

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΞΑΣΚΗΣΗΣ ΣΕ ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ
ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

- 1) Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να δειχθεί ότι η δοθείσα συνάρτηση είναι λύση της αντίστοιχης ΣΔΕ:
- (α) $y' + 2y = 0$, $y_1(x) = e^{-2x}$,
- (β) $y' + 2y = 0$, $y_2(x) = 5e^{-2x}$
- (γ) $y'' + 9y' = 0$, $y_3(x) = A + Be^{-9x}$,
- (δ) $y'' + y = (x - 1)\cos x$, $y_4(x) = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2}\right)\sin x + \frac{x}{4}\cos x$
- (ε) $x^2y'' - 12xy' + 42y = 0$, $y_5(x) = x^6 + x^7$.
- 2) Για κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, όπου η συνάρτηση $y = y(x)$ ορίζεται πεπλεγμένα, να δειχθεί ότι είναι λύση της αντίστοιχης ΣΔΕ και στη συνέχεια να γίνει γραφική παράσταση αυτής της λύσης για $x, y \in [-10, 10]$:
- (α) $x^3y + 3xy^2 - 8 = 0$ για την ΣΔΕ $3y(x^2 + y)dx + x(x^2 + 6y)dy = 0$,
- (β) $y^2 + y \sin x - 1 = 0$ για την ΣΔΕ $y \cos x dx + (2y + \sin x)dy = 0$,
- (γ) $y \ln x + x \cos y = 0$ για την ΣΔΕ $\left(\frac{y}{x} + \cos y\right) dx + (\ln x - x \sin y)dy = 0$.
- 3) Έστω η ΣΔΕ: $y' = y \cos x$ (*)
- (α) Να βρεθεί αναλυτικά και απευθείας η γενική λύση της (*)
- (β) Να γίνει γραφική παράσταση της λύσης της (*) για τιμές της αυθαίρετης σταθεράς ίσες με -2, -1, 0, 1, 2 και $x \in [0, 4\pi]$.
- (γ) Να βρεθεί αναλυτικά και απευθείας (με χρήση της DSolve) η λύση του ΠΑΤ που αποτελείται από την (*) και τη συνθήκη $y(0) = 1$. Στη συνέχεια να γίνει γραφική παράσταση της λύσης αυτής για $x \in [0, 4\pi]$.
- (δ) Να λυθεί αριθμητικά για $x \in [0, 4\pi]$ το ΠΑΤ του προηγούμενου ερωτήματος και να γίνει γραφική παράσταση της αριθμητικής λύσης με κόκκινο χρώμα.
- (ε) Να παρασταθούν στο ίδιο σχήμα οι λύσεις των ερωτημάτων (γ) και (δ).
- 4) Έστω το ΠΑΤ $y' = \sin(2x - y), y(0) = 1/2$. (*)
- (α) Να βρεθεί αναλυτικά και απευθείας η λύση του (*).
- (β) Να λυθεί αριθμητικά για $x \in [0, 15]$ το ΠΑΤ (*) και να γίνει γραφική παράσταση της αριθμητικής λύσης.
- 5) Έστω το ΠΑΤ $y' = \sin(xy), y(0) = a$. (*)
- (α) Να βρεθεί αναλυτικά και απευθείας (με χρήση της DSolve) η λύση του (*) για $a = 1/2$. Λαμβάνουμε αποτέλεσμα; (Απάντηση: ΟΧΙ).

(β) Να λυθεί αριθμητικά για $x \in [0, 7]$ το ΠΑΤ (*) για $a = 1/2$ και να γίνει γραφική παράσταση της αριθμητικής λύσης με κόκκινο χρώμα.

(γ) Να λυθεί αριθμητικά για $x \in [0, 7]$ το ΠΑΤ (*) για $a = 1$ και να γίνει γραφική παράσταση της αριθμητικής λύσης με μπλε χρώμα.

(δ) Να παρασταθούν στο ίδιο σχήμα οι λύσεις των ερωτημάτων (β) και (γ).

