

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ Νο 7

ΑΣΚΗΣΗ 1 (Μετασχηματισμός Laplace): Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace των κάτωθι συναρτήσεων με χρήση (α) μόνο του ορισμού, (β) της συνάρτησης Heaviside και του μετασχηματισμού Laplace αυτής:

$$(i) \quad f(t) = \begin{cases} 0, & t < 4 \\ (t-4)^2, & t \geq 4 \end{cases} \quad \text{Απ. } F(s) = \frac{2e^{-4s}}{s^3}$$

$$(ii) \quad f(t) = \begin{cases} t^2 + 2, & 0 \leq t \leq 2 \\ 6, & t > 2 \end{cases} \quad \text{Απ. } F(s) = \frac{2 + 2s^2}{s^3} - \frac{e^{-2s}(2 + 4s + 6s^2)}{s^3}$$

$$(iii) \quad f(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \leq t \leq \pi/2 \\ 0, & t > \pi/2 \end{cases} \quad \text{Απ. } F(s) = \frac{e^{-s\pi/2} + s}{s^2 + 1}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2 (Μετασχηματισμός Laplace): Μόνο με χρήση των ιδιοτήτων και του πίνακα των βασικών μετασχηματισμών Laplace, να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace των κάτωθι συναρτήσεων:

$$(i) \quad f(t) = 2t^2 - 3t + 4 \quad \text{Απ. } F(s) = \frac{4}{s^3} - \frac{3}{s^2} + \frac{4}{s}$$

$$(ii) \quad f(t) = 2 \sin t + 3 \cos(2t) \quad \text{Απ. } F(s) = \frac{2}{s^2 + 1} + \frac{3s}{s^2 + 4}$$

$$(iii) \quad f(t) = 2e^{5t} \sin t \quad \text{Απ. } F(s) = \frac{2}{(s-5)^2 + 1}$$

$$(iv) \quad f(t) = \cos^2(kt) \quad \text{Απ. } F(s) = \frac{s^2 + 2k^2}{s(s^2 + 4k^2)}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3 (Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace): Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace των κάτωθι συναρτήσεων:

$$(i) \quad F(s) = \frac{1}{s^2 + 15s + 56} \quad \text{Απ. } f(t) = e^{-7t} - e^{-8t}$$

$$(ii) \quad F(s) = \frac{1}{s^2 + 12s + 61} \quad \text{Απ. } f(t) = \frac{1}{5} e^{-6t} \sin(5t)$$

$$(iii) \quad F(s) = \frac{s-1}{s^2 - 2s + 50} \quad \text{Απ. } f(t) = e^t \cos(7t)$$

$$(iv) \quad F(s) = \frac{s^3 + 3s}{(s^2 - 1)^3} \quad \text{Απ. } f(t) = \frac{t^2}{4} (e^t + e^{-t})$$

$$(v) \quad F(s) = \frac{10s}{s^4 + 17s^2 + 16} \quad \text{Απ. } f(t) = \frac{2}{3} \cos t - \frac{2}{3} \cos(4t)$$

$$(vi) \quad F(s) = \frac{8s}{e^{3s}(s^2 + 1)} \quad \text{Απ. } f(t) = 8 \cos(t-3)H(t-3)$$