ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΞΑΣΚΗΣΗΣ ΣΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1) Να βρεθεί το βέλος κάμψης συνήθους δοκού μήκους 1 και σταθεράς δυσκαμψίας EI, που υπόκειται σε σταθερή φόρτιση q_0, αν το αριστερό άκρο της δοκού είναι πακτωμένο και το δεξιό αρθρωμένο.

Απ. $\upsilon(x)=\dfrac{q_0}{24EI}x^4-\dfrac{5q_0}{48EI}x^3+\dfrac{q_0}{16EI}x^2$

2) Να βρεθεί το βέλος κάμψης συνήθους δοκού μήκους 1 και σταθεράς δυσκαμψίας EI, που υπόκειται σε σταθερή φόρτιση q_0, αν το αριστερό άκρο της δοκού είναι πακτωμένο και το δεξιό ελεύθερο.

Απ. $\upsilon(x)=\dfrac{q_0}{24EI}x^4-\dfrac{q_0}{6EI}x^3+\dfrac{q_0}{4EI}x^2$

3) Να βρεθεί η συγκέντρωση c(x) ρύπου σε υδατόρρευμα ταχύτητας 1, αν η αρχική του συγκέντρωση είναι 1, θεωρώντας ότι η c(x) ικανοποιεί τη ΣΔΕ $c'(x)+\dfrac{1}{2}c^2(x)=2$. Πόσο είναι η συγκέντρωση του ρύπου σε πολύ μεγάλη απόσταση από την εστία μόλυνσης;

Απ. $c(x)=\dfrac{6e^{2x}-2}{1+3e^{2x}}$, 2

4) Βράχος μάζας m = 14, αφήνεται να πέσει από έναν λόφο. Αν η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη της ταχύτητας με σταθερά αναλογίας 1, να βρεθεί η ταχύτητα του βράχου σε κάθε χρονική στιγμή t. Ποια είναι η ταχύτητα του βράχου μετά από 2 δευτερόλεπτα;

Απ. $v(t)=14g-14ge^{-t/14}$, 18.28 m/sec

5) Η θερμοκρασία περιβάλλοντος μέσου είναι 27°C, ενώ μετά από 2 λεπτά ένα σώμα που βρίσκεται σ' αυτό το μέσο έχει θερμοκρασία 20°C. Μετά από 5 λεπτά η θερμοκρασία του ίδιου σώματος είναι 22°C. Ποια ήταν η αρχική θερμοκρασία του σώματος;

Απ. 18.24°C

6) Να βρεθεί η απομάκρυνση μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος σώματος-ελατηρίου για m = 1, d = 5 και k = 4, στο οποίο δεν ασκείται καμία εξωτερική δύναμη, αν το σώμα έχει αρχική ταχύτητα 5 και βρίσκεται αρχικά στη

θέση ισορροπίας. Ποια είναι η μέγιστη απομάκρυνση του σώματος; Σε ποια χρονική στιγμή συμβαίνει αυτή;

Απ. $u(t)=\frac{5}{3}e^{-t}-\frac{5}{3}e^{-4t}$, 0.79 για t = 0.462

7) Να βρεθεί η απομάκρυνση μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος σώματος-ελατηρίου για m = 1, d = 2 και k = 5/4, στο οποίο δεν ασκείται καμία εξωτερική δύναμη, αν το σώμα έχει αρχική ταχύτητα 3 και βρίσκεται αρχικά στη θέση ισορροπίας. Ποια είναι η μέγιστη απομάκρυνση του σώματος; Σε ποια χρονική στιγμή συμβαίνει αυτή;

Απ. $u(t)=6e^{-t}\sin\frac{t}{2}$, 1.06 για t = 0.927

8) Να βρεθεί η απομάκρυνση μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος σώματος-ελατηρίου για m = 1, d = 0 και k = 16, στο οποίο ασκείται εξωτερική δύναμη της μορφής 2cos(3t), αν το σώμα έχει αρχική ταχύτητα 2 και βρίσκεται αρχικά στη θέση ισορροπίας.

Απ. $u(t)=\frac{2}{7}\cos(3t)-\frac{2}{7}\cos(4t)+\frac{1}{2}\sin(4t)$

9) Να βρεθεί η απομάκρυνση μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος σώματος-ελατηρίου για m = 1, d = 0 και k = 25, στο οποίο ασκείται εξωτερική δύναμη της μορφής sin(5t), αν το σώμα έχει αρχική ταχύτητα 1 και βρίσκεται αρχικά στη θέση ισορροπίας.

