 και Α17, τις Ενότητες Α1.1, Α2.2, Α11.5 έως Α11.10, Α13.1, Α14.2 και Α19.1, τις Παραγράφους Α12.7.1 και Α12.8.2 και τις Εφαρμογές Α1.1, Α1.3, Α1.7 έως Α1.10, Α1.14 έως Α1.16, Α5.1, Α5.3, Α5.5, Α5.9 και Α5.10. Το βιβλίο [31] και επίσης ...**
- 40. Νατσιάβας, Σ. (2001), *Ταλαντώσεις Μηχανικών Συστημάτων*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, xvi+600 σελίδες.
- 41. Παϊπέτης, Σ. Α., Πολύζος, Δ. Κ. (2003), *Ταλαντώσεις και Κύματα*. Εκδόσεις Ίων, Αθήνα, 336 σελίδες.
- 42. Dimarogonas, A. D., Haddad, S. (1992), *Vibration for Engineers*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, xv+749 σελίδες.
- 43. Kelly, S. G. (2000), *Fundamentals of Mechanical Vibrations*, 2η Έκδοση. McGraw-Hill, New York, xi+629 σελίδες.
- 44. Meirovitch, L. (2001), *Fundamentals of Vibrations*. McGraw-Hill, New York, 816 σελίδες.
- 45. Rao, S. S. (2004), *Mechanical Vibrations*, 4η Έκδοση. Prentice Hall, Pearson Education, Upper Saddle River, New Jersey, xxvi+1080 σελίδες.
- **ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ: Για το Κεφάλαιο Α13, τις Ενότητες Α9.2, Α11.12 και Α14.3, την Παράγραφο Α12.8.2 και τις Εφαρμογές Α1.5 και Α5.6**
- 46. Αναστασιάδη, Κ. Κ. (1999), *Δυναμική των Κατασκευών*, Τόμος Ι: Διακριτά Συστήματα, xv+390 σελίδες, Τόμος ΙΙ: Συνεχή Συστήματα, viii+308 σελίδες. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη,
- 47. Κατσιακαδέλης, Ι. Θ. (2002, 2004), *Δυναμική των Κατασκευών*, Τόμοι Ι (2002), x+384 σελίδες και ΙΙ (2004), x+528 σελίδες. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.
- 48. Κολιόπουλος Π. Κ., Μανώλης Γ. Δ. (2005), *Δυναμική των Κατασκευών με Εφαρμογές στην Αντισεισμική Μηχανική*. Β. Γκιούρδας Εκδοτική, Αθήνα, xvii+309 σελίδες.
- 49. Chopra, A. K. (2008), *Δυναμική των Κατασκευών: Θεωρία και Εφαρμογές στη Σεισμική Μηχανική*, 3η Έκδοση. Εκδόσεις Γκιούρδας, Αθήνα, xxxiv+876 σελίδες. [3η Αμερικανική Έκδοση, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey (2007), xxxiv+876 σελίδες.]
- 50. Clough, R. W., Penzien, J. (1993), *Dynamics of Structures*, 2η Έκδοση. McGraw-Hill, New York, xxii+739 σελίδες. (Μετάφραση: *Δυναμική των Κατασκευών*, Fountas, Αθήνα, 720 σελίδες.)
- 51. Connor, J. J. (2003), *Introduction to Structural Motion Control*. Prentice Hall, Pearson Education, Upper Saddle River, New Jersey, xiv+680 σελίδες
- 52. Hart, G. C., Wong, K. (2000), *Structural Dynamics for Structural Engineers*. John Wiley & Sons, New York, xi+591 σελίδες.
- 53. Humar, J. L. (2002), *Dynamics of Structures*, 2η Έκδοση. Balkema Publishers, Swets & Zeitlinger, Lisse, The Netherlands, xxv+967 σελίδες.
- **ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ: Για το Κεφάλαιο Α7, τις Ενότητες Α2.1, Α5.8, Α9.1, Α11.4, Α11.11, Α11.13 έως Α11.15, Α12.2 και Α14.4, τα Εδάφια Α15.2.8.1 και Α15.2.8.2 και τις Εφαρμογές Α1.2, Α1.6, Α1.12, Α1.13, Α1.20, Α3.1, Α3.2, Α3.7, Α5.7, Α5.11 και Α10.1**
- 54. Βαρδουλάκης, Ι. (1999), *Τεχνική Μηχανική ΙΙ*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 343 σελίδες.