6) Να βρεθεί η γενική λύση των ΣΔΕ (όπου $y = y(x)$):

(α) $y'' + 2y' + 17y = 0$

(β) $1.90413y'' + 0.26779y' + 3.58554y = 0$

(γ) $8.9y'''' - 2.5y'' + 32y' + 0.773y = 0$

(δ) $y''' + 4y'' + 9y' + 36y = e^{-x} + 2 \cos(3x)$ (με χρήση και της FullSimplify)

(ε) $y''' + 6y'' + 21y' + 26y = e^{2x} \cos(3x) + 10e^{-2x}$ (με χρήση και της FullSimplify)

(στ) $x^4 y^{(4)} + 8x^3 y''' + 27x^2 y'' + 35xy' + 45y = 0$

7) Να βρεθεί τόσο με χρήση της DSolve όσο και με χρήση της NDSolve τα ΠΑΤ και να γίνει γραφική παράσταση των λύσεων στο ίδιο σχήμα:

(α) $0.31y'''' + 11.2y'' - 9.8y' + 5.3y = 0$ για $x \in [0, 5]$
 $y(0) = y'(0) = -1, y''(0) = 0$

(β) $y''' + 11y'' + 32y' + 28y = xe^{-2x} + 3e^{-2x}$ για $x \in [0, 5]$
 $y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = 0$

(γ) $y''' + 2y'' + 16y' + 32y = 4e^{-2x} + x \cos(4x)$ για $x \in [0, 5]$
 $y(0) = 0, y'(0) = -2, y''(0) = 4$

(δ) $x^3 y''' + 9x^2 y'' + 44xy' + 58y = 0$ για $x \in [0.2, 1.8]$
 $y(1) = 2, y'(1) = 10, y''(1) = -2$

8) Να βρεθεί αναλυτικά και απευθείας η γενική λύση των ΣΣΔΕ ή η λύση των ΠΑΤ που έπονται:

(α) $\left. \begin{aligned} x'(t) &= -x(t) + 6y(t) \\ y'(t) &= 6x(t) + 8y(t) \end{aligned} \right\}$

(β) $\left. \begin{aligned} x'(t) &= 3x(t) - 5y(t) \\ y'(t) &= 2x(t) + 5y(t) \end{aligned} \right\}, x(0) = -1, y(0) = 0$

(γ) $\left. \begin{aligned} x'(t) &= 4x(t) - 4y(t) + 2z(t) \\ y'(t) &= 5x(t) - 4y(t) + 4z(t) \\ z'(t) &= 2x(t) - y(t) + z(t) \end{aligned} \right\}$

(δ) $\left. \begin{aligned} x'(t) &= 4x(t) - 4y(t) + 2z(t) \\ y'(t) &= 5x(t) - 4y(t) + 4z(t) \\ z'(t) &= 2x(t) - y(t) + z(t) \end{aligned} \right\}, x(0) = y(0) = 0, z(0) = 1$

$$(\epsilon) \left. \begin{aligned} x'(t) &= -2x(t) + 4y(t) + \cos(2t) \\ y'(t) &= -5x(t) + 2y(t) + \sin(2t) \end{aligned} \right\}, x(0) = 0, y(0) = -1$$

9) Να λυθεί αριθμητικά το ΠΑΤ

$$\left. \begin{aligned} x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= -x(t) - y(t) \left[\frac{y^2(t)}{3} - 1 \right] \end{aligned} \right\}, x(0) = 0, y(0) = 3, t \in [0, 10]$$

και να γίνει γραφική παράσταση όλων των συναρτήσεων της λύσης στο ίδιο σχήμα. Επιπλέον να γίνει γραφική παράσταση των τροχιών στο πεδίο των φάσεων.