Απ. $u(t)=\frac{11}{50}\sin(5t)-\frac{1}{10}t\cos(5t)$

10) Να βρεθεί η απομάκρυνση μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος σώματος-ελατηρίου για m = 1, d = 0 και k = 1, στο οποίο ασκείται εξωτερική δύναμη της μορφής $F_E(t)=\begin{cases} t, & 0\le t\le 1 \\ 2-t, & 1<t\le 2 \\ 0, & t>2 \end{cases}$, αν το σώμα έχει μηδενική αρχική ταχύτητα και βρίσκεται αρχικά στη θέση ισορροπίας.

Απ. $u(t)=\begin{cases} t-\sin t, & 0\le t\le 1 \\ -2\sin 1\cos t+(2\cos 1-1)\sin t+2-t, & 1<t\le 2 \\ (\sin 2-2\sin 1)\cos t+(2\cos 1-1-\cos 2)\sin t, & t>2 \end{cases}$

11) Θεωρούμε το πρόβλημα των ελεύθερων ταλαντώσεων διώροφου κτιρίου μαζών $m_1 = m_2 = 2$ και συντελεστών δυσκαμψίας $k_1 = 6$ και $k_2 = 4$. Να βρεθεί η απομάκρυνση κάθε ορόφου από τη θέση ισορροπίας, αν έχουν μηδενική αρχική ταχύτητα και $u_1(0) = 0$, $u_2(0) = 1$.

Απ. $u_1(t) = \frac{2}{5}\cos t - \frac{2}{5}\cos\sqrt{6}t$, $u_2(t) = \frac{4}{5}\cos t + \frac{1}{5}\cos\sqrt{6}t$

12) Θεωρούμε το πρόβλημα των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων διώροφου κτιρίου μαζών $m_1 = 2$, $m_2 = 1$, συντελεστών δυσκαμψίας $k_1 = 4$, $k_2 = 2$ και εξωτερικών δυνάμεων $F_1(t) = 1$, $F_2(t) = \sin t$. Να βρεθεί η απομάκρυνση κάθε ορόφου από τη θέση ισορροπίας, αν έχουν μηδενική αρχική ταχύτητα και $u_1(0) = 1$, $u_2(0) = 0$.

Απ. $u_1(t) = \frac{1}{4} + \frac{\cos t}{6} - \frac{t\cos t}{6} + \frac{7}{12}\cos 2t + \frac{\sin t}{18} + \frac{\sin 2t}{18}$,

$u_2(t) = \frac{1}{4} + \frac{\cos t}{3} - \frac{t\cos t}{3} - \frac{7}{12}\cos 2t + \frac{4\sin t}{9} - \frac{\sin 2t}{18}$

13) Να βρεθεί η θερμοκρασία $u(x,t)$ κατά μήκος ράβδου μήκους 2, σταθεράς $α=2$, αν η θερμοκρασία στα άκρα της ράβδου είναι μηδέν, ενώ η αρχική θερμοκρασία είναι $2\sin\frac{\pi x}{2} - \sin\frac{3\pi x}{2}$

Απ. $u(x,t) = 2e^{-\pi^2 t}\sin\frac{\pi x}{2} - e^{-9\pi^2 t}\sin\frac{3\pi x}{2}$

14) Να βρεθεί η θερμοκρασία $u(x,t)$ κατά μήκος ράβδου μήκους 40, σταθεράς $α=1/2$, αν και τα δύο άκρα της ράβδου είναι μονωμένα, ενώ η αρχική θερμοκρασία είναι $\frac{x}{30}(60-x)$

Απ. $u(x,t) = \frac{200}{9} - \frac{160}{3\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+\cos n\pi}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{40}e^{-n^2\pi^2 t/6400}$

15) Να βρεθεί η μετατόπιση $u(x,t)$ ράβδου μήκους 4, σταθεράς $c=1$, αν το αριστερό άκρο της είναι πακτωμένο, ενώ το δεξιό ελεύθερο, η αρχική ταχύτητα είναι μηδέν, ενώ η αρχική μετατόπιση περιγράφεται από τη σχέση $f(x) = \begin{cases} 1, & 1 < x < 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Απ. $u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{8}\cos\frac{(2n+1)\pi t}{8}$