

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΞΑΣΚΗΣΗΣ Νο 6

ΑΣΚΗΣΗ 1 (Συστήματα διαφορικών εξισώσεων-Επίλυση με χρήση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων): Με χρήση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων, να λυθούν τα κάτωθι συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων (όπου $y = y(t)$, $x = x(t)$, $z = z(t)$):

$$(i) \quad \left. \begin{aligned} x' &= x - 10y \\ y' &= -7x + 10y \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Απ.} \quad \begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{15t} + 2c_2 e^{-4t} \\ y(t) &= -\frac{7c_1}{5} e^{15t} + c_2 e^{-4t} \end{aligned}$$

$$(ii) \quad \left. \begin{aligned} x' &= 6x - y \\ y' &= 5x \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Απ.} \quad \begin{aligned} x(t) &= c_1 e^t + c_2 e^{5t} \\ y(t) &= 5c_1 e^t + c_2 e^{5t} \end{aligned}$$

$$(iii) \quad \left. \begin{aligned} x' &= 4x + z \\ y' &= -2y \\ z' &= -z \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Απ.} \quad \begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t} \\ y(t) &= c_3 e^{-2t} \\ z(t) &= -5c_2 e^{-t} \end{aligned}$$

$$(iv) \quad \left. \begin{aligned} x' &= 3x - 4y \\ y' &= 4x + 3y \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Απ.} \quad \begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{3t} \cos(4t) + c_2 e^{3t} \sin(4t) \\ y(t) &= -c_2 e^{3t} \cos(4t) + c_1 e^{3t} \sin(4t) \end{aligned}$$

$$(v) \quad \left. \begin{aligned} x' &= 2x + \frac{y}{2} \\ y' &= -\frac{x}{2} + y \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Απ.} \quad \begin{aligned} x(t) &= -c_1 e^{3t/2} - c_2 (t+2)e^{3t/2} \\ y(t) &= c_1 e^{3t/2} + c_2 t e^{3t/2} \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2 (Μη ομογενή συστήματα διαφορικών εξισώσεων):

Να βρεθεί η γενική λύση των κάτωθι μη ομογενών συστημάτων (όπου $y = y(t)$, $x = x(t)$, $z = z(t)$):

$$(i) \quad \left. \begin{aligned} x' &= 2y + e^t \\ y' &= -x + 3y - e^t \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Απ.} \quad \begin{aligned} x(t) &= 2c_1 e^t + c_2 e^{2t} + 3e^t + 4te^t \\ y(t) &= c_1 e^t + c_2 e^{2t} + 3e^t + 2te^t \end{aligned}$$

$$(ii) \quad \left. \begin{aligned} x' &= x - y + e^t \cos t \\ y' &= x + y + e^t \sin t \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Απ.} \quad \begin{aligned} x(t) &= c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t + te^t \cos t \\ y(t) &= c_1 e^t \sin t - c_2 e^t \cos t + te^t \sin t \end{aligned}$$

$$(iii) \quad \left. \begin{aligned} x' &= y + z + 3e^t \\ y' &= x + z - e^t \\ z' &= x + y - e^t \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Απ.} \quad \begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{2t} - c_2 e^{-t} - c_3 e^{-t} + e^t \\ y(t) &= c_1 e^{2t} + c_3 e^{-t} - e^t \\ z(t) &= c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} - e^t \end{aligned}$$