10) Να λυθούν αριθμητικά τα ΠΑΤ και να γίνει γραφική παράσταση όλων των συναρτήσεων της λύσης στο ίδιο σχήμα.

$$(\alpha) \left. \begin{aligned} x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= -\frac{y(t)}{5} - 9 \sin x(t) \end{aligned} \right\}, x(0) = 0.5, y(0) = 0.1, t \in [0, 10]$$

$$(\beta) \left. \begin{aligned} x'(t) &= [2 + x(t)][y(t) - x(t)] \\ y'(t) &= [4 - x(t)][y(t) + x(t)] \end{aligned} \right\}, x(0) = 0.1, y(0) = 0.1, t \in [0, 10]$$

11) Για κάθε μία από τις παρακάτω ΜΔΕ να (i) δειχθεί ότι η u_1 είναι λύση της, (ii) γίνει γραφική παράσταση της λύσης στο αντίστοιχο διάστημα και (iii) γίνει «κινούμενη» γραφική παράσταση για $t \in [0, 2]$

$$(\alpha) u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, u_1(x, t) = 3 \operatorname{sech}^2\left(\frac{x-t}{2}\right), x \in [-2, 2], t \in [0, 2]$$

$$(\beta) u_{tt} = u_{xx}, u_1(x, t) = \sin(\pi x) \cos(\pi t) + 2 \sin(3\pi x) \cos(3\pi t), x \in [0, 1], t \in [0, 2]$$

$$(\gamma) u_{xx} = u_t + \sin x, u_1(x, t) = (2e^{-t} - 1) \sin x + \frac{1}{2} e^{-9t} \sin(3x), x \in [0, 1], t \in [0, \pi]$$

12) Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων:

$$(\alpha) f_1(t) = 2t - 3 \sin t$$

$$(\beta) f_2(t) = (t-3)^2 H(t-3)$$

$$(\gamma) f_3(t) = \cos^2 t$$

$$(\delta) f_4(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2+t, & 1 < t \leq 2 \\ 6-t, & 2 < t \leq 3 \\ 0, & t > 3 \end{cases}$$

13) Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων:

$$(\alpha) F_1(s) = \frac{e^{-3s}}{s^2}$$

$$(\beta) F_2(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)^2}$$

$$(\gamma) F3(s) = \frac{s}{(s+4)(s^2+4)}$$

$$(\delta) F4(s) = \frac{1}{(s-1)^2(s-2)}$$

$$(\epsilon) F5(s) = \frac{1}{s^2(s+1)(s+2)}$$

14) Να λυθούν χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Laplace τα ΠΑΤ:

$$(\alpha) y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

$$(\beta) y^{(4)}(t) - y(t) = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0, y'''(0) = 0$$

$$(\gamma) y''(t) + y(t) = \sin(2t), \quad y(0) = 2, y'(0) = 1$$

$$(\delta) \left. \begin{array}{l} x'(t) + y'(t) = t \\ x''(t) - y(t) = e^{-t} \end{array} \right\}, \quad x(0) = 3, x'(0) = -2, y(0) = 0$$

$$(\epsilon) \left. \begin{array}{l} x'(t) = 3x(t) - y(t) - z(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) - z(t) \\ z'(t) = x(t) - y(t) + z(t) \end{array} \right\}, \quad x(0) = 0, y(0) = 1, z(0) = -1$$

15) Να λυθούν χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Laplace ως προς t , τα κάτωθι προβλήματα:

$$(\alpha) u_{xx} = u_{tt} - \sin(\pi x), \quad u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, u(0, t) = 0, u(1, t) = 0$$

$$(\beta) u_{xx} = u_t, \quad u(x, 0) = 1 + \sin(\pi x), u(0, t) = 1, u(1, t) = 1$$

16) Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier των συναρτήσεων:

$$(\alpha) f1(x) = \begin{cases} x, & |x| < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$(\beta) f2(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$(\gamma) f3(x) = [H(x + \pi) - H(x - \pi)] \sin x$$

17) Να λυθεί χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Fourier ως προς x , το πρόβλημα

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, y > 0,$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

έτσι ώστε ο μετασχηματισμός Fourier της $u(x, y)$ να είναι φραγμένη συνάρτηση του y .