- 55. Beer, F. P., Russel Johnston, E., Jr. (1999), *Μηχανική των Υλικών*, Τόμοι Α και Β. Μετάφραση από τη 2η Αγγλική Έκδοση: *Mechanics of Materials*, McGraw-Hill, New York (1992). Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη, 902 σελίδες. [4η Αγγλική Έκδοση: McGraw-Hill (2005), 800 σελίδες.]
- 56. Βουθούνης, Π. Α. (2002), *Τεχνική Μηχανική*, 7η Έκδοση. Αθήνα, xvi+Σ108+480+Π9 σελίδες.
- 57. Γδούτου, Ε. Ε. (2004), *Αντοχή των Υλικών*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, viii+371 σελίδες.
- 58. Κερμανίδης, Θ. (1993), *Αντοχή Υλικών*, Τόμος 2, 2η Έκδοση. Εκδοτικός Οίκος Αδελφών Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη, ιε'+491 σελίδες.
- 59. Μαστρογιάννης, Ε. Ν. (1999), *Μηχανική των Υλικών*, Τόμος Δεύτερος. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, xv+481 σελίδες.
- 60. Παναγιωτουνάκος, Δ. Ε. (2003), *Μηχανική των Κατασκευών*. Fountas, Αθήνα, 302 σελίδες.
- 61. Τριανταφύλλου, Α. Χ. (2005), *Μηχανική των Υλικών*, Τόμος Β. Τμήμα Εκτυπώσεων-Τυπογραφείου Πανεπιστημίου Πατρών, Πάτρα.
- 62. Τσαμασφύρος, Γ. Ι. (1991), *Μηχανική Παραμορφωσίμων Σωμάτων*, Τόμοι Ι: xvi+571 σελίδες και ΙΙ: xiv+527 σελίδες. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.
- 63. Χαραλαμπίδης, Ν., Παπαμίχος, Ε. (2005), *Αντοχή Δομικών Στοιχείων*. Εκδόσεις Σοφία, Θεσσαλονίκη, 496 σελίδες.
- 64. Timoshenko, S. P., Goodier, J. N. (1970), *Theory of Elasticity*, 3η Έκδοση. McGraw-Hill, New York, xxiv+567 σελίδες.

- **ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ:** Για τις Ενότητες A7.1 και A9.1, το Εδάφιο A15.2.8.4 και την Εφαρμογή A5.8. (Κεφάλαια για Ελαστική Ευστάθεια έχουν και τα βιβλία *Μηχανικής των Υλικών!*)
  65. Κουνάδη, Α. Ν. (1997), *Γραμμική Θεωρία Ελαστικής Ευστάθειας*, 2η Έκδοση. Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 232 σελίδες.
  66. Μπέσκος, Δ. Ε. (2003), *Ευστάθεια Κατασκευών*. Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών: Διδακτικά Βιβλία, Πάτρα, vi+150 σελίδες.
  67. Timoshenko, S. P., Gere, J. M. (1963), *Theory of Elastic Stability*, 2η Έκδοση. McGraw-Hill, New York, xvi+541 σελίδες.
- **ΠΛΑΚΕΣ ΚΑΙ ΚΕΛΥΦΗ:** Για την Ενότητα A8.1, το Εδάφιο A15.2.8.3 και την Εφαρμογή A3.6
  68. Βαρκαράκη, Κ. Ι. (1977), *Στατική των Πλακών*, Τόμος Ι: Θεωρία και Μέθοδοι Επιλύσεως. Αθήνα, xv+461 σελίδες.
  69. Timoshenko, S. P., Woinowsky-Krieger, S. (1959), *Theory of Plates and Shells*, 2η Έκδοση. McGraw-Hill, New York, xiv+580 σελίδες.
  70. Ugrural, A. C. (1999), *Stresses in Plates and Shells*, 2η Έκδοση. McGraw-Hill, New York, 522 σελίδες.
- **ΕΔΑΦΟΜΗΧΑΝΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΜΕΛΙΩΣΕΙΣ:** Για τις Ενότητες A2.3, A8.2 και A11.13, τις Παραγράφους A2.1.7 και A12.2.2 και τις Εφαρμογές A1.2, A1.12 και A1.13
  71. Αναγνωστόπουλος, Α. Γ., Παπαδόπουλος, Β. Π. (1989), *Επιφανειακές Θεμελιώσεις*, 1η Έκδοση. Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, xi+320 σελίδες.
  72. Καραλής, Θ. Κ. (2003), *Επιφανειακά Θεμελιώσεις*. Εκδόσεις Αίβαζή, Θεσσαλονίκη, 316 σελίδες.
  73. Hetényi, M. (1946), *Beams on Elastic Foundation*. The University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan, ix+255 σελίδες (επανεκτύπωση: 1993).
  74. Muir Wood, D. (2004), *Geotechnical Modelling (Applied Geotechnics: Volume 1)*, 1η έκδοση. Spon Press, Taylor & Francis Group, London, x+488 σελίδες.
- **ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ:** Για τις Ενότητες A2.4, A4.2 και A4.4 και τις Εφαρμογές A1.18 και A3.5
  75. Αθανασιάδη, Ν. Α. (1989), *Μηχανική Ρευστών*. Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, xiv+624 σελίδες.
  76. Giles, R. V. (1986), *Μηχανική των Ρευστών και Υδραυλική*. Μετάφραση από τη 2η Αγγλική Έκδοση: *Fluid Mechanics and Hydraulics*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York (1977). Εκδοτική Εταιρεία ΕΣΠΙ, Αθήνα, ix+282 σελίδες.
  77. Νουτσόπουλος, Γ., Χριστοδούλου, Γ. (1996), *Μαθήματα Μηχανικής των Ρευστών για Πολιτικούς Μηχανικούς*, 1η Έκδοση. Έκδοση Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου, Αθήνα, 285 σελίδες.
  78. Παπαϊωάννου, Α. Θ. (1999), *Μηχανική των Ρευστών*, Τόμος Ι, 2η Έκδοση. Αθήνα, xv+535 σελίδες.
  79. Τσαγγάρης, Σ. (1995), *Μηχανική των Ρευστών*. Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, xvii+582 σελίδες.
  80. Fox, R. W., McDonald, A. T., Pritchard, P. J. (2004), *Introduction to Fluid Mechanics*, 6η Έκδοση. John Wiley & Sons, New York, xii+787 σελίδες.
  81. Kundu, P. K., Cohen, I. M. (2004), *Fluid Mechanics*, 3η Έκδοση. Academic Press, Elsevier Science, San Diego, California, 759 σελίδες.
  82. Prandtl, L., Tietjens, O. G. (1957), *Fundamentals of Hydro- and Aeromechanics*. Dover, New York, xvi+270 σελίδες. (Μετάφραση από τη Γερμανική έκδοση. 1η Αγγλική έκδοση: 1934.)
  83. Shames, I. H. (2003), *Mechanics of Fluids*, 4η Έκδοση. McGraw-Hill, New York, xiv+850 σελίδες.
  84. White, F. M. (2007), *Fluid Mechanics*, 6η Έκδοση. McGraw-Hill, New York, 896 σελίδες.
- **ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ:** Για τις Ενότητες A2.5, A4.1, A8.3, A11.16, A11.17 και A19.2
  85. Δημητρακόπουλος, Α. Κ. (1999), *Περιβαλλοντική Υδραυλική* (Πανεπιστημιακές Παραδόσεις). Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πάτρα, 61 σελίδες.
  86. Χρυσικόπουλος, Κ. Β. (2007), *Καθαρισμός Νερού* (Πανεπιστημιακές Παραδόσεις). Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πάτρα, 281 σελίδες.
  87. Schnoor, J. L. (2003), *Περιβαλλοντικά Μοντέλα: Τύχη και Μεταφορά Ρύπων στον Αέρα, Νερό και Έδαφος*. Μετάφραση της Αγγλικής Εκδόσεως: *Environmental Modeling: Fate and Transport of Pollutants in Water, Air, and Soil*, Wiley (1996). Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη, 759 σελίδες.
  88. Thomann, R. V. (1972), *Systems Analysis and Water Quality Management*. McGraw-Hill, New York, xvi+286 σελίδες. (Επανέκδοση το 1974.)